СМБ

ОБЩАЯ АЛГЕБРА

ТОМ 2

ОБЩАЯ АЛГЕБРА

ТОМ 2

СПРАВОЧНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

В. А. АРТАМОНОВ, В. Н. САЛИЙ,
Л. А. СКОРНЯКОВ, Л. Н. ШЕВРИН,
Е. Г. ШУЛЬГЕЙФЕР

ОБЩАЯ АЛГЕБРА

Под общей редакцией Л. А. СКОРНЯКОВА

Том 2

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1991

ББК 22.144
О28
УДК 512.05(083)

Серия «Справочная математическая библиотека» издается с 1961 г.

Общая алгебра. Т. 2/В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков и др. Под общ. ред. Л. А. Скорнякова.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 480 с. — (Справ. мат. б-ка).— ISBN 5-02-014427-4 (т. 2).

Второй том содержит разделы: полугруппы, решетки, булевы алгебры, универсальные алгебры, категории. Кроме основных определений, авторы стремились ограничиться изложением результатов, которые могут быть полезны за пределами рассматриваемой области алгебры. Доказательства не приводятся.

Для математиков, не являющихся специалистами в соответствующих разделах алгебры, а также для потребителей алгебры как математиков, так и других специалистов.

Том 1 издан в 1991 г.

Табл. 3. Библиогр. 225 назв.

Рецензент
академик АН МССР *В. А. Андрунакиевич*

О $\frac{1602040000-069}{053(02)-91}$ 31-91

ISBN 5-02-014427-4 (т. 2)
ISBN 5-02-014335-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ ПЕРВОГО ТОМА

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В настоящее время алгебраический язык проник, пожалуй, во все разделы математики и во многие из ее приложений. В свою очередь, алгебра обогатилась многими новыми идеями и результатами как в классических ее областях (группы, кольца), так и в направлениях, развившихся за последнее пятидесятилетие (полугруппы, решетки, универсальные алгебры, категории). Конечно, по всем этим разделам алгебры написаны многочисленные монографии и обзорные статьи. Однако теперь уже, пожалуй, невозможно написать монографию, отражающую все основные идеи и направления, скажем, теории групп. Отбор материала, осуществляемый автором каждой из таких монографий, неизбежно субъективен. Поэтому в поисках нужных результатов приходится перебирать, в значительной степени наугад, большое число различных источников. Настоящий справочник имеет целью облегчить эту работу. В нем, наряду с основными определениями, представлены многочисленные результаты, включенные в те или иные монографии и обзоры, а также приведен обширный список монографической и обзорной литературы по соответствующим разделам общей алгебры. В ряде случаев упоминаются и отдельные результаты, отраженные только в журнальных публикациях, и тогда необходимые ссылки приводятся непосредственно в тексте. Подчеркнем, что при написании справочника не ставилось цели отразить современное состояние этих теорий. Поскольку справочник адресован главным образом не специалистам, приоритет отдается результатам, которые могут быть полезны за пределами рассматриваемой области алгебры. Никаких доказательств не приводится. Авторы приводимых результатов, как правило, не указываются. Исключение составляют теоремы с установившимися названиями. В тех случаях, когда соответствующий материал может быть найден, практически, в любом учебнике по алгебре, не дается даже точных ссылок. Авторы старались не злоупотреблять перекрестными ссылками. В частности, при изложении теории групп и теории колец многие факты, которые можно извлечь из теории универсальных алгебр, приводятся для рассматриваемых специальных случаев, так что при желании читатель может не обращаться к главам VI или VII.

От читателя требуется знакомство с линейной алгеброй, включая матричное исчисление. При рассмотрении вопросов, лежащих на границе алгебры с логикой и топологией, логические и топологические понятия, как правило, не определяются.

За пределами настоящего справочника остались коммутативная алгебра (в частности, теория полей), конечные группы, линейные группы, представления групп и некоторые другие разделы: границы общей алгебры достаточно неопределенны. Сравнительно мало внимания уделено алгебрам Ли. Надеемся, что эти разделы алгебры будут отражены в других выпусках справочника по математике.

* * *

Глава IV написана Л. Н. Шевриным, глава V — В. Н. Салием и Л. А. Скорняковым, глава VI — В. А. Артамоновым, главы VII — Е. Г. Шульгейфером.

ГЛАВА IV
ПОЛУГРУППЫ

В настоящей главе рассмотрены основы алгебраической теории полугрупп, включая теорию многообразий и алгоритмические проблемы, а также комбинаторные приложения и представления полугрупп преобразованиями. Стандартные руководства на русском языке, содержащие изложение многих основных разделов теории полугрупп, — монографии [18, 22, 24]. Укажем также основательные вводные курсы [56, 72, 74], отличающиеся каждый своей направленностью и отражающие в совокупности значительное число фундаментальных вопросов теории полугрупп. Эти и другие цитируемые в главе источники (монографии и обзорные статьи) из приведенного в конце главы списка литературы содержат подробную библиографию по соответствующим темам — и отсылка к ним в различных местах текста подразумевает, в частности, возможность восстановить авторство тех или иных приводимых в главе результатов. В отдельных случаях ссылки на первоисточники даются непосредственно в тексте главы. Немало книг, преимущественно общеалгебраического характера, содержат разнообразные первоначальные теоретико-полугрупповые сведения; укажем, например, [20, 21, 25, 26, 36]. В существенно большей степени такие сведения содержатся в книге [4]. Книга [38] представляет исторический интерес.

За пределами рассмотрения в данной главе остались линейные представления полугрупп, а также полугруппы с дополнительными структурами — упорядоченные и топологические. Основам теории линейных (матричных) представлений посвящена гл. 5 монографии [18]; см. также обзор [64] и весьма полную библиографию в [77], п. 5.3. Основы теории (частично, линейно или решеточно) упорядоченных полугрупп рассматриваются в соответствующих разделах книг [7, 39]; см. также монографию [83] и обзор [13]. Главные источники по основам теории топологических полугрупп — книги [55, 68] и (информативный с разных точек зрения) обзор [54]. Некоторые первоначальные сведения о топологических полугруппах приведены в гл. 10 книги [4] и в гл. 2 учебного пособия [23] (в котором значительное внимание уделено и представлениям топологических полугрупп). Топологическим полугруппам, возникающим в функциональном анализе, посвящен целый ряд книг начиная с фундаментальной монографии [40]. В книге [90] развивается теория линейных (в особенности связных) алгебраических моноидов.

§ 1. Вводные замечания

1.1. Первоначальные определения и соглашения. *Полугруппой* называется непустое множество, на котором задана бинарная операция $\circ$, удовлетворяющая ассоциативному закону (тождеству ассоциативности): $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$. Если в качестве операции фигурирует умножение $\cdot$, то полугруппу называют *мультипликативной* и в этом случае в записи произведения $x \cdot y$ точку обычно опускают, записывая просто xy. Если в качестве операции $\circ$ фигурирует сложение $+$, то полугруппу называют *аддитивной*. Для обозначения полугрупповой операции в тех или иных конкретных ситуациях могут использоваться и некоторые другие символы, такие, например, как $*$, $\wedge$, $\vee$. При желании явно указать операцию ее обозначение записывают после обозначения соответствующего множества; так, можно рассматривать меультипликативную $(\mathbf{N}, \cdot)$ и аддитивную $(\mathbf{N}, +)$ полугруппы натуральных чисел. Множества чисел доставляют различные другие примеры полугрупп, мультипликативных и аддитивных: таково любое числовое множество, замкнутое относительно соответствующей операции, т. е. содержащее вместе с любыми двумя своими элементами их произведение или соответственно сумму. Кроме упомянутых только что полугрупп натуральных чисел, отметим следующие числовые полугруппы, играющие в математике фундаментальную роль (аддитивные среди них являются группами): $(\mathbf{Z}, \cdot)$, $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{Q}, \cdot)$, $(\mathbf{Q}, +)$, $(\mathbf{R}, \cdot)$, $(\mathbf{R}, +)$, $(\mathbf{C}, \cdot)$, $(\mathbf{C}, +)$.

Отображение φ полугруппы $S = (S, \circ)$ в полугруппу $T = (T, *)$ называется *гомоморфизмом*, если для любых $x, y \in S$ имеет место $(x \circ y)\varphi = (x\varphi) * (y\varphi)$. Если φ при этом инъективно, то φ называют *изоморфизмом* (или *вложением*) S в T; в этом случае говорят, что S *вложима* в T. Если гомоморфизм φ сюръективен [биективен], то T называют *гомоморфным* [*изоморфным*] *образом* S; во втором случае говорят, что полугруппы S и T *изоморфны* (очевидно, что тогда обратное отображение φ^{-1} есть изоморфизм T на S), и пишут $S \simeq T$. Класс полугрупп $\mathcal{K}$ называют *гомоморфно замкнутым* [*изоморфно замкнутым*, или, по-другому, *абстрактным*], если вместе с любой полугруппой $S \in \mathcal{K}$ он содержит и всякий гомоморфный [изоморфный] образ S. Среди гомоморфно замкнутых классов — класс групп. Полугруппу, принадлежащую фиксированному классу $\mathcal{K}$, нередко называют *$\mathcal{K}$-полугруппой*. Свойство полугруппы быть $\mathcal{K}$-полугруппой для фиксированного абстрактного класса $\mathcal{K}$ называют *абстрактным теоретико-полугрупповым свойством*. Гомоморфизм полугруппы в себя [изоморфизм на себя] называется *эндоморфизмом* [*автоморфизмом*]. Полугруппа, у которой всякий сюръективный эндоморфизм является автоморфизмом, называется *хопфовой*. Любая полугруппа имеет хотя бы один автоморфизм — тождественное отображение; у полугруппы $(\mathbf{N}, +)$, например, нетождественных автоморфизмов нет, у полугруппы $(\mathbf{N}, \cdot)$ множество автоморфизмов бесконечно (континуально). Отображение φ полугруппы $S = (S, \circ)$ в полугруппу $T = (T, *)$ называется *антигомоморфизмом*, если для любых $x, y \in S$ имеет место $(x \circ y)\varphi = y\varphi * x\varphi$; соответственно получаем понятия *антиизоморфизма*, *антиавтоморфизма* и т. п. Если $(S, \circ)$ — полугруппа, то операция $*$ на множестве S, заданная формулой $x * y = y \circ x$, ассоциативна; полученная тем самым полугруппа $(S, *)$ называется *двойственной* к полугруппе $(S, \circ)$. Полугруппу, двойственную к полугруппе S, будем обозначать через $\overleftarrow{S}$. Полугруппы S и $\overleftarrow{S}$

антиизоморфны друг другу. Переход к двойственной полугруппе приводит к тому, что многие теоретико-полугрупповые понятия и свойства распадаются на пары взаимно двойственных (другие оказываются двойственными себе). В этом состоит *принцип двойственности*, позволяющий не воспроизводить соответствующие определения и утверждения для одного из взаимно двойственных случаев, ограничиваясь указанием на то, что это делается двойственным образом. О числе попарно неизоморфных (неизоморфных и неантиизоморфных) полугрупп с небольшим числом элементов см. п. 2.5.

В общих рассмотрениях обычно пользуются мультипликативной записью и соответствующей терминологией. Как правило, именно так мы будем поступать в настоящей главе.

Элементы a и b называются *перестановочными*, если $ab = ba$. Полугруппа S называется *коммутативной*, если любые ее два элемента перестановочны. Мультипликативные и аддитивные числовые полугруппы коммутативны; целый ряд важных примеров некоммутативных полугрупп приведен в п. 1.2. Полугруппа, двойственная к коммутативной полугруппе S, разумеется, изоморфна S. Но имеется немало и некоммутативных полугрупп с тем же свойством; таковы, например, все группы. Элементы a и b полугруппы S называют *сопряженными*, если $a = uv$, $b = vu$ для некоторых $u, v \in S$; в случае, когда S — группа, это понятие эквивалентно обычному групповому понятию сопряженности. Если S — полугруппа, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые ее элементы ($n \geqslant 3$), то произведение этих элементов, расположенных в данном порядке, не зависит от расстановки скобок (при $n = 3$ указанное свойство совпадает с ассоциативным законом); это позволяет записывать такое произведение без скобок: $x_1x_2 \ldots x_n$. Если все сомножители в нем равны x, то получаем *n-ю степень* x^n элемента x. Для любых натуральных чисел верны тождества

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

Если элементы x и y перестановочны, то для любого n имеет место $(xy)^n = x^n y^n$; соответствующее тождество верно во всякой коммутативной полугруппе, равно как и тождества $x_1x_2 \ldots x_n = x_{1\sigma}x_{2\sigma} \ldots x_{n\sigma}$ для любой перестановки σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Нулевая степень* элемента в произвольной полугруппе S, вообще говоря, не определена, но в произведениях иногда бывает удобно пользоваться таковой, полагая $x^0y = yx^0 = y$ для любых $x, y \in S$. Элемент x называется *идемпотентом*, если $x^2 = x$.

Операцию, заданную на полугруппе S, можно распространить на подмножества из S, полагая $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ для любых двух подмножеств A и B. Множество $\mathscr{P}(S)$ всех подмножеств относительно введенной операции будет полугруппой; ее иногда называют *глобальной надполугруппой* (или *полугруппой-степенью*) полугруппы S. Любая полугруппа очевидным образом вложима в свою глобальную надполугруппу. Принятые выше соглашения можно отнести и к глобальной надполугруппе. В частности, можно говорить об n-й степени A^n подмножества A для любого натурального $n \geqslant 2$. (Разумеется, случай $n = 1$ также определен и обычно не исключается в рассмотрениях, когда в них участвует A^n, где n служит параметром. Однако запись A^1 как таковая, особенно в случае, когда $A = S$, чаще будет пониматься в другом смысле, см. ниже п. 2.1.) Если одно из перемножаемых подмножеств одноэлементно, то в качестве сомножителя пишут соответствующий элемент, например, eA, Sb и т. п.

