

А. В. Фарков

Математические
кружки
в школе

5–8 классы

3-е издание

Москва
Айрис-пресс 
2007

УДК [372.016:51](072)

ББК 74.262.21

Ф24

Все права защищены.

Никакая часть данной книги не может переиздаваться или распространяться в любой форме и любыми средствами, электронными или механическими, включая фотокопирование, звукозапись, любые запоминающие устройства и системы поиска информации, без письменного разрешения правообладателя.

Серийное оформление *O. E. Бауриной, С. С. Коломеец*

Фарков, А. В.

Ф24 Математические кружки в школе. 5–8 классы / А. В. Фарков. — 3-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2007. — 144 с. — (Школьные олимпиады).

ISBN 978-5-8112-2568-2

Пособие посвящено методике подготовки и проведения занятий школьного математического кружка. Разобраны вопросы организации и планирования, приведены возможные темы и формы проведения кружковых занятий.

Предложены примерные разработки 17 кружковых занятий с учащимися 5–8 классов. Приводятся тексты более 200 задач, большая часть которых решена.

В качестве приложения даны варианты городских олимпиад в 5–8 классах.

Книга адресована учителям математики, будет полезна студентам педвузов, руководителям межшкольных кружков, факультативов, а также учащимся 5–8 классов.

**ББК 74.262.21
УДК [372.016:51](072)**

ISBN 978-5-8112-2568-2

© Айрис-пресс, 2005

Предисловие

В конце XX века многие традиционные формы работы со способными учащимися по математике: факультативы, кружки, олимпиады, школы при вузах и т. п. во многих регионах России деградировали. Популярность математики стала резко снижаться. Проведенное в 1995 г. международное тестирование учащихся по математике показало, что данные у нас печальные. В то время как в конце девяностых годов мы входили в пятерку лучших стран мира. Очень стремительный рывок сделали в последние годы страны Азии, в первую очередь Китай. Свои высокие позиции в олимпиадном движении мы пока удерживаем благодаря некоторым регионам России: Московской, Кировской, Вологодской, Саратовской, Челябинской областям; Краснодарскому и Алтайскому краю, Санкт-Петербургу и некоторым другим регионам. В этих регионах высокая математическая подготовка обеспечивается благодаря сохранению традиций внеклассной и внешкольной работы по математике.

Предлагаемое пособие предназначено для проведения как внеклассной, так и внешкольной работы по математике с наиболее способными учащимися 6–7 классов. Состоит оно из краткого описания методики проведения кружковых занятий и разработок кружковых занятий. Каждое из 17 занятий рассчитано на 80–90 минут. Учитель может рассматривать не все из предложенных автором тем. Хотя в целом пособие ориентировано на учащихся 6–7 классов, но некоторые из предлагаемых разработок можно применять и для учащихся 5 и 8 классов. Разработки занятий построены таким образом, что акцент в них делается на ознакомление с новыми методами решения задач, доступных как ученикам шестого, так и седьмого классов. При этом имеются подробные решения всех задач или ответы. Большинство решений предлагаемых задач приведено в конце занятия. Сделано это с той целью, чтобы данной книгой могли воспользоваться и учащиеся для самостоятельного изучения некоторых тем.

В качестве основных трех форм проведения кружковых занятий для учащихся 6–7 классов автором предложены комбинированное тематическое занятие, повторение, соревнование. При этом соревнования проводятся через каждые 4–6 тематических занятий. Для домашнего задания, как правило, предлагается по 3 задачи. Из них первая — доступна для всех учащихся, вторая — более трудная, а третья предложена на повторение или на материал, который будет рассматриваться на следующем занятии.

Все приведенные занятия проведены автором для учащихся 5–8 классов школ г. Коряжмы Архангельской области в 2004–2005 годах.

В приложении приводятся задачи городских олимпиад по математике в Архангельской области в 2004–2005 годах.

Методика подготовки и проведения математических кружков

Математический кружок — это самодеятельное объединение учащихся под руководством педагога, в рамках которого проводятся систематические занятия с учащимися во внеурочное время.

Математические кружки по математике являются основной формой внеклассной работы с учащимися в 5–6 классах, с 7 класса их, как правило, заменяют факультативы, но кружки также могут проводиться.

Основными целями проведения кружковых занятий являются:

- привитие интереса учащимся к математике;
- углубление и расширение знаний учащихся по математике;
- развитие математического кругозора, мышления, исследовательских умений учащихся;
- воспитание настойчивости, инициативы.

Частично данные цели реализуются и на уроке, но окончательная и полная реализация их переносится на внеклассные занятия, в первую очередь на кружки.

Организация работы кружка

В основе кружковой работы лежит принцип добровольности. Кружки могут быть организованы как для хорошо успевающих учащихся, так и для всех желающих. Также могут быть кружки с секциями (если много желающих заниматься математикой вне уроков); кружки с уровнями: для более сильных учащихся и для остальных учащихся. В кружок могут объединяться как учащиеся одного класса, так и параллельных классов; также кружок может быть организован, например, для учащихся 2–3 классов, 5–6 или 7–9 классов. В таком случае учителю будет труднее продумать содержание занятий.

На одном из первых уроков математики в классе (в сентябре) надо рассказать учащимся о том, что для желающих будет организован кружок, чем будут заниматься учащиеся на кружке, что нового и интересного они узнают, в чём польза кружковых занятий, как они будут проходить, выявить желающих. Кружок может проводиться при любом числе желающих. Лучше, если учащихся в нем не менее 5 человек, но и не более 15.

Начинать работу кружка лучше с середины сентября или с 1 октября, а завершать в конце апреля (начале мая). В течение года кружковые занятия должны увязываться с другими формами внеклассной работы по математике, в подготовке и проведении которых активное участие должны принимать члены кружка. В каникулы предметные кружки проводить не рекомендуется.

На первом занятии кружка надо выработать своеобразный Устав (права и обязанности членов кружка). Также кружок может иметь свое название, эмблему, девиз (если того пожелают учащиеся).

Занятия кружка обычно проводятся 1 раз в 1–2 недели, продолжительность занятия кружка для учащихся 5 кл. — 30–45 мин, для учащихся 6–7 классов можно 60–90 мин, а для учащихся 8–10 классов — 90 мин.

Планирование работы кружка

План работы кружка лучше составлять на год, хотя начинающему учителю математики лучше план составлять на четверть или полугодие. Форма плана может быть любой. Рассмотрим возможный вариант.

Номер занятия кружка	12
Дата проведения	27.02
Содержание занятия	Решение старинных задач
Учащиеся, ответственные за подготовку	Иванов В.
Срок для подготовки	До 25.02
Примечания	

В «примечаниях» указываются плюсы и минусы проведенного занятия; то есть этот столбик поможет учителю скорректировать занятие кружка в дальнейшем.

Для удобства занятия кружка целесообразно увязывать с планом всей внеклассной работы по математике (если такой план имеется в школе). Примерная форма такой увязки может быть следующая.

Месяц	Неделя	Тематика кружкового занятия (7 класс)	Другие формы вне-классной работы
Ноябрь	1	Как возникла алгебра	Математическая стенгазета
	2		
	3	Графы	Математическая олимпиада (первый тур)
	4		

Для планирования и проведения кружковых занятий учитель математики составляет программу.

Основными требованиями к программе являются:

- связь содержания программы с изучением программного материала;
- использование занимательности;
- использование исторического материала;
- решение нестандартных, олимпиадных задач;
- учет желаний учащихся;
- особенности школы, региона;
- наличие необходимой литературы у учителя.

Пишется программа по форме, принятой в данной школе. Это может быть программа, похожая на программу факультатива. В этом случае программа состоит из таких разделов: пояснительная записка, учебно-тематический план, содержание занятий, основные знания и умения, литература. Программа может быть и проще, типа вышерассмотренного плана.

Приведем несколько возможных тем кружковых занятий для учащихся разных классов.

1. Задачи, решаемые с конца (5–6 кл.).
2. Числа-великаны и числа-малютки (5–6 кл.)
3. Запись цифр и чисел у других народов (5–6 кл.).
4. Занимательные задачи на проценты (6 кл.)
5. Математические ребусы (5–6 кл.)
6. Геометрические задачи со спичками (5–6 кл.)
7. Задачи на разрезания и перекраивания фигур (5–7 кл.)
8. Простейшие графы (6–7 кл.)
9. Упражнения на быстрый счет (5–8 кл.)
10. Занимательные задачи на построения (7–8 кл.)
11. Геометрические построения с различными чертежными инструментами (7–8 кл.)
12. Недесятичные системы счисления (5–7 кл.)
13. Взвешивания (5–7 кл.)
14. Логические задачи (5–8 кл.)
15. Неопределенные уравнения (8–10 кл.)
16. Полуправильные многоугольники (9 кл.)
17. Теорема Пифагора (8 кл.)
18. Геометрические задачи на местности (8–9 кл.)
19. Как на практике измеряют длины и углы? (7–8 кл.)
20. Аналогии в математике (8–9 кл.)
21. Индукция в математике (8–9 кл.)
22. Математическая индукция (9–10 кл.)
23. Принцип Дирихле (6–9 кл.)
24. Равновеликие и равносоставленные фигуры (8–9 кл.)
25. Теорема Чевы (9 кл.)
26. Трансцендентные уравнения (10 кл.)
27. Решение несовместных систем (10 кл.)
28. Периодические дроби (9 кл.)
29. Цепные дроби (9 кл.)
30. Занимательные комбинаторные задачи (7–9 кл.)
31. Что такое теория игр? (10 кл.)
32. Полуправильные многогранники (10 кл.)
33. Решение планиметрических задач с помощью тригонометрии (10 кл.)
34. Геометрия на сфере (10 кл.)
35. Неевклидовы геометрии (9–10 кл.)
36. Комплексные числа (8–10 кл.)

При этом на некоторые темы можно выделить по нескольку занятий кружка.

Проведение занятий кружка

Очень многое в организации работы кружка зависит от первого занятия. Возможна такая структура первого занятия:

1. Руководитель кружка (учитель математики) освещает перспективы кружка, то есть что будет рассматриваться на кружке, чем учащиеся будут заниматься. Необходимо указать и основные требования, которым должны подчиняться члены кружка.

2. Решение задач по определенной теме (не самой трудной, но и не развлекательного характера). Например, для 5–7 классов в качестве таких тем подойдут:

- Решение сюжетных задач с конца;
 - Задачи на переливания;
 - Задачи на разрезания и т. п.
3. Решение 1–2 занимательных задач.
4. Домашнее задание.

Решением же других вопросов (выбор старосты (командира, лидера) кружка, утверждение плана работы и др.) лучше заняться на 3 или 4 занятия кружка, когда уже будет ясен состав кружка.

При проведении занятий кружка можно использовать как имеющиеся разработки других авторов, так и подбирать содержание занятия из имеющейся в наличии литературы. Неполный список такой литературы имеется в конце данной книги.

На сегодня имеются следующие разработки кружковых занятий.

1. *Руденко В. Н., Бахурин Г. А., Захарова Г. А. Занятия математического кружка в 5-м классе.* М.: Издательский дом «Искатель», 1999.
2. *Шейнина О. С., Соловьев Г. М. Математика. Занятия школьного кружка. 5–6 кл.* М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2003. С. 208.
3. *Сливак А. В. Математический кружок. 6–7 классы.* М.: Посев, 2003. С. 128.

Много интересного материала имеется в дополнительных главах к школьным учебникам, разнообразным пособиям по внеклассной работе, а также в журнале «Математика в школе».

Возможны два подхода к организации работы кружка.

Первый подход применим в том случае, когда кружки состоят из секций. Секции могут быть следующие:

- учебно-исследовательская (учащиеся занимаются исследованиями, готовят себя к написанию рефератов);
- конструкторская (изготовление наглядных пособий, моделей, приборов для кабинета математики);
- оформительская (подготовка и выпуск классных и школьных математических газет, различного оформления по подготовке к олимпиадам, вечерам);
- любителей решения задач (решение задач, проведение конкурсов, олимпиад и т. п.).

Этот подход может быть реализован в крупной школе, когда на параллели создаются ряд секций и каждой секцией будет руководить учитель математики. В данном случае и работу секций можно планировать по отдельности, как отдельные кружки. Но иногда полезно проводить и заседания нескольких секций одновременно (например, при проведении общешкольных мероприятий по математике).

Второй подход применим при малом числе учащихся. В этом случае секцию невозможно организовать, а интересы учащихся все же разнообразны. Поэтому надо проводить кружковые занятия в различных формах.

Рассмотрим основные формы проведения кружковых занятий при данном подходе.

I. Комбинированное тематическое занятие.

Примерная структура данного занятия может быть следующей:

1. Выступление учителя (или доклад кружковца) по избранному вопросу на 5–15 минут.
2. Основная часть — самостоятельное решение задач по определенной теме участниками кружка, причем в числе этих задач должны быть задачи и повышенной трудности. Число задач: 3–5 (зависит от темы и продолжительности занятия). После решения первой из задач всеми или большинством учащихся один из учащихся производит ее разбор для всех членов кружка. Учитель по ходу решения задач формулирует выводы, делает обобщения.
3. Решение задач занимательного характера, задач на смекалку, разбор математических софизмов, фокусов, проведение математических игр и развлечений.
4. Ответы на вопросы учащихся, домашнее задание.

При этом некоторые наиболее трудные задачи, предложенные для самостоятельного решения, а также домашнего, иногда прорешивает и сам учитель. Выступление учителя, основная часть и домашнее задание в тематическом занятии занимают 60–80% времени.

Остальное время распределяется на решение задач занимательного характера, устных упражнений, игры, фокусы и т. п. Также в это время можно:

- заслушать небольшие сообщения (рассказ) учителя или ученика по некоторому вопросу (биографии видных математиков, интересные факты из истории математики (например, изобретение логарифмов), интересные приемы счета, сообщение о новой интересной книге по математике для учащихся, краткое изложение некоторого математического вопроса (например «циклоида»);
- решение задач, заданных домой.

Время и место этой части занятия определяет учитель.

II. Конкурсы по решению математических задач, олимпиады, игры.

Такого рода занятия лучше проводить систематически, через 4–6 тематических занятий, это будет своеобразный итог работы за 1–2 месяца. Но обязательно и в конце учебного года.

При такой форме организации кружкового занятия все оно посвящается какому-то соревнованию, конкурсу.

В качестве примера укажем такие соревнования, как:

- нестандартная олимпиада (драка, хоккей и т. п.),
- математическая карусель,
- математический бой,
- устная олимпиада,
- математическая регата и т. д.

Много разработок такого рода опубликовано в газете «Математика», журнале «Математика в школе», а также пособии: Предметные недели в школе. Математика. Волгоград: Учитель, 2002. Многие из разработок игр, конкурсов проводятся на кружковых занятиях. Хотя их можно использовать и при проведении других форм внеклассной работы. Иногда традиционные олимпиады (классная и школьная) для учащихся 5–8 проводятся весной (март–апрель) как итог работы кружка. Хотя для старших классов можно весной провести и зачет. У старшеклассников традиционные олимпиады (первый тур) проходят, как правило, в октябре–ноябре.

III. Заслушивание рефератов учащихся (применяется, обычно в 7–10 классах).

IV. Разбор заданий городской (районной) олимпиады; анализ ошибок, сделанных кружковцами. (Применяется в случае, если этого разбора не было после проведения олимпиады.)

V. Решение задач на разные темы (чаще при подготовке к олимпиадам, конкурсам, на повторение).

Также могут быть и другие формы, менее получившие распространение в практике, например:

- *Разбор задач, данных домой.* Так получилось, что дома ученики испытали затруднения все или почти все. В этом случае все занятие свящуется разбору домашних задач и решению аналогичных задач.
- *Изготовление моделей для уроков математики* (например, многоугольников, многогранников).
- *Доклады, беседы по математике* (чаще в неделю математики, к юбилеям известных математиков).
- *Сообщение члена кружка о результате, который им получен, о задаче, которую он сам придумал и решил.* (Такие занятия проводятся, естественно, вне плана.)
- *Чтение отрывков из художественных произведений, связанных с математикой.* Например, из книги И. Ф. Шарыгина «Уроки дедушки Гаврилы, или Развивающие каникулы».
- *Просмотр видеофильмов, кинофильмов, диафильмов по математике* (если на уроке не было времени).

Также могут быть и другие формы организации кружкового занятия.

Подготовка кружкового занятия

Для подготовки кружкового занятия учителю необходимо провести следующую работу.

1. Изучить все вопросы, намеченные на данное занятие.

2. Решить все подобранные задачи вновь.
3. Выяснить, что в предложенном материале является наиболее интересным и наиболее трудным.
4. Расположить задачи для решения на занятии кружка по сложности (или трудности). При этом задач с большими выкладками на занятие не брать. Акцент сделать на задачах с интересной идеей.
5. Формулировки задач лучше отпечатать на отдельных листочках для каждого ученика. Иногда можно предложить учащимся переформулировать текст задач, придумать самим новую фабулу и т. д.
6. В случае затруднений у учащихся в решении задачи, надо предусмотреть более простую задачу (подготовительную).
7. Для реализации дифференцированного подхода применять и задачи «двойники» (т. е. задачи с одной идеей, но разного уровня трудности).
8. Применять и задачи с ошибками; задачи, содержащие материалы сегодняшнего дня.
9. Использовать предварительные задачи к будущим занятиям (как на самом занятии, так и дома).
10. Иметь всегда в запасе интересный занимательный материал.
11. В качестве домашнего задания первое время предлагать не более 2–3 задач. Если ученики будут их активно решать, число задач можно и увеличить, в противном случае — оставить 2–3 и причем задавать решить не всегда, а некоторые из задач — предлагать и по желанию.

Желательно, чтобы все кружковцы приняли участие в подготовке занятий. Наиболее подходящим самостоятельным делом для них является подготовка доклада.

Рассмотрим основные методические рекомендации по подготовке доклада учащимся.

1. Перед тем как предложить подготовку доклада ученику, учитель сам должен показать образец выступления с докладом учащимся и продумать темы докладов.

Примерные темы докладов для учащихся 5–6 классов:

- Числа-великаны и числа-малютки.
- Как люди научились считать.
- История возникновения обыкновенных и десятичных дробей.
- История календаря и т. п.

Примерные темы докладов для учащихся 7–8 классов:

- Геометрия в Древнем Египте.
- Теорема Пифагора и пифагоровы числа.
- От Евклида до Лобачевского.
- Архимед и т. п.
- Математические софизмы.

Примерные темы докладов для учащихся 9–10 классов:

- Что такое топология?
- Выдающиеся отечественные математики.
- Математические ошибки, допущенные учащимися при поступлении в вузы.
- Значение математики для науки и практики и др.

2. Начинать подготовку докладов учащимися надо с небольших выступлений, например:

- изложение решения некоторых задач;
- сообщение условия некоторых задач;
- подготовка краткой справки об ученом-математике, о термине;
- показ математического фокуса, софизма, правил счета.

И только после того, как данное выступление было грамотно и интересно подготовлено учащимся, ему можно поручить более серьезное задание: подготовку сообщения или доклада.

3. Давать задание необходимо за месяц до проведения занятия кружка.

4. Порекомендовать учащемуся литературу; дать указания по плану и узловым моментам выступления. (Иногда перед подготовкой доклада предложить задачу по теме доклада, а саму литературу дать через неделю.)

5. Определить время для выступления. Пусть ученик напишет доклад, прослушает свое сообщение (для этой цели можно порекомендовать записать свое сообщение на магнитофон).

6. Через 2 недели проверить, что сделано, оказать помощь.

7. За неделю до выступления просмотреть конспект, послушать доклад, проверить наглядность.

8. После окончания доклада учителю необходимо отметить его достоинства и недостатки.

Основные требования к докладу:

- текст доклада ученику лучше излагать своими словами;
- все новые термины должны быть разъяснены;
- в начале доклада объяснить значение темы, чем она может быть интересна для присутствующих;
- выделить основные понятия, основную идею в докладе;
- продолжительность доклада: 7–10 мин (5–6 кл.); 15–20 мин (7–10 кл.);
- выступать с докладом могут и студенты, родители учащихся;
- применять наглядность.

Для того, чтобы все учащиеся класса (параллели классов, школы) знали о том, чем занимаются кружковцы, работа кружка должна освещаться в математической газете, в которую желательно поместить план работы кружка, задачи для проведения. Также для достижения целей, поставленных учителем перед кружковцами, необходимо, чтобы:

- учащиеся на занятиях вели аккуратные записи;
- в журнале занятий кружка фиксировался рассматриваемый материал и успехи учащихся;
- материалы, рассматриваемые на занятиях кружка, были основой проведения различных математических соревнований;
- систематически повторять материал, в том числе рассмотренный и в прошлые годы;
- на уроках учитель при изучении программного материала всячески поощрял знания, умения и идеи, которые ученики получили на занятиях кружка.

Итоговое занятие кружка рекомендуется начать с беседы учителя о том, как поработал кружок в течение учебного года (что рассмотрели, чему

научились, какие навыки приобрели, что изучили нового). Завершить работу кружка, как уже отмечалось, олимпиадой (можно и нестандартной) по задачам, рассматриваемым в течение учебного года, или зачетом. После этого сказать о перспективах кружка в будущем году, предложить литературу для чтения летом.

Занятие 1

Текстовые задачи-1 (задачи, решаемые с конца)

Организационные вопросы

Объяснить учащимся, как будет проходить работа кружка, каковы права, обязанности учащихся. Как будет организована самостоятельная работа учащихся. Организация домашней работы. Подготовка докладов.

Работа по теме занятия

Учитель предлагает учащимся для самостоятельного решения задачи № 1–3. После разбора решений задач № 1 и № 2 можно ввести понятие текстовой задачи, сюжетной задачи и перейти к обсуждению задачи № 3, которая может вызвать проблемы. Показать ее правильное решение и образцы записи: по действиям и с помощью таблицы.

1. Отцу и сыну вместе 65 лет. Сын родился, когда отцу было 25 лет. Какого возраста отец и сын?

Решение. Так как сын родился тогда, когда отцу было 25 лет, то разница в их возрасте будет 25 лет. Тогда $65 - 25 = 40$ (лет) — будет удвоенный возраст сына, а значит, сыну будет 20 лет, а отцу 45.

2. Одну овцу лев съел за 2 дня, волк за 3 дня, собака за 6 дней. За сколько дней они вместе съедят овцу?

Решение. 1) Так как лев съел овцу за 2 дня, то за 1 день он съел $\frac{1}{2}$ овцы.

2) Так как волк съел овцу за 3 дня, то за 1 день он съел $\frac{1}{3}$ овцы.

3) Так как собака съела овцу за 6 дней, то за 1 день она съела $\frac{1}{6}$ овцы.

4) Вместе лев, волк и собака за 1 день съедят $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, то есть 1 овцу.

3. Трое мальчиков имеют по некоторому количеству яблок. Первый мальчик дает другим столько яблок, сколько каждый из них имеет. Затем второй мальчик дает двум другим столько яблок, сколько каждый из них теперь имеет; в свою очередь и третий дает каждому из двух других столько, сколько есть у каждого в этот момент. После этого у каждого из мальчиков оказывается по 8 яблок. Сколько яблок было у каждого мальчика вначале?

Решение. Решаем задачу с конца с помощью таблицы.

Номер мальчика	1	2	3
Число яблок в конце	8	8	8
Число яблок до передачи их третьим мальчиком	$8 : 2 = 4$	$8 : 2 = 4$	$8 + 4 + 4 = 16$
Число яблок до передачи их вторым мальчиком	$4 : 2 = 2$	$4 + 2 + 8 = 14$	$16 : 2 = 8$
Число яблок первоначально	$2 + 4 + 7 = 13$	$14 : 2 = 7$	$8 : 2 = 4$

Таким образом, первоначально яблок у первого, второго и третьего мальчиков было соответственно 13, 7 и 4.

Устные упражнения

Одно из необходимых умений, которое важно для правильного решения текстовых задач, — это **внимательное чтение условия задачи**. Решим несколько задач.

4. Вы — шофер автобуса. В автобусе первоначально было 23 пассажира. На первой остановке вышло 3 женщины и зашло 5 мужчин. На второй остановке зашло 4 мужчины и вышло 7 женщин. Сколько лет шоферу?

5. Какое слово из 11 букв все отличники пишут неправильно?

6. Продавая в магазине попугая, продавец пообещал, что попугай будет повторять каждое услышанное им слово. Покупатель очень обрадовался, но, придя домой, обнаружил, что попугай «нем как рыба». Тем не менее, продавец не лгал. Как это могло быть?

7. Английский офицер, вернувшийся из Китая, заснул в церкви во время службы. Ему приснилось, что к нему приближается палач, чтобы отрубить ему голову, и в тот самый момент, когда сабля опускалась на шею несчастного, его жена, желая разбудить заснувшего, слегка дотронулась до его шеи веером. Потрясение было столь велико, что офицер тут же умер. В этой истории, рассказанной вдовой офицера, что-то неладно. Что же именно?

8. Петя решил купить Маше мороженое, но для его покупки ему не хватало 3 рублей, а Маше всего лишь 1 рубль. Тогда они решили сложить свои деньги, но опять не хватило 1 рубля на покупку даже одного мороженого. Сколько стоила порция мороженого?

Самостоятельная работа

9. Я задумал число, умножил его на два, прибавил три и получил 17. Какое число я задумал?

10. Однажды черт предложил бездельнику заработать. «Как только ты перейдешь через этот мост, — сказал он, — твои

деньги удвоются. Можешь переходить по нему сколько хочешь раз, но после каждого перехода отдавай мне за это 24 копейки». Бездельник согласился и ... после третьего перехода остался без гроша. Сколько денег у него было сначала?

11. Группа туристов отправилась в поход. В первый день они прошли $\frac{1}{3}$ пути, во второй — $\frac{1}{3}$ остатка, в третий — $\frac{1}{3}$ нового остатка. В результате им осталось пройти 32 км. Сколько километров был маршрут туристов?

Домашнее задание

12. Играя в ruletku, Виктор удвоил количество своих денег, потом потерял 10 рублей, затем он утроил количество своих денег и потерял 12 рублей. После этого у него осталось 60 рублей. С какой суммой он начинал игру?

13. Над озерами летели гуси. На каждом озере садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все сели на семи озерах. Сколько было гусей?

14. Решите ребус:

$$\begin{array}{r} \text{КОКА} \\ + \text{КОЛА} \\ \hline \text{ВОДА} \end{array}$$

Решения и ответы

4. Столько, сколько вам лет.

5. Слово «неправильно».

6. Попугай или глухой, или покупатель не сказал ни одного слова.

7. Если офицер умер во время сна, то как его жена узнала, что ему снилось?

8. Мороженое стоило 3 рубля, а у Пети не было ни рубля.

9. Решаем задачу с конца:

- 1) $17 - 3 = 14$ — число до прибавления 3,
- 2) $14 : 2 = 7$ — искомое число.