Подмножество T полугруппы S называется *подполугруппой*, если для любых $a, b \in T$ имеет место $ab \in T$, иными словами, если $T^2 \subseteq T$. Сама S является своей подполугруппой; подполугруппа, отличная от S, называется *собственной*. Всякая неодноэлементная полугруппа имеет собственные подполугруппы. Подполугруппа T полугруппы S сама, очевидно, будет полугруппой относительно операции, индуцированной на T операцией, заданной на S; если при этом T является группой, то T называют *подгруппой* из S. Всякая подгруппа полугруппы содержится в некоторой максимальной подгруппе; максимальные подгруппы попарно не пересекаются. В случае, когда S — периодическая группа, всякая ее подполугруппа будет подгруппой; обратно, если все подполугруппы полугруппы S суть подгруппы, то S — периодическая группа. Если полугруппа A вложима в S, то в S есть подполугруппа, изоморфная A; в таких случаях нередко отождествляют A с ее изоморфным образом и, говоря о вложении, считают A подполугруппой S. Класс полугрупп $\mathcal{K}$ называется *наследственным* (или *замкнутым относительно подполугрупп*), если всякая подполугруппа произвольной $\mathcal{K}$-полугруппы сама является $\mathcal{K}$-полугруппой. Для произвольного подмножества X полугруппы S множество

$$\mathrm{Cent}(X) = \{a \in S \mid ax = xa \text{ для любого } x \in X\}$$

называется *централизатором* подмножества X. Централизатор подмножества является подполугруппой. Подполугруппа $\mathrm{Cent}(S)$ называется *центром* полугруппы S.

Подмножество L полугруппы S называют *левым идеалом*, если $SL \subseteq L$. Двойственно определяется правый идеал; так что R — *правый идеал* полугруппы S, если $RS \subseteq R$. Левые и правые идеалы вместе обычно называют *односторонними*. Подмножество полугруппы, являющееся как левым, так и правым идеалом, называется *двусторонним идеалом* или просто *идеалом*. Если X есть левый [правый, двусторонний] идеал полугруппы S, то пишут $X \trianglelefteq_l S$ [$X \trianglelefteq_r S$, $X \trianglelefteq S$], опуская черточку внизу, если идеал собственный. Всякий односторонний идеал является подполугруппой. Для любого подмножества A полугруппы S множество SA [AS, SAS] будет левым [правым, двусторонним] идеалом; в частности, таковым будет множество Sa [aS, SaS] для любого элемента $a \in S$. Для любого n полугруппа S^n есть идеал в S. Если $S^n = S^{n+k}$ для некоторого k, то $S^n = S^m$ для любого $m \geqslant n$; если $S^2 = S$, то полугруппа S называется *глобально идемпотентной*. Для любого $a \in S$ множество $L(a) = \{a\} \cup Sa$ [$R(a) = \{a\} \cup aS$, $J(a) = \{a\} \cup Sa \cup aS \cup aSa$] будет левым [правым, двусторонним] идеалом, содержащим a и содержащимся в любом левом [правом, двустороннем] идеале I таком, что $a \in I$; идеал $L(a)$ [$R(a), J(a)$] называют *главным левым* [*правым, двусторонним*] *идеалом*, порожденным элементом a. Подполугруппу T полугруппы S называют *изолированной* [*вполне изолированной*], если для любого $a \in S$ и любого натурального n [любых a, $b \in S$] из того, что $a^n \in T$ [a, $b \in T$], следует, что $a \in T$ [хотя бы один из элементов a, b принадлежит T]; это условие выполняется тогда и только тогда, когда $S \setminus T$ есть объединение подполугрупп [подполугруппа] или $T = S$. Вполне изолированный идеал называется также *вполне первичным* или *простым*; применявшийся иногда в этом смысле термин *вполне простой идеал* следует признать менее удобным из-за возникающей омонимии: второй смысл — «идеал, являющийся вполне простой (см. п. 3.1) полугруппой». Подполугруппа T полугруппы S называется *выпуклой* (или *фильтром*), если для любых a, $b \in S$ из того, что $ab \in T$, следует $a \in T$ и $b \in T$; это условие выполняется, очевидно, тогда и только тогда, когда $T = S \setminus I$ для некоторого (необходимо вполне изолированного) идеала I или $T = S$. Термин «фильтр» иногда используют для произвольных подмножеств вида $S \setminus I$, где I есть идеал. Всякое множество попарно не пересекающихся подполугрупп полугруппы будем называть *россыпью*. Типичный пример — россыпь максимальных подгрупп. Если $\{S_i\}_{i \in I}$ — россыпь полугруппы S такая, что $\bigcup\limits_{i \in I} S_i = S$ (т. е. компоненты россыпи образуют разбиение S), то будем говорить, что данная россыпь *покрывает* S. Если $\bigcup\limits_{i \in I} S_i$ является порождающим множеством (см. п. 2.4) полугруппы S, то будем говорить, что россыпь $\{S_i\}_{i \in I}$ *порождает* S.

Полугруппа S называется полугруппой *с левым законом сокращения* (или просто *с левым сокращением*), если для любых a, b, $c \in S$ из $ca = cb$ следует $a = b$. Двойственно определяестя *правый закон сокращения*. Если S есть полугруппа с левым и правым сокращением, то ее называют *полугруппой с* (двусторонним) *законом сокращения*, говорят также: полугруппа *с сокращением* (или *с сокращениями*). Любая подполугруппа группы удовлетворяет закону сокращения, но не всякая полугруппа с сокращением вложима в группу (см. [27], с. 39—45; в цитируемой работе (1939) впервые были найдены необходимые и достаточные условия вложимости полугруппы в группу). Однако если полугруппа S с сокращением такова, что $Sa \cap Sb \neq \varnothing$ для любых a, $b \in S$ (левое *условие Оре*), в частности, если S коммутативна, то S вложима в группу; при этом минимальная группа

G, в которую вложима S, будет *группой левых частных*, т. е. $G = \{a^{-1}b \mid a, b \in S\}$. Обратно, если полугруппа вложима в свою группу левых частных, то в ней выполнено левое условие Оре. Группа левых частных единственна с точностью до изоморфизма. Если S — полугруппа с сокращением, в которой для любых $a, b, c, d \in S$ из равенства $ab = cd$ следует $a \in cS$ или $c \in aS$, то S вложима в группу. Разумеется, верны двойственные варианты приведенных только что утверждений. О вложении полугруппы в группу см. еще пп. 2.5, 4.6, 7.1 и 7.4. См. также [18], § 1.10 и гл. 12; [19], § 0.5; [24], гл. 10, § 2. Обзор основных исследований, посвященных вложению полугрупп в группы, дан в [9], § 1. Конечная полугруппа с сокращением попросту является группой. Более слабым условием, нежели закон сокращения, является сепаративность: полугруппа S называется *сепаративной*, если для любых $a, b, c \in S$ из того, что $a^2 = ab = b^2$, следует $a = b$. Если полугруппа S обладает покрывающей россыпью из полугрупп с сокращением, то S будет сепаративной; для коммутативных полугрупп верно и обратное.

Из конструкций, применяемых в теории полугрупп, некоторые носят общеалгебраический характер — это, прежде всего, прямые, подпрямые и свободные произведения (см. также п. VI. 1.5). Пусть $\{S_i\}_{i \in I}$ — семейство полугрупп. На декартовом произведении $\prod_{i \in I} S_i$ можно задать операцию умножения покомпонентно:

$$(\ldots, x_i, \ldots)(\ldots, y_i, \ldots) = (\ldots, x_i y_i, \ldots).$$

Тогда $\prod_{i \in I} S_i$ превращается в полугруппу, называемую *прямым произведением полугрупп* S_i. Прямое произведение конечного числа полугрупп $S_1, S_2, \ldots, S_n$ обычно обозначается $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$. Для фиксированного $j \in I$ отображение $\pi_j\colon \prod_{i \in I} S_i \to S_j$, ставящее в соответствие каждой строке из $\prod_{i \in I} S_i$ ее j-ю компоненту (координату), будет гомоморфизмом, который называется *j-м проектирующим гомоморфизмом* или *j-й проекцией*. Все проектирующие гомоморфизмы сюръективны, так что каждая полугруппа S_j есть гомоморфный образ прямого произведения $\prod_{i \in I} S_i$. Вместе с тем, в отличие, например, от групп и колец, S_j может быть не вложима в $\prod_{i \in I} S_i$, но такое вложение наверняка существует, если в каждой из остальных полугрупп S_i $(i \neq j)$ есть хотя бы один идемпотент.

Если существует такой изоморфизм полугруппы S на полугруппу $T \subseteq \prod_{i \in I} S_i$, что для любого $i \in I$ имеет место $T\pi_i = S_i$, то S называется *подпрямым произведением* полугрупп S_i. Очень часто, говоря о подпрямых произведениях, отождествляют S и T, т. е. считают S подполугруппой из $\prod_{i \in I} S_i$. Подпрямое произведение называется *тривиальным*, если хотя бы один проектирующий гомоморфизм действует на T как изоморфизм, т. е. биективен. Полугруппа S называется *подпрямо неразложимой*, если любое ее представление в виде подпрямого произведения оказывается тривиальным. Как и любая универсальная алгебра, всякая полугруппа разложима в подпрямое произведение подпрямо неразложимых полугрупп. Класс полугрупп $\mathscr{K}$ называется *замкнутым относительно прямых* [*подпрямых*] *произведений*, если для любого семейства $\mathscr{K}$-полугрупп прямое [подпрямое] произведение полугрупп из этого семейства есть $\mathscr{K}$-полугруппа; класс, замкнутый относительно прямых произведений, называют также *мультипликативно замкнутым*.

Специализацией понятия подпрямого произведения является следующее понятие хребтового произведения. Пусть полугруппы семейства $\{S_i\}_{i \in I}$ имеют общий гомоморфный образ H и $\psi_i\colon S_i \to H$ $(i \in I)$ суть гомоморфизмы S_i на H. Тогда подполугруппа прямого произведения $\prod_{i \in I} S_i$, состоящая из всех элементов $(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots)$ с тем свойством, что $x_i\psi_i = x_j\psi_j$ для любых $i, j \in I$, называется *хребтовым произведением* полугрупп S_i (относительно полугруппы H и гомоморфизмов ψ_i).

Будем теперь считать полугруппы семейства $\{S_i\}_{i\in I}$ попарно не пересекающимися. Пусть полугруппа F удовлетворяет следующим условиям: для каждого $i \in I$ существует вложение α_i: $S_i \to F$, причем подполугруппы $S_i\alpha_i$ составляют порождающую россыпь в F. Для любой полугруппы T и любого семейства гомоморфизмов β_i: $S_i \to T$ существует единственный гомоморфизм γ: $F \to T$ такой, что $\alpha_i\gamma = \beta_i$. Тогда F называется *свободным произведением* полугрупп S_i и обозначается $\prod\limits_{i\in I}^{*} S_i$ (или, проще, $\prod^{*} S_i$). Для конечного семейства $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ свободное произведение записывают $S_1 * \ldots * S_n$. Обычно отождествляют полугруппы S_i с их образами $S_i\alpha_i$, и тогда каждая из них считается подполугруппой свободного произведения $F = \prod^{*} S_i$, а любой элемент из F единственным образом записывается в виде произведения $a_1a_2 \ldots a_m$, где сомножители принадлежат $\bigcup\limits_{i\in I} S_i$ и любые два соседних сомножителя лежат в разных полугруппах семейства $\{S_i\}$.

Различные специфические теоретико-полугрупповые конструкции будут рассматриваться в соответствующих местах дальнейшего текста.

Встречавшиеся выше конкретные примеры тождеств охватываются следующим общим определением. Пусть $x_1 \ldots x_m$ и $y_1 \ldots y_n$ — слова над некоторым алфавитом A (т. е. элементы свободной полугруппы над A, см. п. 1.2); говорят, что в полугруппе S выполняется *тождество* $x_1 \ldots x_m = y_1 \ldots y_n$, если при любом отображении φ: $A \to S$ элементы $x_1\varphi \ldots x_m\varphi$ и $y_1\varphi \ldots y_n\varphi$ из S равны. Если Ω — некоторая совокупность тождеств, то класс всех полугрупп, в которых выполняются тождества из Ω. называется *многообразием*, заданным системой тождеств Ω, и обозначается $\operatorname{var}\Omega$. Класс $\mathscr{V}$ будет многообразием тогда и только тогда, когда $\mathscr{V}$ наследствен, гомоморфно замкнут и мультипликативно замкнут (*теорема Биркгофа*, верная для любых универсальных алгебр). Для произвольного класса $\mathscr{K}$ полугрупп существует наименьшее многообразие, содержащее $\mathscr{K}$; оно называется многообразием, *порожденным* $\mathscr{K}$, и обозначается $\operatorname{var}\mathscr{K}$; в частности, если $\mathscr{K}$ состоит из одной полугруппы S, то пишут $\operatorname{var} S$.

Квазимногообразием называется всякий класс полугрупп, задаваемый некоторым множеством *квазитождеств* (или *условных тождеств*) — формул вида

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(u_1 = v_1 \,\&\, \ldots \,\&\, u_m = v_m \rightarrow u = v),$$

где u, v, u_i, v_i ($i = 1, \ldots, m$) — слова в алфавите $\{x_1, \ldots, x_n\}$. При записи квазитождеств кванторную приставку обычно опускают. Всякое многообразие будет квазимногообразием (произвольное тождество $u = v$ можно заменить квазитождеством $x = x \rightarrow u = v$). Типичные нетривиальные примеры квазимногообразий — класс полугрупп с сокращением, класс сепаративных полугрупп. Еще более общим является понятие *предмногообразия* — так называется всякий класс полугрупп, который наследствен, мультипликативно замкнут и содержит одноэлементную полугруппу. Предмногообразия называют также *реплично полными классами* (термин проистекает из свойства, связанного с репликами, см. п. 2.2). Предмногообразия, являющиеся аксиоматизируемыми классами — это в точности квазимногообразия (общеалгебраический факт).

1.2. Некоторые важные примеры. В п. 1.1 приведен ряд важнейших примеров числовых полугрупп; все эти полугруппы коммутативны. На множестве $\mathbf{R}$ (как и на любом его подмножестве) можно задать и следующие две операции, каждая из которых превращает рассматриваемое множество в коммутативную полугруппу: $x \wedge y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$. Множество $\mathbf{N}$ может быть превращено в коммутативную полугруппу еще двумя естественными способами: заданием операций $m \circ n = \text{НОД}(m, n)$ и $m * n = \text{НОК}(m, n)$. Множество всех подмножеств $\mathscr{P}(X)$ произвольного множества X будет коммутативной полугруппой относительно операции пересечения $\bigcap$ и относительно операции объединения $\bigcup$ (отметим, впрочем, что полугруппы $(\mathscr{P}(X), \bigcap)$ и $(\mathscr{P}(X), \bigcup)$ изоморфны). Разумеется, запас примеров полугрупп обогащается примерами групп, рассмотренных в гл. II. Большую серию примеров полугрупп составляют мультипликативные полугруппы ассоциативных колец (см. гл. III). Один из наиболее важных примеров такого рода — мультипликативная полугруппа $M_n(R)$ всех квадратных матриц порядка n над произвольным ассоциативным кольцом R.

Один из важнейших примеров полугрупп доставляет множество $\mathcal{T}(X)$ всех преобразований (отображений в себя) произвольного множества X. Образ элемента $x \in X$ при преобразовании будем обозначать через $x\alpha$. *Произведение* (*суперпозиция*, *композиция*) $\alpha\beta$ преобразований α и β задается тогда формулой

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta. \qquad (*)$$

Введенная операция ассоциативна, так что $\mathcal{T}(X)$ превращается в полугруппу, которая называется *симметрической полугруппой* или *полной полугруппой преобразований* на множестве X.

Принципиальная важность симметрических полугрупп состоит в том, что справедлив следующий аналог известной теоремы Кэли для групп: любая полугруппа вложима в подходящую симметрическую полугруппу; или, другими словами, любая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований. Говорят также, что любая полугруппа изоморфно *представима* преобразованиями. Обсуждаемое сейчас утверждение может быть уточнено: полугруппа S вложима в $\mathcal{T}(X)$, где множество X либо совпадает с S, либо получается из S добавлением одного элемента (см. п. 4.2). Умножение в множестве $\mathcal{T}(X)$ можно определить и «справа налево» (записывая символы отображений слева от соответствующих элементов X); положим для любого $x \in X$

$$\alpha \circ \beta(x) = \alpha(\beta(x))$$

(ср. т. 1, с. 28). Полученная таким образом полугруппа (ее также называют симметрической) двойственна введенной выше полугруппе $\mathcal{T}(X)$. Иногда применяют уточняющие обозначения: $\mathcal{T}_r(X)$ — для $\mathcal{T}(X)$, $\mathcal{T}_l(X)$ — для $\overleftarrow{\mathcal{T}}(X)$. Свойства полугрупп $\mathcal{T}(X)$ и $\overleftarrow{\mathcal{T}}(X)$ двойственны (а некоторые просто тождественны) друг другу. Из контекста обычно бывает ясно (если не указано явно), какая из двух двойственных форм симметрической полугруппы рассматривается.

Частичным отображением множества X в множество Y называется любое отображение произвольного подмножества из X в Y. При $X = Y$ получаем понятие *частичного преобразования* множества X. Для каждого частичного отображения α через $\operatorname{dom}\alpha$ [через $\operatorname{ran}\alpha$] обозначим область его определения [область значений]; употребительно также обозначение $\mathrm{pr}_1\,\alpha$ [соответственно $\mathrm{pr}_2\,\alpha$]. Особо выделим *пустое* частичное преобразование 0, для которого по определению $\operatorname{dom} 0 = \operatorname{ran} 0 = \varnothing$. Множество всех частичных преобразований множества X обозначают через $\mathcal{PT}(X)$. Введенное посредством формулы (*) умножение можно распространить и на множество $\mathcal{PT}(X)$, если договориться, что $\operatorname{dom}\alpha\beta = \{y \in X \mid y \in \operatorname{dom}\alpha$ и $y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}$ (в частности, если окажется, что $\operatorname{ran}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta = \varnothing$, то получается $\alpha\beta = 0$). Тогда (*) задает на $\mathcal{PT}(X)$ ассоциативную операцию, т. е. превращает $\mathcal{PT}(X)$ в полугруппу — *полугруппу всех частичных преобразований множества* X. Полугруппа $\mathcal{PT}(X)$ содержит в качестве подполугруппы $\mathcal{T}(X)$, а также еще одну важную «симметрическую» полугруппу — *полугруппу* $\mathcal{I}(X)$ *всех взаимно однозначных частичных преобразований множества* X; ее определение фактически дано самим термином. Важность полугруппы $\mathcal{I}(X)$ подчеркнута в п. 2.1. Каждая из полугрупп $\mathcal{T}(X)$ и $\mathcal{I}(X)$ содержит в качестве (максимальной) подгруппы симметрическую группу $\mathcal{G}(X)$, состоящую из всех биекций множества X на себя.

Множество $\mathcal{B}(X)$ всех бинарных отношений на X также является полугруппой относительно умножения, заданного условием:

$$(x, y) \in \rho\tau \Leftrightarrow (x, z) \in \rho \text{ и } (z, y) \in \tau \text{ для некоторого } z \in X.$$

Получается *полугруппа всех бинарных отношений* на множестве X. Полугруппу $\mathcal{PT}(X)$ естественным образом можно считать подполугруппой $\mathcal{B}(X)$, если отождествить частичные преобразования с такими бинарными отношениями, которые не содержат пар (x, y_1) и (x, y_2) с различными y_1 и y_2. Таким образом, из рассмотренных полугрупп $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{PT}(X)$, $\mathcal{T}(X)$, $\mathcal{I}(X)$, $\mathcal{G}(X)$, связанных с множеством X, полугруппа $\mathcal{B}(X)$ является наибольшей. Абстрактные характеризации первых четырех из этих полугрупп см. в п. 4.3.

Если множество X конечно, то каждое отношение $\rho \in \mathscr{B}(X)$ можно представить посредством квадратной матрицы, строки и столбцы которой индексированы элементами из X, а на пересечении x-й строки и y-го столбца стоит 1 [стоит 0], если $(x, y) \in \rho$ $[(x, y) \notin \rho]$, такие матрицы называют *булевыми*. Произведению $\rho\sigma$ при этом будет отвечать обычное произведение соответствующих булевых матриц для ρ и для σ, если на множестве $\{0, 1\}$ рассматривать булевы операции сложения и умножения: $0+0=0$, $0+1=1+0=1+1=1$, $0\cdot 0=0\cdot 1=1\cdot 0=0$, $1\cdot 1=1$. Изоморфизм полугруппы $\mathscr{B}(X)$ на полугруппу булевых матриц, ставящий в соответствие каждому $\rho \in \mathscr{B}(X)$ указанную выше матрицу, называется представлением полугруппы $\mathscr{B}(X)$ булевыми матрицами. Если считать $\mathscr{PT}(X)$ подполугруппой $\mathscr{B}(X)$, то булева матрица, соответствующая любому элементу $\mathscr{PT}(X)$, имеет в каждой строке не более одной единицы; такие матрицы называются *мономиальными* по строкам. При их умножении правилом $1+1=1$ никогда не приходится пользоваться, и его можно заменить правилом $1+1=0$. Тогда соответствующие матрицы можно считать матрицами над полем из двух элементов 0, 1. Тем самым получаем изоморфное представление полугруппы $\mathscr{PT}(X)$ мономиальными по строкам матрицами над двухэлементным полем.

Многие изучаемые полугруппы преобразований оказываются подполугруппами каких-либо из перечисленных выше полугрупп. Наиболее типична ситуация, когда множество X наделено той или иной математической структурой, и рассматриваются ее эндоморфизмы, т. е. преобразования, согласованные с этой структурой — сохраняющие соответствующие отношения и (или) операции, заданные на X. Совокупность $\operatorname{End} X$ всех эндоморфизмов данной структуры является подполугруппой в $\mathscr{T}(X)$ — это *полугруппа эндоморфизмов*. Классический пример такой ситуации — полугруппа $\operatorname{End}_F V$ линейных операторов векторного пространства V над телом F.

Нередко рассматриваемые математические структуры определяются в том или ином смысле своими полугруппами эндоморфизмов. Пусть $\mathscr{K}$ — класс математических структур. Говорят, что структура $X \in \mathscr{K}$ *определяется* (с точностью до изоморфизма) полугруппой эндоморфизмов, если для любой структуры $Y \in \mathscr{K}$ из того, что $\operatorname{End} Y \simeq \operatorname{End} X$, следует, что X и Y изоморфны. В ряде случаев разумны модифицированные варианты определяемости, когда требуется не обязательно изоморфность, а какое-нибудь более слабое «родство» структур X и Y, сохраняющее изоморфность полугрупп эндоморфизмов (например, свойство быть изоморфными или антиизоморфными). Вместе с тем в целом ряде ситуаций определяемость сопровождается более сильным свойством *индуцируемости*: всякий изоморфизм φ: $\mathrm{End}\,X \to \mathrm{End}\,Y$ индуцируется (например) изоморфизмом ψ: $X \to Y$, т. е. для любого $a \in \mathrm{End}\,X$ имеет место $a\varphi = \psi^{-1}a\psi$. Так, при $\dim V > 1$ всякий изоморфизм полугруппы $\mathrm{End}_F V$ на $\mathrm{End}_{F'} V'$ индуцируется взаимно однозначным полулинейным отображением V на V'; если P — нетривиальное квазиупорядоченное множество (т. е. отношение квазипорядка на P отлично от отношения равенства и от универсального отношения) и P' — рефлексивный граф, то всякий изоморфизм полугруппы $\mathrm{End}\,P$ на $\mathrm{End}\,P'$ индуцируется изоморфизмом или дуальным изоморфизмом (Глускин Л. М.//Успехи мат. наук. — 1962. — Т. 17, № 5. — С. 233—240). Первый из указанных результатов распространен на полугруппы эндоморфизмов модулей некоторых типов (см., например, Михалев А. В., Скорняков Л. А.//Итоги науки. Алгебра, топология, геометрия. 1968. — М.: ВИНИТИ, 1970. — С. 77—78; см. также [71], с. 41—43); второй тоже послужил отправной точкой целого ряда других родственных результатов (см. [67], § 1). Для случая когда X — та или иная топологическая структура, наиболее важный вариант согласованности преобразований с этой структурой состоит в свойстве непрерывности преобразования. Обзор исследований, посвященных полугруппам непрерывных преобразований (и, в частности, вопросам определяемости топологических пространств такими полугруппами), дан в [62], [53].

Полугруппа эндоморфизмов всегда содержит единицу (тождественное отображение), т. е. будет моноидом (см. п. 2.1). Имеется немало классов $\mathscr{K}$ математических структур с тем свойством, что любой моноид изоморфен моноиду $\mathrm{End}\,X$ для некоторой структуры $X \in \mathscr{K}$. Это, например, выполняется, если $\mathscr{K}$ есть класс всех полугрупп [коммутативных группоидов, областей целостности, решеток с сигнатурным нулем и единицей, алгебр с двумя унарными операциями, неориентированных графов]. Подробно о таких классах см. [78], гл. IV—VI.

Кроме полугрупп эндоморфизмов, в ряде случаев естественно рассматривать другие полугруппы преобразований. Так, *направленным* преобразованием графа X с отношением ρ называется всякое преобразование $\varphi \in \mathscr{T}(X)$ такое, что $(x, x\varphi) \in \rho$ для любого $x \in X$. Множество $\mathrm{Dir}\,X$ (обозначаемое и $\mathrm{Ext}\,X$) всех направленных преобразований графа X в общем случае будет частичным группоидом, а, например, если X — частично упорядоченное множество, то $\mathrm{Dir}\,X$ является полугруппой.

Рассматриваемые свойства преобразований графов могут выступать и в тех или иных комбинациях;

так возникают частичные эндоморфизмы, направлен ные эндоморфизмы, направленные частичные преобразования и др. Подробному обзору результатов о различных полугруппах отображений графов (и, в частности, об определяемости графов соответствующими полугруппами) посвящена работа [67]. В случае когда X — произвольная математическая структура, всякий изоморфизм между двумя ее подструктурами называют ее *локальным автоморфизмом*. Множество всех локальных автоморфизмов структуры X является подполугруппой в $\mathcal{I}(X)$.

Полезный подход, использующий полугруппы преобразований, состоит нередко в задании гомоморфизма φ какой-либо специальной полугруппы S в полугруппу $\mathcal{T}(X)$ для некоторого множества X; тем самым преобразования из $\varphi(S)$ «индексируются» элементами из S. Этот подход широко применяется в анализе, где в роли S обычно выступает одна из аддитивных числовых полугрупп. Например; если X — банахово пространство и каждому $s \in S$ поставлен в соответствие эндоморфизм (здесь — ограниченный линейный оператор) $\varphi(s)$, то полугруппа $\varphi(S) \subseteq \operatorname{End} X$ называется *однопараметрической полугруппой эндоморфизмов*. Книга [40] целиком посвящена теории таких полугрупп преобразований банаховых пространств.

Если X и Y — произвольные множества, то на множестве всех отображений или частичных отображений из X в Y можно несколькими способами определить операцию, превращающую рассматриваемое множество в полугруппу. Приведем один из наиболее известных примеров.

Пусть φ, ψ — частичные отображения из X в Y. Через $\varphi \triangleright \psi$ обозначим частичное отображение, полученное из ψ ограничением области определения: $\operatorname{dom}(\varphi \triangleright \psi) = \operatorname{dom} \psi \cap \operatorname{dom} \varphi$. Иначе говоря, $\varphi \triangleright \psi = \psi|_{\operatorname{dom} \varphi}$. Частичное отображение $\varphi \triangleright \psi$ называют *(левым) рестриктивным произведением* φ и ψ. Множество $\operatorname{Rest}(X, Y)$ всех частичных отображений из X в Y относительно рестриктивного умножения оказывается полугруппой, называемой *симметрической рестриктивной полугруппой* (частичных отображений из X в Y). Симметрические рестриктивные полугруппы удовлетворяют тождествам $x^2 = x$, $xyz = yxz$, т. е. являются нормальными справа связками (см. п. 2.1); последние называют также *рестриктивными* (*слева*) полугруппами. О рестриктивных полугруппах и, главным образом, о рестриктивных полугруппах направленных частичных преобразований графов см. в [67], § 4.