10. Задача решается с конца. Так как после третьего перехода у бездельника денег не осталось, то после перехода моста в третий раз у него было 24 копейки, а до перехода третьего моста — 12 копеек. Тогда после перехода второго моста у бездельника было $12 + 24 = 36$ (копеек), а до перехода второго моста — $36 : 2 = 18$ (копеек). Рассуждая аналогично, получим, что после перехода первого моста у бездельника стало $18 + 24 = 42$ (копейки), а перед переходом первого моста — $42 : 2 = 21$ (копейка). Таким образом, у бездельника сначала была 21 копейка.

11. Решаем задачу с конца. Так как осталось 32 км, а в третий день туристы прошли остаток, то 32 км будут составлять последнего $\frac{2}{3}$ остатка, тогда сам последний остаток будет равен $32 : \frac{2}{3} = 48$ (км). Эти 48 км будут составлять $\frac{2}{3}$ длины маршрута, оставшегося пройти после первого дня. Тогда весь маршрут, который осталось пройти, будет равен $48 : \frac{2}{3} = 72$ (км). Эти 72 км составляют вновь $\frac{2}{3}$, но уже всего маршрута туристов, а значит, весь маршрут будет равен $72 : \frac{2}{3} = 108$ (км).

12. Задача решается с помощью уравнения или «с конца».

Ответ: Виктор имел к началу игры 17 рублей.

13. Так как на последнем озере сели оставшиеся гуси и больше не осталось, то там сел 1 гусь. Если бы село 2, то 1 гусь бы остался еще (можно решить уравнением). Тогда к шестому озеру подлетало $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 3$ (гуся). А к пятому $\left(3 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 7$, к четвертому $\left(7 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 15$, к третьему — $\left(15 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 31$, ко второму $\left(31 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 63$, тогда к первому подлетело $\left(63 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 127$ (гусей).

14. $3930 + 3980 = 7910$ (начать с $A = 0$, $K < 5$, так как $O+O = O$ и $O \neq A$, то $O = 9$. Рассматривая $K = 1, 2, 3, 4$, получим искомое решение).

Методический комментарий. В домашней работе может вызвать большие трудности решение задачи № 13. Поэтому для ее разбора на следующем занятии обязательно сделать чертеж. Особое внимание обратить на то, почему на последнем озере сел 1 гусь. Что было бы, если бы село 2 гуся? Разобрать подробно, сколько подлетело к шестому озеру, сколько село, сколько осталось. А после этого уже заметить закономерность и объяснить решение всей задачи. Показать и другой вариант решения (с помощью уравнения).

Занятие 2

Математические ребусы

Работа по теме занятия

Математическими ребусами называют задания на восстановление записей вычислений. Условие математического ребуса содержит либо целиком зашифрованную запись (цифры заменены буквами), либо только часть записи (стертые цифры заменены точками или звездочками).

Записи восстанавливаются на основании логических рассуждений. При этом нельзя ограничиваться отысканием только одного решения. Испытание нужно доводить до конца, чтобы убедиться, что нет других решений, или найти все решения. Есть математические ребусы, имеющие несколько решений.

После вводного слова учителя предложить учащимся подумать над решением задач 1–2. Затем вместе с ними обсудить решения данных задач, обратив внимание на основные приемы решения математических ребусов.

1. Восстановите поврежденные записи арифметических действий:

$$\begin{array}{r} \text{a) } \begin{array}{r} ** \\ + * \\ \hline **8 \end{array} \quad \text{б) } \begin{array}{r} ** \\ + ** \\ \hline *98 \end{array} \end{array}$$

Рассматривая данную разновидность ребусов, обратить внимание, что сумма двузначного и однозначного чисел является трехзначным числом, поэтому первая цифра в сумме будет 1. А число $1 * 8$ может получиться только в сумме наибольшего двузначного числа и наибольшего однозначного. Аналогично во втором случае, сумма равна 198. А так как слагаемые двузначные числа и самое большое двузначное число будет 99, то решением будет $99 + 99 = 198$.

2. Решите ребусы:

a) $\begin{array}{r} \text{ДРАМА} \\ + \text{ДРАМА} \\ \hline \text{ТЕАТР} \end{array}$ б) $\begin{array}{r} \text{КОШКА} \\ + \text{КОШКА} \\ \hline \text{СОБАКА} \end{array}$ в) ЧАЙ:АЙ = 5

Решение. а) Очевидно, Д < 4. В разряде тысяч имеем А + А = А, значит, А = 0 (без перехода) или А = 9 (с переходом). Значение А = 0 не подходит, так как в разряде единиц А + А = Р (получаем А = Р = 0). Значит, А = 9, Р = 8, Е = 7. Тогда 2М + 1 = 10 + Т, Т < 9, значит, М = 5 или 6 (так как получается переход), а значения 7 и 8 уже заняты буквами Е и Р. При М = 6 получается решение:

$$18969 + 18969 = 37938.$$

б) Так как КА + КА + КА оканчивается на КА, то КА = 50, а значит, К = 5, А = 0. Так как Ш + Ш + Ш + 1 оканчивается на 0, то Ш = 3. Так как сумма трех чисел, начинающихся на 5, может начинаться лишь с 1, то С = 1. Рассматривая варианты для О, получаем, что О = 6 или О = 7, а значит, Б = 9 или Б = 2. Итак, получаем два варианта решения:

$$\begin{array}{r} 56350 & 57350 \\ + 56350 & + 57350 \\ \hline 169050 & 172050 \end{array}$$

в) Этот пример является наиболее трудным. Для его решения лучше перейти от деления к умножению: 5 · АЙ = ЧАЙ, значит, Ч · 100 + АЙ = АЙ · 5 и тогда Ч · 25 = АЙ. Так как АЙ — двузначное, то Ч = 1, 2, 3. Для каждого Ч находим решение: 125, 250, 375. Итак, получаем три решения: 125 : 25 = 5; 250 : 50 = 5; 375 : 75 = 5.

Устные упражнения

3. *Дайте добрый совет!* Президент страны решил уволить своего премьер-министра, но не хотел его обижать, да и особого

повода не было. Наконец он придумал вот что. Когда премьер-министр пришел к президенту, тот сказал ему: «Я положил в портфель 2 листа бумаги. На одном написано: „Останьтесь“, на другом — „Уходите“. Листок, который Вы, не глядя, вынете из портфеля, решит Вашу судьбу». Хитрый премьер-министр догадался, что на обоих листах написано «Уходите». Как ему избежать отставки?

4. Два разбойника делят добычу. Каждый уверен, что мог бы поделить добычу на 2 равные части, но второй ему не доверяет. Как разбойникам разделить добычу, чтобы оба остались довольны?

5. Можно ли в тетрадном листе прорезать дырку так, чтобы сквозь нее мог пролезть любой из вас?

6. Путешественник попал в плен к кровожадным дикарям. По законам племени, всякого иностранца спрашивают о цели приезда. Если он при этом скажет правду — его съедят, а если солжет — утопят в море. Как путешественнику оставаться в живых?

Самостоятельная работа

Решите ребусы:

7.

$$\begin{array}{r} & 6 * \\ \times & *** \\ \hline & ** \\ + & ** \\ \hline ***6 \end{array}$$

8.

$$\begin{array}{r} A \\ + BB \\ \hline A \\ \hline CCC \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9. \text{ СПОРТ} \\ + \text{ СПОРТ} \\ \hline \text{КРОСС} \end{array}$$

Домашнее задание

10. Решите ребус:

$$\begin{array}{r} 2 * \\ \times * 2 \\ \hline * 8 \\ + 7 * \\ \hline 7 * 8 \end{array}$$

11. Решите ребус, если известно, что наибольшая цифра в числе СИЛЕН равна 5:

$$\begin{array}{r} \text{Р Е Ш И} \\ + \text{Е С Л И} \\ \hline \text{С И Л Е Н} \end{array}$$

12. Составьте свой ребус с известными словами вашего региона.

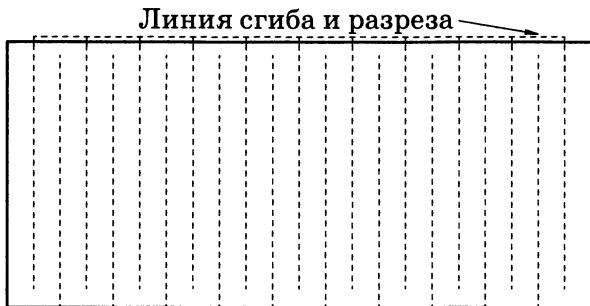
Решения и ответы

3. Он может достать одну из бумажек и уничтожить ее. Затем достать вторую и сказать: «Раз на этой бумажке написано: „Уходите“, то на первой было „Останьтесь“».

4. Пусть один из разбойников разделит добычу на 2, по *его* мнению, равные части, а второй выберет ту, которая, по *его* мнению, больше.

5. Да, смотрите рис. 1. Листок сгибается пополам и проводятся разрезы, как на рисунке.

Проведенные отрезки означают разрезы.



Pис. 1

6. Путешественник может сказать: «Я приехал, чтобы вы меня утопили». Значит, если его захотят утопить, то выходит, он сказал правду, а за правду съедают. Но если его захотят съесть, то получается, что он солгал, а за ложь — топят. Остается вопрос — будут ли последовательны дикари своей логике.

7. $66 \cdot 111 = 7326$.

8. $6, A = 6, B = 9, C = 1.$

$$\begin{array}{r} +99 \\ \hline 6 \\ \hline 111 \end{array}$$

9. $43972, C = 4; \Pi = 3; T = 2; P = 7; K = 8; O = 9.$

$$\begin{array}{r} +43972 \\ \hline 87944 \end{array}$$

10. $24 \cdot 32 = 768$.

11. Так как наибольшая цифра в числе «СИЛЕН» равна 5, а С = 1, то остальные 4 цифры в данном числе будут 2, 3, 4, 5. Так как Н < 6, то И = 2. А значит, Н = 4. Так как Л > Е (в самом деле, так как Е + 1 = Л, то Л > Е, ведь Л и Е меньше 5 по условию), то Л = 5, Е = 3. А тогда уже легко находим остальные цифры: Ш = 8, Р = 9. В итоге получается:

$$\begin{array}{r} 9382 \\ +3152 \\ \hline 12534 \end{array}$$

Методический комментарий. Для проверки правильности решения задачи № 5 приготовить несколько моделей с разрезами, в том числе и ошибочными (в виде спирали, без разреза на месте сгиба и т. п.). При проверке домашнего решения (№ 11) обратить внимание на то, почему все же наибольшая цифра в числе СИЛЕН равна 5. Обсудить вопрос, а что будет, если такого ограничения не будет?

Занятие 3

Инварианты

Работа по теме занятия

Ввести понятие инварианта: *инвариантом* некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании. В качестве инварианта чаще всего рассматриваются четность (нечетность) и остаток от деления. Хотя встречаются и другие стандартные инварианты: перестановки, раскраски и т. п. Причем применение четности — одна из наиболее часто встречающихся идей при решении олимпиадных задач.

Вспомнить определения четного и нечетного числа. Особое внимание надо уделить абстрактному понятию четности, объяснить, что означает термин «разная четность». Рассмотреть простые примеры. Например, число $x + 2$ имеет ту же четность, что и число x (или оба четные, или оба нечетные), а при прибавлении единицы четность числа меняется. Далее можно сформулировать два важных более общих утверждения, на которых основано применение идеи четности и нечетности:

Лемма 1. Четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых.

Привести примеры:

1. Число $1 + 2 + \dots + 10$ — нечетное, так как в сумме 5 нечетных слагаемых.

2. Число $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$ — четное, так как в сумме 6 нечетных слагаемых.

Лемма 2. Знак произведения нескольких (отличных от нуля) чисел определяется четностью количества отрицательных сомножителей.

Примеры:

1. Число $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$ положительно, так как в произведении четное число отрицательных сомножителей.

2. Число $(-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5)$ отрицательно, так как в произведении нечетное число отрицательных сомножителей.

После этого подробно разобрать с учащимися решение следующих задач.

1. Учитель написал на листке бумаги число 10. 15 учеников передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу — как хочет. Может ли в результате получиться число 0?

Прежде чем разобрать решение данной задачи, предложить учащимся выполнить данную операцию (при этом в зависимости от числа учащихся можно изменить числа 15 и 10). Заметить закономерность: после каждого хода характер четности меняется: после первого ученика число становится нечетным; после второго четным; после третьего — нечетным. Тогда после пятнадцатого число будет нечетным. Поэтому нуль в конце получиться не может.

2. На доске записано 15 чисел: 8 нулей и 7 единиц. Вам предлагается 14 раз подряд выполнить такую операцию: зачеркнуть любые два числа, и если они одинаковые, то допишите к оставшимся числам нуль, а если разные — то единицу. Какое число останется на доске?

Решение. Сумма 15 исходных чисел равна 7. А 7 — число нечетное. Рассмотрим, какая сумма чисел будет получаться после выполнения операции. Если вычеркнем 2 нуля, то после дописывания нуля на доске будет 7 нулей и 7 единиц. Сумма этих 14 чисел будет нечетная. Если вычеркнем 2 единицы, то на доске останется после дописывания нуля 9 нулей и 5 единиц. Сумма данных 14 чисел будет нечетной. Наконец, вычеркивая нуль и единицу и приписывая единицу, мы получим на доске 7 нулей и 7 единиц, сумма которых снова является нечетным числом. Таким образом, мы замечаем, что после выполнения данной операции на доске получается на 1 число меньше, причем сумма оставшихся чисел все время остается нечетной. Далее продолжаем эту операцию, т. е. переходим от 14 чисел к 13 и т. д. Так как 1 — нечетное число,

а 0 — четное, то на доске после выполнения 14 раз указанной операции получается нечетное число, т. е. 1.

Вывод. Инвариантом в задачах 1 и 2 являлась четность суммы чисел (она нечетная).

3. Все костяшки домино выложены в цепь (по правилам домино). На одном конце цепи оказалось 3 очка. Сколько очков на другом конце?

Решение. Всего имеется семь костяшек с тройкой на конце: 0–3, 1–3, 2–3, 3–3, 4–3, 5–3, 6–3. Костяшка 3–3 имеет «тройку» на обоих концах. Всего получается восемь «троек». Так как при игре в домино в цепи они должны располагаться парами, то на другом конце цепи будет 3 очка.

Вывод. При решении аналогичных задач полезно иногда объекты разбивать на пары. Инвариантом здесь является четность количества троек на всех костяшках.

4. Квадрат 5×5 заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Доказать, что найдется столбец, в котором произведение чисел также отрицательно.

Решение. Так как произведение чисел в каждой строке квадрата отрицательно, то и произведение всех чисел в этом квадрате будет отрицательно. Но с другой стороны, произведение всех чисел равно и произведению чисел в столбцах. А так как произведение всех чисел отрицательно, то найдется столбец, в котором произведение чисел является отрицательным.

Вывод. Инвариант — знак произведения чисел (он отрицательный).

Устные упражнения

5. Какие часы чаще показывают точное время: те, которые отстают на 1 минуту в день, или те, которые стоят?

6. На дереве сидело 20 ворон. Охотник выстрелил и убил двух ворон. Сколько ворон осталось на дереве?

7. Математик, оказавшись в небольшом городке, решил подстричься. В городке было лишь две парикмахерских. Заглянув к одному мастеру, он увидел, что в салоне грязно, сам мастер одет неряшливо, плохо выбрит и небрежно подстрижен. В салоне второго мастера все было чисто, а сам владелец был безукоризненно одет, чисто выбрит и аккуратно подстрижен. Тем не менее, математик отправился стричься к первому парикмахеру. Почему?

Самостоятельная работа

8. Можно ли разменять купюру достоинством 50 рублей с помощью 15 монет достоинством 1 и 5 рублей?

9. Конь вышел с поля a_1 шахматной доски и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал четное число ходов.

10. 2006 человек выстроились в шеренгу. Всегда ли можно их расставить по росту, если за один ход разрешается переставлять только 2 людей, стоящих через одного?

11. 16 корзин расположили по кругу. Можно ли в них разложить 55 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось на 1?

Домашнее задание

12. На столе стоят 6 стаканов. Из них 5 стоят правильно, а один перевернут вверх дном. Разрешается переворачивать одновременно 4 любых стакана. Можно ли все стаканы поставить правильно.

13. Мише учитель математики поставил в дневник отметку «2». Миша, желая скрыть от мамы данный факт, порвал свой дневник на 4 части. Этого ему показалось мало, поэтому некоторые из этих частей (может быть, и не все) он порвал на 4 части и так далее. Мама нашла 20 «кусочков» дневника. Все ли куски нашла мама?

14. Разрежьте квадрат на 4 части одинаковой формы и размера так, чтобы в каждую часть попало ровно по одному заштрихованному (рис. 2) квадрату.

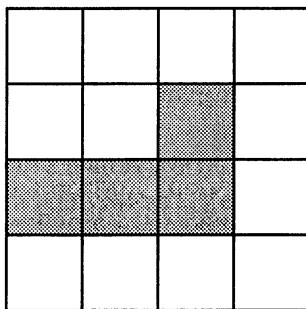


Рис. 2

Решения и ответы

5. Вторые, так как первые показывают верное время 1 раз в 2 года, а вторые 2 раза в год.

6. Ни одной. В принципе могло остаться на дереве и 1 и 2 вороны, если при падении на землю они застряли в ветвях дерева. Остальные вороны улетели.

7. Так как в городе всего две парикмахерских, а второй мастер хорошо выбрит и аккуратно подстрижен, то подстриг его первый мастер.

8. Нет, так как сумма 15 нечетных чисел — число нечетное, а 50 — число четное.

9. При каждом своем ходе конь меняет цвет поля, поэтому при возвращении обратно он должен сделать четное число ходов.

10. Не всегда. При перестановке сохраняется четность номера места. Поэтому если самый высокий человек, например, стоит вторым, то он никогда не станет первым. Здесь число 2006 роли не играет.

11. Так как число арбузов в соседних корзинах отличается на 1, то четность числа арбузов в этих корзинах будет разной. Тогда четность числа арбузов в корзинах будет чередоваться, поэтому в половине корзин будет четное число арбузов, а в половине нечетное. Тогда общее число арбузов в 8 корзинах с четным числом арбузов и в 8 корзинах с нечетным числом арбузов будет четным. По условию же всего арбузов — 55, нечетное число. Значит, разложить нельзя.

12. Нет, так как в любом случае число перевернутых вверх дном стаканов будет числом нечетным.

13. Так как число кусков могло быть 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22, то мама нашла не все куски.

14. Два решения приведены на рис. 3, 4.

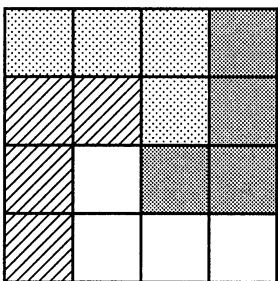


Рис. 3

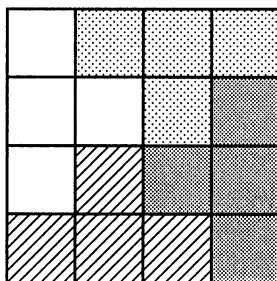


Рис. 4

Методический комментарий. В связи с тем, что учащиеся сегодня учатся в начальной школе и в 5–6 классах по различным системам обучения и различным учебникам, учителю, возможно, придется ввести понятие отрицательного числа или не решать задачу № 4. При разборе домашней задачи № 13 сделать вывод, что данную задачу можно было решить иначе, заметив, что число кусков, которые могли получиться, записываются в виде $3p + 1$, а число $20 = 6 \cdot 3 + 2$. Получаются разные остатки от деления на 3. Остаток от деления также может быть инвариантом, но задачи на применение данного и других инвариантов будут рассмотрены позже. Также желательно для разбора решения задачи № 8 иметь шахматную доску или ее изображение.

Занятие 4

Геометрические задачи-1 (разрезания)

Работа по теме занятия

1. Разрежьте фигуры, изображенные на рис. 5 и 6, на 4 равные части. (Резать можно только по сторонам и диагоналям клеточек.)

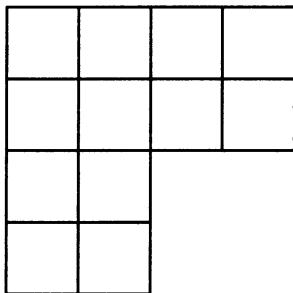


Рис. 5

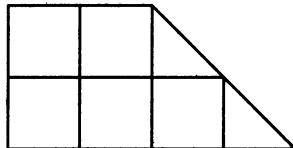


Рис. 6

2. Разрежьте квадрат на две равные фигуры по ломаной линии, состоящей из трех равных отрезков. Начало разреза в точке A (рис. 7).

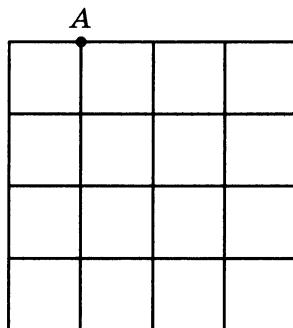


Рис. 7

3. Квадрат размером 5×5 разрезать прямыми линиями так, чтобы из полученных частей можно было составить 50 равных квадратов. Не разрешается оставлять неиспользованные части, а также накладывать их друг на друга.

Повторение

4. Женщина собирала в саду яблоки. Чтобы выйти из сада, ей пришлось пройти через 4 ворот, каждого из которых охранял свирепый стражник, отбиравший половину яблок. Домой женщина принесла всего 10 яблок. Сколько яблок досталось стражникам?

5. В наборе было 23 гири массой 1 кг, 2 кг, 3 кг, ..., 23 кг. Гирю в 21 кг потеряли. Можно ли разложить оставшиеся гири на две равные по массе кучки?

6. Расшифруйте ребус:

$$\begin{array}{r} & & & & \text{B} \\ & \text{AAAA} & & & \\ + & \text{AAAA} & & & \\ \hline & \text{AAAA} & & & \\ & \hline & \text{BAAAA} & & \end{array}$$

Самостоятельная работа

7. Разрежьте треугольник на два треугольника, четырехугольник и пятиугольник, проведя две прямые линии.

8. Разрежьте квадрат на 5 прямоугольников, так чтобы у соседних прямоугольников стороны не совпадали.

9. Разрежьте прямоугольник 3×4 на 2 равные части. Найдите как можно больше способов. Разрезать можно лишь по стороне квадрата 1×1 , и способы считаются разными, если полученные фигуры не будут равными при каждом способе.

10. Квадрат можно легко разрезать на 2 равных треугольника или 2 равных четырехугольника. А можно ли разрезать квадрат на 2 равных пятиугольника или 2 равных шестиугольника?

Методический комментарий. В качестве домашнего задания предложите дорешать оставшиеся номера из 7–10.

Решения и ответы

1. См. рис. 8 и 9.

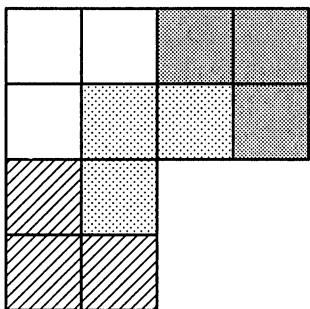


Рис. 8

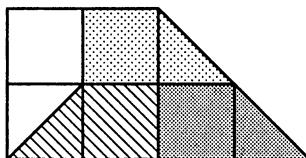
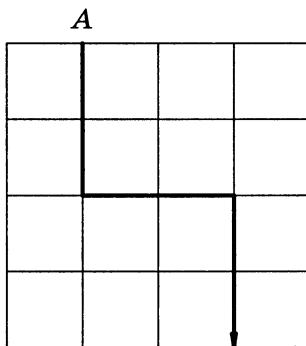


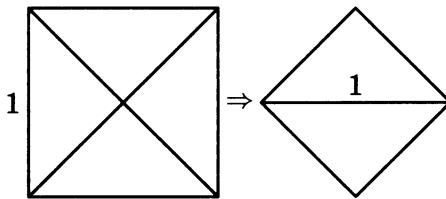
Рис. 9

2. Вариант разрезания показан на рисунке 10.

3. Сначала квадрат 5×5 разрежем на 25 квадратов 1×1 , затем каждый из полученных квадратов разрежем по диагонали на 4 треугольника, из которых, прикладывая большие стороны двух треугольников друг к другу, можно получить 2 квадрата (рис. 11).



Ruc. 10



Ruc. 11

4. Решаем с конца: четвертому отдано 10 яблок, третьему — 20, второму — 40, первому — 80. Значит, всего — 150 яблок. (Первоначально женщина собрала 160 яблок.)

5. Оставшаяся масса гирь — нечетная, поэтому не разделить.

6. Данный ребус можно записать и так:

$$B + 3 \cdot \text{AAAA} = B \cdot 1000 + \text{AAAA}.$$

Так как $\text{AAAA} = A \cdot 1111$, то получим:

$$B + 3 \cdot A \cdot 1111 = B \cdot 10000 + A \cdot 1111,$$

откуда $2 \cdot A \cdot 1111 = 9999 \cdot B$ или $2 \cdot A = 9 \cdot B$. Отсюда, учитывая, что A и B — цифры, получаем: $A = 9$, $B = 2$.

7. См. рис. 12.

8. См. рис. 13.

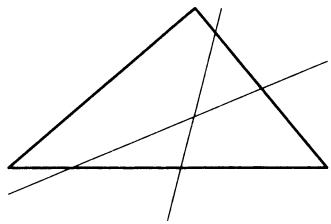


Рис. 12

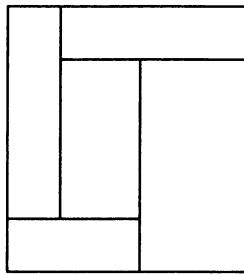


Рис. 13

9. 5 способов, они изображены на рис. 14.

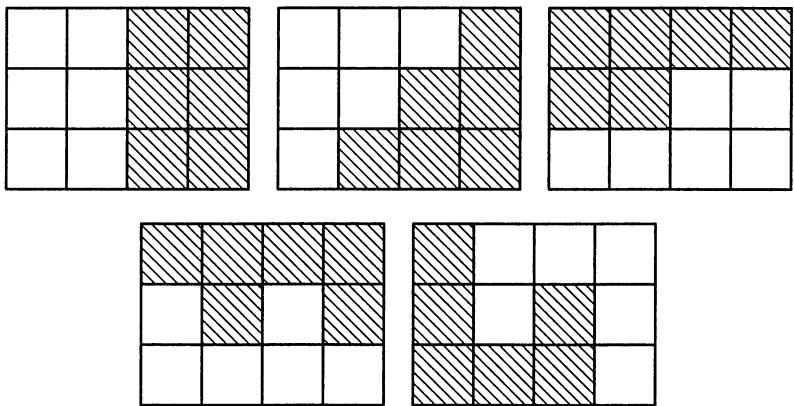


Рис. 14

10. Да, возможные варианты показаны на рис. 15.