Следующий пример важен как для общей теории, так и для приложений. Пусть A — непустое множество, называемое *алфавитом*; элементы A будем называть *буквами*. Через F_A обозначим множество всех конечных последовательностей букв из A. Зададим на F_A операцию $\cdot$, полагая

$$(a_1, \ldots, a_m) \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n).$$

Эта операция (называемая иногда *конкатенацией*) ассоциативна, так что F_A становится полугруппой, которая называется *свободной полугруппой* над алфавитом A. Другое употребительное обозначение для нее — A^+. Отождествляя последовательность из одной буквы с самой этой буквой (и опуская, как обычно, в записи точку для конкатенации), получим $(a_1, a_2, \ldots, a_m) = a_1 a_2 \ldots a_m$. В виде таких произведений, как правило, и записывают элементы свободной полугруппы и называют их *словами*. Для обозначения равенства слов в свободной полугруппе часто применяют специальные символы $\equiv$ или $\doteq$, т. е. для слов $a_1 \ldots a_m$ и $b_1 \ldots b_n$ из A^+ равенство $a_1 \ldots a_m \equiv b_1 \ldots b_n$ означает, что $m = n$ и $a_i = b_i$ при $i = 1, \ldots, m$. Число m называют *длиной* слова $w = a_1 \ldots a_m$ и обозначают через $l(w)$ (иногда через $|w|$). Полугруппы A^+ и B^+ изоморфны тогда и только тогда, когда алфавиты A и B равномощны; мощность алфавита называют *рангом* соответствующей свободной полугруппы. Отметим, что свободная полугруппа счетного ранга вложима в свободную полугруппу ранга 2, свободная полугруппа данного ранга — в свободную группу того же ранга. Роль свободных полугрупп в общей теории объясняется прежде всего следующим принципиальным фактом: всякая полугруппа является гомоморфным образом подходящей свободной полугруппы. Характеристические свойства свободных полугрупп см. в пп. 2.1 и 2.4. Свободные полугруппы играют определяющую роль в комбинаторных приложениях полугрупп, см. § 9.

§ 2. Основные типы элементов, подмножеств и отношений в полугруппе

2.1. Идемпотенты и связанные с ними другие особые элементы. Возникающие здесь классы полугрупп. Напомним, что элемент e полугруппы называется идемпотентом, если $e^2 = e$. Отметим наиболее важные специальные типы идемпотентов. Элемент e полугруппы S называется *левым нулем* [*левой* *единицей*], если для любого $x \in S$ имеет место $ex = e$ [$ex = x$]. Двойственно определяется *правый нуль* [*правая единица*]. Элемент, являющийся одновременно левым и правым нулем [левой и правой единицей], называется двусторонним нулем [двусторонней единицей] или просто *нулем* [*единицей*] и чаще всего обозначается обычным символом 0 [символом 1]. Если полугруппа имеет как левые, так и правые нули [единицы], то все они совпадают и, стало быть, равны 0 [равны 1]. Любую полугруппу S можно вложить в полугруппу с нулем [единицей], присоединив к ней новый элемент 0 [элемент 1] и доопределив операцию на множестве $S \cup \{0\}$ [$S \cup \{1\}$], полагая

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \quad [1 \cdot 1 = 1, \ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x]$$

для любого $x \in S$. Через S^1 [через S^0] принято обозначать саму полугруппу S, если она обладает единицей [обладает нулем и неодноэлементна], либо — в противном случае — полугруппу, полученную из S присоединением единицы [нуля] указанным только что способом. Таким образом, вместо оборота типа «S — полугруппа с единицей [нулем]» можно писать более кратко «$S = S^1$ [$S = S^0$]». Если G — группа, то полугруппу G^0 называют *группой с нулем* или *0-группой*. В случае когда рассматриваемая полугруппа S не обязательно обладает единицей, бывает удобно использовать запись S^1 в некоторых произведениях для сокращения соответствующих выражений; наиболее типичные примеры — выражения (ср. п. 1.1) для главных (левого, правого и двустороннего) идеалов:

$$L(a) = S^1a, \quad R(a) = aS^1, \quad J(a) = S^1aS^1.$$

Полугруппа с единицей называется *моноидом*. Употребление этого термина особенно оправданно, если на фиксирование единицы смотреть как на нульарную операцию (см. п. VI. 1.1); тогда, в частности, *подмоноид* моноида — это любая подполугруппа, содержащая 1, *моноидный гомоморфизм* — гомоморфизм моноида в моноид, переводящий единицу в единицу. Наряду со свободной полугруппой A^+ над алфавитом A часто рассматривают *свободный моноид* $A^* = (A^+)^1$ над A, в котором 1 называют *пустым словом*. Приведем две абстрактные характеризации свободных моноидов. Моноид M называют *равноделимым*, если для любых $a, b, c, d \in M$ равенство $ab = cd$ влечет существование такого $v \in M$, что либо $a = cv$ и $vb = d$, либо $av = c$ и $b = vd$. Следующие условия для моноида M эквивалентны: (1) M свободен; (2) M равноделим, множество $S = M \setminus \{1\}$ есть подполугруппа в M и $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S^n = \varnothing$; (3) M — равноделимый моноид с сокращением, в котором 1 есть единственный обратимый элемент и каждый элемент имеет лишь конечное число левых [правых] делителей (см. [18], § 9.1; [19], § 6.6; [22], гл. 5, § 1; [24], гл. IX, § 5). Еще одна характеризация свободных моноидов (полугрупп) — в терминах отображений порождающих множеств — приведена в п. 2.4.

Элемент a моноида S называется *обратимым справа* [*слева*], если существует такой элемент $b \in S$, что $ab = 1$ $[ba = 1]$. Элемент, обратимый слева и справа, называется двусторонне обратимым или просто *обратимым*. Множество $G_r(S)$ [множество $G_l(S)$] всех обратимых справа [слева] элементов моноида S является подмоноидом с правым [левым] сокращением; множество $G(S) = G_r(S) \cap G_l(S)$ всех обратимых элементов является (максимальной) подгруппой в S, называемой *группой обратимых элементов* моноида S. Группа $G(S)$ тогда и только тогда включает в себя все односторонние обратимые элементы (т. е. верно равенство $G_r(S) = G_l(S)$), когда $G(S)$ выпукла в S; при этом множество $S \setminus G(S)$, если оно не пусто, является наибольшим отличным от S идеалом в S. Полугруппа S с таким свойством называется полугруппой *с отделяющейся групповой частью*. Полугруппами с отделяющейся групповой частью будут всякий конечный и всякий коммутативный моноид, всякий моноид с сокращением, всякий моноид матриц над полем (см. [24], гл. VI, § 6, 7). О полугруппах, имеющих элементы, обратимые только с одной стороны, см. п. 2.6.

Элемент a полугруппы $S = S^0$ называют *левым* [*правым*] *делителем нуля*, если $a \neq 0$ и в S существует такой элемент $b \neq 0$, что $ab = 0$ $[ba = 0]$. Элемент a из $S = S^0$ называется *нильэлементом* (или *нильпотентным* элементом), если $a^n = 0$ для некоторого натурального n; наименьшее n с таким свойством называется *индексом* элемента a. Нильэлемент индекса >1 является, очевидно, делителем нуля (левым и правым). Множество нильэлементов полугруппы $S=S^0$ будем обозначать $\operatorname{Nil} S$. Говорят, что элемент *a аннулирует слева* [*справа*] подмножество $X \subseteq \subseteq S$, если $aX=0$ $[Xa=0]$ *). Множество $\operatorname{Ann}_l X = =\{a \mid aX=0\}$ называется *левым аннулятором* подмножества X; двойственно определяется *правый аннулятор* $\operatorname{Ann}_r X$. Множество $\operatorname{Ann} X = \operatorname{Ann}_l X \cap \operatorname{Ann}_r X$ называется (двусторонним) *аннулятором* множества X. Свойства аннуляторов в полугруппах с нулем параллельны свойствам аннуляторов в кольцах (см. п. III.2.1); в частности, если X есть левый [правый] идеал, то $\operatorname{Ann}_l X$ $[\operatorname{Ann}_r X]$ является двусторонним идеалом. Если аннулятор содержит ненулевые элементы, то его называют *нетривиальным*, в противном случае — *тривиальным*. Полугруппу $S=S^0$ называют *бэровской* (или *полугруппой Бэра*), если для любого $x \in S$ существуют идемпотенты $e, f \in S$ такие, что $\operatorname{Ann}_r\{x\}=eS$ и $\operatorname{Ann}_l\{x\}=Sf$. Примеры бэровских полгрупп: полугруппа бинарных отношений $\mathscr{B}(X)$, мультипликативная полугруппа любого булева кольца с единицей, любой моноид с нулем и без делителей нуля. Говорят, что полугруппа $S=S^0$ удовлетворяет *слабому закону сокращения*, если каждое из условий $ac=bc\neq 0$, $ca=cb\neq 0$ влечет за собой $a=b$; для мультипликативных полугрупп колец это свойство, очевидно, эквивалентно отсутствию делителей нуля. Полугруппа $S=S^0$ называется *категорийной в нуле*, если равенство $abc=0$ влечет за собой $ab=0$ или $bc=0$.

Проиллюстрируем некоторые из рассмотренных понятий на примерах симметрической полугруппы $\mathscr{T}(X)$ и полугруппы матриц $M_n(F)$ над полем F. В каждой из них есть единица (тождественное преобразование id_X и, соответственно, единичная матрица). Полугруппа $\mathscr{T}(X)$ имеет правые нули — это в точности *константные отображения* ζ_a (где a пробегает X), задаваемые условием: для любого $x \in X$ по определению $x\zeta_a=a$. При $|X|>1$ левых нулей в $\mathscr{T}(X)$ нет. В $M_n(F)$ есть нуль, а потому других односторонних нулей нет. Индексы нильэлементов из $M_n(F)$ не превосходят n, причем граница n достигается (см. при-

*) Мы придерживаемся здесь (и далее в аналогичных случаях) распространенного соглашения писать 0 вместо обозначения одноэлементного множества $\{0\}$.

мер в п. III.2.1). Левый и правый аннуляторы полугруппы $M_n(F)$ тривиальны. Обратимые слева [справа] элементы из $\mathcal{T}(X)$ — это в точности сюръективные [инъективные] преобразования. Следовательно, группа обратимых элементов в $\mathcal{T}(X)$ — это симметрическая группа $\mathcal{G}(X)$. При бесконечном X все три вида обратимости — слева, справа и двусторонняя — для $\mathcal{T}(X)$ различны; при конечном X они совпадают. В $M_n(F)$ они также совпадают, группу обратимых элементов составляют невырожденные матрицы.

Для полугруппы S через E_S или $E(S)$ (или просто E, если S фиксирована) обозначают множество всех ее идемпотентов. Во многих рассмотрениях полезную роль играет отношение *естественного частичного порядка* на E, заданное условием:

$$e \leqslant f \Leftrightarrow ef = fe = e. \qquad (*)$$

В этом смысле можно, например, говорить о цепях и антицепях в E. Очевидно, что единица [нуль] полугруппы будет наибольшим [наименьшим] элементом в E. Идемпотент $e \neq 0$ называется *примитивным*, если e является минимальным элементом в множестве ненулевых идемпотентов из E. В частности, всякий односторонний нуль полугруппы, не являющейся двусторонним нулем, будет примитивным идемпотентом. В полугруппе с левым [правым] сокращением всякий идемпотент является левой [правой] единицей. Следовательно, в полугруппе с сокращением может быть не более одного идемпотента, и если таковой есть, то это единица. Идемпотент e полугруппы S называется *центральным*, если $e \in \mathrm{Cent}(S)$, т. е. $ex = xe$ для любого $x \in S$. Полугруппу, содержащую единственный идемпотент, называют *унипотентной*.

Полугруппу, каждый элемент которой является идемпотентом, называют *полугруппой идемпотентов* (или *идемпотентной полугруппой*), а также *связкой*. Коммутативная связка называется *полурешеткой*. Последний термин оправдан тем, что если рассмотреть на полурешетке S отношение естественного частичного порядка (заданное формулой $(*)$), то для любых $a, b \in S$ произведение ab будет равно $\inf(a, b)$; и обратно, если P — частично упорядоченное множество, в котором любые два элемента имеют точную нижнюю грань, то операция $\cdot$, заданная условием $a \cdot b = \inf(a, b)$, превращает P в коммутативную связку. Целый ряд конкретых примеров полурешеток приведен в самом начале п. 1.2; последние два из них в некотором смысле универсальны: любая полурешетка S вложима в полурешетку $(\mathscr{P}(S), \cap)$. Полурешетки с нулем, ненулевые элементы которых образуют антицепь, называются *веерными*. Простейшие примеры некоммутативных связок доставляют *полугруппы левых* [*правых*] *нулей*, удовлетворяющие, по определению, тождеству $xy = x$ $[xy = y]$. Полугруппу левых [правых] нулей называют также *левосингулярной* [*правосингулярной*]; полугруппа, являющаяся левосингулярной или правосингулярной, называется *сингулярной*. Сингулярная полугруппа не только некоммутативна, она обладает следующим свойством «антикоммутативности»: $ab \neq ba$ для любых различных элементов a и b. Произвольная полугруппа с указанным свойством, очевидно, является связкой и удовлетворяет тождеству $xyx = x$; такие полугруппы называются *прямоугольными* (или *прямоугольными связками*).

Прилагательное «прямоугольная» оправдано следующим утверждением, исчерпывающим образом проясняющим структуру прямоугольных полугрупп: полугруппа S прямоугольна тогда и только тогда, когда S изоморфна прямому произведению $L \times R$, где L левосингулярна, а R правосингулярна. Таким образом, элементы S можно разместить в прямоугольной матрице, строки которой индексированы элементами из L, столбцы — элементами из R, и если через x_{ik} обозначить элемент, стоящий в i-й строке и k-м столбце, то закон умножения в S будет таков:

$$x_{ik}x_{jl} = x_{il}. \qquad (**)$$

Если $|L| = |R|$, то прямоугольную полугруппу $L \times R$ называют *квадратной*.

Полурешетки и прямоугольные полугруппы представляют собой не только полярные типы связок; их важность объясняется, в частности, и особой ролью, которую оба типа играют при описании строения произвольной связки (см. п. 2.3). Из других употребительных типов связок отметим *нормальные* [*нормальные слева*, *нормальные справа*], задаваемые дополнительным тождеством $xyzx = xzyx$ $[xyz = xzy,$ $xyz = yxz]$. Вместе с полурешетками, сингулярными и прямоугольными связками они определяют многообразия из нижних «этажей» решетки многообразий связок (см. диаграмму в п. 7.3).

Для произвольного идемпотента e полугруппы S множество eSe будет подполугруппой с единицей e; всякую подполугруппу такого вида называют *главным* (или *локальным*) *подмоноидом* полугруппы S. Максимальные подгруппы из S — это в точности группы обратимых элементов главных подмоноидов S. Максимальную подгруппу с единицей e обозначают G_e или H_e (последнее обозначение проистекает из рассмотрения $\mathcal{H}$-классов, см. п. 2.7). Всякий элемент полугруппы, принадлежащий какой-либо ее подгруппе, называется *групповым*. Элемент a полугруппы S называется *регулярным*, если $a \in aSa$, т. е. если в S существует такой элемент x, что $a = axa$. Из последнего равенства вытекает, что элеметны $e = ax$ и $f = xa$ — идемпотенты, причем элемент e [элемент f] служит для a левой [правой] единицей; если при этом $e = f$, то a будет групповым элементом. Обратно, если элемент $a \in S$ обладает левой [правой] единицей, принадлежащей множеству aS [множеству Sa], то a, очевидно, регулярен. Элемент a регулярен тогда и только тогда, когда главный левый идеал $L(a)$ [главный правый идеал $R(a)$] порождается некоторым идемпотентом. Элементы a и b называются *инверсными друг к другу* (*обобщенно обратными, регулярно сопряженными*), если $aba = a$ и $bab = b$. Всякий регулярный элемент обладает хотя бы одним инверсным к нему элементом. Всякий групповой элемент g будет регулярным, обратный к нему в соответствующей максимальной подгруппе G элемент g^{-1} будет инверсным к g (подчеркнем, что вне G могут существовать и другие инверсные к g элементы), и, кроме того, g и g^{-1} перестановочны. Обратно, два перестановочных инверсных друг к другу элемента будут групповыми и взаимно обратными в соответствующей подгруппе G_e. Групповые элементы называют также *вполне регулярными*.

Полугруппа называется *регулярной* [*клиффордовой*], если все ее элементы регулярны [групповые]. Клиффордовы полугруппы называют также *вполне регулярными* или *объединениями групп*. Всякая клиффордова полугруппа обладает разбиением на (максимальные) подгруппы и, очевидно, регулярна. Полугруппа будет клиффордовой тогда и только тогда, когда все ее односторонние идеалы изолированы. Полугруппа будет регулярной тогда и только тогда, когда для любого ее левого идеала L и любого правого идеала R имеет место $RL = R \cap L$. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S регулярна и унипотентна, (2) S регулярна и удовлетворяет закону сокращения, (3) S есть группа.

Многие важные конкретные полугруппы регулярны, не являясь, вообще говоря, клиффордовыми. Таковы, например, полугруппы $\mathcal{T}(X)$, $\mathcal{PT}(X)$, $\mathcal{I}(X)$ и $\mathcal{B}(X)$ (первая из них будет клиффордовой лишь при $|X| \leqslant 2$, три другие — лишь при $|X| = 1$). Понятие регулярности пришло в теорию полугрупп из теории колец, и разнообразные примеры регулярных полугрупп доставляют, разумеется, мультипликативные полугруппы регулярных колец. Такова, например, полугруппа $M_n(F)$, где F — тело (она будет клиффордовой лишь при $n = 1$).

Через $\operatorname{Gr} S$ обозначим множество всех групповых элементов полугруппы S; $\operatorname{Gr} S = \bigcup\limits_{e \in E_S} G_e$. Регулярную полугруппу S, для которой $\operatorname{Gr} S = E_S$, называют *комбинаторной*. Этот термин употребляют иногда и для произвольных полугрупп, все подгруппы которых одноэлементны. Регулярную полугруппу S называют *ортодоксальной*, если E_S является подполугруппой. Этот термин употребляется иногда и для не обязательно регулярных полугрупп, в которых произведение любых двух идемпотентов есть идемпотент. Ортодоксальные клиффордовы полугруппы называют *ортогруппами*.

В силу отмеченного выше свойства регулярных элементов, каждый элемент регулярной полугруппы S имеет инверсный к нему элемент: если для любого $a \in S$ такой элемент a^{-1} единствен, то S называется *инверсной полугруппой* (в ряде исследований использовался также термин *обобщенная группа*). Коммутативная регулярная полугруппа будет клиффордовой и инверсной. В классе регулярных полугрупп своеобразным антиподом инверсным полугруппам служат прямоугольные полугруппы: в них и только в них любые два элемента инверсны друг к другу. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S инверсна; (2) каждый главный левый и каждый главный правый идеал в S порождается единственным идемпотентом; (3) S регулярна и любые два ее идемпотента перестановочны. В силу (3) всякая инверсная полугруппа S ортодоксальна, причем E_S является полурешеткой. Инверсная полугруппа будет клиффордовой тогда и только тогда, когда ее идемпотенты центральны. Полугруппа $\mathcal{I}(X)$ инверсна, ее называют *симметрической инверсной* полугруппой на множестве X. Идемпотенты в $\mathcal{I}(X)$ — это в точности тождественные преобразования всевозможных подмножеств из X, и, следовательно, полурешетка $E_{\mathcal{I}(X)}$ изоморфна булевой алгебре всех подмножеств множества X. Симметрические инверсные полугруппы играют для класса инверсных полугрупп ту же роль, что симметрические группы для класса групп и симметрические полугруппы для класса полугрупп, ибо справедлив следующий аналог теоремы Кэли: любая инверсная полугруппа S вложима в симметрическую инверсную полугруппу $\mathcal{I}(S)$. Детальнее об этом см. в п. 4.2. Представление инверсных полугрупп взаимно однозначными частичными преобразованиями предопределяет принципиальную возможность применения инверсных полугрупп в основаниях дифференциальной геометрии; по поводу основных идей такого применения см. [11].

На клиффордовы и инверсные полугруппы весьма естествен взгляд как на алгебры с двумя операциями: наряду с бинарной операцией (умножением) есть унарная операция $^{-1}$; в инверсных полугруппах она означает взятие инверсного элемента, в клиффордовых — взятие обратного элемента в соответствующей (можно считать, максимальной) подгруппе. Полугруппу с дополнительной сигнатурной унарной операцией $^{-1}$ называют *унарной полугруппой*; соответственно возникают понятия унарной подполугруппы и т. п. Унарная полугруппа называется *инволютированной*, если операция $^{-1}$ есть антиавтоморфизм второго порядка, т. е. верны тождества $(x^{-1})^{-1}=x$, $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$. Класс инверсных [клиффордовых] полугрупп не является многообразием в обычной полугрупповой сигнатуре (он не наследствен), но в сигнатуре унарных полугрупп будет многообразием, которое задается системой тождеств

$$x(yz)=(xy)z,\quad (x^{-1})^{-1}=x,\quad xx^{-1}x=x,$$
$$xx^{-1}yy^{-1}=yy^{-1}xx^{-1}$$
$$[x(yz)=(xy)z,\ (x^{-1})^{-1}=x,\ xx^{-1}x=x,\ xx^{-1}=x^{-1}x].$$

При этом многообразие унарных инверсных полугрупп содержится в многообразии инволютированных полугрупп, унарные клиффордовы полугруппы, вообще говоря, не будут инволютированными (простейший контрпример доставляют сингулярные полугруппы). Всякий односторонний идеал инверсной [клиффордовой] полугруппы будет инверсной [клиффордовой] полугруппой. Гомоморфный образ инверсной [клиффордовой] полугруппы S сам будет инверсной [клиффордовой] полугруппой; при этом для любого $x\in S$ и любого гомоморфизма φ полугруппы S имеет место $\varphi(x^{-1})=\varphi(x)^{-1}$, т. е. гомоморфизм в обычной сигнатуре будет гомоморфизмом и в сигнатуре унарной полугруппы. Класс регулярных полугрупп также гомоморфно замкнут, но не наследствен; всякий односторонний идеал регулярной полугруппы будет регулярной полугруппой. Для клиффордовых полугрупп нулевой показатель степени элемента используется обычно в смысле, отличном от указанного в п. 1.1 (обе трактовки совпадают для групп); а именно, для любого x полагают $x^0=xx^{-1}=x^{-1}x$, т. е. x^0 есть единица максимальной подгруппы, содержащей x.

Для элемента a произвольной полугруппы среди степеней a, a^2, a^3, ... будет лишь конечное число различных тогда и только тогда, когда некоторая степень a равна идемпотенту; элемент a с таким свойством называется элементом *конечного порядка*, в противном случае a называется элементом *бесконечного порядка*. Полугруппа, все элементы которой имеют конечный порядок, называется *периодической*. Периодическая полугруппа с законом сокращения будет группой. Полярный к группам класс унипотентных периодических полугрупп составляют *нильполугруппы* — полугруппы с нулем, все элементы которых суть нильэлементы. Полугруппа $S=S^0$ называется *нильпотентной*, если $S^n=0$ для некоторого n; при желании указать n говорят о *n-ступенно нильпотентной* (или *n-нильпотентной*) полугруппе, наименьшее n с таким свойством называют *ступенью нильпотентности*. Всякая нильпотентная полугруппа будет, очевидно, нильполугруппой; 2-нильпотентную полугруппу часто называют полугруппой *с нулевым умножением*. Полугруппу называют *левой* [*правой*] *нильполугруппой*, если некоторая степень каждого ее элемента есть левый [правый] нуль. Полугруппу S называют *нильпотентной слева* [*справа*], если для некоторого n S^n состоит из левых [правых] нулей. Если в полугруппе S некоторая степень любого элемента есть групповой элемент, то S называется *эпигруппой* (или *квазипериодической полугруппой*; в англоязычной литературе используются термины pseudo-invertible, quasi-completely regular, group-bound и др.). Класс эпигрупп включает в себя, в частности, все периодические и все клиффордовы полугруппы.

Многие введенные в этом пункте классы полугрупп (а также те или иные их подклассы) служат в последующих разделах предметом более детальных рассмотрений.

2.2. Конгруэнции и гомоморфизмы. Бинарное отношение ρ на полугруппе S называется *стабильным* (или *устойчивым*) *слева*, если для любых a, b, $c \in S$ из $a\rho b$ следует $ca\rho cb$. Двойственно определяется *стабильность справа*. Отношение, стабильное слева и справа, называется (двусторонне) *стабильным*. Стабильная эквивалентность на полугруппе называется *конгруэнцией*. Это определение согласуется с определением конгруэнции на произвольной универсальной алгебре (см. п. VI. 1.4), так как эквивалентность ρ на полугруппе S будет стабильной тогда и только тогда, когда для любых a_1, a_2, b_1, $b_2 \in S$ из $a_1\rho b_1$ и $a_2\rho b_2$ следует $a_1a_2\rho b_1b_2$. Эквивалентность на полугруппе, стабильная слева [справа], называется *левой* [*правой*] *конгруэнцией*. Левые [правые] конгруэнции на группе — это в точности эквивалентности, соответствующие разбиениям группы на левые [правые] смежные классы по всевозможным подгруппам.

Как и для любых универсальных алгебр, если ρ — конгруэнция на полугруппе S, то фактормножество S/ρ превращается в полугруппу заданием на нем операции $\cdot$, определяемой формулой

$$\rho(x)\cdot\rho(y)=\rho(xy). \qquad (*)$$

Эта полугруппа называется *факторполугруппой* полугруппы S по конгруэнции ρ. Перемножая ρ-классы в факторполугруппе S/ρ, точку обычно не пишут. При этом следует иметь в виду, что записи $\rho(x)\rho(y)$ (или аналогичной записи с другими обозначениями ρ-классов) можно придать и другой смысл: произведение подмножеств из S, т. е. произведение в глобальной надполугруппе; при такой интерпретации произведения равенство $(*)$ эквивалентно включению $\rho(x)\rho(y)\subseteq\subseteq\rho(xy)$. Как правило, из контекста бывает ясно, в каком смысле понимается произведение. Может, впрочем, оказаться, что оба смысла совпадают для любых двух ρ-классов; конгруэнцию ρ с таким свойством называют *совершенной*. Полугруппа, в которой все конгруэнции совершенны, называется *совершенной*. Класс совершенных полугрупп гомоморфно замкнут и включает в себя все вполне простые и вполне 0-простые полугруппы (Фортунатов В. А.//Изв. вузов. Математика. — 1972. — № 3. — С. 80—89).

Отображение $\rho^{\natural}\colon S\to S/\rho$, ставящее в соответствие каждому элементу содержащий его ρ-класс $\rho(x)$, является сюръективным гомоморфизмом, он называется *естественным* (или *каноническим*) гомоморфизмом S на S/ρ. Для произвольного гомоморфизма $\varphi\colon S\to T$ отношение $\ker\varphi=\{(a,b)\in S\times S\mid a\varphi=b\varphi\}$, называемое *ядром гомоморфизма* φ, есть конгруэнция на S, причем факторполугруппа $S/\ker\varphi$ изоморфна T; более точно, существует изоморфизм ψ полугруппы $S/\ker\varphi$ на T такой, что $\varphi=(\ker\varphi)^{\natural}\psi$. (Приведенные утверждения представляют собой конкретную версию *теоремы о гомоморфизмах*, верной для любых универсальных алгебр.) Если ρ, τ — конгруэнции на полугруппе S, причем $\rho\subseteq\tau$, то существует (единственный) сюръективный гомоморфизм $\chi\colon S/\rho\to S/\tau$ такой, что $\tau^{\natural}=\rho^{\natural}\chi$. Если H — подполугруппа полугруппы S и ρ — конгруэнция на S, то отношение $\rho\cap(H\times H)$ будет конгруэнцией на H; она называется конгруэнцией, *индуцированной* конгруэнцией ρ. Если конгруэнция τ на H индуцирована некоторой конгруэнцией на S, то говорят, что τ может быть *продолжена* на S. Говорят, что конгруэнция ρ на S *разделяет элементы множе-*

ства $X \subseteq S$, если в каждом ρ-классе содержится не более одного элемента из X. Семейство конгруэнций Σ на полугруппе S называется *разделяющим*, если для любых различных x, $y \in S$ существует конгруэнция $\sigma \in \Sigma$, разделяющая x и y. Говорят, что полугруппа S *аппроксимируема* полугруппами из класса $\mathscr{K}$, если для любых различных элементов x, $y \in S$ существует сюръективный гомоморфизм φ полугруппы S на некоторую полугруппу из $\mathscr{K}$, при котором $x\varphi \neq y\varphi$. В случае когда $\mathscr{K}$ есть класс всех конечных полугрупп, соответствующие полугруппы называют *финитно аппроксимируемыми* (или *резидуально конечными*). Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S аппроксимируема полугруппами из класса $\mathscr{K}$, (1′) существует разделяющее семейство Σ конгруэнций на S такое, что для любого $\sigma \in \Sigma$ факторполугруппа S/σ принадлежит $\mathscr{K}$, (2) S разложима в подпрямое произведение полугрупп из $\mathscr{K}$.