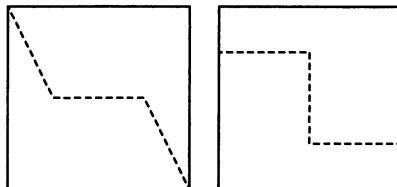


Рис. 15

Занятие 5

Повторение

Повторение методов решения задач,
рассмотренных ранее

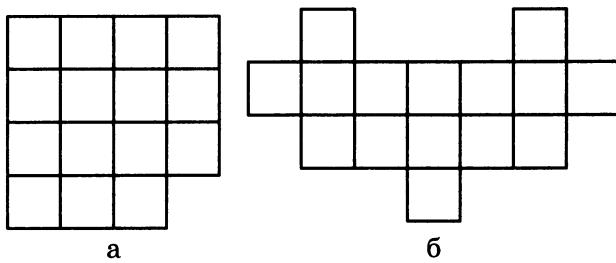
1. Крестьянин пришел к царю и попросил: «Царь, позволь мне взять одно яблоко из твоего сада». Царь ему разрешил. Попал крестьянин в сад и видит: весь сад огорожен тройным забором. Каждый забор имеет только одни ворота, и около каждого ворот стоит страж. Подошел крестьянин к первому стражу и сказал: «Царь разрешил мне взять одно яблоко из сада». «Возьми, но при выходе должен будешь отдать мне половину яблок, что возьмешь, и еще одно», — поставил условие страж. Это же повторили ему второй и третий, которые охраняли другие ворота. Сколько яблок должен взять крестьянин, после того, как он отдаст положенные части трем стражам, а у него останется одно яблоко?

2. Восстановите цифры в записи следующего деления:

$$\begin{array}{r} 14 * * \boxed{*7} \\ - * * 5 \\ \hline * * \\ - * 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

3. Разрежьте каждую из фигур на три равные части (рис. 16). Резать можно только по сторонам клеточек. Части должны быть равными и по площади, и по форме.

4. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с нее 2 плода. Если сорвать 2 банана или 2 ананаса, то вырастет еще 1 ананас. А если сорвать 1 банан и



Rис. 16

1 ананас, то вырастет 1 банан. В итоге на яблоне остался один плод. Что это за плод, если вначале на яблоне было 12 бананов и 13 ананасов.

5. У мальчика было 10 монет достоинством 1 р. и 5 р. Он насчитал 35 р. Не ошибся ли мальчик?

6. Решите ребусы:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{ТУЗИК} \\
 + \text{ТУЗИК} \\
 \hline
 \text{КАРТУЗ}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \times \text{РЕБУС} \\
 \text{P} \\
 \hline
 \text{CCCCCC}
 \end{array}
 \end{array}$$

7. Однажды Незнайка со своими друзьями собирали яблоки. Нарвали они не очень много — меньше шестидесяти, но и не мало — больше пятидесяти. Разделили все яблоки поровну. Вдруг видят — Чебурашка к ним бежит. Не беда, что из другой сказки. Надо и его яблочком угостить. Каждый малыш отдал Чебурашке одно яблоко, и оказалось, что у всех опять яблок поровну. Сколько было всего малышей? Сколько яблок они собрали? По скольку яблок досталось каждому?

Игра: Цепочки слов

Данная игра основана на словах — метаграммах. Метаграмма получается заменой одной из его букв на другую. Игра

заключается в нахождении цепочки метаграмм, соединяющих два заданных слова. Например, КОЗА может превратиться в таких животных:

КОЗА — ПОЗА — ПОЛА — ПОЛК — ВОЛК,

КОЗА — ЛОЗА — ЛУЗА — ЛУПА — ЛИПА — ЛИСА,

КОЗА — КОРА — КАРА — ФАРА — ФАРС — БАРС.

Один из авторов данной игры Л. Кэрролл, автор сказки «Алиса в стране чудес».

8. Придумать цепочку метаграмм, переводящих слова МИГ в ЧАС; ЧАС в ГОД; ГОД в ВЕК; ВЕК в ЭРА.

Домашнее задание

9. Придумать цепочку метаграмм, переводящих слово МУХА в слово СЛОН.

10. Придумать свою цепочку метаграмм.

Решения и ответы

1. Решаем задачу с конца. Перед последними воротами у крестьянина должно остаться $(1 + 1) \cdot 2 = 4$ яблока, перед вторыми — $(4 + 1) \cdot 2 = 10$, и перед первыми — $(10 + 1) \cdot 2 = 22$ яблока.

2. $1431 : 27 = 53$.

3. См. рис. 17.

4. Так как четность числа бананов не меняется, то оставшийся плод — ананас.

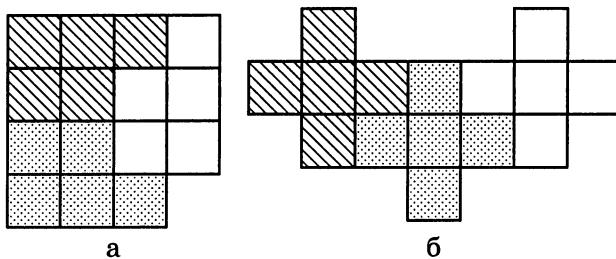


Рис. 17

5. Числа 1 и 5 — нечетные. Всего их 10. Сумма 10 нечетных чисел будет четной, а 35 — число нечетное. Значит, мальчик ошибся.

6. $54\,271 + 54\,271 = 108\,542$; $79\,365 \cdot 7 = 555\,555$.

7. Общее число яблок должно делиться на два соседних натуральных числа (на число всех малышей и на это число, увеличенное на единицу). Среди чисел, больших 50, но меньших 60, этому условию удовлетворяет только число 56.

8. МИГ — МАГ — МАЙ — ЧАЙ — ЧАС — ЧАД — ГАД — ГОД — ГИД — ВИД — ВИС — ВЕС — ВЕК — БЕК — БОК — БОА — БРА — ЭРА.

9. Возможный вариант: МУХА — МУРА — МАРА — ПАРА — ПАРК — ПАУК — ПАУТ — ПЛУТ — ПЛОТ — ПЛАТ — ПЛАН — КЛАН — КЛОН — СЛОН.

10. Вариант, предложенный учащимся: ВОР — МОР — МИР — ПИР — ПАР — БАР — БАК — РАК — РОК — РОД — РОВ.

Методический комментарий. С целью уравнять шансы учащихся на следующем занятии (где проводится математическое соревнование) проводится данное занятие. На нем повторяется решение всех типов задач, рассмотренных до этого. Разбор задач, вызвавших затруднения у большинства учащихся, производится на доске после решения их большинством учащихся. Те задания, которые у учащихся вызвали меньше проблем, остаются для домашней работы.

Занятие 6

Математическое соревнование (математическая драка)

Виды математических соревнований. Правила математической драки

Основными видами математических соревнований являются олимпиады (стандартные и нестандартные, личные и командные), бои, карусели, викторины, конкурсы и т. п.

Математическая драка является разновидностью личной олимпиады, относится к нестандартным олимпиадам. Для ее проведения учитель подбирает 8–12 задач разной трудности, в их число включаются как задачи на методы решений, изучаемые на кружке, так и задачи, методы решений которых не рассматривались. Очень трудных задач, на решение которых надо потратить много времени — не включают. Условия задач раздаются каждому участнику олимпиады, при этом рядом с условием задачи указывается и ее цена в баллах. Ученики приступают к решению той из задач, которая им под силу. Первый решивший какую-то из задач поднимает руку, называет номер задачи и выходит к доске ее объяснить. В случае верного решения он получает то число баллов, которое указано рядом с решенной им задачей. В противном случае ученик получает то же число баллов, но со знаком «минус», а цена задачи увеличивается. Таким образом, ученик «ввязывается» в драку с задачей, если считает, что он сможет ее победить. На сколько баллов увеличить цену задачи или во сколько раз — решает учитель. Олимпиада завершается по истечении 45–60 минут.

Математическая драка

1. У овец и кур вместе 36 голов и 100 ног. Сколько овец? (36)

2. Алеша задумал число. Он прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил число 2. Какое число задумал Алеша? (3б)

3. Перед Вами стоят 6 стаканов: три с водой и три пустых (см. рис. 18). Дотроньтесь рукой лишь до одного стакана и добейтесь, чтобы пустые и полные стаканы чередовались. (2б)



Рис. 18

4. Расшифруйте «животноводческий» ребус (3б):

$$\begin{array}{r} \text{Б} \\ + \text{Б Е Е} \\ \hline \text{М У У} \end{array}$$

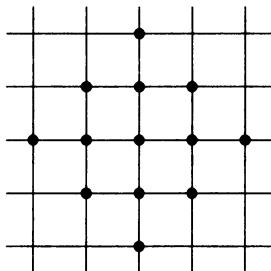
5. Алеша, Боря и Витя учатся в одном классе. Один ездит домой из школы на автобусе, другой — на трамвае, третий — на троллейбусе. Однажды после уроков Алеша пошел проводить друга до остановки автобуса. Когда мимо них проходил троллейбус, третий друг крикнул из автобуса: «Боря, ты забыл в школе тетрадь!» Кто на чем ездит домой? (4б)

6. Игнату сейчас четверо больше лет, чем было его сестре в тот момент, когда она была вдвое моложе его. Сколько лет сейчас Игнату, если через 15 лет ему и сестре будет вместе 100 лет? (6б)

7. В вершинах куба записаны числа 2, 0, 0, 3, 1, 9, 5, 7. За один ход разрешается прибавить к числам, стоящим на концах одного ребра, одно и то же целое число. Можно ли за несколько ходов получить нули во всех вершинах? (4б)

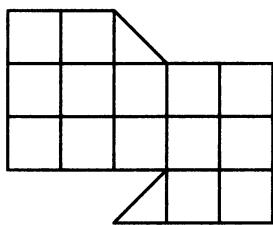
8. Аня и Таня вместе весят 40 кг, Таня и Маня — 50 кг, Маня и Ваня — 90 кг, Ваня и Даня — 100 кг, Даня и Аня — 60 кг. Сколько весит Аня? (6б)

9. На рис. 19 изображено 13 точек. Сколько квадратов с вершинами в этих точках можно нарисовать? (Точки располагаются все в вершинах квадратиков со стороной 1). (6б)



Rис. 19

10. Разрежьте фигуру (рис. 20) на 2 равные части. (5б)



Rис. 20

11. Из бочки, содержащей не менее 10 л бензина, отлейте ровно 6 л, используя бидон вместимостью 5 л и девятилитровое ведро. (5б)

Методический комментарий. Победителем математической драки является ученик, набравший больше всех баллов, ему учитель вручает приз (например, книгу по математике). Задачи, вызвавшие наибольшее затруднение у учащихся, разбираются в конце занятия. Можно оставить для решения дома 1–2 наиболее интересных.

Решения и ответы

1. Если бы у всех было по 2 головы, то было бы 72 ноги. Остается 28 ног. Так как у овец по 4 ноги, то овец будет 14. Тогда кур останется 22.

2. Решаем с конца: $(2 \cdot 7 + 6) : 4 \cdot 3 - 5 = 10$.

3. Перелить воду из второго стакана в пятый.

4. $1 + 1999 = 2000$.

5. Так как Алеша не ездит на троллейбусе и провожает друга до автобусной остановки, то он ездит на трамвае. Так как третий друг кричал Боре из троллейбуса, то Боря ездит на автобусе, а третий друг — Витя — на троллейбусе.

6. По условию задачи составим таблицу

	Игнат	Сестра
Тогда	$2x$	x
Сейчас	$4x$	$3x$
Через 15 лет	$4x + 15$	$3x + 15$

и уравнение: $7x + 30 = 100$, откуда $x = 10$. Игнату 40 лет сейчас.

7. Сумма всех чисел первоначально была равна 27 — это число нечетное. При прибавлении двух одинаковых чисел четность суммы не изменится. А так как сумма шести нулей равна нулю — число четное, то получить нули во всех вершинах куба будет нельзя.

8. Найдем удвоенную сумму весов всех ребят. Она будет равна 340 кг. Значит, масса всех ребят будет 170 кг. Так как масса Тани, Мани, Вани и Дани будет 150 кг, то Аня будет весить 20 кг.

9. Можно нарисовать 4 квадрата со стороной 1 клетка; 5 — со стороной, равной диагонали клетки; 1 — со стороной в 2 клетки, 1 — со стороной 2 диагонали клетки. Всего получается 11 квадратов (рис. 21).

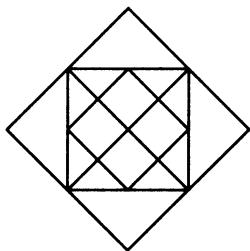


Рис. 21

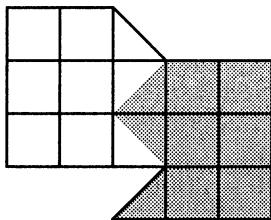


Рис. 22

10. См. рис. 22.

5 л	0	5	0	5	5	1	1	0	5	0
9 л	0	0	5	5	9	0	1	1	6	

Занятие 7

Принцип Дирихле

Работа по теме занятия

Вступительное слово учителя. При решении различных математических задач применяется специальный метод, получивший название: принцип Дирихле. Существует несколько формулировок данного принципа. Самая популярная следующая: «Если в n клетках сидят m зайцев, причем $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят, по крайней мере, два зайца». Доказывается данный принцип Дирихле легко, методом доказательства от противного, который учащиеся 7 класса изучали на уроках. Поэтому некоторые из задач, решаемых с помощью принципа Дирихле, также можно решить, используя метод доказательства от противного, но не все.

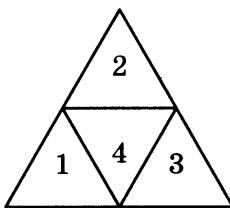
На первый взгляд, непонятно, почему это совершенно очевидное предложение, тем не менее, является мощным математическим методом решения задач, причем самых разнообразных. Все дело оказывается в том, что в каждой конкретной задаче нелегко понять, что же здесь выступает в роли «зайцев», а что — в роли «клеток». И почему надо, чтобы «зайцев» было больше, чем «клеток». Выбор «зайцев» и «клеток» часто неочевиден. Далеко не всегда по формулировке задачи можно определить, что следует применить принцип Дирихле. Главное же достоинство данного метода решения состоит в том, что он дает неконструктивное решение (то есть мы знаем, что такие клетки есть, но где именно они находятся, часто указать не можем); попытка же дать конструктивное доказательство приводит к большим трудностям. Рассмотрим примеры различных задач, решаемых с помощью принципа Дирихле.

1. В классе 15 учеников. Докажите, что найдутся как минимум 2 ученика, отмечающих дни рождения в один месяц.

Решение. Пусть 15 учеников будут «зайцы». Тогда «клетками» будут месяцы года, их 12. Так как $15 > 12$, то, по принципу Дирихле, найдется, как минимум, одна клетка, в которой будет сидеть, по крайней мере, 2 «зайца». То есть, найдется месяц, в котором будут отмечать дни рождения не менее 2 учеников класса. А это и требовалось доказать. Также задача легко решается с использованием метода доказательства от противного.

2. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 см расположено 5 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5 см.

Решение. Это наиболее трудная задача на принцип Дирихле. Но на примере ее решения очень хорошо видны все достоинства принципа Дирихле. Итак, при решении сначала надо выбрать что-то за «зайцев». Так как в условии задачи фигурирует число «5», то пусть 5 точек будут «зайцами». Так как «клеток» должно быть меньше, и чаще всего на 1, то их должно быть 4. Как получить эти 4 «клетки»? Так как в условии задачи есть еще 2 числа: 1 и 0,5; причем второе меньше первого в 2 раза, то можно получить 4 «клетки», разбив равносторонний треугольник с помощью проведения отрезков, соединяющих середины сторон (рис. 23). Тогда получим 4 равносторонних треугольника со сторонами по 0,5 см, которые и будут у нас «клетками».



Rис. 23

Так как «зайцев» — 5, «клеток» — 4 и $5 > 4$, то, по принципу Дирихле, найдется «клетка» — равносторонний треугольник со стороной 0,5 см, в который попадут не менее двух «зайцев»-точек. А так как все 4 треугольника равны и рас-

стояние между точками в любом треугольнике будет меньше, чем 0,5 см, то мы доказали, что между некоторыми двумя точками из пяти расстояние будет меньше, чем 0,5 см.

Можно учащимся показать и другие возможные разбиения треугольника на «клетки». Возможные варианты получения «клеток» показаны на рис. 24.

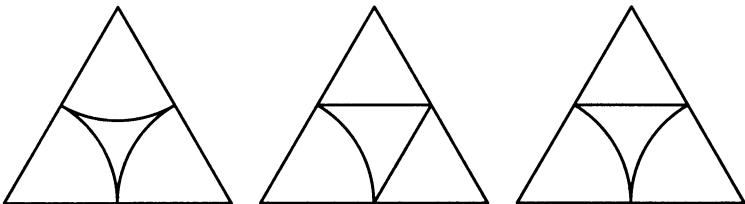


Рис. 24

3. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 11.

Решение. Примем числа за «зайцев». Так как их 12, то «клеток» должно быть меньше. Пусть «клетки» — это остатки от деления целого числа на 11. Всего «клеток» будет 11: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Тогда, по принципу Дирихле, найдется «клетка», в которой будут сидеть не менее чем 2 «зайца», то есть найдутся 2 целых числа с одним остатком. А разность двух чисел с одинаковым остатком от деления на 11, будет делиться на 11. Действительно, пусть $a = 11m + q$, $b = 11n + q$, тогда $a - b = 11m + q - (11n + q) = 11(m - n)$. А $11(m - n)$ делится на 11.

4. В ковре размером 3×3 метра Коля проделал 8 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1×1 метр, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки можно считать точечными.)

В данной задаче для решения необходимо применить другую формулировку принципа Дирихле: «Пусть в n клетках сидят m зайцев, причем $n > m$. Тогда найдется хотя бы одна пустая клетка». Посмотрим, как эту формулировку принципа Дирихле можно применить при решении данной задачи.

Решение. Здесь дырки будут «зайцами». Разрежем ковер на 9 ковриков размерами 1×1 метр. Так как ковриков-«клеток» — 9, а дырок-«зайцев» — 8, то найдется хотя бы одна «клетка», в которой не будет «зайцев», то есть найдется коврик без дырок внутри.

Выводы. Таким образом, применяя данный метод, надо:

- 1) определить, что удобно в задаче принять за «клетки», а что за «зайцев»;
- 2) получить «клетки»; чаще всего «клеток» меньше (больше), чем «зайцев» на одну (или более);
- 3) выбрать для решения требуемую формулировку принципа Дирихле.

Самостоятельная работа

5. Дано 9 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 8.
6. В классе 35 учеников. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной буквы?
7. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600 000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым количеством иголок.
8. На дискотеку в студенческое общежитие, в котором 42 комнаты, пришло 36 гостей. Докажите, что найдется комната, в которую не пришел ни один гость.
9. В классе 26 учеников, из них более половины — мальчики. Докажите, что какие-то 2 мальчика сидят за одним столом, если в классе 13 столов.

Задачи-шутки

- 10.** Как одним мешком пшеницы, смолов ее, наполнить два таких же мешка?
- 11.** Что это: две головы, две руки, шесть ног, а идут или бегут только четыре?
- 12.** Как-то в праздник один мой знакомый сказал мне: «Позавчера мне было 40 лет, а в будущем году исполнится 43 года». Могло ли такое быть?

Домашнее задание

- 13.** Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 см расположено 7 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя точками меньше, чем 1 см.
- 14.** В вершинах квадрата записаны числа 3, 1, 2, 5. Разрешается прибавлять к любым двум числам, стоящим в квадрате, одно и то же целое число. Можно ли через несколько ходов получить во всех вершинах одинаковые числа?
- 15.** Имеется два ведра — одно емкостью 4 л, другое 9 л. Можно ли набрать из реки ровно 6 л воды?

Решения и ответы

- 5.** Решается задача аналогично задаче № 3. Только здесь будет 8 остатков: 0, 1, 2, ..., 7 — «клетки», а числа — их 9 — «зайцы».

6. Обозначим 35 учеников за «зайцев», а буквы за «клетки». В русском алфавите 33 буквы. Фамилии не могут начинаться разве что на Ъ и Ъ. Так как $35 > 31$, то, по принципу Дирихле, найдется 2 ученика, у которых фамилия начинается с одной буквы.

7. Пусть елки — «зайцы», а число иголок на елках: 0, 1, 2, 3, ..., 600 000 — «клетки». «Клеток» будет 600 001, а «зайцев» — 1 000 000. Здесь «зайцев» гораздо больше, чем «клеток». Тогда, по принципу Дирихле, в какой-то «клетке» будет находиться не менее двух «зайцев». Но если в одной «клетке» сидят два «зайца», то число иголок у этих елок будет одинаково.

8. Обозначив комнаты — «клетками», а гостей — «зайцами», имеем: $36 < 42$. Тогда, по принципу Дирихле, найдется как минимум одна пустая «клетка», т. е. в какую-то комнату не придет ни одного гостя.

9. Обозначим мальчиков за «зайцев», а столы — за «клетки». Так как мальчиков больше половины, то есть больше 13 — числа столов, то, по принципу Дирихле, найдется стол, за которым сидят не менее двух мальчиков. А так как больше двух мальчиков за стол не помещается, то это означает, что найдется стол, за которым сидят 2 мальчика.

10. Надо в один пустой мешок вложить другой и высыпать пшеницу.

11. Всадник на лошади.

12. Да, если день рождения 31 декабря, а разговор был 1 января.

13. Примем 7 точек за «зайцев». Построим 6 «клеток». Для этого разобьем правильный шестиугольник на 6 правильных треугольников, как на рис. 25. Так как $7 > 6$, то, по принципу Дирихле, хотя бы в один треугольник попадут не менее двух точек. А расстояние между любыми двумя точками в правильном треугольнике со стороной 1 см меньше 1 см.

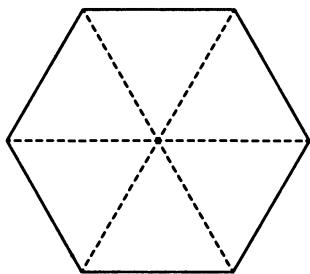


Рис. 25

14. Сумма чисел 3, 1, 2 и 5 равна 11 — нечетное число. После прибавления двух одинаковых целых чисел новая сумма будет вновь нечетной, в то время как сумма четырех одинаковых чисел — четная. Значит, сколько бы ни делать ходов, сделать все числа в вершинах квадрата одинаковыми нельзя.

15. Да, решение в таблице.

4 л	0	0	4	0	4	0	1	1	4
9 л	0	9	5	5	1	1	0	9	6

Методический комментарий. Так как предлагаемая тема является для этого возраста очень сложной, то объяснение всех первых 4 задач надо провести самому учителю. При этом главное внимание обратить на процесс рассуждения и запись решения. Объяснение задач 5–9 начинать после того, как некоторые учащиеся решат их. В задачах 2 и 13 для учащихся 6 и 7 классов встречаются некоторые факты, которые не изучены на уроке. Поэтому право учителя — брать эти задачи для занятия или нет. При задании домашнего задания ввести понятие правильного многоугольника. Задача № 14 предложена на повторение, а № 15 — на материал, который будет рассматриваться на следующем занятии. С решения данной задачи и можно начать следующее занятие.

Занятие 8

Текстовые задачи-2 (переливания)

Работа по теме занятия

1. Используя два ведра вместимостью 5 л и 3 л, наберите из бочки 4 л воды.
2. Используя два ведра вместимостью 5 и 4 л, наберите из водопроводного крана 3 л воды.
3. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Каша должна вариться 15 минут. Как сварить ее, перевернув часы минимальное количество раз?
4. *Головоломка.* Малоопытный водитель автофургона пытался проехать во двор через туннель, но неточно рассчитал его высоту. В результате машина оказалась заклиниенной, да так, что не могла тронуться с места. Шофер то заводил машину, то выключал двигатель, пытался двигаться вперед, назад — все было безрезультатно. Люди останавливались около машины, давали разные советы. Так продолжалось до тех пор, пока рядом не остановилась легковая машина, из которой вышел водитель и что-то тихо сказал малоопытному шоферу. Виновник беспорядка горячо поблагодарил за совет и быстро выполнил несложную работу. Затем без каких-либо препятствий проехал во двор. Какое действие выполнил шофер?

Задачи на повторение

5. Восстановите запись сложения:

$$\begin{array}{r} \text{ПОРТ} \\ + \text{ПОРТ} \\ \text{ПОРТ} \\ \hline \text{ТОРГ} \end{array}$$

6. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1 м). Докажите, что он сделал четное число прыжков.

7. Верно ли, что из любых трех целых чисел можно выбрать два, сумма которых четна?

Самостоятельная работа

8. Используя девятилитровое ведро и четырехлитровый бидон, наберите из пруда 7 л воды.

9. Используя 2 ведра вместимостью 9 и 11 л, наберите из пруда 4 л воды.

Домашнее задание

10. Из полного восьмилитрового ведра отлейте 4 л с помощью пустых трехлитровой банки и пятилитрового бидона. Воду выплескивать на землю нельзя, другими сосудами, кроме этих трех, пользоваться нельзя.

11. Волк и волчонок, медведь и медвежонок, лис и лисенок решили переправиться с левого берега реки на правый берег. У них была лодка, в которую помещались любые двое из них. Как им переправиться на другой берег, если нельзя оставлять детенышней с чужими папами без своего папы?

Предложить одному из учащихся подготовить сообщение на тему «Числа натурального ряда и мистические суеверия».

Решения и ответы

1.	3 л	0	0	3	0	2	2	3
	5 л	0	5	2	2	0	5	4

2.	4 л	0	4	0	4	3
	5 л	0	0	4	4	5

3. $15 = (11 - 7) + 11$. Одновременно перевернем часы, через 7 минут начинаем варить кашу. После 4 минут (песок в часах на 11 минут закончится) вновь перевернуть часы на 11 минут.

4. Шофер слегка выпустил воздух из колес.

5. $2497 + 2497 + 2497 = 7491$.

6. Так как после каждого прыжка расстояние меняется с нечетного на четное, причем расстояние будет четным после четного числа прыжков, то в начало кузнечик должен вернуться после четного числа прыжков.

7. Пусть 3 числа — «зайцы», а «клетки» — множество четных чисел и множество нечетных чисел. «Клеток» — 2. Так как $3 > 2$, то, по принципу Дирихле, найдутся как минимум 2 числа одинаковой четности: оба четные или оба нечетные. А сумма таких чисел — число четное.

8.	4 л	0	4	0	4	0	4	3	3	0	4	0
	9 л	0	0	4	4	8	8	9	0	3	3	7

9.	9 л	0	0	9	0	2	2	9				
	11 л	0	11	2	2	0	11	4				

10.	Ведро, 8 л	8	3	3	6	6	1	1				
	Бидон, 5 л	—	5	2	2	—	5	4				
	Банка, 3 л	—	—	3	—	2	2	3				

11. Ответ в таблице (здесь ПБ — правый берег, ЛБ — левый берег, В — волк, в — волчонок, М — медведь, м — медвежонок, Л — лис, л — лисенок).