Следующие условия для непустого подмножества N полугруппы S эквивалентны: (1) N является классом некоторой конгруэнции на S, (2) для любых a, $b \in N$ и любых x, $y \in S^1$ из $xay \in N$ следует $xby \in N$. Подмножество N, удовлетворяющее этим условиям, называется *нормальным комплексом*. Нормальный комплекс N, содержащий подполугруппу, сам будет подполугруппой (конкретная версия общеалгебраического факта). В частности, N будет подполугруппой, если N содержит идемпотент. Для регулярных полугрупп и эпигрупп справедливо обратное утверждение: всякий нормальный комплекс, являющийся подполугруппой, содержит идемпотент. Специальный случай нормального комплекса представляет собой *нормальная подполугруппа* — так называют полный прообраз единицы при некотором гомоморфизме данной полугруппы на моноид. Подполугруппа N полугруппы S будет нормальной тогда и только тогда, когда для любого $a \in N$ и любых x, $y \in S^1$ таких, что $xy \in S$, каждое из включений $xy \in N$ и $xay \in N$ влечет за собой другое. Нормальные подполугруппы группы — это в точности ее нормальные подгруппы. В отличие от групп и колец, произвольная конгруэнция на полугруппе не определяется, вообще говоря, каким-либо одним из своих классов; это обусловливает специфику и сложность изучения конгруэнций на полугруппах. В отдельных случаях указанная определяемость имеет место; например, всякая конгруэнция ρ на полугруппе S такая, что S/ρ есть группа, определяется заданием своего класса, являющегося нормальной подполугруппой. В ряде случаев конгруэнция может определяться какой-то выделенной системой своих классов; один из наиболее выразительных примеров такой ситуации доставляют регулярные полугруппы: в них любая конгруэнция определяется множеством своих классов, содержащих идемпотенты (см. [18], теорема 7.38). Другой важный пример — рисовские конгруэнции на произвольной полугруппе. Пусть I — идеал полугруппы S. Определим отношение ρ_I на S, полагая

$$\rho_I = \{(a, b) \in S \times S \mid a, b \in I \text{ или } a = b\}.$$

Легко видеть, что ρ_I — конгруэнция; ее называют *идеальной* или *рисовской конгруэнцией* (или конгруэнцией Риса), соответствующей идеалу I. Классы конгруэнции ρ_I — это идеал I и (если $I \neq S$) одноэлементные подмножества $\{a\}$, где $a \in S \setminus I$. Факторполугруппу S/ρ_I, как правило, обозначают S/I и называют *факторполугруппой Риса* полугруппы S по идеалу I. Факторполугруппа Риса всегда есть полугруппа с нулем. Образно говоря, S/I получается из S «склеиванием» всех элементов идеала I и превращением их в нуль. Таким образом, идеалы представляют собой полярный по отношению к нормальным подполугруппам тип нормальных комплексов: они (и, очевидно, только они) являются полными прообразами нуля при гомоморфизмах данной полугруппы на полугруппу с нулем. Если в определении рисовской конгруэнции идеал I заменить произвольным левым [правым] идеалом, то введенное отношение ρ_I будет левой [правой] конгруэнцией.

Всякий гомоморфный образ A произвольной подполугруппы T полугруппы S называется *фактором* или *делителем* полугруппы S; говорят также, что A *делит* S, и пишут $A \mid S$. Если $A \simeq T/I$, где $I \trianglelefteq T$, то A называют *рисовским фактором*. Если T есть эпигруппа, то такой [рисовский] фактор будем называть [рисовским] *эпифактором*. Для любых подполугруппы T и идеала J из S множество $T \cup J$ будет подполугруппой; если при этом $T \cap J \neq \varnothing$, то $T \cap J \leqslant\!| T$ и $T \cup J/J \simeq \simeq T/T \cap J$. Если J и K — идеалы из S, причем $J \subseteq K$, то $K/J \leqslant\!| S/J$ и $(S/J)/(K/J) \simeq S/K$. Если $J \leqslant\!| S$, то полугруппа S называется *идеальным расширением* полугруппы J при помощи полугруппы S/J. Класс $\mathscr{K}$ называется *замкнутым относительно идеальных расширений* [*идеалов, факторполугрупп Риса*], если идеальное расширение $\mathscr{K}$-полугруппы при помощи $\mathscr{K}$-полугруппы [идеал $\mathscr{K}$-полугруппы, факторполугруппа Риса $\mathscr{K}$-полугруппы] будет $\mathscr{K}$-полугруппой. Идеальное расширение данной полугруппы при помощи нильпотентной полугруппы [нильполугруппы] называют ее *нильпотентным расширением* [*нильрасширением*].

Для многих конкретных полугрупп решалась задача описания всех конгруэнций на соответствующей полугруппе. Решение этой задачи для симметрической полугруппы $\mathscr{T}(X)$ см. в [27], с. 314—327, а также [18], § 10.8. Для ряда важных классов полугрупп получены описания (в тех или иных терминах) конгруэнций на полугруппах из этих классов; соответствующую информацию для вполне простых и инверсных полугрупп см. ниже в пп. 3.2 и 5.2. Развернутому изучению конгруэнций на вполне 0-простых полугруппах посвящена книга [58].

Множество $\operatorname{Con} S$ всех конгруэнций на полугруппе S, частично упорядоченное включением, будет полной решеткой (полной подрешеткой решетки всех эквивалентностей на S). Единица этой решетки — универсальное отношение $\nabla_S = S \times S$, нуль — отношение равенства Δ_S (если ясно, о какой полугруппе идет речь, то будем писать просто ∇ и Δ). В терминах этой решетки можно выражать некоторые важные свойства полугрупп. Так, полугруппа S будет подпрямо неразложимой тогда и только тогда, когда в множестве элементов решетки $\operatorname{Con} S$, отличных от Δ, есть наименьший. Решетка $\operatorname{Con} \mathscr{T}(X)$ дистрибутивна, а если множество X конечно, то она является цепью. Коммутативная полугруппа S с конечной решеткой $\operatorname{Con} S$ конечна. Обстоятельному рассмотрению разнообразных связей между полугруппами и их решетками конгруэнций посвящен обзор [66].

Если ρ — произвольное бинарное отношение на полугруппе S, то, поскольку $\nabla_S \supseteq \rho$, семейство элементов из $\operatorname{Con} S$, содержащих ρ, непусто. Пересечение $\rho^{\#}$ всех элементов этого семейства будет наименьшей конгруэнцией, содержащей ρ; отношение $\rho^{\#}$ называется *конгруэнцией, порожденной отношением* ρ.

Для приведенного определения $\rho^{\#}$ «сверху» существует нижеследующее эквивалентное определение «снизу». Если элементы a, $b \in S$ таковы, что $a = b$ или $a = xcy$, $b = xdy$ для некоторых x, $y \in S^1$ и c, $d \in S$, где $c\rho d$ или $d\rho c$, то переход от a к b называется *элементарным ρ-переходом*. Конгруэнция $\rho^{\#}$ состоит из всех пар (a, b) с тем свойством, что от a к b можно перейти конечной последовательностью элементарных ρ-переходов. Для любой эквивалентности ε на полугруппе S существует наибольшая конгруэнция ε^b, содержащаяся в ε. Справедливо равенство $\varepsilon^b = \{(a, b) \in S \times S \mid (xay, xby) \in \varepsilon$ для любых x, $y \in S^1\}$.

Если $\mathscr{K}$ — абстрактный класс полугрупп, то всякую конгруэнцию ρ на произвольной полугруппе S такую, что $S/\rho \in \mathscr{K}$, называют *$\mathscr{K}$-конгруэнцией*; в случае тех или иных конкретных классов $\mathscr{K}$ используют соответствующее прилагательное и говорят, например, *групповая конгруэнция*, *полурешеточная конгруэнция*, *сепаративная конгруэнция* и т. п. Если $\mathscr{K}$ содержит одноэлементную полугруппу, то множество всех $\mathscr{K}$-конгруэнций на произвольной полугруппе S непусто, и тогда можно рассмотреть их пересечение $\rho_{\mathscr{K}}$. Конгруэнция $\rho_{\mathscr{K}}$ сама может и не быть $\mathscr{K}$-конгруэнцией, но если она есть $\mathscr{K}$-конгруэнция, то $\rho_{\mathscr{K}}$ — *наименьшая $\mathscr{K}$-конгруэнция*, а $S/\rho_{\mathscr{K}}$ — наибольший гомоморфный образ, принадлежащий $\mathscr{K}$. Прилагательное «наибольший» здесь оправдано тем, что любой принадлежащий $\mathscr{K}$ гомоморфный образ полугруппы S является гомоморфным образом полугруппы $S/\rho_{\mathscr{K}}$. Если $\mathscr{K}$ — предмногообразие, то всякая полугруппа имеет наименьшую $\mathscr{K}$-конгруэнцию, а соответствующая полугруппа $S/\rho_{\mathscr{K}}$ называется *$\mathscr{K}$-репликой*. Характеристическое (с точностью до изоморфизма) свойство $\mathscr{K}$-реплики состоит в следующем: существует гомоморфизм φ_0 полугруппы S на $\mathscr{K}$-реплику (для факторполугруппы $S/\rho_{\mathscr{K}}$ это $\rho^{\natural}_{\mathscr{K}}$) такой, что для любого гомоморфизма φ полугруппы S в $\mathscr{K}$-полугруппу T существует гомоморфизм ψ_1 $\mathscr{K}$-реплики в T, для которого $\varphi = \varphi_0\psi$. Описание конгруэнции $\rho_{\mathscr{K}}$ для случая, когда $\mathscr{K}$ есть класс полурешеток, см. в п. 4.1.

На языке конгруэнций можно дать общее определение радикала в полугруппах. *Радикалом* называют функцию ρ, ставящую в соответствие произвольной полугруппе S ее конгруэнцию $\rho(S)$ так, что выполняются следующие условия: 1) если $S \simeq T$ и $\rho(S) = \Delta_S$, то и $\rho(T) = \Delta_T$; 2) если τ — конгруэнция на S такая, что $\rho(S/\tau) = \Delta$, то $\rho(S) \subseteq \tau$; 3) $\rho(S/\rho(S)) = \Delta$. Такова, например, функция, выделяющая на каждой полугруппе пересечение $\rho_{\mathcal{K}}$ всех ее $\mathcal{K}$-конгруэнций для произвольного абстрактного класса $\mathcal{K}$, содержащего одноэлементную полугруппу. Если $\rho(S) = \nabla$, то полугруппа S называется *ρ-радикальной*; если $\rho(S) = \Delta$, то S называется *ρ-полупростой.* Совокупность условий 2) и 3) в определении радикала можно перефразировать следующим образом: $\rho(S)$ есть наименьший элемент множества $\{\tau \in \operatorname{Con} S \mid S/\tau$ полупроста$\}$. Класс полугрупп $\mathcal{K}$ будет классом ρ-полупростых полугрупп некоторого радикала ρ тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ содержит одноэлементную полугруппу и замкнут относительно подпрямых произведений; при этом ρ однозначно определяется классом ρ-полупростых полугрупп. В отличие от колец, радикал в полугруппах, вообще говоря, не определяется соответствующим классом радикальных полугрупп. Если в определении радикала ограничиться рассмотрением рисовских конгруэнций, то возникает другое понятие радикала, где соответствующая функция выделяет в каждой полугруппе идеал; см. по этому поводу п. 2.6. О радикалах полугрупп см. [18], § 11.6, а также обзоры [49] и [82]; теория строгих радикалов моноидов строится в работе Márki L., Mlitz R., Strecker R.//Semigroup Forum. — 1980. — V. 21, № 1. — P. 27—66 (радикал ρ называется *строгим*, если класс ρ-полупростых моноидов совпадает с классом моноидов, все неодноэлементные подмоноиды которых не ρ-радикальны).

Радикалы естественно возникают в изучении представлений полугрупп, см. п. 10.2. *Представлением* полугруппы S в классе полугрупп $\mathcal{K}$ называется гомоморфизм полугруппы S в некоторую полугруппу из $\mathcal{K}$; если гомоморфизм является изоморфизмом, то представление называется *точным* (или *правильным*). При рассмотрении представлений обычно в роли $\mathcal{K}$ выступает класс каких-либо конкретных полугрупп, чаще всего — полугрупп преобразований или полугрупп матриц; в последнем случае представление называют *матричным* или *линейным*. О представлениях полугрупп преобразованиями см. п. 10.1.