ПБ	ВвМм Лл	Мм Лл	Мм Лл	вмл	вмл	вм	вм	л	л	—	—
лодка	—	Вв	в	МЛ	Л	Лл	л	вм	в	вл	—
ЛБ	—	—	В	В	ВМ	ВМ	ВМ Л	ВМ Л	ВМ мЛ	ВМ мЛ	ВвМм Лл

Методический комментарий. При решении задач на переливания лучше начинать решение задачи с конца: как получить искомое количество жидкости. Подробно разобрать надо задачу, предложенную домой, и задачи № 1 и № 2. Для задачи № 1 рассуждения могут быть такими. Так как нам надо получить 4 л, то посмотрим, с помощью каких действий получается число 4. $4 = 5 - 1 = 2 + 2 = 3 + 1$. Ведро в 5 л у нас есть. Как получить 1 л? $1 = 3 - 2$. Ведро в 3 л у нас есть. Осталось получить 2 л. Но $2 = 5 - 3$ и решение задачи получили. Также необходимо отметить, что задачи на переливание решаются несколькими способами, надо разбирать тот, который более быстро позволяет получить требуемое количество жидкости.

Занятие 9

Логические задачи

Работа по теме занятия

Вступительное слово учителя. Ввести понятие высказывания, как предложения, о котором можно сказать — истинно оно или ложно. Привести примеры. Предложить учащимся назвать высказывания. Потренироваться в построении отрицаний высказываний, особенно со словами «каждый», «любой», «хотя бы один» и т. д. После этого перейти к объяснению методов решения логических задач. Остановиться можно пока на двух: с помощью применения таблиц и с помощью рассуждения. Объяснение данных методов провести на примере следующих задач.

1. Беседуют трое: Белокуров, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас русый, другой — брюнет, а третий — рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из беседующих?

Решение. Для решения задачи воспользуемся таблицей 3×3 . По условию задачи Белокуров не русый, Чернов не черный и Рыжов не рыжий. Это позволяет поставить знак «—» в соответствующих клетках. Кроме того, по условию, Белокуров — не брюнет, и, значит, в клетке на пересечении строки «Белокуров» и столбца «Черный» также надо поставить знак «—».

Фамилия \ Цвет волос	Рыжий	Черный	Русый
Белокуров		—	—
Чернов		—	.
Рыжов	—		

Из таблицы следует, что Белокуров может быть только рыжим. Поставим знак плюс в соответствующей клетке. Отсюда видно, что Чернов не рыжий. Обозначим это знаком минус в таблице. Теперь ясно, что Чернов может быть только русым, а Рыжов — брюнетом.

Фамилия \ Цвет волос	Рыжий	Черный	Русый
Белокуров	+	-	-
Чернов	-	-	+
Рыжов	-	+	-

2. Петя, Вася, Коля и Миша играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. На вопрос «Кто это сделал?» Петя, Вася и Коля ответили: «Не я», а Миша — «Не знаю». Потом оказалось, что двое из них сказали правду, а двое — неправду. Знает ли Миша, кто разбил стекло? Ответ объясните.

Решение. Начнем с ответов Пети, Васи и Коли. Так как стекло разбил кто-то один, то среди ответов Пети, Васи и Коли может быть лишь один ложный, иначе при двух ложных ответах получается, что стекло разбили двое.

Тогда вторым ложным ответом будет ответ Миши, так как всего ложных ответов два. Поэтому Миша знал, кто разбил стекло.

3. На острове живут два племени:aborигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял островитянина в проводники. Они пошли и увидели другого островитянина. Путешественник послал проводника узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал: «Туземец говорит, что он абориген».

Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?

Решение. Так как ответ встреченного островитянина мог быть лишь «Я — абориген» (этот ответ является правдой для аборигенов и ложью для пришельцев), а проводник сказал, что туземец — абориген, то проводник является аборигеном.

Самостоятельная работа

4. Как перевести в лодке с одного берега реки на другой волка, козла и капусту, если известно, что волка нельзя оставить без привязи с козлом, а козел «неравнодушен» к капусте? В лодке только два места, поэтому можно с собой брать одновременно или одно животное, или капусту.
5. Александр, Борис, Виктор и Григорий — друзья. Один из них — врач, другой — журналист, третий — спортсмен, а четвертый — строитель. Журналист написал статьи об Александре и Григории. Спортсмен и журналист вместе с Борисом ходили в поход. Александр и Борис были на приеме у врача. У кого какая профессия?
6. В одном дворе живут четыре друга. Вадим и шофер старше Сергея; Николай и слесарь занимаются боксом; электрик — младший из друзей; по вечерам Антон и токарь играют в домино против Сергея и электрика. Определите профессию каждого из друзей.
7. Мачеха, уезжая на бал, дала Золушке мешок, в котором были перемешаны мак и просо, и велела перебрать их. Когда Золушка уезжала на бал, она оставила три мешка: в одном — просо, в другом — мак, а в третьем — еще не разобранная смесь. Чтобы не перепутать мешки, Золушка к каждому из них приkleила таблички: «Мак», «Просо», «Смесь». Мачеха вернулась с бала первой и нарочно поменяла местами таблички так, чтобы на каждом мешке оказалась неправильная запись. Ученик Феи успел предупредить Золушку, что теперь ни одна надпись на мешках не соответствует действительности. Тогда Золушка достала только одно-единственное зернышко из одного мешка и, посмотрев на него, сразу догадалась, где что лежит. Как она это сделала?
8. Четверо ребят — Алексей, Борис, Владимир и Григорий участвовали в лыжных гонках. На следующий день на вопрос, кто какое место занял, они ответили так:

Алексей: Я не был ни первым и ни последним;

Борис: Я не был последним;

Владимир: Я был первым;

Григорий: Я был последним.

Известно, что три из этих ответов были правдивыми, а один — ложью. Кто сказал правду? Кто был первым?

9. Коренными жителями острова являются рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Человек А говорит: «Я — лжец». Является ли он уроженцем острова рыцарей и лжецов?

Математический софизм

Под софизмом понимается мнимое доказательство, где кажущаяся обоснованность заключения чисто субъективна и вызвана недостаточностью логического анализа. Рассмотрим пример такого софизма.

10. Докажем, что $2 \cdot 2 = 5$. Доказательство: $1 = 1$. Заменим 1, как $4 : 4$ и $5 : 5$. В итоге получим: $4 : 4 = 5 : 5$. Вынесем в левой части равенства за скобки 4, а в правой — 5, в итоге получим, что $4 \cdot (1 : 1) = 5 \cdot (1 : 1)$. Разделим обе части равенства на число в скобках: $1 : 1$. Тогда получим: $4 = 5$. А так как $4 = 2 \cdot 2$, то получили, что $2 \cdot 2 = 5$. Где ошибка?

Домашнее задание

11. Из четырех учеников Антона, Бори, Васи и Гали — один отличник. Кто отличник, если:

- 1) в тройке Антон, Боря, Вася есть отличник;
- 2) в тройке Антон, Вася, Галя есть отличник;
- 3) Антон — не отличник.

12. На острове два города, в одном живут рыцари, говорящие только правду, а в другом — лжецы. Встретились три человека *A*, *B* и *C*.

A говорит: «*B* — лжец».

B говорит: «*A* и *C* из одного города».

Кто такой *C*?

13. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13, 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на три?

Решения и ответы

4. *Первым рейсом* перевозчик берет в лодку козла, оставляя на берегу волка и капусту.

Вторым рейсом перевозчик берет с собой волка, оставляя на берегу капусту. Переехав реку, перевозчик оставляет волка на берегу, а козла забирает в лодку и возвращается с ним обратно.

В третьем рейсе перевозчик берет с собой капусту, выгрузив козла. Переехав реку, он оставляет капусту с волком и возвращается за козлом.

И, наконец, в *четвертом рейсе* он перевозит через реку козла.

5. Рассмотрим решение задачи с помощью таблицы.

	Александр	Борис	Виктор	Григорий
Врач	—	—		
Журналист	—	—		—
Спортсмен		—		
Строитель				

Так как журналист написал статьи об Александре и Григории, то журналиста звали не Александр и не Григорий. Так

как спортсмен и журналист ходили с Борисом в поход, то спортсмена и журналиста звали не Борисом. Из того, что Александр и Борис были у врача, следует, что их профессия — не врач. Поставив соответствующие «минусы» в клетках таблицы, получаем, что Борис — строитель.

	Александр	Борис	Виктор	Григорий
Врач	—	—		
Журналист	—	—		—
Спортсмен		—		
Строитель	—	+	—	—

Учитывая это, получаем, что Александр — спортсмен, Григорий — врач, а Виктор — журналист. Ответ: Борис — строитель, Александр — спортсмен, Григорий — врач, Виктор — журналист.

6. Используем для решения таблицу.

	Вадим	Сергей	Николай	Антон
Шофер	—	—		
Слесарь			—	
Электрик		—		—
Токарь		—		—

Так как Вадим и шофер старше Сергея, то Вадим и Сергей — не шофера. Ставим два «минуса» в соответствующих клетках таблицы. Так как Николай и слесарь занимаются боксом, то слесарь — не Николай. В соответствующей клетке ставим «минус». Так как Антон и токарь играют в домино против Сергея и электрика, то Антон и Сергей — не токари и не электрики. Получаем еще четыре минуса в клетках таблицы. Таким образом, из таблицы получаем, что Сергей может быть только слесарем. Ставим в соответствующих клетках таблицы «плюс» и «минусы».

	Вадим	Сергей	Николай	Антон
Шофер	—	—		
Слесарь	—	+	—	—
Электрик		—		—
Токарь		—		—

Тогда Антон — шофер. Выяснить, кто Николай и Вадим, помогут высказывания: «Вадим и шофер старше Сергея», «электрик — младший из друзей». Значит, Вадим — не электрик, поэтому Вадим — токарь, а Николай — электрик. Ответ: Сергей — слесарь, Антон — шофер, Вадим — токарь, Николай — электрик.

7. Золушка взяла зернышко из мешка с надписью «Смесь»; так как ни одна табличка не соответствовала содержимому мешка, то там был мак или просо. Если взятое Золушкой зернышко — мак, то в мешке с надписью «Смесь» — мак. Тогда в мешке с надписью «Мак» — просо, а в мешке с надписью «Просо» — смесь.

Аналогично, если взятое зернышко — просо, то в мешке с надписью «Смесь» — просо. Тогда в мешке с надписью «Мак» — смесь, а в мешке с надписью «Просо» — мак.

8. Предположим, что солгал Алексей. Тогда получается, что он был первым или последним. Значит, солгали еще Владимир или Григорий. А это противоречит тому, что солгал всего один из ребят. Пусть солгал Борис. Тогда он был последним. Но Григорий также утверждал, что он был последним. Значит, данного случая также не может быть. Пусть солгал Владимир. Тогда он был не первым. В этом случае все получается и первым тогда будет Борис. Последний случай, когда солгал Григорий, быть не может, так как тогда последним никто из ребят не был.

Ответ: правду сказали Алексей, Борис, Григорий. Первым был Борис.

9. Пусть *A* — сказал правду, значит, он — лжец. Но он не может быть лжецом, так как лжецы всегда лгут. Пусть *A* сказал

ложь, тогда он — рыцарь. Но рыцари говорят правду. Опять не получается. Значит, A не может быть уроженцем острова.

10. Ошибка в вынесении за скобку чисел 4 и 5 — это делать нельзя.

11. Так как в тройках (Антон, Боря, Вася) и (Антон, Вася, Галя) есть отличник, то это могут быть Антон или Вася. Но известно, что Антон — не отличник, значит, отличник — Вася.

12. Рассмотрим два случая.

1) Пусть A говорит правду, тогда B — лжец. Так как B — лжец, то B и C — не из одного города, поэтому C — рыцарь.

2) Пусть A говорит ложь, тогда B — рыцарь. А так как B говорит правду, то и C — рыцарь.

Ответ: C — рыцарь.

13. Найдем сначала возраст Бори. Так как в детский сад ходит девочка, то это не Боря. Тогда Боре больше 5 лет.

Так как Аня старше Бори, то Боре не может быть 15 лет. Так как сумма лет Ани и Веры делится на три, то, учитывая возраст детей в семье, это может быть в следующих случаях:

1) одной девочке 5 лет, а другой 13 лет;

2) одной девочке 8 лет, а другой 13 лет.

В обоих случаях одной девочке 13 лет. Следовательно, Боре не 13 лет. Имеем: Боре не 5 лет, не 15 и не 13. Тогда Боре 8 лет.

Установим теперь возраст каждой девочки. Так как сумма лет Ани и Веры делится на три, а Боре — 8 лет, то возможен лишь один случай: девочкам 5 и 13 лет. А так как, по условию, Аня старше Бори, то Ане 13 лет. Тогда Вере будет 5 лет, а Гале 15 лет.

Занятие 10

Текстовые задачи-3 (математические игры, выигрышные ситуации)

Работа по теме занятия

1. Бился Иван-царевич со Змеем Горынычем, трехглавым и треххвостым. Одним ударом он мог срубить либо одну голову, либо один хвост, либо две головы, либо два хвоста. Но если срубить один хвост, то вырастут два; если срубить два хвоста — вырастет голова; если срубить голову, то вырастет новая голова; а если срубить две головы, то не вырастет ничего. Объясните, как должен действовать Иван-царевич, чтобы срубить Змею все головы и все хвосты как можно быстрее.

Решение. Так как рубить головы по одной не имеет смысла, а при рубке хвостов рано или поздно появляются новые головы, то Иван-царевич должен действовать так, чтобы у Змея не осталось хвостов, а количество голов стало четным. Для этого надо сначала три раза срубить по одному хвосту, и их будет шесть. Затем три раза срубить по два хвоста, и у Змея станет шесть голов, а потом три раза срубить по две головы, и тогда у Змея не останется ни хвостов, ни голов.

Возможен также вариант, когда Иван-царевич сначала срубает две головы, а потом действует так же, как в предыдущем случае, тогда на последнем этапе у змея будет не шесть, а четыре. Общее число ударов, которое должен сделать Иван-царевич (девять), при этом не изменяется.

Ответ: три раза срубить по одному хвосту, три раза срубить по два хвоста, три раза срубить по две головы.

2. Перед Бабой Ягой и Кощеем Бессмертным лежат две кучи мухоморов, в одной 100 штук, а в другой 150 штук. Эти персонажи по очереди берут грибы из куч, за один раз можно взять любое ненулевое число грибов из одной из куч. Пропускать ход нельзя, выигрывает тот, после хода которого грибов не

останется. Первой ходит Баба Яга. Кто из игроков выиграет при правильной игре?

Решение. Победит Баба Яга с помощью следующей стратегии. Каждым своим ходом она уравнивает число грибов в кучках, имеющееся к ее ходу.

3. Двое по очереди кладут пятирублевые монеты на круглый стол. Проигрывает тот, кто не сможет положить очередную монету (монеты не должны накладываться друг на друга). Кто выиграет при правильной стратегии?

Решение. Выигрывает первый. Для этого он первым ходом должен положить свою монету в центр симметрии стола. После чего на ход второго у него всегда будет симметричный ход.

4. Ладья стоит на поле $a1$. За один ход разрешается сдвинуть ее на любое число клеток вправо или на любое число клеток вверх. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле $h8$. Кто из игроков обладает выигрышной стратегией?

Решение. Выигрышной стратегией обладает второй игрок: после хода первого игрока он возвращает своим ходом ладью на диагональ $a1 - h8$. Первый игрок вынужден будет каждый раз уводить ладью с этой диагонали. Так как поле $h8$ принадлежит диагонали $a1 - h8$, на него сумеет поставить ладью именно второй игрок.

Методический комментарий. Разбирая на занятиях данные задачи учителю желательно сформулировать выводы:

1. Есть проигрышные и выигрышные ситуации. В задаче № 4, изменив начало задачи « $a1$ » на « $a2$ », мы получим выигрышную ситуацию для первого игрока.

2. Наиболее часто при решении подобного рода задач применяются следующие основные идеи:

а) соответствие (наличие удачного ответного хода, который обеспечивается или симметрией (задача № 3) или разбиением на пары или дополнением до определенного числа (задача № 2));

б) решение с конца (задача № 1).

Самостоятельная работа

5. Алеша Попович и Добрыня Никитич по очереди воюют с девятиглавым змеем. Они по очереди ходят к его пещере и отрубают 1, 2 или 3 головы. Как начинающему бой Алеше обрести славу победителя змея (т. е. отрубить последнюю голову)?
6. В куче лежат 50 камней. Двое по очереди добавляют в нее любое число камней от 1 до 10 выиграет тот, кто первым сумеет довести количество камней до 100. Кто это будет — первый или второй? Сколько ходов потребуется победителю?
7. Брат и сестра по очереди пишут цифры со старшего разряда по порядку вплоть до младшего. Начинать с нуля нельзя, а остальные цифры — совершенно произвольные. Если записанное число разделится нацело на 11, то победителем объявляется написавший последнюю цифру, а если не разделится, то победителем будет написавший предпоследнюю цифру. Кто выиграет при правильной игре, если всего должно быть записано 6 цифр?
8. *Задание на смекалку.* Слова в фразе стоят на своих местах, но буквы внутри каждого слова переставлены местами. Например: «ПШЬОПЕШИС — ЙЮДЛЕ ШЕСАМЬШИН» — «ПОСПЕШИШЬ — ЛЮДЕЙ НАСМЕШИШЬ». Поставьте буквы на свои места, прочтите и запишите получившуюся фразу: «КОМСАВ ЕН СУЗАР ЛИСТАСОРЬ».

Домашнее задание

9. Расшифруйте ребус, если одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, а разные цифры — разными буквами:

ВАГОН + ВАГОН = СОСТАВ

10. В подвале замка Баскервиль-Холл лежат две кучи камней, по 100 штук в каждой. Шерлок Холмс и доктор Ватсон по очереди берут из них камни, за один раз можно взять любое ненулевое число камней из одной из куч. Пропускать ход нельзя, проигрывает тот, после хода которого камней не останется. Первым ходит Холмс. Кто из игроков выиграет при правильной игре?

11. Вася и Петя играют в следующую игру. Сначала имеется число 1. Первым ходом его можно умножить на любое число от 2 до 9 включительно. Следующим ходом получившееся число умножается на любое число от 2 до 9 и т. д. Ходы делаются по очереди. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Начинает Вася. Кто выиграет при правильной игре?

Решения и ответы

5. Рассуждаем с конца. Чтобы победить Алеше, перед последним ударом Алеши у змея должно остаться не более 3 голов. Значит, при последнем ударе Добрыни у змея должно быть 4 головы. Тогда срубив любое число голов, Добрыня проигрывает. До этого удара вместе они срубили 5 голов: два раза рубил Алеша и 1 раз — Добрыня. Тогда стратегия Алеши будет такой: первым ударом он срубает 1 голову, а вторым, в зависимости от того, сколько голов срубил Добрыня (Добрыня — 1, Алеша — 3; Добрыня — 2, Алеша — 2; Добрыня — 3, Алеша — 1).

6. Рассуждаем с конца. Чтобы последним ходом игроку получить 100, предыдущим надо получить 89 камней, а до этого 78; 67; 56. Значит, выигрывает первый при такой стратегии: сначала он добавляет 6 камней в кучу, камней будет 56. Второй кладет k камней, а первый дополняет это число до 11, то есть кладет $11 - k$ камней. Третьим ходом первый получает 78 камней, четвертым — 89 и пятым — 100.

7. Выиграет тот, кто будет писать вторым. Ему надо копировать цифры первого. Тогда получится число $aabbcc$, которое делится на 11.

8. Москва не сразу строилась.

9. $85\,679 + 85\,679 = 171\,358$.

10. Выиграет доктор Ватсон. Он должен руководствоваться следующей стратегией. Если после очередного хода Холмса в каждой кучке осталось не менее чем по 2 камня, то Ватсон уравнивает число камней в кучках. Если после хода Холмса в одной из кучек остался 1 камень, а в другой не менее одного, то Ватсон забирает все камни из второй кучки (где не менее одного камня). Если после хода Холмса в одной из кучек 0 камней, а в другой не менее двух, то Ватсон берет из последней кучки все камни, кроме одного. Наконец, рассмотрим ситуацию, когда после хода Холмса остался 1 камень в одной кучке и 0 — в другой и Ватсон должен вроде как проиграть. Но возможно ли это? При этом перед ходом Холмса в кучах должно быть либо 0 и N камней, либо 1 и N камней. Но по стратегии Ватсона, после его хода может остаться либо N и N , либо 1 и 0 камней, то есть рассмотренные выше ситуации для Холмса просто невозможны.

11. Первым ходом Вася умножает данное число 1 на 4, 5 или 6. После любого ответного хода Пети образуется число в диапазоне от 8 до 54. Умножая это число на соответствующее однозначное, Вася всегда сможет получить число из диапазона от 56 до 111. В этом случае после ответного хода Пети число будет лежать в диапазоне от 112 до 999, и следующим ходом Вася обязательно выиграет.

Ответ: выиграет Вася.

Методический комментарий. Если в 5 классе на занятии кружка не рассматривался признак делимости на 11, то его необходимо сформулировать: Если разность суммы цифр, стоящих на четных

местах и стоящих на нечетных местах, делится на 11, то и само число делится на 11. (Данный признак будет применяться при решении задачи № 7.) А так как число шестизначное, то максимальная сумма трех цифр может быть 27. Значит, надо записать такое число, разность сумм цифр у которого, стоящих на четных и нечетных местах, была бы 0, 11 или 22. Впрочем, некоторые школьники смогут решить эту задачу и без указанного признака, сразу догадавшись, что число $aabbcc$ делится на 11.

Так как наибольшие трудности вызывает решение задачи № 11, то можно порекомендовать следующие виды помощи учащимся для нахождения решения:

- При каких вариантах чисел возможен выигрыш одним ходом?
- Какие варианты чисел могут получиться при первом ходе Пети, а при втором ходе Васи?
- Как поступить Васе при первом ходе, чтобы выиграть?

Занятие 11

Арифметические задачи

Работа по теме занятия

1. Выписаны подряд все натуральные числа:

123456789101112....

Какая цифра будет записана на 2005 месте?

2. Сколько нулями оканчивается число

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \dots 99 \cdot 100?$

3. Вычислите: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2005 \cdot 2006}$.

4. Какой цифрой оканчивается 3^{2004} ?

Сообщение ученика: Числа натурального ряда и мистические суеверия.
Примерное содержание сообщения

Натуральные числа возникли с появлением у человека потребности к практической деятельности. Числовые представления (как и наша речь) неразрывно связаны с существованием самого человека, так как на всех ступенях своей истории он был связан с процессом счета окружающих предметов и проведением каких-то измерений. Этот процесс у отдельных народностей, находящихся на ранней ступени своего развития, не заходил дальше определенного числа. Некоторые числа человек связывал с конкретными представлениями об окружающих предметах: один — голова, Солнце, Луна и т. д., два — пара глаз, пара рук,

пара ушей и т. д. Также число два стояло в основе противопоставлений. Например, Небо и Земля, День и Ночь, Жизнь и Смерть. До настоящего времени существуют племена, у которых этот процесс ограничен числами два или три и числом, которое равносильно понятию «много» или «тьма», не поддается счету и находится за пределами человеческих возможностей.

Наибольшие числа натурального ряда, которые постигались в результате счета, породили у человека много числовых суеверий и мистических представлений, были для него таинственными, наделялись сверхъестественными свойствами и считались священными.

Приписывание числам таких свойств не избежал даже греческий математик Никомах, живший в конце I века н. э., автор знаменитой книги «Введение в арифметику». Он полагал, что «...единица есть разум, добро, гармония, счастье и в то же время материя, тьма, хаос; она соединяет в себе четное с нечетным и женское с мужским. Два есть начало неравенства, противоречия; оно есть мнение, ибо во мнении встречаются истина с ложью. Три есть первое настоящее число, так как оно имеет начало, середину и конец и потому есть число совершенное».

У многих народов больше всего суеверий возникло с числами три, семь и тринадцать.

Суеверия, связанные с числом три, относятся к тому времени, когда у древних людей счет не доходил дальше трех. На этой основе в христианской религии возведено в догму представление о Святой Троице — о едином Боге, выступающем в трех лицах: Бога Отца, Бога Сына, Бога Духа Святого. Сюда же относится и так называемое трехперстное крестное знамение, якобы защищающее верующих от злых духов. Существует масса версий, а также пословиц и поговорок, содержанием которых является число три, приносящее несчастье: «третий не прикуривает», «не везет до трех раз» и т. д. В то же время имеется ряд других пословиц и поговорок, которые говорят о том, что это число приносит счастье. Число три очень часто встречается

в русских народных сказках: три царевны, три сына, на третий раз и т. п. Любопытно то, что число три рассматривалось не только как счастливое (Бог любит троицу), но и как несчастное (треклятый).

Аналогично происхождение примет, пословиц и поговорок, связанных с числом семь. В древнем Вавилоне люди наблюдали семь подвижных планет: Солнце, Луна, Марс, Меркурий, Юпитер, Венера и Сатурн. Они обожествляли их и почитали их как богов. Каждый седьмой день считался священным и объявлялся днем отдыха от трудов, а планетам астрологи приписывали (и теперь приписываю) особое свойство, которое оказывает влияние на судьбы людей. Поэтому число семь в древнем Вавилоне имело магическое действие. Для арабов, ассирийцев, евреев это число было клятвенным. В библии говорится о «семи духах божьих», «семи светильниках» и т. д.; У греков: «семь чудес света», «семь мудрецов» и т. д.; «крепко как семь» — клятва у французов. У русских: «у семи нянек дитя без глазу», «семь раз отмерь, один раз отрежь», «семь бед — один ответ», «семеро одного не ждут» и т. д. Число семь считается счастливым. Почему так? Ответ был получен американским психологом Миллером. Он объяснил особенности числа семь пропускной способностью нервной системы человека. На основании экспериментальных данных оказалось, что самые разные испытуемые могут без ошибок сравнить в среднем только 7 раздражителей, а человек при кратковременном восприятии мгновенно может охватить не более семи сходных предметов.

Всем известен панический страх перед числом тринадцать («чертовой дюжиной»). Истоки этого поверья относятся к древним временам, когда у некоторых народов основанием системы счисления было число двенадцать (отсюда деление года на 12 месяцев, счет дюжинами и т. д.). Оно замыкало для них натуральный ряд, поэтому за числом 12 шло неизвестное, непостижимое число, а значит, опасное для простых смертных. По их представлению, это число могло приносить только несчастье. В связи с этим во

многих гостиницах некоторых стран (Англия, США и др.) отсутствуют номера с числом тринадцать, лифт не останавливается на тринадцатом этаже, нет маршрутов городского транспорта с номером тринадцать и т. д. Моряки стараются тринадцатого числа не выходить в море.

Но эти суеверия, относящиеся к числу 13, у славян не имели места. В качестве примера можно привести такой факт. В древней Руси были возведены храмы с тринадцатью куполами — Софийский в Новгороде, Полоцкий и Киевская София, однако несчастливыми они не считались.