В случае, когда S коммутативна, а класс $\mathcal{K}$ состоит из одной мультипликативной полугруппы всех комплексных чисел с модулем 1 или 0, представление S называют (комплексным) *характером*. При этом обычно считают S полугруппой с единицей, а характер ненулевым, т. е. не отображающим все элементы из S в 0. Эти соглашения мы принимаем ниже; они не ограничивают общности, так как если полугруппа S не имеет единицы, то любой ее характер χ может быть продолжен до характера полугруппы S^1: нужно положить $\chi(1)=1$. Иногда под характером понимают любой ненулевой гомоморфизм в подполугруппу полугруппы $(\mathbb{C}, \cdot)$, состоящую из чисел с модулем $\leqslant 1$ (такие гомоморфизмы называют также *полухарактерами*) или даже просто любой ненулевой гомоморфизм в $(\mathbb{C}, \cdot)$. Всякий полухарактер регулярной полугруппы будет характером в смысле исходного определения, но в общем случае это не так. Если S — группа, то для любого ее характера χ и любого $a \in S$ имеет место $|a\chi|=1$. Множество S^* всех характеров полугруппы S превращается в полугруппу, если задать на нем «поточечное» умножение, полагая для любого $a \in S$ и любых $\chi, \psi \in S^*$

$$a(\chi\psi) = a\chi \cdot a\psi.$$

Полугруппа S^* называется *полугруппой характеров* полугруппы S. Она коммутативна, регулярна и имеет единицу — единичный характер 1^*, для которого, по определению, $a1^* = a$ при любом $a \in S$. Полурешетка E_{S^*} изоморфна полурешетке (относительно теоретико-множественного объединения) вполне изолированных идеалов полугруппы S. Для любой полугруппы S существует такая регулярная полугруппа T, что $S^* \simeq T^*$; таким образом, с точки зрения изучения абстрактных свойств полугрупп характеров достаточно ограничиться рассмотрением характеров регулярных полугрупп. Говорят, что характеры полугруппы S *отделяют элементы* из S, если для любых различных $a, b \in S$ существует $\chi \in S^*$ такой, что $a\chi \neq b\chi$ (ср. с понятием аппроксимируемости выше). Характеры коммутативной группы отделяют ее элементы. В случае полугрупп это не всегда так; характеры коммутативной полугруппы S отделяют элементы из S тогда и только тогда, когда S сепаративна. Для любого $a \in S$ отображение $\tilde{a}$ полугруппы S^*, заданное формулой $\chi\tilde{a} = a\chi$, является характером полугруппы S^*, т. е. $\tilde{a} \in (S^*)^*$. Отображение ω: $S \to (S^*)^*$, ставящее в соответствие любому $a \in S$ характер $\tilde{a}$, есть гомоморфизм; он называется *каноническим гомоморфизмом* S в $(S^*)^*$. Если ω есть изоморфизм S на $(S^*)^*$, то говорят, что для S справедлива *теорема двойственности*. Теорема двойственности справедлива для S тогда и только тогда, когда S регулярна (Austin C.//Trans. Amer. Math. Soc. — 1963. — V. 109, № 2. P. 245—256). Дополнительную информацию о характерах коммутативных полугрупп см. в [18], § 5.5. Поточечное умножение можно определить и для гомоморфизмов коммутативной полугруппы S в произвольную коммутативную полугруппу A. Множество всех таких гомоморфизмов (иногда их называют *обобщенными характерами*) обозначается $\mathrm{Hom}(S, A)$ и, если оно непусто, является коммутативной полугруппой относительно указанного умножения.

Говорят, что подполугруппа U полугруппы S *доминирует* элемент $d \in S$, если для любой полугруппы T и любых гомоморфизмов φ, ψ: $S \to T$ из того, что $\varphi|_U = \psi|_U$, следует $d\varphi = d\psi$. Множество $\mathrm{Dom}_S U$ всех элементов, доминируемых подполугруппой U, есть, очевидно, подполугруппа в S, содержащая U; она называется *доминионом* U в S. Отображение $U \mapsto \mathrm{Dom}_S U$ есть оператор замыкания; подполугруппа U такая, что $U = \mathrm{Dom}_S U$ [$\mathrm{Dom}_S U = S$], называется *замкнутой* [*плотной*]. Полугруппа U называется *абсолютно замкнутой* [*насыщенной*], если она замкнута [не плотна] в любой полугруппе S, содержащей U в качестве [собственной] подполугруппы. Абсолютно замкнуты, например, полугруппы $\mathcal{T}(X)$ и $\mathcal{PT}(X)$, все инверсные полугруппы; конечные регулярные полугруппы являются насыщенными, вопрос о существовании ненасыщенных регулярных полугрупп пока (1989) открыт. О доминионах и, в частности, о характеризации элементов $\mathrm{Dom}_S U$ в терминах так называемых *зигзагов над* U («зигзаг-теорема»), см., например, [56], § VII.2, а также Hall T. E.//Semigroup

Forum. — 1982. — V. 24, № 2/3. — P. 271—283; в первом из цитируемых источников указана связь доминионов с амальгамами.

2.3. Связки полугрупп. Пусть ρ — конгруэнция на полугруппе S, а $\{S_\beta\}_{\beta\in B}$ — семейство всех ρ-классов. Все подмножества S_β будут подполугруппами в S тогда и только тогда, когда факторполугруппа S/ρ есть полугруппа идемпотентов, т. е. связка. В этом случае говорят, что S есть *связка* (или что S *разложима в связку*) полугрупп S_β. Будем записывать этот факт так:

$$S = \operatorname*{band}_{\beta\in B} S_\beta$$

или, проще, $S = \operatorname{band} S_\beta$, если из контекста ясно, каково множество B; полугруппы S_β называют *компонентами* связки. Разложение $S = \operatorname*{band}_{\beta\in B} S_\beta$ имеет место тогда и только тогда, когда полугруппы S_β составляют разбиение S и для любых $\beta, \gamma\in B$ существует такое $\delta\in B$, что $S_\beta S_\gamma \subseteq S_\delta$. Если все компоненты S_β принадлежат фиксированному классу $\mathscr{K}$, то говорят, что полугруппа $\operatorname{band} S_\beta$ есть связка $\mathscr{K}$-полугрупп. Так, можно говорить о связках групп, связках инверсных полугрупп и т. п. В предыдущих обозначениях для связки $\operatorname{band} S_\beta$ имеем $|B| = |S/\rho|$, поэтому можно считать B полугруппой, изоморфной S/ρ. Если при этом B принадлежит фиксированному классу $\mathscr{B}$, то говорят, что $\operatorname*{band}_{\beta\in B} S_\beta$ есть $\mathscr{B}$-связка полугрупп S_β. В случае конкретных классов $\mathscr{B}$ используют соответствующие термины: *полурешетка* (или *коммутативная связка*) полугрупп S_β, *прямоугольная* (иногда говорят *матричная*) связка полугрупп S_β, *левосингулярная* (или просто *левая*) и, двойственно, *правосингулярная* (или *правая*) связка полугрупп S_β, *цепь* полугрупп S_β и т. п. Связка полугрупп будет левой [правой], если все ее компоненты суть правые [левые] идеалы. Первые два из перечисленных типов связок особенно важны, введем для них обозначения.

Если S есть полурешетка полугрупп S_γ $(\gamma\in C)$, то будем писать:

$$S = \operatorname*{semilat}_{\gamma\in C} S_\gamma.$$

При этом символ частичного порядка для полурешетки C удобно относить и к полурешетке $\operatorname{semilat}_{\gamma\in C} S_\gamma$, писать, например, $S_\gamma < S_\delta$ и говорить в таком случае, что компонента S_γ *предшествует* компоненте S_δ (или *меньше* ее) и т. п. Если C есть цепь, то будем писать

$$S = \sum_{\gamma\in C} S_\gamma.$$

Если полурешетка C есть конечная цепь $\{1, 2, \ldots, n\}$ и порядок в ней задан условием $1 < 2 < \ldots < n$, то цепь полугрупп S_γ $(\gamma = 1, 2, \ldots, n)$ будем записывать выражением

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n.$$

Таким образом, например, тот факт, что T есть собственная выпуклая подполугруппа [J есть собственный изолированный идеал] полугруппы S, можно записать равенством

$$S = (S \setminus T) + T \qquad [S = J + (S \setminus J)].$$

В ряде ситуаций оказываются полезными нижеследующие типы полугрупп, разложимых в цепь двух полугрупп. Пусть T — произвольная полугруппа, N — полугруппа с нулевым умножением [L — левосингулярная полугруппа), причем $N \cap T = \varnothing$ $[L \cap T = \varnothing]$, $|N \setminus \{0\}| = |T|$ $[|L| = |T|]$ и ненулевые элементы N [все элементы L] индексированы элементами T:

$$N = \{x_a \mid a \in T\} \cup \{0\} \qquad [L = \{y_a \mid a \in T\}].$$

На объединении $N \cup T$ $[L \cup T]$ зададим умножение, сохраняя его в N [в L] и в T и полагая для любых $a, b \in T$

$$a \cdot x_b = x_{ab}, \quad x_b \cdot a = 0 = a \cdot 0, \tag{*}$$

$$[a \cdot y_b = y_{ab}, \quad y_b \cdot a = y_b]. \tag{**}$$

Тогда $N \cup T$ $[L \cup T]$ превращается в полугруппу, которую обозначим $N_l[T]$ [соответственно $L[T]$]. Имеет место $N_l[T] = N + T$ $[L[T] = L + T]$, причем $N = \operatorname{Ann}_l T = \operatorname{Ann}_l N_l[T]$. Можно рассматривать аналогичные полугруппы $N_r[T]$ и $R[T]$, где правила умножения (*) и (**) прочитываются «справа налево» и R есть правосингулярная полугруппа; имеет место

$$N_r[T] = \overleftarrow{N_l[\overleftarrow{T}]}, \quad R[T] = \overleftarrow{L[\overleftarrow{T}]}.$$

Пусть S есть прямоугольная связка полугрупп S_α ($\alpha \in P$). Тогда в силу строения прямоугольных полугрупп (см. п. 2.1) существуют два индексных множества I и Λ такие, что P можно отождествлять с декартовым произведением $I \times \Lambda$, причем если вместо $S_{(i,\lambda)}$ писать проще $S_{i\lambda}$, то для любых $i, j \in I$ и $\lambda, \mu \in \Lambda$ имеет место

$$S_{i\lambda} S_{j\mu} \subseteq S_{i\mu};$$

в этих обозначениях будем писать

$$S = \operatorname*{rectang}_{i \in I,\ \lambda \in \Lambda} S_{i\lambda} \quad \text{или, проще,} \quad S = \operatorname*{rectang}_{I,\ \Lambda} S_{i\lambda}. \qquad (***)$$

Случай правой [левой] связки здесь соответствует тому, что множество I [множество Λ] одноэлементно. При фиксированном индексе $i_0 \in I$ объединение $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_{i_0\lambda}$ назовем *строкой* связки (***) и будем обозначать $\operatorname*{rectang}_{\Lambda} S_{i_0\lambda}$. Двойственно определяется *столбец* $\operatorname*{rectang}_{I} S_{i\lambda_0}$ при фиксированном $\lambda_0 \in \Lambda$. Всякая прямоугольная связка является левой [правой] связкой своих строк [столбцов]. Всякая строка [столбец] является правой [левой] связкой своих компонент.

Роль связок в теории полугрупп определяется тем, что для многих классов входящие в них полугруппы разложимы в связку полугрупп с теми или иными «более хорошими» свойствами, и, таким образом, изучение их строения в известной мере сводится к рассмотрению типов, к которым принадлежат компоненты связки, к к рассмотрению полугрупп идемпотентов. Некоторые важные примеры таких разложений будут приведены ниже, в этом пункте и в пп. 4.1 и 6.1 (о разложениях полугрупп в связку см. также [18], §1.8, 4.2, 4.3; [24], гл. VIII, § 1—4; [56], гл. IV; [72], гл. II, IV; [74], гл. III, IV; [75], гл. IV). Вот два простейших примера: всякая регулярная коммутативная полугруппа есть связка групп, а всякая коммутативная эпигруппа — связка унипотентных полугрупп. Разумеется, для коммутативных полугрупп разложения в связку и в полурешетку означают одно и то же. Особая роль разложений в полурешетку и в прямоугольную связки объясняется следующим кардинальным фактом: любая связка полугрупп некоторого семейства $\{S_\beta\}$ есть полурешетка прямоугольных связок полугрупп из $\{S_\beta\}$, т. е. ее компоненты могут быть распределены на подсемейства так, что объединение компонент каждого подсемейства есть прямоугольная связка этих компонент, а исходная полугруппа разложима в полурешетку указанных объединений. В частности, любая полугруппа идемпотентов (будучи связкой одноэлементных полугрупп) разложима в полурешетку прямоугольных полугрупп; это разложение единственно, его компоненты называют *прямоугольными компонентами*. По поводу более общего утверждения, относящегося к произвольным клиффордовым полугруппам, см. п. 4.1.

Поскольку абстрактные свойства быть полугруппой идемпонентов, быть полурешеткой, быть прямоугольной полугруппой характеризуются тождествами, на любой полугруппе S для каждого из перечисленных классов $\mathscr{K}$ (равно как и для любого многообразия $\mathscr{K}$ полугрупп идемпотентов) есть наименьшая $\mathscr{K}$-конгруэнция $\rho_{\mathscr{K}}$; ее классы суть компоненты *наибольшего* (или *наиболее дробного*) разложения S соответственно в связку, в полурешетку, в прямоугольную связку. Если $\rho_{\mathscr{K}} = \nabla_S$, то полугруппа S называется *$\mathscr{K}$-неразложимой* (в обсуждаемых трех конкретных случаях — *неразложима в связку, полурешеточно неразложима, прямоугольно неразложима*). Компоненты наибольшего полурешеточного разложения произвольной полугруппы уже полурешеточно неразложимы (см., например, [79], § 1; [72], § II. 3). Для наибольших разложений в связку и в прямоугольную связку аналогичные свойства не выполняются.

Пример. Свободная полугруппа $F = \{a, b\}^+$ имеет шесть компонент наиболее дробного разложения в связку: $A = \{a, a^2, \ldots\}$, $B = \{b, b^2, \ldots\}$, $F_{11} = aF^1a \setminus A$, $F_{12} = aF^1b$, $F_{21} = bF^1a$, $F_{22} = bF^1b \setminus B$; три компоненты наибольшего полурешеточного разложения: A, B и $C = F_{11} \cup F_{12} \cup F_{21} \cup F_{22}$, при этом A и B неразложимы в прямоугольную связку, $C = \operatorname*{rectang}_{i, j \in \{1, 2\}} F_{ij}$.

В разного рода структурных теоремах возникают те или иные специальные типы связок, когда в определенных терминах указывается закон перемножения элементов из разных компонент. К простейшим типам относится *ординальная сумма* (или *последовательно аннулирующая связка*) — так называют цепь полугрупп $\sum_{\gamma \in C} S_\gamma$, в которой при $\gamma < \delta$ для любых $a \in S_\gamma$ и $b \in S_\delta$ действует правило $ab = ba = a$. Любой цепи C и любому семейству полугрупп $\{T_\gamma\}_{\gamma \in C}$ однозначно (с точностью до изоморфизма) сопоставляется ординальная сумма $\sum_{\gamma \in C} S_\gamma$, где $S_\gamma \simeq T_\gamma$ для любого γ. Более общим является понятие *сильной связки* — когда для любых элементов a и b из разных компонент связки произведение ab равно степени одного из этих элементов. Вырожденный случай сильной связки S, когда ее компоненты одноэлементны, характеризуется следующими (очевидным образом эквивалентными) условиями: (1) для любых $a, b \in S$ имеет место $ab \in \{a, b\}$; (2) каждое подмножество из S есть подполугруппа. Назовем такую полугруппу *рассыпчатой*. Полугруппа будет рассыпчатой тогда и только тогда, когда она есть ординальная сумма сингулярных полугрупп.