Самостоятельная работа

Для всех учащихся:

5. Вычислите: $(2 + 4 + 6 + \dots + 2006) - (1 + 3 + 5 + \dots + 2005)$.
6. Делится ли число $11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 51 \cdot \dots \cdot 2001 - 1$ на 10? Почему?
7. Из числа 123456789101112...9899100, образованного путем последовательного приписывания друг за другом всех чисел от 1 до 100, вычеркните 100 таких цифр, чтобы оставшееся число было наибольшим.
8. Найдите дробь со знаменателем 19, которая больше $\frac{5}{7}$, но меньше $\frac{6}{7}$.

Для учащихся 6 класса:

9. Сколько всего пятизначных чисел можно составить из цифр 0 и 1? Цифры могут повторяться. Запишите эти цифры.
10. Запишите число 1 000 000, имея только цифру 3, знаки арифметических действий и скобки, если они необходимы. Можно ли в этой записи обойтись без действия деления?

11. Запишите 100

- а) с помощью пяти единиц и знаков действий;
- б) с помощью пяти пятерок и знаков действий;
- в) с помощью пяти троек и знаков действий.

Для учащихся 7 класса:

12. Найти последнюю цифру числа 8^{2006} .

13. Сравните 31^{11} и 17^{14} .

14. Что больше: $\frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$ или $\frac{10^{11} + 1}{10^{12} + 1}$? Найдите несколько способов решения.

15. Какой цифрой оканчивается число $11^{11} + 12^{12} + 13^{13}$?

Домашнее задание

Всем учащимся:

16. Поставьте в выражении скобки так, чтобы получилось верное равенство: $270 + 120 + 390 : 3 \cdot 5 = 1120$.

17. На некотором острове каждый житель является либо рыцарем (всегда говорит правду), либо лжецом. Из трех островитян двое сказали:

Первый: «Мы все лжецы».

Второй: «Только один из нас рыцарь».

Кто из них рыцарь, а кто лжец?

Учащимся 6 класса:

18. Сколько всего имеется пятизначных чисел, сумма цифр в которых равняется трем? Причем в записи каждого числа цифра 1 может встречаться не более одного раза.

Учащимся 7 класса:

19. Какое из чисел 127^{23} или 513^{18} больше?

Решения и ответы

1. Начнем считать цифры. От 1 до 9 — 9 цифр; от 10 до 99 — 180; остается $2005 - 189 = 1816$. Далее идут трехзначные числа. 1800 цифр будут до числа 699 включительно. 16 цифр уйдут на следующие 5 чисел и первую цифру шестого числа. А это 7.

2. Нули получаются от перемножения цифры 5 на четное число. Сосчитаем число пятерок в произведении. Так как на 5 делится каждое пятое число, то 20 пятерок получим при делении 100 на 5. Но есть числа, дающие по 2 пятерки: это 25, 50, 75, 100. Значит, всего в произведении будет 24 пятерки. Четных же чисел будет больше. Итак, на конце числа будет 24 нуля.

3. Представим каждую дробь вида $\frac{1}{n \cdot (n+1)}$ в виде разности двух дробей: $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$. Тогда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2005 \cdot 2006} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2005} - \frac{1}{2006} = \\ = 1 - \frac{1}{2006} = \frac{2005}{2006}.$$

4. $3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$; $3^5 = 243$; $3^6 = 729$. Замечаем, что 3 и 3^5 оканчиваются на одну цифру 3; 3 и 3^6 — на цифру 9 и т. д. То есть через 4 последняя цифра повторяется. Тогда все числа вида 3^{4p+q} заканчиваются той же цифрой, что и 3^q . Так как $2004 = 4 \cdot 501$, то последняя цифра числа 3^4 будет такая же, как и у числа 3^4 , то есть 1.

5. Исходная сумма равна

$$(2 + 4 + 6 + \dots + 2006) - (1 + 3 + 5 + \dots + 2005) = \\ = 2 + 4 + 6 + \dots + 2006 - 1 - 3 - 5 - \dots - 2005 = \\ = (2-1)+(4-3)+(6-5)+\dots+(2006-2005)=1+1+\dots+1=1003.$$

6. Последняя цифра первого слагаемого оканчивается на 1, поэтому разность оканчивается 0. Значит, число делится на 10.

7. Число будет наибольшим, если в старших разрядах будут стоять девятки. В связи с этим вычеркиваем первые восемь цифр, затем цифры чисел от 10 до 18 и единицу у 19 и так далее до цифры 4 у числа 49. Таким образом, было вычеркнуто $8 + 19 + 19 + 19 + 19 = 84$ цифры. Осталось вычеркнуть еще 16 цифр, а именно цифры чисел 50, 51, 52..., 56 (14 цифр) и дважды цифру 5 у чисел 57 и 58. Всего, таким образом, вычеркнули 100 цифр. Получили число: 9999978596061...9899100

8. $\frac{14}{19}, \frac{15}{19}, \frac{16}{19}$.

9. 16: 10 000, 10 001, 10 010, 10 011, 10 100, 10 101, 10 110, 10 111, 11 000, 11 001, 11 010, 11 011, 11 100, 11 101, 11 110, 11 111.

10. $3\ 333\ 333 : 3 - 333\ 333 : 3 = 1\ 000\ 000$ или $333\ 333 \cdot 3 + 3 : 3 = 1\ 000\ 000$. Нет, так как всегда будет число, кратное трем.

11. а) $111 - 11 = 100$;
б) $5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 100$;
в) $33 \cdot 3 + 3 : 3 = 100$.

12. Находя значения степени $8^1, 8^2, 8^3, 8^4, 8^5$ и т. д., замечаем закономерность: последней цифрой являются 8, 4, 2, 6, а далее они повторяются. Так как $2006 = 501 \cdot 4 + 2$, то 8^{2006} оканчивается той же цифрой, что и 8^2 , то есть 4.

13. Так как 31 и 17 находятся рядом со степенями числа «2», то получаем: $31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} < 2^{56} = (2)^4 = 16^4 < 17^4$. Таким образом, $31 < 17^4$.

14. 1 способ. Найдем разность второй и первой дроби, после упрощения получим:

$$\frac{10^{11} + 1}{10^{12} + 1} - \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1} = \frac{2 \cdot 10^{11} - 10^{12} - 10^{10}}{(10^{12} + 1) \cdot (10^{11} + 1)} =$$

$$= \frac{-81 \cdot 10^{10}}{(10^{12} + 1) \cdot (10^{11} + 1)} < 0.$$

Поэтому

$$\frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1} > \frac{10^{11} + 1}{12^{11} + 1}.$$

2 способ. Найдем частное первой и второй дробей, после упрощения получим:

$$\frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1} : \frac{10^{11} + 1}{10^{12} + 1} = \frac{10^{22} + 10^{12} + 10^{10} + 1}{10^{22} + 2 \cdot 10^{11} + 1} > 1,$$

значит, первая дробь больше.

15. 11^n оканчивается всегда единицей.

12^n оканчивается 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ..., т. е. через 4 цифры повторяются. Так как $12 = 4 \cdot 3$, то 12^2 оканчивается шестеркой.

13^n оканчивается 3, 9, 7, 1, 3, ..., т. е. снова цифры повторяются с периодом 4. Так как $13 = 4 \cdot 3 + 1$, то 13^3 оканчивается тройкой. Так как $1 + 6 + 3 = 10$, то сумма оканчивается нулем.

16. $270 + (120 + 390) : 3 \cdot 5 = 1120$.

17. Рассмотрим несколько вариантов. Пусть первый — рыцарь. Тогда получается, что высказывание «Мы все лжецы» — верное. Но это противоречит тому, что первый — рыцарь. Поэтому первый — лжец. И, значит, не все лжецы.

Пусть второй — лжец. Тогда высказывание «Только один — рыцарь» ложное, значит, рыцарей не 1, а 0 или 2. Но первый — лжец и второй — лжец. Значит, и третий лжец, но это противоречит словам первого, так не все лжецы.

Значит, второй — рыцарь. И он говорит правду. Поэтому третий — лжец.

Итак, лжецы — первый и третий, а рыцарь — второй.

18. 9: 21 000, 20 100, 20 010, 20 001, 12 000, 10 200, 10 020, 10 002, 30 000.

19. Рассмотрим следствия двух очевидных неравенств:

$$127 < 128 \Rightarrow 127^{23} < 128^{23} = (2^7)^{23} = 2^{161},$$

$$513 > 512 \Rightarrow 513^{18} > 512^{18} = (2^9)^{18} = 2^{162}.$$

Так как $2^{162} > 2^{161}$, то и $513^{18} > 127^{23}$.

Методический комментарий. В связи с тем, что на олимпиадах задания по арифметике в 6 и 7 классах сильно отличаются, была предложена такая структура занятия.

Занятие 12

Повторение

Работа по теме занятия

1. Какой цифрой оканчивается число 2004^{2005} ?
2. Клоуны Бим, Бам и Бом вышли на арену в красной, синей и зеленой рубашках (все в разных). Их туфли были тех же цветов (у каждого клоуна свой). Туфли и рубашка Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Бама были зеленые, а рубашка нет. Каких цветов были туфли и рубашка у Бома и Бима?
3. Найдите значение дроби:

$$\frac{\text{К} \cdot \text{О} \cdot \text{T} \cdot \text{L} \cdot \text{A} \cdot \text{C}}{\text{K} \cdot \text{O} \cdot \text{P} \cdot \text{Я} \cdot \text{Ж} \cdot \text{M} \cdot \text{A}}.$$

4. Баба Яга поссорилась со Змеем Горынычем и стала рубить ему головы. При этом она может отрубить ему 1, или 2, или 3 головы. Первоначально у Змея Горыныча было 3 головы. Когда ему отрубают 1 голову, то у него вырастают 3 новые головы; если же отрубают 2 головы, то ничего не вырастает; а если отрубают 3 — вырастает 1 новая голова. Сможет ли Баба Яга отрубить Змею Горынычу все 3 головы окончательно, так чтобы больше голов у него не отрастало?

5. Двое учащихся играют в такую игру. Первый называет двузначное число, второй прибавляет к нему еще какое-нибудь однозначное число; к полученной сумме первый снова прибавляет однозначное число и так далее, пока не получится число 100. Кто выиграет при правильной игре: первый или второй? (Выигравшим считается тот, кто прибавляет последнее число для получения 100.)

6. Сократите дробь: $\frac{609609609}{205205205}$.

7. В первенстве по хоккею участвует 5 команд. Каждые две из них должны сыграть между собой один матч. Доказать, что в любой момент соревнований имеются две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

Математические фокусы

Большинство математических фокусов связано с «угадыванием» чисел. Математической основой фокуса чаще всего является некоторое тождество. Все фокусы на «угадывание чисел» делятся на две группы:

- 1) «угадывается» само задуманное число; при этом сообщается отгадчику результат некоторых операций, проведенных над задуманным числом;
- 2) «угадывается» результат некоторых операций над задуманным числом; в этом случае результат не зависит от величины задуманного числа.

Рассмотрим примеры фокусов из каждой группы.

8. Задумайте число, удвойте его, к полученному произведению прибавьте пять. К полученному числу прибавьте 4 раза его же, затем к результату прибавьте 10. Полученную сумму умножьте на 10. Какое число у вас получилось? В чем секрет фокуса?

Секрет фокуса. Пусть задумано число x . Проследим, какие изменения будут с ним происходить. Удвоили — стало $2x$, прибавили 5 — стало $2x + 5$. Взяли число 5 раз — получили $10x + 25$. Прибавили к результату 10 — получили $10x + 35$. Умножили эту сумму на 10 — получили $100x + 350$. Итак, после отнимания числа 350, задуманное число будет число сотен у оставшегося числа.

9. Запишите любое трехзначное число, но такое, чтобы крайние цифры отличались на 5. Поменяйте местами в этом числе

крайние цифры. Получили второе число. Вычтите из большего числа меньшее. Разделите разность чисел на 9. Ответом будет число 55. Почему?

Секрет фокуса. Первое число: $100a + 10b + c$, где a, b, c — соответственно число сотен, десятков и единиц. Тогда второе число будет $100c + 10b + a$. Найдем разность чисел (пусть первое у нас больше): $99a - 99c$. После деления данной разности на 9 получим число $11(a - c)$. Так как $a - c = 5$, то результат будет равен 55.

Домашнее задание

10. Тетрадь, ручка, карандаш и книга стоят вместе 37 рублей. Тетрадь, ручка и карандаш стоят 19 рублей. Книга, ручка и карандаш стоят 35 рублей. Тетрадь и карандаш вместе стоят 5 рублей. Сколько стоит каждый предмет в отдельности?

11. Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз — на 2 см и так далее. Может ли он после 2005 прыжков оказаться там, где начинал? Почему?

12. Придумать свой математический фокус.

Решения и ответы

1. 2004^1 оканчивается на 4, 2004^2 оканчивается на 6, 2004^3 оканчивается на 4. Таким образом, 2004^{2m} оканчивается на 6, а 2004^{2m+1} оканчивается на 4. Так как 2005 — нечетное число, то 2004^2 оканчивается на 4.

2. Использовать 2 таблицы. Ответ: Бом в синих туфлях и зеленой рубашке, Бим в красной рубашке и красных туфлях.

3. Так как в этом ребусе 10 различных букв и цифр — 10, то каждая цифра будет встречаться один раз, в том числе и 0. На нуль делить нельзя, поэтому 0 в числителе. Значит, ответ — 0.

4. Чтобы у Змея Горыныча голов не осталось, необходимо, что бы после очередного удара их было 2. Но после каждого удара количество голов меняется на четное число, поэтому количество голов будет все время нечетным. А значит, Бабе Яге не удастся отрубить все головы у Змея Горыныча.

5. Первому достаточно назвать любое число до 100, оканчивающееся на 0, и он выигрывает.

6. $\frac{609609609}{205205205} = \frac{609 \cdot 1001001}{205 \cdot 1001001} = \frac{609}{205}.$

7. Рассмотрим 2 случая.

1. Все команды сыграли хотя бы один матч. Тогда число сыгранных матчей каждой командой могло быть 1, 2, 3 или 4. Обозначим эти 4 варианта за «клетки», тогда 5 команд будут «зайцами». Так как $5 > 4$, то, по принципу Дирихле, найдется не менее 2 команд, сыгравших одинаковое число матчей.

2. Пусть есть команда, не игравшая матчей. Тогда число сыгранных матчей может быть 0, 1, 2 или 3. Так как команд 5, а вариантов опять 4, то найдутся как минимум 2 команды, которые сыграли к данному моменту одинаковое число матчей (возможно, ни одного).

10. Два первых набора отличаются на книгу, отсюда следует, что книга стоит $37 - 19 = 18$ (р). Аналогично, из первого и третьего условия следует, что тетрадь стоит $37 - 35 = 2$ (р). Ну, и далее, карандаш — 3 р, а ручка — 14 р.

11. Нет. Действительно, пусть кузнечик начинает прыгать из точки 0, тогда после нечетного (по номеру) прыжка четность координаты кузнечика меняется, а после четного прыжка — не меняется. Далее рассмотрим четность координаты, начиная с 1-го прыжка: ННЧЧННЧЧННЧЧ... и найдем, что будет на 2005-м месте в этой последовательности. Так как последовательность повторяется через 4, а $2005 = 501 \cdot 4 + 1$, то после 2005 прыжка координата точки, в которую попадет кузнечик, будет нечетной. А число 0 — четное.

Занятие 13

Математическое соревнование (математическая карусель)

Объяснение правил математической карусели

Математическую карусель придумали И. Рубанов, К. Кноп, С. Волченков в 1997 г. Математическая карусель является разновидностью командных соревнований по решению задач. Состав команды — 6 человек. Побеждает в карусели команда, набравшая наибольшее число очков. При этом задачи решаются на двух рубежах — исходном и зачетном. Но очки начисляются только за задачи, решенные на зачетном рубеже. В начале игры все члены команды располагаются на исходном рубеже, причем им присваиваются номера от 1 до 6. По сигналу учителя команды получают задачу и начинают ее решать. Если команда считает, что задача решена, ее представитель, имеющий номер 1, предъявляет решение учителю. Если оно верное, игрок № 1 переходит на зачетный рубеж и получает задачу там, а члены команды, оставшиеся на исходном рубеже, тоже получают новую задачу. В дальнейшем члены команды, находящиеся на исходном и зачетном рубежах, решают разные задачи независимо друг от друга.

Чтобы понять следующую часть правил, надо представить себе, что на каждом рубеже находящиеся на нем члены команды выстроены в очередь. Перед началом игры на исходном рубеже они идут в ней в порядке номеров. Если члены команды, находящиеся на каком-либо из двух рубежей, считают, что они решили очередную задачу, то решение предъявляют учителю игрок, стоящий в очереди первым. Если решение правильное, то с исходного рубежа этот игрок переходит на зачетный рубеж. При правильном решении задачи на зачетном рубеже игрок возвращается на свое место в очереди. Если решение неправильное, то на исходном рубеже игрок возвращается на свое место в очереди, а с зачетного рубежа переходит

дит на исходный рубеж. Игрок, перешедший с одного рубежа на другой, становится в конец очереди. На исходном и зачетном рубежах команда может в любой момент отказаться от решения задачи. При этом задача считается нерешенной. После того, как часть команды, находящаяся на каком-либо из двух рубежей, рассказала решение очередной задачи или отказалась решать ее дальше, она получает новую задачу. Если на рубеже в этот момент нет ни одного участника, задача начинает решаться тогда, когда этот участник там появляется. За первую верно решенную на зачетном рубеже задачу команда получает 3 балла. Если команда на зачетном рубеже верно решает несколько задач подряд, то за каждую следующую задачу она получает на 1 балл больше, чем за предыдущую. Если же очередная задача решена неверно, то цена следующей задачи зависит от ее цены следующим образом. Если цена неверно решенной задачи была больше 6 баллов, то следующая задача стоит 5 баллов. Если цена неверно решенной задачи была 4, 5 или 6 баллов, то следующая задача стоит на балл меньше. Если же неверно решенная задача стоила 3 балла, то следующая задача тоже стоит 3 балла.

Игра для команды оканчивается, если

- а) кончилось время, или
- б) кончились задачи на зачетном рубеже, или
- в) кончились задачи на исходном рубеже, а на зачетном рубеже нет ни одного игрока.

Время игры, количество исходных и зачетных задач заранее оговаривается.

Игра оканчивается, если она закончилась для всех команд.

Задачи для исходного рубежа

1. У мальчика столько же сестер, сколько и братьев; а у сестры его вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько всего братьев и сестер?

2. В саду живут куры и кролики. Число голов всех животных равно 50, а число ног — 160. Сколько в саду кур и сколько кроликов?
3. Стали вороны садиться по одной на березу — не хватило одной бересы; стали садиться по две — одна береса оказалась лишней. Сколько было ворон и сколько берес?
4. В феврале 2004 года было 5 воскресений. Какого числа было четвертое воскресенье?
5. 4 маляра окрашивают 6 комнат за 5 часов. За какое время 12 маляров окрасят 18 комнат?
6. Учитель предложил решить Саше 6 задач. За каждую нерешенную задачу учитель давал ему 2 дополнительные задачи. В итоге Саше пришлось решать 14 задач. Сколько задач Саше не удалось решить?
7. Три поросенка Наф-Наф, Ниф-Ниф и Нуф-Нуф решили построить дом. Каждый из трех поросят купил по 12 бревен и распилил их на 30 однometровых чурбаков. Длина каждого из купленных бревен была равна либо двум, либо трем, либо четырем метрам. Сколько всего распилов пришлось сделать трем поросятам?
8. Сколько существует двузначных чисел, представимых в виде суммы двух натуральных чисел, каждое из которых кратно 11 или 17.
9. За новогодним столом сидят 20 человек, 16 из них носят имя Саша. В полночь они рассаживаются за круглым столом, и каждый загадает одно желание. Исполнится же желание лишь у тех, кто будет сидеть между двумя Сашами. Какое наибольшее число желаний может исполниться?
10. Барон Мюнхгаузен и его слуга Томас подошли к реке. На берегу они обнаружили лодку, способную перевести лишь одного человека. Тем не менее они переправились через реку и продолжили путешествие. Могло ли так быть?

- 11.** Шапокляк в 5 раз тяжелее Чебурашки и на 30 кг легче Гены. Сколько весит Чебурашка, если они все трое вместе весят 140 кг?
- 12.** Какова наименьшая сумма пяти различных по достоинству современных российских монет?
- 13.** Сколько существует трехзначных чисел, цифры в которых расположены по возрастанию слева направо?
- 14.** Сколько существует трехзначных чисел, цифры в которых расположены по убыванию слева направо?
- 15.** Частное втрое больше делимого и вдвое больше делителя. Найдите делимое, делитель и частное.

Задачи для зачетного рубежа

- 16.** Из 26 спичек длиной по 5 см сложили прямоугольник наибольшей площади. Чему равна его площадь?
- 17.** Из пунктов А и Б одновременно навстречу друг другу вышли мальчик и девочка, каждый со своей, но постоянной скоростью, и встретились через час. После этого они, не останавливаясь, пошли дальше и, дойдя до пунктов Б и А, повернули обратно, после чего снова встретились. Сколько времени пройдет между первой их встречей и второй?
- 18.** Записана сумма двух чисел: $68\ 791 + 245\ 194$. Вычеркните четыре цифры из этой записи так, чтобы получилась наименьшая сумма. При этом из каждого числа надо вычеркнуть хотя бы по одной цифре. Чему равна получившаяся сумма?
- 19.** Сейчас угол между часовой и минутной стрелками настенных часов прямой. Чему может быть равен угол между этими стрелками через полчаса?

20. Найдите все натуральные числа, которые в 7 раз больше своей последней цифры.
21. На отрезке AB , длина которого равна 6 см, отмечены две точки: M и K . Известно, что $BM = 2BK$, $AM = 0,8AK$. Найдите длину отрезка MK .
22. Две девочки играют в игру — отрывают лепестки у ромашки. За один ход разрешается отрывать либо один лепесток, либо два лепестка, расположенных рядом друг с другом (между которыми нет оторванных лепестков). Побеждает та девочка, которая оторвала последний лепесток. Кто выиграет при правильной игре?
23. Расшифруйте ребус*:
- $$\begin{array}{r}
 & \text{У} & \text{М} \\
 + & \text{Ш} & \text{У} & \text{М} \\
 \hline
 & \text{В} & \text{М} & \text{Ш}
 \end{array}$$
24. Даны шесть чисел: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Разрешено к любым двум числам прибавлять по единице. Можно ли через несколько ходов сделать все числа равными?
25. Рядом сидят мальчик и девочка.
 Я — мальчик — говорит черноволосый ребенок.
 Я — девочка — говорит рыжий ребенок.
 Если хотя бы кто-то из них врет, кто — мальчик, а кто — девочка?
26. В бочке не менее 13 ведер бензина. Можно ли отлить 8 ведер с помощью девятиведерной и пятиведерной бочек?
27. В классе 40 учеников. Найдется ли такой месяц в году, в котором отмечают день рождения не менее чем 4 ученика этого класса?

*В условиях маткарусели верным считается хотя бы одно решение ребуса.

28. Из 4 монет одна тяжелее остальных, имеющих одинаковый вес. Можно ли ее узнать с помощью двух взвешиваний на весах с двумя чашечками без гирь?

29. Сколько знаков после запятой в десятичной записи числа $\frac{1}{1\,024\,000}$?

30. В треугольнике один из углов в 2 раза больше второго и на 20° отличается от третьего. Какие значения (в градусах) может принимать наибольший угол такого треугольника?

Ответы и пояснения

1. 4 брата и 3 сестры.

2. 20 кур и 30 кроликов.

3. 4 вороны, 3 березы.

4. 22 февраля.

5. За 5 часов.

6. 4 задачи.

7. 54 распила.

8. 31 число: 22, 28, 33, 34, 39, 44, 45, 50, 51, 55, 56, 61, 62, 66, 67, 68, 72, 73, 77, 78, 79, 83, 84, 85, 88, 89, 90, 94, 95, 96, 99.

9. 14.

10. Да, они подошли с разных берегов реки.

11. 10 килограммов.

12. 166 копеек = 1 рубль 66 копеек.

13. 84. Начинающихся с 1 — 28, с 2 — 21, с 3 — 15, 14 — 10, с 5 — 6, с 6 — 3, с 7 — 1.

14. 120. Решается аналогично.

15. $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

16. 1050 см². Использовать перебор, наибольшая площадь будет у прямоугольника, стороны которого состоят из 6 и 7 спичек.

17. 2 ч.

18. 2865.

19. 105° или 75°.

20. Одно число: 35.

21. 1 см.

22. Побеждает девочка, которая будет отрывать лепестки второй при следующей стратегии. При любом первом ходе первой девочки вторая делает такой ход, который разбивает все оставшиеся лепестки на две симметричные части. Рассмотрим два случая.

Случай 1: число лепестков у ромашки — нечетное. Если первая девочка отрывает 1 лепесток, то вторая отрывает 2 лепестка, но так, чтобы оставшиеся разбились на 2 симметричные части. Если первая девочка отрывает 2 лепестка, то вторая отрывает 1 лепесток, но так, чтобы оставшиеся лепестки разбились на симметричные части относительно центра ромашки.

Случай 2: число лепестков у ромашки — четное. Если первая девочка отрывает 1 лепесток, то вторая отрывает тоже

1 лепесток, но так, чтобы оставшиеся разбились на 2 симметричные части. Если первая девочка отрывает 2 лепестка, то вторая отрывает тоже 2 лепестка, но так, чтобы оставшиеся лепестки разбились на симметричные части относительно центра ромашки.

Следующие свои ходы вторая девочка делает симметрично ходам первой девочки.

23. $74 + 874 = 948$.

24. Нет, так как сумма 6 чисел первоначально была нечетной, а в случае равенства всех чисел она будет четной.

25. Врут оба. Рыжий ребенок — мальчик, черноволосый ребенок — девочка.

26. Да.

5 ведер	0	0	5	0	4	4	5
9 ведер	0	9	4	4	0	9	8

27. Да, доказывается методом от противного или с помощью обобщенного принципа Дирихле.

28. Да, разбив 4 монеты по 2 и взвешивая монеты каждой пары.

29. 13 знаков.

30. 80° и 84° .

Методический комментарий. Перед началом карусели учитель должен ознакомить школьников с правилами, обсудить их и распределить игроков по командам. После проведения математической карусели нужно подвести итоги, наградить победителей. Следует также разобрать задачи, вызвавшие проблемы на зачетном рубеже. В качестве домашнего задания можно дать задачи, вызвавшие проблемы на исходном рубеже.

Для исходного рубежа подбирались разнообразные задачи с различной сложностью. При этом аналогичные задачи на занятиях

кружка не решались. А для зачетного рубежа подбирались задачи, использующие идеи и методы решения, как рассмотренные на занятиях кружка, так и те, которые планировалось рассмотреть на ближайших занятиях.

Занятие 14

Текстовые задачи-4 (задачи на движение)

Работа по теме занятия

1. Брату и сестре необходимо было встретить отца, приезжающего на станцию, находящуюся в 6 км от их дома. Если бы они пошли пешком, то опоздали бы к прибытию поезда на 10 мин. Оставалась лишь одна возможность — использовать велосипед. Так они и поступили и прибыли на станцию одновременно за 10 мин до прихода поезда. Как они поступили и за сколько минут до прихода поезда они начали движение, если ходьба пешком втрое медленнее езды на велосипеде? Найдите скорость движения на велосипеде.
2. Проехав половину всего пути, пассажир лег спать и спал до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, который он проспал. Какую часть всего пути пассажир проехал бодрствующим?
3. Поросята Ниф-Ниф и Нуф-Нуф убегают от волка к домику Наф-Нафа. Волку бежать до поросят, если бы они стояли на месте, 4 минуты. Поросятам бежать до домика Наф-Нафа 6 минут. Волк бежит в 2 раза быстрее поросят. Успеют ли поросята добежать до домика Наф-Нафа? Ответ обоснуйте.
4. Мне, чтобы дойти до моего дома от места работы, требуется 10 минут. Моей же собаке Арни, если она сразу побежит домой, — 2 минуты. Но все дело в том, что, как только я скомандую «Домой!», Арни начинает носиться от меня до дома, затем обратно ко мне, потом снова от меня до дома и так до тех пор, пока я не дойду до дома. Я знаю, что расстояние от работы до моего дома равно 800 метров. Спрашивается: какое расстояние в сумме пробежит Арни, если, уходя с работы, я ей скомандовал «Домой!»?

5. Из города Котлас в город Коряжма автомобиль ехал со скоростью 40 км/ч в течение 1 часа. Обратно автомобиль двигался уже со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля.

6. Два ученика вышли одновременно из одного дома в школу. У первого ученика шаг был на 20% короче, чем у второго, но зато он успевал за одно и то же время делать шагов на 20% больше. Кто из них раньше пришел в школу?

7. По кольцевой дороге курсируют с одинаковой скоростью и равными интервалами 12 трамваев. Сколько трамваев надо добавить, чтобы при той же скорости интервалы между трамваями уменьшились бы на одну пятую?

Повторение

8. Легенда гласит, что в одной давно забытой стране был храм; в этом храме находились статуи трех богов: бога правды, бога лжи и бога дипломатии, которые были расположены в один ряд. Они обладали одним замечательным свойством: отвечали на вопросы верующих. Было известно, что бог правды всегда говорил правду, бог лжи всегда говорил ложь, а бог дипломатии — иногда правду, а иногда ложь. Внешне статуи были совершенно одинаковые, и никто из верующих не знал, кто же бог лжи, бог правды, бог дипломатии. В связи с этим верующим приходилось обращаться к жрецам, чтобы выяснить, что же в ответах богов является правдой. И вот однажды молодой крестьянин по прозвищу Простак пришел в храм с твердым намерением узнать, какая статуя каким богом является. Он смиренно подошел к статуе, которая была расположена от него справа, и спросил ее: «Какой бог находится рядом с тобой?» Статуя ответила: «Бог правды». Тогда он обратился к статуе крайней слева и задал тот же вопрос: «Какой бог находится рядом с тобой?» Статуя ответила: «Бог лжи». Тогда он обратился к статуе, стоящей в центре, и спросил: «Кто же ты?» На что

та ответила: «Бог дипломатии». «Теперь все ясно», — сказал себе Простак. Он вышел из храма и рассказал людям, какая статуя каким богом является. Спрашивается: каким образом Простак это узнал?

9. Не выполняя деления, докажите, что значение выражения $200\ 600 \cdot 1002 + 2006 \cdot 100\ 300$ делится на 2005.

Домашнее задание

10. Встретились два математика, *A* и *B*. *A* спросил: «А сколько лет твоим четырем сыновьям?». На что *B* ответил, что произведение их возрастов равно 36, а сумма равна номеру проезжающего мимо автобуса. Подумав немного, *A* сказал, что этой информации ему недостаточно. Тогда *B* добавил: «Да, я забыл сказать, что мой старший сын занимается плаванием», и *A* назвал возраст детей. Как это ему удалось?

11. Путешественник в первый день прошел 20% всего пути и 2 км. Во второй — прошел 50% остатка и еще 1 км. В третий день — 25% оставшегося пути и еще 3 км. Остальные 18 км пути он прошел в четвертый день. Какова длина пути, пройденного путешественником?

12. Имеется 4 одинаковые по виду монеты. Известно, что среди них 3 настоящие, а одна — фальшивая, но неизвестно, какая именно, и неизвестно, легче она остальных или тяжелее. Как с помощью двух взвешиваний на весах с двумя чашками без гирь выявить фальшивую монету?

Одному из учащихся предложить подготовить сообщение об Архимеде к занятию № 16.

Решения и ответы

1. Чтобы прийти одновременно на станцию, надо половину пути каждому ехать на велосипеде и половину пути идти пешком. Обозначим за x мин время движения брата и сестры пешком, которое они затратили бы на 6 км. Тогда время движения пешком половины пути будет $\frac{1}{2}x$ мин, а время движения на велосипеде будет $\frac{1}{2}x : 3$ (мин). Тогда все время движения брата с сестрой на велосипеде и пешком будет равно $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x : 3 = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x\right)$ мин. Так как брат и сестра пришли за 10 мин до прихода поезда, используя велосипед, и опоздали бы на 10 минут, идя пешком, то получим следующее уравнение: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x + 10 = x - 10$. Решением уравнения будет $x = 60$ минут.

Значит, брат с сестрой вышли до прихода поезда за 50 минут, при этом 30 минут каждый из них шел пешком и 10 минут — ехал на велосипеде. Поэтому скорость движения на велосипеде будет равна 3 км: 10 мин = $\frac{3}{10}$ км/ч = 18 км/ч.

2. Изобразим путь пассажира отрезками (рис. 26):

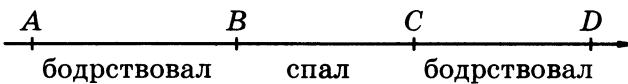


Рис. 26

Обозначим за S отрезок CD , тогда $BC = 2S$ (пока спал), всего $BD = 3S$, но $AB = BD$, значит, $AD = 6S$. Бодрствовал он на AB и CD , $AB + CD = 3S + S = 4S$. Пассажир бодрствовал $\frac{4S}{6S} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (пути).

3. Так как волку надо будет потратить $4 + 6 : 2 = 7$ минут, то поросенка успеют добежать до домика Наф-Нафа.

4. Собака за одно и то же время пробегает расстояние в 5 раз больше, чем я. При этом неважно, как она бегает. Так как я прошел 800 м, то Арни пробежит в 5 раз больше, то есть 4000 м, или 4 км.

5. 1) $40 : 1 = 40$ (км) — расстояние от Котласа до Коряжмы;
 2) $40 : 60 = \frac{2}{3}$ (ч) — время движения на обратном пути;
 3) $40 \cdot 2 = 80$ (км) — весь путь;
 4) $1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$ (ч) — все время;
 5) $80 : 1\frac{2}{3} = 48$ (км/ч).

Ответ: средняя скорость равна 48 км/ч.

6. Обозначим длину шага второго ученика за x м, а число шагов, которое успевал делать второй ученик за некоторое время за y , тогда длина шага первого ученика будет равна $0,8x$ (м). Так как первый делал шагов за некоторое время больше на 20% второго, то он сделает за это же время $1,2y$ шагов. Тогда расстояния, пройденные первым и вторым учеником за указанный промежуток времени, будут находиться соответственно как $0,8x \cdot 1,2y$ и xy . Так как $0,96xy < xy$, то второй ученик пройдет большее расстояние, а значит, он раньше придет в школу.

7. Так как длина интервала обратно пропорциональна числу трамваев, то трамваев должно быть

$$12 : \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 12 : \frac{4}{5} = 12 \cdot \frac{5}{4} = 15.$$

Значит, надо добавить 3 трамвая.

8. Статуя справа, судя по ее ответу, не является богом правды. Предположим, что справа бог лжи. Значит, в центре дипломат и тогда слева бог правды, но он своим ответом солгал. Противоречие.

Остается последний вариант, что справа бог дипломатии. Таким образом, справа — бог дипломатии, слева — бог правды, в центре — бог лжи.

9. Вынесем общие множители 100 и 2006. Получим, что исходное выражение равно $2006 \cdot 100 \cdot (1002 + 1003)$, что, очевидно, делится на 2005.

10. Число 36 можно разложить на 4 натуральных сомножителя девятью способами. При этом получаются 8 различных сумм этих сомножителей (проверьте!). Но раз второй математик сказал, что этой информации недостаточно, то это означает, что возможно больше одного варианта решения, т. е. $1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$ или $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 = 36$ — в обоих случаях сумма сомножителей равна 14. После последней подсказки (про старшего сына) становится ясно, что детям первого математика 1, 2, 2 и 9 лет.

11. Если S км — весь путь путешественника, то в первый день он прошел $(0,2S + 2)$ км, во второй — $0,4S$ км, в третий $(0,1S + 2,5)$ км, в четвертый — 18 км, поэтому:

$$0,2S + 2 + 0,4S + 0,1S + 2,5 + 18 = S.$$

Откуда находим $S = 75$.

12. Взвесим по 1 монете.

1 случай. Весы в равновесии — фальшивая монета будет среди оставшихся монет. Заменим одну из монет на ту, которую не взвешивали. Если весы останутся в равновесии, то фальшивая монета — оставшаяся. Если не в равновесии — то та, которую положили на весы.

2 случай. Весы не в равновесии — фальшивая монета на весах. Заменим одну из монет на весах на настоящую монету. Весы уравновесились — фальшивая монета — та, которую заменили, не уравновесились — та, которая осталась на весах после первого взвешивания.

Занятие 15

Взвешивания

Работа по теме занятия

- 1.** Имеются чашечные часы без гирь и две монеты, одна из которых фальшивая, причем легче другой. Требуется выявить фальшивую монету.

- 2.** Имеются чашечные часы без гирь и три монеты, одна из которых фальшивая, причем легче другой. Требуется выявить фальшивую монету.

- 3.** Имеется четыре одинаковых по виду монеты, одна из которых фальшивая, легче других. Требуется определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний потребуется?

- 4.** Имеется пять одинаковых по виду монет, одна из которых фальшивая, легче других. Требуется определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний потребуется?

- 5.** Имеется шесть одинаковых по виду монет, одна из которых фальшивая, легче других. Требуется определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний потребуется?

- 6.** Имеется семь одинаковых по виду монет, одна из которых фальшивая, легче других. Требуется определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний потребуется?

- 7.** Имеется восемь одинаковых по виду монет, одна из которых фальшивая, легче других. Требуется определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний потребуется?

8. Имеется девять одинаковых по виду монет, одна из которых фальшивая, легче других. Требуется определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний потребуется?

Повторение

9. Путник шел в гору со скоростью v км/ч, а с горы $2v$ км/ч. Какова средняя скорость путника, если он поднимался в гору и возвращался в исходный пункт у подножия горы по одной и той же тропинке?

10. Из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу выехали велосипедист и мотоциклист. Через 30 минут велосипедисту оставалось проехать 3 км до середины пути. Мотоциклист же через 20 минут после начала движения уже отъехал на 2 км от середины пути. Через какое время после начала движения произошла их встреча?

Работа по теме занятия

11. Из 27 монет одна — фальшивая, она легче остальных. Можно ли найти ее за 3 взвешивания?

12. Из четырех внешне одинаковых монет две весят по 10 г, а две другие — по 9 г. Имеются чашечные весы со стрелкой, показывающей разность масс грузов, положенных на чащеки. Как за одно взвешивание найти хотя бы одну десятиграммовую монету?

13. Какой вес должна иметь каждая из трех гирь для того, чтобы с их помощью можно было бы взвесить любое целое число килограммов от 1 кг до 10 кг на чашечных весах (гири можно ставить на обе чащеки). Обоснуйте свой ответ.

Домашнее задание

14. В 4 мешках все монеты настоящие (весят по 10 г), а в одном все фальшивые (весят по 11 г). Одним взвешиванием на точных весах со стрелкой определите, в каком мешке фальшивая монета.
15. В гостинице остановился купец. У него для расплаты за проживание была лишь одна серебряная цепочка, состоящая из 7 звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он расплачивался одним звеном цепочки. Какое звено цепочки надо распилить, чтобы прожить в гостинице 7 дней и ежедневно расплачиваться с хозяином? (Хозяин мог давать сдачу звеньями, полученными им ранее.)
16. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 15 ч 30 мин?

Решения и ответы

1. Положить по одной монете на каждую чашечку весов, которая будет вверху, та фальшивая.
2. Положить 2 монеты на чашечки весов, если они в равновесии, то фальшивая — оставшаяся; если не в равновесии, то фальшивая — на верхней чашечке весов.
3. Разбиваем монеты на две кучки по две монеты, кладем их на весы. Та кучка, которая будет легче, содержит фальшивую монету. Совершив второе взвешивание, узнаем фальшивую монету.

Можно взвешивать по одной монете. Если у двух монет равновесие, то среди них фальшивой монеты нет. Тогда взвешиваем оставшиеся две монеты и определяем фальшивую. Если при первом случае получилось не равновесие, то сразу определяем фальшивую монету.

Итак, минимальное число взвешиваний — 2 (хотя если повезет, то можно определить фальшивую монету и за одно взвешивание).

4. Взвешиваем по 2 монеты. Если равновесие, то оставшаяся монета — фальшивая. Если весы — не в равновесии, то из той пары, которая легче, определяем фальшивую монету. Потребуется два взвешивания.

5. Взвешиваем по 3 монеты. Выбираем более легкую кучку. Далее поступаем аналогично задаче 2. Всего достаточно 2 взвешиваний.

6. Можно отложить в сторону одну из монет и взвесить по 3 монеты. Если весы — в равновесии, то фальшивая монета — оставшаяся; если — не в равновесии, то, определив более легкую кучку, берем из нее 2 монеты и взвешиваем их. Если весы снова в равновесии, то оставшаяся монета — фальшивая. Если весы не в равновесии, то на чашечке, которая поднимется вверх, будет фальшивая монета. Можно поступить и иначе. Разбиваем 7 монет на 2 кучки: по 4 и 3 монеты. В начале работаем с четырьмя монетами: взвешиваем две и две монеты. Если весы уравновесились, то фальшивая среди 3 оставшихся монет. Ее определяем способом, описанным в задаче № 2. Если весы не в равновесии, то фальшивая монета на чашечке весов, которая поднялась вверх. Определяем ее следующим взвешиванием. Итак, понадобилось всего два взвешивания.

7. Разделив монеты на кучки по 4 монеты или на кучки по 2, 3 и 3 монеты.

1 способ. При первом взвешивании определяем более легкую кучку из 4 монет, затем поступаем так, как в задаче № 3 (всего — 3 взвешивания).

2 способ. Сначала взвешиваем по 3 монеты. Если весы уравновесились, то фальшивая монета находится среди оставшихся двух. Ее определяем вторым взвешиванием. Если весы не уравновесились, то фальшивая монета среди трех монет, находящихся на чашечке весов, которая поднялась вверх. Ее

определяем вторым взвешиванием (задача № 2). Значит, можно определить фальшивую монету за 2 взвешивания.

8. Разделим монеты на кучки по 3 монеты и первым взвешиванием определим кучку, в которой фальшивая монета. Затем вторым взвешиванием определяем из этих трех монет фальшивую монету.

9. Обозначим за s км расстояние, пройденное путником в одном направлении, тогда $\frac{s}{v}$ ч будет время, затраченное на подъем, а $\frac{s}{2v}$ ч будет время, затраченное путником на спуск. Тогда время, затраченное на подъем и спуск, будет равно $\frac{s}{v} + \frac{s}{2v}$ (ч), а пройденное расстояние — $2s$ (км). Тогда средняя скорость путника будет равна $2s$:

$$\left(\frac{s}{v} + \frac{s}{2v} \right) = \frac{4v}{3} \text{ (км/ч)}.$$

10. Обозначим скорости велосипедиста и мотоциклиста за x и y , найдем пройденные расстояния за 30 и 20 минут: $0,5x$ и y . Учитывая, что за 30 минут велосипедист не доехал до середины 3 км, найдем расстояние $AB = 2(0,5x + 3)$. Рассуждая аналогично про мотоциклиста, найдем снова $AB = 2\left(\frac{1}{3}y - 2\right)$. Приравнивая правые части в этих двух равенствах, находим, что $x = \frac{2}{3}y - 10$. Так как время встречи будем равно отношению AB к сумме скоростей велосипедиста и мотоциклиста, то найдем это отношение:

$$\frac{x+6}{x+y} = \frac{\frac{2}{3}y-4}{\frac{2}{3}y-10+y} = \frac{2(y-6)}{5(y-6)},$$

которое будет равно $\frac{2}{5}$ ч = 24 мин.

11. Разделим монеты на кучки по 9 монет и первым взвешиванием определим кучку, в которой фальшивая монета. Затем аналогично разделим 9 монет на три кучки и вторым взвешиванием определяем кучку из 3 монет, в которой будет находиться фальшивая монета. Третьим взвешиванием определяем из этих трех монет фальшивую монету.

12. Положим на левую чашу весов две монеты, а на правую — одну. Возможны четыре случая, показанные в таблице ниже:

Слева	Справа	Оставшаяся монета	Показания стрелки
<u>10 + 10</u>	9	9	11
10 + 9	9	<u>10</u>	10
10 + 9	<u>10</u>	9	9
9 + 9	<u>10</u>	<u>10</u>	8

Таким образом, по показанию стрелки мы можем однозначно определить, с каким из четырех возможных случаев мы имеем дело. Осталось заметить, что в каждом из этих случаев нужная монета без труда находится (отмечено в таблице жирным шрифтом).

13. Например, гири массой 1, 3 и 6 кг. Действительно,

$$10 = 6 + 3 + 1, \quad 9 = 6 + 3, \quad 8 = 6 + 3 - 1, \quad 7 = 6 + 1, \\ 6 = 6, \quad 5 = 6 - 1, \quad 4 = 3 + 1, \quad 3 = 3, \quad 2 = 3 - 1, \quad 1 = 1.$$

Есть и другое решение: 1, 2 и 7 кг.

$$10 = 7 + 2 + 1, \quad 9 = 7 + 2, \quad 8 = 7 + 1, \quad 7 = 7, \quad 6 = 7 - 1, \\ 5 = 7 - 2, \quad 4 = 7 - 1 - 2, \quad 3 = 2 + 1, \quad 2 = 2, \quad 1 = 1.$$

14. Занумеруем мешки числами от 1 до 5. Возьмем из каждого мешка количество монет, равное его номеру. Если все монеты настоящие, то они весили бы $10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$ (г). Но так как в одном мешке монеты фальшивые, значит, вес будет отличаться на столько граммов, сколько монет взяли из данного мешка, а значит, номер мешка совпадет с разницей в массе монет. То есть номер мешка с фальшивыми монетами будет совпадать с последней цифрой веса монет. Например, если получилось 152 г, то фальшивые монеты будут во 2 мешке.

15. Отсоединить третье звено. Тогда цепочка распадется на три части: 1, 2 и 4 звена. В первый день купец отдаст 1 звено, во

второй 2 звена (обратно получит 1 звено), в третий — отдаст вновь 1 звено, в четвертый отдаст 4 звена (обратно получит 1 и 2 звена), в пятый отдаст 1 звено, в шестой отдаст 2 звена (обратно получит 1 звено), в седьмой день отдаст 1 звено.

16. В 15.00 стрелки образовывали прямой угол. За 30 мин минутная стрелка повернулась на 180° , а часовая на 15° . Тогда угол между ними будет равен $180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

Методический комментарий. Первые 9 задач были предложены с целью диагностики математических способностей учащихся. Задачи предлагались все однотипные, но увеличивалось число монет. В задачах 11–14 уже рассматривались и другие случаи.

Занятие 16

Геометрические задачи-2

Работа по теме занятия

1. Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки составляют прямой угол?
2. Найдите угол между часовой и минутной стрелкой в 7 ч 38 мин.
3. Листок календаря частично закрыт предыдущим листком (см. рис. 27). Какая его часть больше — закрытая или открытая?

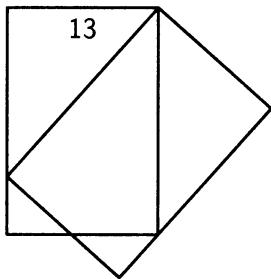


Рис. 27

4. Как с помощью циркуля и линейки разделить угол величиной в 19° на 19 равных частей? Найдите несколько способов.
5. У Коли есть фанерный прямоугольник со сторонами 3 см и 5 см и карандаш. Разрешается прикладывать прямоугольник к бумаге и обводить его (полностью или частично) карандашом. Любые другие действия (например, делать пометки на фанере) запрещены. Как Коле, не нарушая запрета, нарисовать квадрат со стороной 1 см? Опишите, что он должен делать и в каком порядке.

6. Нарисуйте на плоскости три одинаковых квадрата таким образом, чтобы получилось семь квадратов.

7. Замостите плоскость скобками (рис. 28).

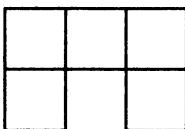


Рис. 28

8. Используя тетрадный лист бумаги, с помощью нескольких его перегибаний постараитесь получить ромб. При этом некоторые части листа могут накладываться одна на другую.

Устные упражнения

9. Сколько ударов в сутки делают часы с боем?

10. В одной сказке хозяин, нанимая работника, предложил ему следующее испытание:

— Вот тебе бочка, наполни ее водой ровно наполовину, ни больше, ни меньше. Но смотри, палкой, веревкой или чем-либо другим для измерения не пользуйся.

Работник справился с заданием. Как он это сделал?

11. *Быстрое возведение в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся на 5:* надо цифру десятков умножить на ближайшее к этой цифре большее целое число и к произведению приписать справа 25. Почему?

Доклад ученика об Архимеде. Примерное содержание доклада

Архимед родился в III в. до н. э. в семье астронома Фидия. Отец и стал первым учителем Архимеда.

Молодость Архимеда прошла в родном городе Сиракузы на средиземноморском острове Сицилия. Став известным ученым, Архимед некоторое время жил также в Александрии — тогдашней столице науки. Там он познакомился с другими крупнейшими математиками того времени (Евклидом, Эратосфеном и др.).

III в. до н. э. был не только золотым веком античной математики, но веком войн. Когда римские войска осадили Сиракузы, то защитные сооружения, сконструированные Архимедом, не позволили штурмом взять этот город. Во время одной из атак римлян в 212 г. до н. э. Архимед погиб. Но и после гибели Архимеда Сиракузы продолжали успешно обороняться, используя его изобретения.

Наряду с успехами Архимеда в военном деле, как инженера, достижения его в математике не менее значительны. Рассмотрим некоторые из них.

1. Архимед поставил точку в долгом споре математиков по поводу того, есть ли бесконечно большие и бесконечно малые числа. Сформулированный им принцип: «Всякое малое число, будучи сложено само с собой достаточное количество раз, превзойдет всякое наперед заданное число», получил название аксиомы Архимеда.

2. Архимед установил, что «периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семидесяти первых», т. е. он приближенно нашел число π :

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

3. Архимед является автором многих изобретений и открытий. В частности, известен описанный Архимедом прибор для определения видимого диаметра Солнца, который можно считать первой измерительной установкой.

По преданию, Архимед сжег римский флот близ Сиракуз с помощью «зажигательных вогнутых зеркал».

4. В сохранившихся письмах Архимеда к одному из Александрийских математиков он предвосхищает идеи интегрального и дифференциального исчислений, с основами которого знакомятся в школе в 10–11 классах.

Повторение

12. На какую наибольшую степень числа 7 делится число

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2005 \cdot 2006?$$

13. Три прыжка волка равны 5 прыжкам лисы. Но за то время, когда волк делает 4 прыжка, лиса делает 7 прыжков. Кто из них бежит быстрее?

14. Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

Домашнее задание

15. Дан угол в 13° . Как получить угол в 11° ?

16. В вершинах куба расставили числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. На каждой грани записали сумму чисел в ее вершинах. Могут ли на гранях получиться шесть последовательных натуральных чисел?

17. Двою друзей, Иван и Николай, живут в одной деревне, недалеко друг от друга. Дома у каждого из них есть настенные часы. Однажды Иван забыл завести свои часы, и они остановились. «Пойду-ка я в гости к Николаю, заодно и посмотрю, который час», — решил Иван. Отправившись в гости и просидев у Николая некоторое время, Иван вернулся домой и верно поставил свои часы. Смогли бы вы сделать так же?

Решения и ответы

1. В течение суток минутная стрелка делает 24 оборота, а часовая 2 оборота, следовательно, минутная стрелка совершает 22 оборота вокруг часовой, составляя при этом с часовой стрелкой дважды прямой угол (отставая на четверть круга и обгоняя на четверть круга). Таким образом, прямой угол между стрелками образуется за сутки 44 раза.

2. За 1 ч минутная стрелка проходит полный круг (360°), а часовая — в 12 раз меньше, то есть 30° . Значит, в 7 ч 00 мин минутная стрелка будет отставать от часовой стрелки на 210° . Через 38 минут минутная стрелка повернется на угол $\frac{38}{60} \cdot 360^\circ = 228^\circ$, а часовая на угол, в 12 раз меньший, т. е. на 19° . Тогда в 7 ч 38 мин угол между ними будет $210^\circ + 19^\circ - 228^\circ = 1^\circ$.

Ответ: 1° .

3. Больше будет закрытая часть, так как (рис. 29) $S_1 = S_2$, $S_3 = S_4$.

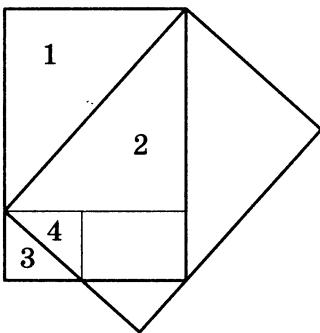


Рис. 29

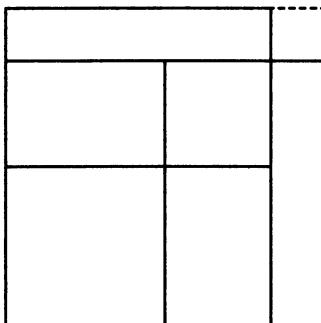
4. Рассмотрим возможные способы решения:

1 способ. Построим окружность с центром в вершине угла, отложим на ней 19 раз угол 19° . В результате получим угол в $1^\circ = 19^\circ \cdot 19 - 360^\circ$. С помощью этого угла делим данный угол на 19 частей.

2 способ. Отложим 5 раз угол 19° , в итоге получим угол 95° . Построим прямой угол и найдем разность 95° и 90° , равную 5° . От одной из сторон угла 19° отложим 4 раза угол 5° , тогда $1^\circ = 5^\circ \cdot 4 - 19^\circ = 1^\circ$. Далее поступаем аналогично способу 1.

3 способ. Отложим два раза угол 19° , получим угол 38° . С помощью циркуля и линейки построим угол 30° (семиклассники знают способ построения) и найдем $8^\circ = 38^\circ - 30^\circ$. Затем разделим 8° на два равных угла и получим угол 4° . Далее поступаем аналогично способу 2.

5. Четырежды приложив шаблон, нарисуем прямоугольники размерами 5×6 и 6×5 , расположенные, как показано на рисунке. Осталось, пользуясь стороной фанерного прямоугольника, как линейкой, продолжить их стороны, чтобы в правом верхнем углу (рис. 30) образовался квадрат со стороной 1.



Rис. 30

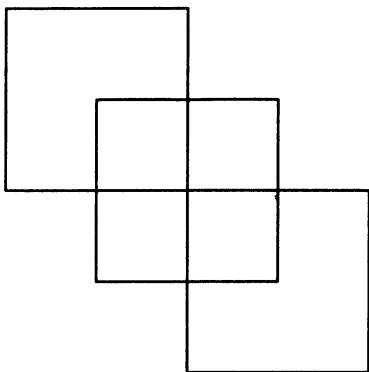
6. Ответ на рисунках (предложено несколько вариантов решения).

Первый вариант (см. рис. 31).

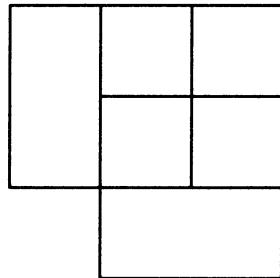
Второй вариант (см. рис. 32).

Третий вариант (см. рис. 33).

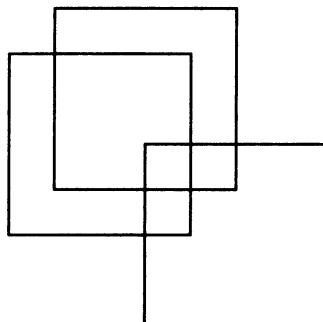
7. Решение на рис. 34.



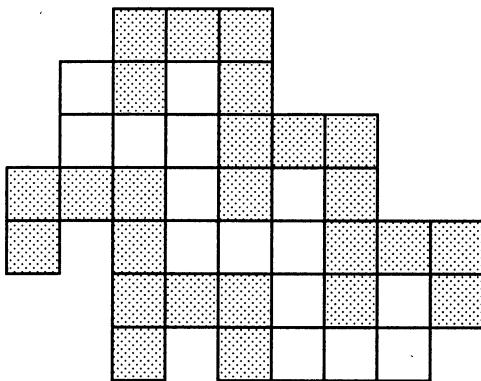
Puc. 31



Puc. 32



Puc. 33



Puc. 34

8. 1 способ. Согнуть дважды лист по середине, затем по линиям AB , BC , CD , DA . $ABCD$ — ромб (рис. 35).

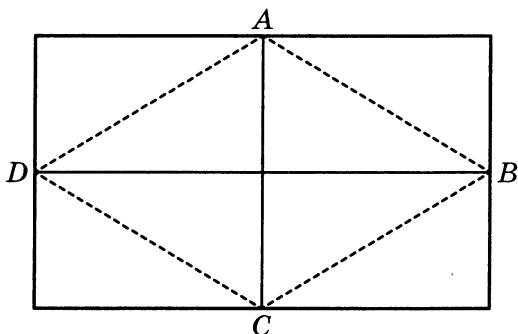


Рис. 35

2 способ. Согнуть лист по диагонали, затем выступающие концы загнуть еще раз. Развернуть лист. Получается ромб. Порядок действий виден из рис. 36.

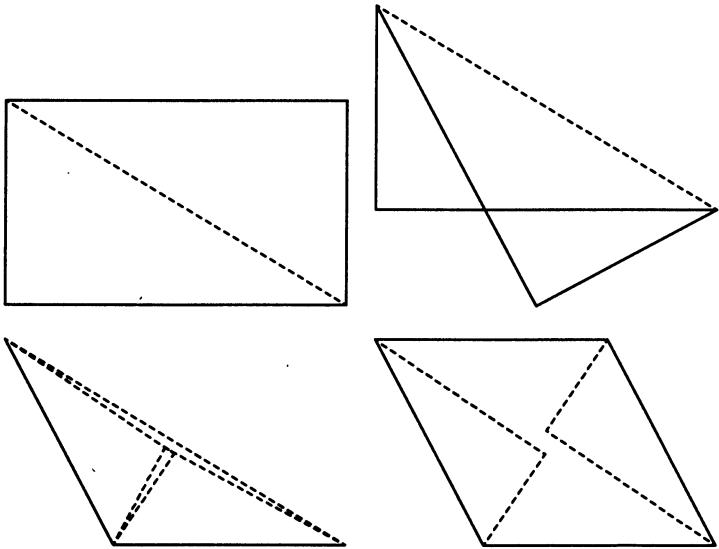
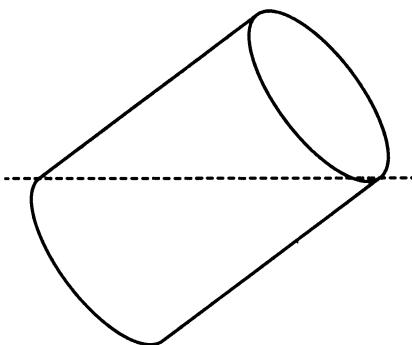


Рис. 36

9. Часы бьют от 1 до 12 ударов 2 раза в сутки, поэтому ответом будет $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 12) = 2 \cdot 13 \cdot 6 = 156$ (ударов).

10. Работник налил в бочку больше половины на глаз, а потом потихоньку выливал воду до тех пор, пока уровень воды не коснулся дна (рис. 37).



Rис. 37

11. Обоснование:

$$\begin{aligned}(10a + 5)^2 &= 100a^2 + 2 \cdot 10a \cdot 5 + 25 = 100a^2 + 100a + 25 = \\&= 100a(a + 1) + 25 = a \cdot (a + 1) \cdot 100 + 25.\end{aligned}$$

12. Посчитаем число «семерок» в разложении произведения $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2006$ на множители:

$$2006 = 7 \cdot \underline{286} + 4; \quad 2006 = 49 \cdot \underline{40} + 46; \quad 2006 = 343 \cdot \underline{5} + 291.$$

Значит, в произведении будет $286 + 40 + 5 = 331$ (семерка). Поэтому данное произведение будет делиться на 7^{331} .

13. Пусть лиса сделает $3 \cdot 7 = 21$ прыжок. По условию задачи волк за это время сделает $3 \cdot 4 = 12$ прыжков. Но 3 прыжка волка равны 5 прыжкам лисы. Значит, 12 волчьих прыжков — это $5 \cdot 4 = 20$ лисьих. Получается, что пока лиса пробегает путь, равный 21 своему прыжку, волк пробежит путь длиной 20 лисьих прыжков. Значит, лиса бежит быстрее.

14. Все числа по модулю равны 1. Так как их произведение равно 1, то множителей (-1) — четное число, а 0 получается, если (-1) и 1 — одинаковое число, т. е. по 11. Поэтому 0 не получается.

15. Один из возможных вариантов: отложить 13 раз угол по 13° , тогда разность развернутого угла и 169° даст искомый угол: $180^\circ - 13 \cdot 13^\circ = 11^\circ$.

16. Найдем сумму чисел на всех гранях. Так как каждая вершина принадлежит трем граням куба, то каждое из восьми чисел в общей сумме утроится. Тогда сумма чисел, записанных на шести гранях, будет равна $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 108$. А число 108 — четное. А среди шести последовательных натуральных чисел три будут четными, а три — нечетными. Поэтому их сумма будет нечетной. Значит, шесть последовательных натуральных чисел на гранях куба получиться не могут.

17. Возможный вариант рассуждения Ивана. Он завел часы дома и посмотрел, сколько было времени по его часам перед уходом. Пусть это будет a . Придя к Николаю, Иван посмотрел на часы Николая, пусть это будет b . Посидев некоторое время у Николая, Иван заметил время, когда он ушел из гостей. Пусть это будет c . Придя домой, Иван посмотрел на свои часы, пусть они показывали d . Тогда $d - a$ будет время, которое Иван отсутствовал дома. А $c - b$ покажет время, которое Иван был в гостях. Тогда $(d - a) - (c - b)$ будет время, которое было проведено Иваном в пути к дому Николая и обратно. Половина этого времени будет потрачена на обратную дорогу. Тогда точное время при возвращении Ивана домой будет находиться как $\frac{d - a - c + b}{2} + c = \frac{b + c + d - a}{2}$.

Методический комментарий. Для решения задачи № 8 (в 5–7 кл.), возможно, придется ввести определение ромба. Обоснования того, что полученная фигура действительно ромб, можно от учащихся не требовать.

Занятие 17

Итоговое занятие (устная олимпиада)

Правила устной олимпиады

Учащимся предлагаются для решения по несколько задач на первом и втором этапах. Продолжительность этапа оговаривается: 30–40 мин. Учащиеся, решив задачу, поднимают руку. К нему подходит учитель или помощник из старшеклассников. Ученик устно рассказывает решение задачи, при этом имеет право показывать свои записи в тетради. В случае верного решения задачи учитель в соответствующей графе таблицы ставит знак «+». Если задача решена неправильно, то ставится «−». Учащийся имеет право на 3 попытки объяснений одной задачи. Если все три попытки решить задачу не привели к успеху, то данную задачу ученик больше не объясняет. Решив оговоренное число задач (2 или 3) с первого этапа, ученик переходит на второй этап, на котором ему предлагается еще несколько задач. Решив какую-то из задач 2 этапа или оставшиеся задачи с первого этапа, ученик вновь поднимает руку и объясняет задачу.

Побеждает ученик, решивший за указанное время наибольшее число задач. В случае одинакового числа верно решенных задач у нескольких учащихся, победителем является ученик, сделавший менее всего попыток.

Проведение олимпиады

Первый этап

1. Имеется два сосуда вместимостью 5 л и 7 л. Как с помощью таких сосудов налить 6 л?

2. Учащиеся школы решили организовать инструментальный ансамбль. Михаил играет на саксофоне. Пианист учится в 9 классе. Ударника зовут не Валерием, а ученика 10 класса зовут не Леонидом. Михаил учится не в 11 классе. Андрей — не пианист и не ученик 8 класса. Валерий учится не в 9 классе, а ударник — не в 11. Леонид играет не на контрабасе. На каком инструменте играет Валерий и в каком классе он учится?

3. Имеется 4 пакета разной массы и весы с 2 чашечками без гирь. С помощью 5 взвешиваний расположите пакеты по весу.

4. Найти значение дроби: $\frac{382 + 498 \cdot 381}{382 \cdot 498 - 116}$.

Второй этап

5. На столе ваза, в которой находится 11 конфет. Двое по очереди берут по одной, две или три конфеты. Проигрывает тот, кому осталась последняя конфета. Кто выиграет при правильной стратегии, если начинает первый?

6. Дан угол в 37° . Построить циркулем угол в 3° .

7. Из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу вышли 2 пешехода и встретились на расстоянии 300 м от А. Дойдя первый до В, а второй до А, они оба повернули обратно и встретились на расстоянии 400 м от В. Найти длину АВ.

8. В школьной математической олимпиаде участвуют 9 учеников 6 класса. За каждую решенную задачу ученик получает 2 зачетных очка, а за каждую нерешенную или решенную неправильно получает -1 зачетное очко (или одно штрафное очко). Всего для решения было предложено 10 задач. Докажите, что среди участников олимпиады найдется, по крайней мере, 2 ученика, набравших одинаковое число очков. (Считается, что ученик, набравший штрафных очков больше, чем зачетных, набрал 0 очков.)

9. Сравнить 9997^{10} и $100\,003^8$.

Подведение итогов олимпиады и занятий кружка

1. Подводятся итоги устной олимпиады, победители награждаются призами. Производится разбор задач, вызвавших затруднение.

2. Учащиеся знакомятся с одной из новых книг по математике, адресованных учащимся. В качестве примера можно предложить книгу И. Ф. Шарыгина «Уроки дедушки Гаврилы, или Развивающие каникулы». Данная книга является рассказом о летних приключениях мальчика в деревне у дедушки, в сюжетную линию которого вплетены занимательные задачи различной степени трудности. Учащимся можно летом предложить познакомиться с данной книгой. И в качестве примера привести фрагмент из книги следующего содержания.

«На радостях был устроен праздничный обед, в котором приняли участие все шестеро. В конце обеда появился арбуз.

— Ну что ж, — сказал дедушка, — придется для ровного счета предложить еще одну задачу.

— Для какого ровного счета? — удивился Федя. — Ведь у нас набралось как раз 200 задач. Куда уж ровнее!

— Ошибаешься. Как раз одной и не хватает. Для ровного счета. А число 200 круглое. Круглыми бывают только дураки и отличники».

10*. Сейчас я разрежу этот арбуз на 5 частей. По числу едоков. Клава не любит арбузы. Потом каждый съест свою часть. Никто не будет ни ломать, ни резать арбузную корку. Но после того как арбуз будет съеден, останется 6 корок. Как я это сделаю?

Отец Юрий догадался быстро. Федя же был так возбужден, что просто *не мог думать*. Точнее, он не мог думать о предложенной дедушкой задаче. К сожалению или к счастью, такое может случиться с любым человеком, и даже с самым выдающимся математиком. Хотя, конечно, совсем *не думать* ни

*Эта задача имеет номер 201 в цитируемой книге.

о чём намного труднее, чем не делать совсем ничего. А большинство людей думают, что когда человек только думает, он как раз и не делает ничего. Вот если он вбивает гвозди, то он что-то делает.

Дедушка быстро разрезал арбуз. Одна часть была явно лучше других. Предложение мамы отдать эту часть Федору было с возмущением отвергнуто всеми мужчинами, включая Навуходоносора и Федора. Федор же просто обиделся. Этот кусок получила мама.

Потом настала пора прощаться.

Дедушка измерил длину волос Федора. Они выросли на целых пять сантиметров.

— Смотри, как сильно подросли твои волосы. Это означает, что ты хорошо потрудился головой. Ты ведь знаешь, что все люди, кому приходится работать головой, либо очень волосатые, либо лысые, но по этой же причине. Волосы начинают слишком быстро расти и оттого выпадают. Можешь кстати, подсчитать, с какой скоростью росли твои волосы. Пусть это будет последней задачей. Вне счета.

Прощаясь с дедушкой, Федор сказал:

— Ты знаешь, дедушка, мне было *страшно* интересно. В том году мы отдыхали на море. Там тоже было *страшно интересно*. Но у тебя *страшнее*».

3. Также рассматриваются перспективы работы кружка в следующем учебном году.

Решения и ответы

Первый этап

1. 6 л можно получить только в 7-литровом сосуде, для этого достаточно получить 4 л в 5-литровом сосуде и из 7-литрового отлить 1 л или получить в 7-литровом сосуде 1 л и долить туда 5 л. Оба варианта рассмотрены ниже.

5 л	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5
7 л	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6

5 л	5	0	5	3	3	0	5	1	1	0	5	0
7 л	0	5	5	7	0	3	3	7	0	1	1	6

2. Для решения задачи воспользуемся 2 таблицами.

Используя данные задачи, заполним таблицы, используя все факты, кроме «пианист учится в 9 классе» и «ударник учится не в 11 классе». Тогда получаем.

Инструменты	Саксофон	Ударные	Пианино	Контрабас
Михаил	+	-	-	-
Валерий	-	-		
Андрей	-		-	
Леонид	-			-

Класс	8	9	10	11
Михаил				-
Валерий		-		
Андрей	-			
Леонид			-	

Из первой таблицы сразу узнать сложно, на чем играет Валерий: есть 2 варианта — на пианино или контрабасе. Пусть Валерий — пианист, тогда он должен учиться в 9 классе, но мы знаем, что Валерий не учится в 9 классе. Поэтому Валерий играет на контрабасе. Заполним первую таблицу, используя полученный факт:

Инструменты	Саксофон	Ударные	Пианино	Контрабас
Михаил	+	-	-	-
Валерий	-	-	-	+
Андрей	-	+	-	-
Леонид	-	-	+	-

Из данной таблицы получаем, что пианист — Леонид, а ударник — Андрей. Учитывая это, заполним вторую таблицу.

Класс	8	9	10	11
Михаил		—		—
Валерий		—		
Андрей	—	—		—
Леонид	—	+	—	—

Тогда из нее получаем, что Валерий учится в 11 классе.

Таким образом, Валерий играет на контрабасе и учится в 11 классе.

3. Сначала пронумеруем пакеты. Потом взвесим пакеты 1 и 2, 2 и 3, 1 и 3. Таким образом, эти 3 пакета за 3 взвешивания расположили по весу. Теперь взвесим четвертый и средний пакет. Наконец взвесим четвертый и самый легкий (или самый тяжелый) пакет.

4. Преобразовывая знаменатель, получим:

$$\begin{aligned} \frac{382 + 498 \cdot 381}{382 \cdot 498 - 116} &= \frac{382 + 498 \cdot 381}{(381+1) \cdot 498 - 116} = \\ &= \frac{382 + 498 \cdot 381}{381 \cdot 498 - 116} = \frac{382 + 498 \cdot 381}{381 \cdot 498 + 382} = 1. \end{aligned}$$

Второй этап

5. Разобьем конфеты на кучки: * **** * ** *. Для выигрыша начинающему надо взять сначала 2 конфеты, а затем число, которое вместе с числом конфет, взятым соперником, дает в сумме 4.

6. Задачу можно решить многими способами. Приведем вариант без использования построения углов 30° , 45° , 60° :

$$\begin{aligned} 10 \cdot 37^\circ - 360^\circ &= 10^\circ, \quad 10^\circ \cdot 3 = 30^\circ, \\ 37^\circ - 30^\circ &= 7^\circ, \quad 10^\circ - 7^\circ = 3^\circ. \end{aligned}$$

7. До первой встречи пешеходы прошли пути, сумма которых равна $AB = s$, а в промежутке между первой и второй встречей — пути, сумма которых равна $2s$. Поэтому промежуток времени между их встречами будет также в 2 раза больше промежутка времени до первой встречи. Следовательно, путь пройденный пешеходом из A между встречами $(s - 300 + 400)$ м, будет в 2 раза больше пути, пройденного им до первой встречи (300 м), а значит, имеем уравнение: $s - 300 + 400 = 2 \cdot 300$, откуда $s = 500$ м.

8. Учащихся всего — 9, а число различных вариантов набранных очков — 8: набрано 20 очков (решено все 10 задач); 17 (решено 9 задач); 14 (решено 8 задач), 11 (решено 7 задач), 8 (решено 6 задач), 5 (решено 5 задач), 2 (решено 4 задачи), 0 (решено меньше 4 задач). Тогда, обозначив учащихся за «зайцев» и варианты набранных очков за «клетки» и учитывая, что $9 > 8$, по принципу Дирихле получим, что, по крайней мере, 2 ученика будут иметь одинаковое число очков.

$$9. 9997^{10} < 10000^{10} = (10^4)^{10} = 10^{40} = (10^5)^8 = 100000^8 < \\ < 100003^8.$$

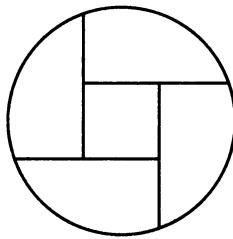


Рис. 38

10. Одно из возможных решений приведено на рис. 38, на котором изображен вид сверху. Линии — следы разрезов. Один кусок — центральный — напоминает призму. У него две корки. По-видимому, этот кусок и является лучшим, и его отдали маме.

Методический комментарий. Продолжительность первого этапа: 30–40 минут, второго: 30–50 минут.

Литература

1. Екимова М.А., Кукин Г.П. Задачи на разрезание. М.: МЦНМО, 2002.
2. Зайкин М.И. Математический тренинг: Развиваем комбинационные способности: Книга для учащихся 4–7 классов общеобразовательных учреждений. М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1996.
3. Игнатьев Е.И. В царстве смекалки. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
4. Лоповок Л.М. Математика на досуге: Кн. для учащихся средн. школьного возраста. М.: Просвещение, 1981.
5. Мерлин А.В., Мерлина Н.И. Задачи для внеklassной работы по математике (5–11 классы): Учеб. пособие, 2-е изд., испр. и доп. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2002.
6. Пчелинцев Ф.А., Чулков П.В. Математика. 5–6 классы. Уроки математического мышления с решениями и ответами. 2-е изд., испр. М.: Издат-школа, 2000.
7. Руденко В.Н., Бахурин Г.А., Захарова Г.А. Занятия математического кружка в 5-м классе. М.: Издательский дом «Искатель», 1999.
8. Седьмой турнир юных математиков Чувашии: 5–11 классы. Чебоксары, 2003.
9. Смыkalova E.B. Дополнительные главы по математике для учащихся 6 класса. СПб.: СМИО Пресс, 2001.
10. Спивак А.В. Математический кружок. 6–7 классы. М.: Посев, 2003.
11. Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике: Кн. для учащихся 5–7 кл. М.: Просвещение, 2002.
12. Фарков А.В. Математические олимпиады в школе. 5–11 классы. 3-е изд., испр. и доп. М.: Айрис-пресс, 2004.
13. Фарков А.В. Олимпиадные задачи по математике и методы их решения. М.: Народное образование, 2003.
14. Шарыгин И.Ф. Уроки дедушки Гаврилы, или Развивающие каникулы. М.: Дрофа, 2003.
15. Шейнина О.С., Соловьева Г.М. Математика. Занятия школьного кружка. 5–6 кл. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2003.

Приложение

Тексты городских олимпиад по математике

Вариант 1 (5 класс)

1. Вычислить: $\frac{2004 - 2003 + 2002 - 2001 + \dots + 2 - 1}{2004 \cdot 45 + 55 \cdot 2004}$.
2. Для нумерации книги для детей понадобилось 204 цифры. Сколько страниц с книги, если нумерация книги начинается с первой страницы?
3. Разрежьте квадрат размером 4×4 на 4 равные фигуры. Разрезать можно лишь по стороне квадрата 1×1 и способы считаются разными, если полученные фигуры не будут равными при каждом способе.
4. В квартирах № 1, № 2, № 3 жили три котенка: белый, черный и рыжий. В квартирах № 1 и № 2 жил не черный котенок. Белый котенок жил не в квартире № 1. В какой квартире жил каждый котенок?
5. Папа купил на праздник своим детям коробку конфет. Федя взял половину конфет и половину одной конфеты, Аня взяла половину остатка и еще полконфеты. Коля взял половину нового остатка и еще полконфеты. Маша взяла половину оставшихся конфет и еще полконфеты. После этого в коробке осталась одна конфета. Сколько конфет было в коробке?
6. Когда у рыбака спросили, как велика пойманная им щука, он сказал: «Я думаю, что хвост ее — 1 кг, голова — столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище — сколько голова и хвост вместе». Сколько весит щука?

Вариант 2 (6 класс)

1. Запишите подряд 22 пятерки: 5555...5. Поставьте между некоторыми цифрами знаки арифметических действий так, чтобы в результате получилось число 2004.

2. Восстановите пропущенные цифры в примере:

$$\begin{array}{r}
 *0*3 \\
 \times *** \\
 \hline
 2 **** \\
 + ***6 \\
 \hline
 621***1
 \end{array}$$

3. Разрежьте квадрат размером 4×4 на 4 равные фигуры. Резать можно только по сторонам клеточек. Найдите как можно больше способов.

4. Мама купила яблок и сказала детям, чтобы они, вернувшись из школы, разделили их поровну. Первым пришел Андрей, взял треть яблок и ушел. Вторым пришел Борис, взял треть оставшихся яблок и ушел. Затем вернулась из школы Валя, она взяла 4 яблока — треть от числа яблок, которые он увидел. Сколько яблок оставила мама?

5. В пакете 9 кг крупы. Как при помощи чашечных весов и одной 200-граммовой гири отвесить 2 кг крупы, если разрешается сделать только три взвешивания.

6. В древней рукописи приведено описание города, расположенного на 8 островах. Острова соединены между собой и с материком мостами. На материк выходят 5 мостов; на 4 островах берут начало по 4 моста, на 3 островах берут начало по 3 моста и на один остров можно пройти только по одному мосту. Может ли быть такое расположение мостов?

Вариант 3 (7 класс)

- Вычислить: $3\frac{1}{117} \cdot 4\frac{1}{119} - 1\frac{116}{117} \cdot 5\frac{118}{119} - \frac{5}{119}$.
- Какой угол образуют стрелки часов в 12 часов 20 минут?
- Расшифруйте пример на сложение, где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры. Объясните, как вы рассуждали?

$$\begin{array}{r} \text{ААБ} \\ + \text{АБА} \\ \hline \text{БВВБ} \end{array}$$

- Сколько нулями оканчивается произведение:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2003 \cdot 2004?$$

- Прямоугольник разделен двумя отрезками на четыре прямоугольника, площади трех из которых 2 см^2 , 4 см^2 , 6 см^2 . Найдите площадь прямоугольника (см. рис. 39).

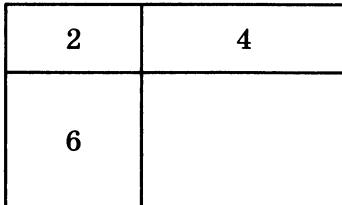


Рис. 39

- Отцу и двум его сыновьям вместе 48 лет. Через 5 лет возраст отца будет в два раза больше суммы возрастов его сыновей, а Коле будет столько лет, сколько Юре сейчас. Сколько лет отцу, Коле и Юре?

Вариант 4 (5 класс)

1. Не выполняя умножения, найдите частное:

$$(1003 \cdot 2005 - 1002) : (1003 + 2005 \cdot 1002).$$

2. У Кенгуру насморк. Он пользуется квадратными платками размером 25×25 см. За восемь дней Кенгуру израсходовал 3 м^2 ткани. Сколько платков в день тратил Кенгуру?

3. Восстановите ребус:

$$\begin{array}{r} \text{К И С} \\ + \text{К С И} \\ \hline \text{И С К} \end{array}$$

(Однаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а разным буквам — разные цифры.)

4. Две чашки и два кувшина весят столько, сколько 14 блюдец. Один кувшин весит столько, сколько 1 чашка и 1 блюдце. Сколько блюдец уравновесят кувшин?

5. Три друга — Винни-Пух, Пятачок и Кролик пошли гулять в красной, зеленой и синей рубашках. Их туфли были тех же цветов. У Винни-Пуха цвет рубашки и туфель совпадали, у Пятачка ни туфли, ни рубашка не были красными, а Кролик был в зеленых туфлях. Как были одеты друзья?

6. Разделите квадрат 5×5 клеток с вырезанной центральной клеткой на четыре равные части. Найдите как можно больше способов. Разрезать можно только по сторонам квадратов.

Вариант 5 (6 класс)

1. В бассейне с горизонтальным дном размерами 20×50 м находится 100 000 л воды. Можно ли в этом бассейне проводить соревнования по плаванию?

2. Восстановите ребус:

$$\begin{array}{r} \text{АБВ} \\ + \text{АБВ} \\ \hline \text{ВББС} \end{array}$$

Найдите все возможные варианты. (Однаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.)

3. Отец старше сына в 4 раза, при этом суммарный их возраст составляет 50 лет. Через сколько лет отец станет старше сына в 3 раза?

4. Бабушка подарила каждому внуку по нескольку яблок и груш, причем всем досталось поровну фруктов. Внуку Пете досталась пятая часть всех яблок и седьмая часть всех груш. Сколько внуков у бабушки? Ответ объясните.

5. Счетчик автомобиля показывал 12 921 км. Через два часа счетчик стал показывать число, которое одинаково читалось в обоих направлениях. С какой скоростью ехал автомобиль?

6. Разделите квадрат 5×5 клеток с вырезанной центральной клеткой на четыре равные части. Найдите как можно больше способов. Разрезать можно только по сторонам квадратов.

Вариант 6 (7 класс)

1. Какой угол образуют часовая и минутная стрелка в 12 ч 40 минут?

2. Какое из чисел $\frac{7777777773}{7777777778}$ или $\frac{8888888882}{8888888887}$ больше? Ответ объясните.

3. Выясните, делится ли на 3 число $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2003} + 2^{2004}$.

4. Одна из цифр четырехзначного натурального числа равна нулю. При вычеркивании нуля это число уменьшается в 9 раз. На каком месте стоит нуль? Найдите все такие числа.

5. Учитель математики, проверив контрольные работы у трех друзей: Алексея, Бориса и Василия, сказал им: «Все вы написали работу, причем получили разные отметки («3», «4», «5»). У Василия — не «5», у Бориса — не «4», а у Алексея, по моему, «4». Впоследствии оказалось, что учитель ошибся: одному ученику сказал отметку верно, а другим двум неверно. Какие отметки получил каждый из учеников?

Вариант 7 (8 класс)

1. На какую цифру оканчивается число $3^{2004} + 4^{2005}$?

2. Число 2005 представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

3. Дан угол в 34° . Можно ли с помощью циркуля и линейки построить угол в 12° ? Если — да, то обосновать; если нет, то — почему?

4. Три брата — Александр, Борис и Сергей преподают различные предметы в школах Архангельска, Северодвинска и Котласа. Александр работает не в Архангельске, а Борис не в Северодвинске. Архангелогородец преподает не математику. Тот, кто работает в Северодвинске, преподает химию. Борис преподает физику. Какую дисциплину преподает Сергей и в школе какого города?

5. Аня младше Вани. Когда Ване было столько лет, сколько Ане сейчас, их матери было на 3 года меньше, чем Ане с Ваней теперь. Сколько лет было Ване, когда матери было столько лет, сколько Ване теперь?

Решения

Вариант 1

$$1. \frac{2004 - 2003 + 2002 - 2001 + \dots + 2 - 1}{2004 \cdot 45 + 55 \cdot 2004} = \frac{1002}{2004(45 + 55)} = \\ = \frac{1002}{2004 \cdot 100} = \frac{1}{200}.$$

Замечание. Так как не по всем учебникам математики к моменту проведения олимпиады изучена тема «сокращение дробей», то ответ можно оставить и в виде $\frac{1002}{200\ 400}$.

2. Для нумерации страниц с первой по девятую понадобится 9 цифр, для нумерации страниц с 10 по 99 понадобится $90 \cdot 2 = 180$ (цифр). Итак, использовано 189 цифр. Осталось $204 - 189 = 15$. Так как с сотой страницы на нумерацию одной страницы потребуется 3 цифры, то всего страниц в книге будет $99 + 15 : 3 = 99 + 5 = 104$.

Ответ: В книге 104 страницы.

3. Ответ на рис. 40.

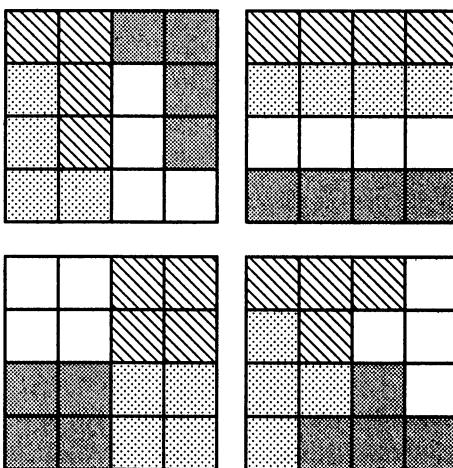


Рис. 40

4. Так как в квартирах № 1 и № 2 жил не черный кот, то черный кот жил в квартире № 3. Так как белый кот жил не в квартире № 1, а квартира № 3 занята черным котом, то белый кот живет в квартире № 2. Тогда рыжий кот живет в квартире № 1.

Ответ: В квартире № 1 жил рыжий кот; в квартире № 2 жил белый кот; в квартире № 3 жил черный кот.

5. Решаем задачу с конца.

1) $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 3$ (конфеты) — осталось после Коли.

2) $\left(3 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 7$ (конфет) — осталось после Ани.

3) $\left(7 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 15$ (конфет) — осталось после Феди.

4) $\left(15 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 31$ (конфета) — была в коробке.

Ответ: В коробке была 31 конфета.

6. Пусть $2x$ кг весит туловище щуки, тогда голова будет весить $(x+1)$ кг. Из условия, что туловище весит столько же, сколько голова и хвост вместе, получим уравнение: $2x = x + 1 + 1$. Откуда $x = 2$, а вся щука будет весить 8 кг.

Ответ: Щука весила 8 кг.

Вариант 2

1. Возможный вариант:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 : 5 - 5 : 5 - 5 : 5.$$

2. 3003 · 207.

3. Ответ на рис. 40.

4. Решаем задачу с конца. Так как 4 яблока составляют треть от того, что осталось после Бори, то весь остаток будет 12 яблок. Но 12 яблок составляют $\frac{2}{3}$ яблок, оставшихся после Андрея,

значит, после Андрея осталось 18 яблок, которые, в свою очередь, составляют $\frac{2}{3}$ числа яблок, купленных мамой.

Значит, мама купила $18 : 2 \cdot 3 = 27$ (яблок).

Ответ: Мама купила 27 яблок.

5. При первом взвешивании положим на левую чашу 200 г и уравновесим весы с помощью крупы, тогда крупы на левой чаше будет 4400 г, а на правой — 4600 г. Теперь 4400 г разделим пополам: тогда на каждой чаше будет по 2200 г крупы. При третьем взвешивании отвесим с помощью гири 200 г крупы, тогда получим массу оставшейся крупы в одной из кучек 2000 г = 2 кг.

6. Найдем число концов у всех мостов: $5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 = 31$, это число нечетно. Так как число концов у всех мостов должно быть четным, то такого расположения мостов быть не может.

Вариант 3

$$\begin{aligned}1 \cdot 3 \frac{1}{117} \cdot 4 \frac{1}{119} - 1 \frac{116}{117} \cdot 5 \frac{118}{119} - \frac{5}{119} &= 3 \frac{1}{117} \cdot 4 \frac{1}{119} - \left(2 - \frac{1}{117}\right) \times \\&\times \left(6 - \frac{1}{119}\right) - \frac{5}{119} = \left(3 + \frac{1}{117}\right) \cdot \left(4 + \frac{1}{119}\right) - 12 + \frac{6}{117} + \frac{2}{119} - \\-\frac{1}{117 \cdot 119} - \frac{5}{119} &= 12 + \frac{4}{117} + \frac{3}{119} + \frac{1}{117 \cdot 119} - 12 + \frac{6}{117} + \frac{2}{119} - \\-\frac{1}{117 \cdot 119} - \frac{5}{119} &= \frac{10}{117}.\end{aligned}$$

2. В 12.00 стрелки часов сходятся вместе. После этого за 20 минут минутная стрелка проходит окружности, то есть описывает угол в 120° . Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной (так как описывает круг за 12 часов). Поэтому она за 20 минут опишет угол в $120^\circ : 12 = 1^\circ$ и будет образовывать с минутной стрелкой угол в $120^\circ - 10^\circ = 110^\circ$.

3. Так как сумма Б+А+А оканчивается цифрой Б, то А+А оканчивается цифрой 0. Поэтому А = 5. (Цифра А не может быть 0, потому что с нее начинаются первые два слагаемых.) Тогда

сумма $55Б + 5Б5 + Б55$ не больше, чем $559 + 595 + 955 = 2109$. Поэтому $Б = 1$ или $Б = 2$. Но $552 + 525 + 255 = 1312$ — не подходит. Значит, $Б = 1$. Отсюда — ответ: $551 + 515 + 155 = 1221$.

4. Нули образуются от перемножения четных чисел и пятерок. Посчитаем число пятерок в произведении. В каждом множителе, стоящем на $5, 10, \dots, 2000$ месте, есть как минимум одна пятерка. Получили $2000 : 5 = 400$ пятерок. Но в числах $25, 50, \dots, 2000$ будет по 2 пятерки. Значит, надо добавить еще $2000 : 25 = 80$ пятерок. В числах $125, 250, \dots, 2000$ стоят по 3 пятерки, значит, добавляем еще $2000 : 125 = 16$ пятерок. В числах $625, 1250, 1875$ стоят по 4 пятерки. Поэтому добавляем еще 3 пятерки. Итого имеем $400 + 80 + 16 + 3 = 499$ пятерок. При умножении их на четные числа (а их больше 499) получим, что полученное произведение оканчивается 499 нулями.

5. Так как верхние прямоугольники имеют общую сторону и площадь правого в 2 раза больше, то и его вторая сторона будет в 2 раза больше. Аналогично и вторая сторона правого нижнего прямоугольника будет больше стороны верхнего левого прямоугольника в 3 раза. А это означает, что площадь нижнего правого четырехугольника будет в 6 раз больше площади левого верхнего прямоугольника, то есть будет равна 12 см^2 . Поэтому площадь всего прямоугольника будет равна 24 см^2 .

6. Через 5 лет отцу и сыновьям вместе будет $48 + 5 \cdot 3 = 63$ (года). Так как через 5 лет возраст отца будет в 2 раза больше суммы возрастов его сыновей, то через 5 лет отцу будет 42 года, а сыновьям вместе 21 год. Поэтому сейчас *отцу 37 лет*, а Коле и Юре вместе — 11 лет. Пусть Коле сейчас x лет. Поскольку Коле через 5 лет будет столько лет, сколько Юре сейчас, то он на 5 лет младше Юры. Значит, $x + x + 5 = 11$, откуда $x = 3$. Таким образом, сейчас *Юре — 8 лет, а Коле — 3 года*.

Вариант 4

$$\begin{aligned}1. (1003 \cdot 2005 - 1002) : (1003 + 2005 \cdot 1002) &= \\&= ((1002 + 1) \cdot 2005 - 1002) : (1003 + 2005 \cdot 1002) =\end{aligned}$$

$$= (1002 \cdot 2005 + 2005 - 1002) : (1003 + 2005 \cdot 1002) = \\ = (1002 \cdot 2005 + 1003) : (1003 + 2005 \cdot 1002) = 1.$$

2. 1) $25 \times 25 = 625$ (см²) — площадь одного платка;

$$2) 3 \text{ м}^2 = 30\,000 \text{ см}^2.$$

3) $30\,000 : 625 = 48$ (платков) — израсходовал Кенгуру за 8 дней.

$$4) 48 : 8 = 6$$
 (платков).

Ответ: 6 платков тратит Кенгуру в один день.

3. $495 + 459 = 954$. Начать с цифр десятков: И = 0 или И = 9. Первый случай не может быть, так как С + И = К. Таким образом, И = 9, тогда К = 4, соответственно, С = 5.

4. Задача имеет множество решений. Рассмотрим один из возможных.

Так как 2 чашки и 2 кувшина уравновесят 14 блюдец, то 1 чашка и 1 кувшин уравновесят 7 блюдец. Так как 1 кувшин весит столько, сколько 1 чашка и 1 блюдце, то 2 чашки и 1 блюдце весят столько, сколько 7 блюдец. Отсюда получим, что 1 чашка весит столько, сколько 3 блюдца. Значит, 1 кувшин уравновесят 4 блюдца.

5. Узнаем сначала туфли друзей. Так как у Кролика туфли были зелеными, а у Пятачка — не красными, то красные туфли были у Вини-Пуха, а тогда синие будут у Пятачка. Так как у Вини-Пуха цвет рубашки и туфель совпадали, а туфли были красными, то и рубашка будет красная. Так как у Пятачка ни туфли, ни рубашка не были красными, а туфли оказались синими, то рубашка могла быть только зеленая. Поэтому у Кролика будет синяя рубашка.

6. Всего существует 7 способов (рис. 41).

Вариант 5

1. $100\,000 \text{ л} = 100\,000 \text{ дм}^3 = 100 \text{ м}^3$. Площадь бассейна равна 1000 м^2 . Значит, высота бассейна будет $0,1 \text{ м}$ (или $\frac{1}{10} \text{ м}$). При такой глубине соревнования провести нельзя.

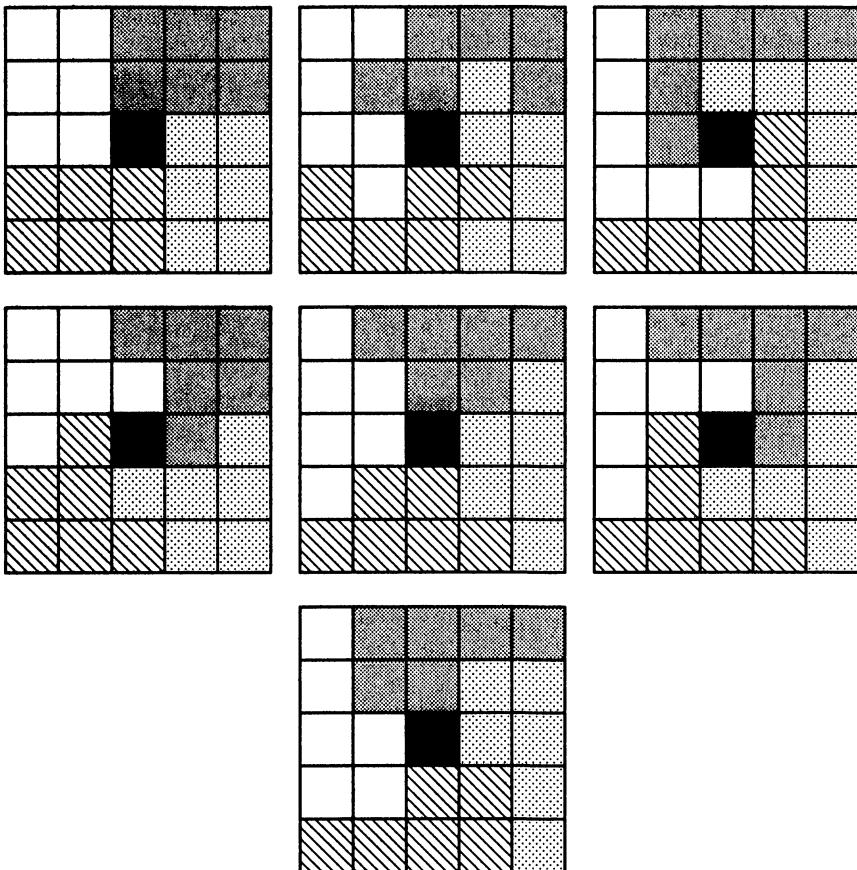


Рис. 41

2. $2004 + 2004 = 4008$ или $1002 + 1002 = 2004$ или $2995 + 2995 = 5990$ или $3997 + 3997 = 7994$.

3. Обозначим возраст сына за x лет, тогда возраст отца будет $4x$. Так как суммарный их возраст составляет 50 лет, то имеем уравнение $x + 4x = 50$. Из уравнения получаем $x = 10$. Итак, вначале сыну было 10 лет, а отцу — 40 лет. Пусть отец станет старше сына в 3 раза через n лет, тогда $3 \cdot (10 + n) = 40 + n$. Решением уравнения будет $n = 5$. Отец будет старше сына в 3 раза через 5 лет.

4. Если бы Пете досталась не седьмая, а пятая часть всех груш, то он получил бы пятую часть всех фруктов. Но это больше, чем он получил на самом деле. Значит, на самом деле доля каждого внука составляет меньше пятой части всех фруктов. Поэтому внуков больше пяти. С другой стороны, если бы Пете досталась седьмая часть всех яблок, он получил бы седьмую часть всех фруктов. Но это меньше, чем он получил на самом деле. Поэтому внуков меньше семи. А если внуков больше пяти, но меньше семи, то их шесть.

5. Через два часа счетчик автомобиля будет показывать число, которое начинается на 13 и оканчивается на 31, так как следующая возможная пара: 14 и 41 не будет удовлетворять условию задачи (за 2 часа автомобиль не может проехать больше 1000 км). Таким образом, получаем число $13 * 31$. Определим, какая цифра может стоять в разряде сотен. Для этого рассмотрим все возможные варианты.

1) $13\ 031 - 12\ 921 = 110$ (км).

$110 : 2 = 55$ (км/ч) — скорость автомобиля.

2) $13\ 131 - 12\ 921 = 210$ (км).

$210 : 2 = 105$ (км) — скорость автомобиля.

3) $13\ 231 - 12\ 921 = 310$ (км).

$310 : 2 = 155$ (км/ч) — скорость автомобиля.

4) $13\ 331 - 12\ 921 = 410$ (км).

$410 : 2 = 205$ (км/ч) — скорость автомобиля. Данный случай и все остальные являются нереальными, поэтому быть не могут.

Ответ: 55 км/ч, или 110 км/ч, или 155 км/ч.

6. Всего существует 7 способов (рис. 41).

Вариант 6

1. В 12.00 стрелки часов сходятся вместе. После этого за 40 минут минутная стрелка проходит окружности, то есть описывает угол в 240° . Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее

минутной (так как описывает круг за 12 часов). Поэтому она за 40 минут опишет угол в $240^\circ : 12 = 20^\circ$ и будет образовывать с минутной стрелкой угол в $120^\circ + 20^\circ = 140^\circ$.

2. Преобразуем левую и правую части:

$$\frac{7777777773}{7777777778} = 1 - \frac{5}{7777777778};$$

$$\frac{8888888882}{8888888887} = 1 - \frac{5}{8888888887};$$

$$\begin{aligned} 8888888887 &> 7777777778 \Rightarrow \frac{5}{8888888887} < \frac{5}{7777777778} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 - \frac{5}{8888888887} > 1 - \frac{5}{7777777778} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{8888888882}{8888888887} > \frac{7777777773}{7777777778}. \end{aligned}$$

3. $1+2+2^2+\dots+2+2 = (1+2)+2^2+(1+2)+\dots+2^{2002}(1+2)+2^{2004} = = 3(1+2^2+\dots+2^{2002})+2^{2004}$. В данной сумме первое слагаемое делится на 3, а второе слагаемое не делится на 3. Поэтому сумма не делится на 3.

4. Четырехзначное число, одна из цифр которого 0, может иметь вид: $a0bc$, $ab0c$, $abc0$. Последний случай невозможен, так как при вычеркивании нуля число $abc0$ уменьшится в 10 раз. Используя условие задачи, имеем: $a0bc = abc \times 9$. Из данного равенства получим, что $c = 5$. Тогда $a0b5 = ab5 \times 9$. Найдем b . Так как $9b+4$ оканчивается на b , то $b = 2$ или 7. Для первого случая получаем равенство: $a025 = a25 \times 9$. Из данного равенства подбором находим $a = 2$. Получили число 2025. Проводя аналогичные рассуждения для $b = 7$, найдем $a = 6$, а число получим 6075. Для второго случая чисел не найти.

Ответ: Нуль стоит на месте сотен, числа: 2025 и 6075.

5. Рассмотрим три случая.

1 случай. Пусть учитель сказал верно Алексею. Значит, у Алексея — «4». Так как Борису и Василию учитель назвал неверные отметки, то у Бориса — «4», а у Василия — «5». Получилось, что у двух учеников оказались одинаковые отметки,

что противоречит условию задачи. Данный случай невозможен.

2 случай. Пусть учитель сказал верно Василию. Тогда у Василия отметка — не «5». Так как учитель сказал неверно об отметках Алексея и Бориса, то у Алексея — отметка — не «4», а у Бориса — «4». Тогда у Алексея будет отметка «5», а у Василия — «3».

3 случай. Рассмотрим предположение, что учитель сказал верно про отметку Борису. Тогда Борис получил не «4». Так как утверждения про отметки Алексея и Василия — ложные, то Алексей получил отметку — не «4», а Василий — «5». Получается, что отметку «4» не получил ни один из учеников. Этот случай также противоречит условию задачи.

Таким образом, Алексей получил отметку «5», Борис — «4», а Василий — «3».

Вариант 7

1. Найдем последнюю цифру 3^n при различных значениях n : 3; 9; 7; 1; 3; 9; ... Замечаем зависимость: через 4 числа цифра повторяется. Так как $2004 = 501 \cdot 4 + 0$, то число 3^{2004} оканчивается такой же цифрой, что и 3^4 , то есть 1. Рассматривая различные степени числа 4, получаем зависимость: если показатель степени n — четный, то 4^n оканчивается на 6, а если нечетный, то 4^n оканчивается на цифру 4. Так как 2005 — число нечетное, то 4^n оканчивается на цифру 4, а значит, и число $3^{2004} + 4^{2005}$ оканчивается на цифру 5.

2. Так как $2005 = 5 \cdot 401$, а $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, то для нахождения решения задачи надо найти решения следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 2005, \\ a - b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = 401, \\ a - b = 5. \end{cases}$$

Решениями данных систем уравнений будут пары следующих чисел: (1003; 1002), (203; 198).

3. Один из возможных вариантов. Построить угол 90° с помощью циркуля и линейки, затем от одной из сторон угла 3 раза отложить угол $34^\circ \cdot 12^\circ = 34^\circ \cdot 3 - 90^\circ$.

4. В данной задаче говорится о трех братьях (Александр, Борис и Сергей), городах, в которых они работают (Архангельск, Северодвинск и Котлас), и предметах, которые они преподают (математика, химия, физика).

Определим сначала предмет, который преподают братья. Составим таблицу.

	математика	химия	физика
Архангелогородец			
Северодвинац			
Котлашанин			

Так как архангелогородец преподает не математику, то поставим «минус» в соответствующей клетке. Так как северодвинац преподает химию, то поставим «плюс» в соответствующей клетке. Поэтому северодвинац не может преподавать математику и физику, а архангелогородец и котлашанин — химию. В итоге получим такую таблицу.

	математика	химия	физика
Архангелогородец	—	—	
Северодвинац	—	+	—
Котлашанин		—	

Из таблицы следует, что архангелогородец преподает физику, а значит, математику преподает котлашанин.

Теперь выясним, как зовут архангелогородца, северодвинаца и котлашанина. Для этого снова воспользуемся таблицей. Учтем, что Александр работает не в Архангельске, а Борис не в Северодвинске.

	Александр	Борис	Сергей
Архангелогородец	—		
Северодвинец		—	
Котлашанин			

Так как по условию задачи Борис преподает физику, а из предыдущих рассуждений мы выяснили, что архангелогородец преподает физику, то получим, что Борис живет в Архангельске. Учитывая это, получим следующую таблицу.

	Александр	Борис	Сергей
Архангелогородец	—	+	—
Северодвинец		—	
Котлашанин		—	

Больше никаких сведений о зависимости между именем и городом у нас нет. Рассмотрим два возможных случая.

1 случай. Пусть Александр работает в Северодвинске. Тогда Сергей будет работать в Котласе.

2 случай. Пусть Александр работает в Котласе. Тогда Сергей будет работать в Северодвинске.

Оба случая возможны. Таким образом, Сергей работает в Котласе учителем математики или Сергей работает в Северодвинске учителем химии.

5. Пусть Ане сейчас a лет, Ване — b лет, маме — c лет. Ване было a лет, т. е. столько, сколько сейчас Ане, $(b - a)$ лет назад. Но маме тогда было $c - (b - a) = c + a - b$ лет, и это число равно $a + b - 3$. Таким образом, $c = 2b - 3$. Маме было b лет, т. е. столько, сколько Ване теперь, $(c - b)$ лет назад, но Ване тогда было $b - c + b = 2b - c = 3$. Итак, Ване было 3 года.

Содержание

Предисловие	3
Методика подготовки и проведения математических кружков	4
Занятие 1. Текстовые задачи-1 (задачи, решаемые с конца)	13
Занятие 2. Математические ребусы	19
Занятие 3. Инварианты	25
Занятие 4. Геометрические задачи-1 (разрезания)	32
Занятие 5. Повторение	37
Занятие 6. Математическое соревнование (математическая драка)	41
Занятие 7. Принцип Дирихле	46
Занятие 8. Текстовые задачи-2 (переливания)	53
Занятие 9. Логические задачи	57
Занятие 10. Текстовые задачи-3 (математические игры, выигрышные ситуации)	65
Занятие 11. Арифметические задачи	71
Занятие 12. Повторение	80
Занятие 13. Математическое соревнование (математическая карусель)	84
Занятие 14. Текстовые задачи-4 (задачи на движение)	93
Занятие 15. Взвешивания	99
Занятие 16. Геометрические задачи-2	106
Занятие 17. Итоговое занятие (устная олимпиада)	116
Литература	123
Приложение. Тексты городских олимпиад по математике	124
Решения	130

**По вопросам оптовых закупок обращаться:
тел./факс: (495) 785-15-30, e-mail: trade@airis.ru
Адрес: Москва, пр. Мира, 106**

Наш сайт: www.airis.ru

**Вы можете приобрести наши книги
с 11⁰⁰ до 17³⁰, кроме субботы, воскресенья,
в киоске по адресу: пр. Мира, д. 106, тел.: (495) 785-15-30**

Адрес редакции: 129626, Москва, а/я 66

**Издательство «Айрис-пресс» приглашает к сотрудничеству
авторов образовательной и развивающей литературы.**

**По всем вопросам обращаться
по тел.: (495) 785-15-33, e-mail: editor@airis.ru**

Учебное издание

Фарков Александр Викторович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ В ШКОЛЕ
5–8 классы**

**Ведущий редактор В. В. Черноруцкий
Художественный редактор А. М. Драговой**

Оформление В. В. Самсонов

**Технический редактор С. С. Коломеец
Компьютерная верстка Е. Г. Иванов**

Корректор З. А. Тихонова

**Подписано в печать 23.01.07. Формат 60×90/16.
Печать офсетная. Печ. л. 9. Усл.-печ. л. 9.
Тираж 5000 экз. Заказ № 6220.**

**ООО «Издательство “АЙРИС-пресс”»
113184, Москва, ул. Б. Полянка, д. 50, стр. 3.**

**Отпечатано в ОАО «Можайский полиграфический комбинат»
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93**