Пусть C — полурешетка, $\{S_\gamma\}_{\gamma \in C}$ — семейство попарно не пересекающихся полугрупп и для каждой пары элементов $\alpha, \beta \in C$ таких, что $\alpha \geqslant \beta$, задан гомоморфизм $\varphi_{\alpha,\beta}\colon S_\alpha \to S_\beta$, причем выполнены условия: 1) $\varphi_{\alpha,\alpha}$ есть тождественный автоморфизм S_α для любого $\alpha \in C$, 2) $\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma} = \varphi_{\alpha,\gamma}$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in C$ таких, что $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Такую систему гомоморфизмов $\varphi_{\alpha,\beta}$ называют *транзитивной*, а семейство полугрупп $\{S_\gamma\}$ вместе с гомоморфизмами $\varphi_{\alpha,\beta}$ — *прямым спектром*. На объединении $S = \bigcup_{\gamma \in C} S_\gamma$ зададим умножение $\cdot$ следующим правилом: для любых $a \in S_\alpha$ и $b \in S_\beta$ положим:

$$a \cdot b = a\varphi_{\alpha,\alpha\beta} b\varphi_{\beta,\alpha\beta}.$$

(Здесь в правой части перемножаются элементы $a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}$ и $b\varphi_{\beta,\alpha\beta}$ из $S_{\alpha\beta}$, а $\alpha\beta$ — произведение в C.) Тогда $(S, \cdot)$ есть полугруппа, разложимая в полурешетку полугрупп S_γ. Такая полугруппа S называется *жесткой* (в англоязычной литературе — strong) *полурешеткой* полугрупп S_γ. Применяют обозначение: $S = [C; S_\gamma; \varphi_{\alpha,\beta}]$. Иногда возникают дополнительные ограничения на C или на систему гомоморфизмов; например, если все $\varphi_{\alpha,\beta}$ взаимно однозначны, то полурешетку $[C; S_\gamma; \varphi_{\alpha,\beta}]$ называют *крепкой* (sturdy).

Одно из наиболее выразительных применений разложений в жесткую полурешетку доставляет нижеследующая характеризация клиффордовых инверсных полугрупп (*теорема Клиффорда*, см., например, [18], теорема 4.11): следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S клиффордова и инверсна; (2) S есть полурешетка групп; (3) S есть жесткая полурешетка групп. Отметим, что эквивалентность условий (2) и (3) может быть распространена на более общую ситуацию: всякая полурешетка унипотентных моноидов является жесткой.

Определим теперь конструкцию, задающую наиболее важный тип разложения в прямоугольную связку. Если A, B, T — произвольные множества, то $A\times B$-*матрицей над* T называется всякое отображение P декартова произведения $A\times B$ в T. Образ элемента $(\alpha,\beta)\in A\times B$ при отображении P будем обозначать через $p_{\alpha\beta}$ и будем писать $P=(p_{\alpha\beta})$; говорят, что $p_{\alpha\beta}$ лежит в α-й строке и β-м столбце матрицы P. В случае когда A и B конечны, сказанное очевидным образом интерпретируется обычными прямоугольными матрицами. Пусть T — произвольная полугруппа, I и Λ — индексные множества, $P=(p_{\lambda i})$ — произвольная $\Lambda\times I$-матрица над T. На декартовом произведении $M=I\times T\times\Lambda$ зададим операцию посредством формулы

$$(i,\ s,\ \lambda)(j,\ t,\ \mu)=(i,\ sp_{\lambda j}t,\ \mu).$$

Тогда M превращается в полугруппу, которая обозначается $\mathscr{M}(T;I,\Lambda;P)$ или $\mathscr{M}[T;I,\Lambda;P]$ и называется *рисовской полугруппой матричного типа* (или *рисовской матричной полугруппой*) *с сэндвич-матрицей* P *над полугруппой* T. Иногда (особенно если матрица P задана явно) вместо индексных множеств I и Λ указывают их мощности; например, можно писать $\mathscr{M}[T;2,2;P]$. Если $M=\mathscr{M}[T;I,\Lambda;P]$, то для любых $i\in I$, $\lambda\in\Lambda$ положим $M_{i\lambda}=\{(i,t,\lambda)\mid t\in T\}$; тогда $M=\operatorname{rectang}_{I,\Lambda}M_{i\lambda}$. Не всякая прямоугольная связка полугрупп реализуется матричной полугруппой, но, например, прямоугольная связка групп изоморфна рисовской матричной полугруппе над группой. Об относящихся сюда результатах, касающихся вполне простых полугрупп, см. п. 3.2. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S ортодоксальна и является прямоугольной связкой групп; (2) S есть прямое произведение группы и прямоугольной полугруппы. Полугруппу, удовлетворяющую этим условиям, называют *прямоугольной группой.*

Для полугрупп с нулем существует естественный аналог понятия связки. Говорят, что полугруппа $S = S^0$ есть 0-*связка* полугрупп семейства $\{S_\beta\}_{\beta \in B}$, где B — полугруппа идемпотентов, если $S = \bigcup_{\beta \in B} S_\beta$, $S_\beta \cap S_\gamma = 0$ при $\beta \neq \gamma$ и для любых $\beta, \gamma \in B$ имеет место $S_\beta S_\gamma \subseteq S_{\beta\gamma}$. Если для любых различных β, γ имеет место

$$S_\beta S_\gamma = 0,$$

то 0-связку называют 0-*прямым объединением* или *ортогональной суммой* полугрупп S_β; обозначение: $\overset{0}{\bigcup_{\beta \in B}} S_\beta$. Заданием семейства полугрупп с нулем $\{S_\beta\}_{\beta \in B}$ 0-прямое объединение $\overset{0}{\bigcup_{\beta \in B}} S_\beta$ определяется однозначно. Примеры применения этой конструкции в структурных теоремах см. в п. 5.1.

2.4. Подполугруппы и порождающие множества. Пересечение любого семейства подполугрупп полугруппы, если оно непусто, будет снова подполугруппой. Пустое множество нередко относят к подполугруппам, и тогда частично упорядоченное по включению множество $\mathrm{Sub}\, S$ всех подполугрупп полугруппы S есть полная решетка. Для произвольного непустого подмножества X полугруппы S через $\langle X \rangle$ обозначается пересечение всех подполугрупп из S, содержащих X, и $\langle X \rangle$ называется подполугруппой, *порожденной* X. В решетке $\mathrm{Sub}\, S$

$$\inf(A, B) = A \cap B, \quad \sup(A, B) = \langle A \cup B \rangle;$$

подполугруппу $\langle A \cup B \rangle$ обозначают также $\langle A, B \rangle$ и называют *композитом* полугрупп A и B. Подполугруппа $\langle X \rangle$ состоит из всевозможных произведений вида $x_1 x_2 \ldots x_n$ при любом натуральном n и любых $x_i \in X$. Любая подполугруппа из S имеет вид $\langle X \rangle$ при подходящем X, так что перебирая все подмножества множества S и порождая ими подполугруппы, мы получим все подполугруппы из S; в ряде случаев (для «маленьких» или «хорошо устроенных» полугрупп) удается получить более явное описание подполугрупп в тех или иных терминах, вплоть до полного перечня. Решетка $\mathrm{Sub}\, S$ конечна тогда и только тогда, когда полугруппа S конечна. *Порядком* конечной полугруппы называется число ее элементов. В отличие от групп, порядок подполугруппы конечной полугруппы S, вообще говоря, никак не связан, с точки зрения делимости, с порядком S: для любого n существуют полугруппы порядка n, имеющие подполугруппы любого меньшего порядка; такова, например, любая конечная рассыпчатая (в частности, сингулярная) или нильпотентная полугруппа.

Если $\langle A \rangle = S$, то множество A называется *порождающим множеством* (или *системой образующих*) полугруппы S, а его элементы — *порождающими* (или *образующими*) элементами. Если A конечно, то полугруппа $\langle A \rangle$ называется *конечно порожденной*; если $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то наряду с $\langle A \rangle$ часто пишут $\langle a_1, \ldots$ $\ldots, a_n \rangle$. Запись типа $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ применяют, когда это удобно, и в случае бесконечного порождающего множества. Полугруппу, имеющую порождающее множество из m элементов, называют m-порожденной; 1-порожденная полугруппа называется *моногенной* или *циклической*. Моногенная полугруппа, порожденная элементом a, обозначается обычно $\langle a \rangle$ и состоит из всевозможных степеней a^k с натуральными показателями. Если все эти степени различны, то a есть элемент бесконечного порядка и $\langle a \rangle \simeq (\mathbf{N}, +)$. В противном случае $\langle a \rangle$ конечна, так что с точностью до изоморфизма существует единственная бесконечная моногенная полугруппа. Если $\langle a \rangle$ конечна, то $|\langle a \rangle|$ называют *порядком* элемента a. Для элемента a конечного порядка существует наименьшее число r с тем свойством, что $a^r = a^k$ для некоторого $k > r$; число r называют *индексом* (иногда *циклической глубиной*) элемента a (и полугруппы $\langle a \rangle$). В случае когда a есть нильэлемент, понятие индекса совпадает с понятием, введенным в п. 2.1. Наименьшее число m с тем свойством, что $a^r = a^{r+m}$, называют *периодом* элемента a (и полугруппы $\langle a \rangle$). Пару (r, m) называют *типом* элемента a (и полугруппы $\langle a \rangle$). Для любых натуральных чисел r и m существует моногенная полугруппа типа (r, m); например, в полугруппе

$\mathcal{T}(\{1, 2, \ldots, r+m\})$ элемент

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r & r+1 & \ldots & r+m-1 & r+m \\ 2 & 3 & \ldots & r+1 & r+2 & \ldots & r+m & r+1 \end{pmatrix}$$

имеет тип (r, m). Две конечные моногенные полугруппы изоморфны тогда и только тогда, когда их типы совпадают. Таким образом, с точностью до изоморфизма для каждого типа существует единственная конечная моногенная полугруппа, имеющая данный тип. Моногенную полугруппу типа (r, m) иногда обозначают $M(r, m)$ или $C_{r,m}$. Если $\langle a\rangle$ имеет тип (r, m), то: 1) элементы $a, \ldots, a^{r+m-1}$ различны, т. е. порядок $\langle a\rangle$ равен $r+m-1$; 2) при $k, l \leqslant r$ таких, что $k \neq l$, имеет место $a^k \neq a^l$, при $k, l \geqslant r$ равенство $a^k = a^l$ выполняется тогда и только тогда, когда $k \equiv l (\operatorname{mod} m)$; 3) множество $G = \{a^r, a^{r+1}, \ldots, a^{r+m-1}\}$ является в $\langle a\rangle$ наибольшей подгруппой и наименьшим идеалом; 4) единица e группы G будет единственным идемпотентом в $\langle a\rangle$, причем $e = a^{lm}$ при любом l таком, что $lm \geqslant r$; 5) группа G циклическая, ее порождающим элементом будет, например, ae. Идемпотент конечной моногенной полугруппы $\langle a\rangle$ будет в ней единицей [нулем] тогда и только тогда, когда ее индекс [период] равен 1; это эквивалентно тому, что $\langle a\rangle$ есть группа [нильпотентная полугруппа].

Порождающее множество A полугруппы S называется *неприводимым*, если оно минимально в множестве порождающих множеств S, т. е. если $\langle A'\rangle \neq S$ для любого собственного подмножества $A' \subset A$. Неприводимое порождающее множество называют часто *базисом*. Не всякая полугруппа имеет базис; нет базиса, например, у полугрупп $(\mathbf{N}, \text{НОД})$ и $(\mathbf{Q}, +)$. Базис имеет любая конечно порожденная (в частности, конечная) полугруппа, причем любое ее порождающее множество содержит некоторый конечный базис и, следовательно, все ее базисы конечны. Число элементов базиса конечно порожденной полугруппы, вообще говоря, не является ее инвариантом; тривиальный пример доставляет циклическая группа $\langle a\rangle$ порядка 6, в которой $\langle a^2, a^3\rangle$ будет базисом. С другой стороны, в ряде случаев полугруппа имеет единственный базис; такова, например, любая конечная полурешетка, полугруппа $(\mathbf{N}, \cdot)$ (базис последней состоит из 1 и всех простых чисел). *Неразложимым* элементом полугруппы S называется всякий элемент множества $S \setminus S^2$. Если множество неразложимых элементов является порождающим, то оно будет единственным базисом; такой базис имеет, например, всякая n-нильпотентная полугруппа при $n > 1$, всякая свободная полугруппа A^+ (здесь $(A^+)^2 \setminus A^+ = A$) и любая ее подполугруппа. (Заметим, что $A^+ \simeq (\mathbb{N}, +)$ при $|A| = 1$.)

При рассмотрении конкретных полугрупп быват полезно выявлять у них базисы (в тех случаях, когда таковые существуют). В качестве примера приведем решение этой задачи для конечных симметрических полугрупп (см. [24], гл. III, п. 2.12). Если $\alpha \in \in \mathcal{T}(X)$ (X здесь любое), то кардинальное число $|X\alpha|$ называется *рангом* преобразования α (обозначается $\operatorname{rank} \alpha$). Если $|X| = n$, то всякое подмножество, получающееся добавлением к базису симметрической группы $\mathcal{G}(X)$ любого элемента из $\mathcal{T}(X)$, имеющего ранг $n - 1$, будет базисом полугруппы $\mathcal{T}(X)$, причем всякий базис $\mathcal{T}(X)$ может быть получен таким образом. Тем самым задача полностью сведена к описанию базисов $\mathcal{G}(X)$, а ответ здесь известен. В частности, если $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, то один из базисов группы $\mathcal{G}(X)$ составляют транспозиции $(1, 2)$, $(1, 3)$, $\ldots$, $(1, n)$, так что симметрическая полугруппа $\mathcal{T}(X)$ при $|X| = n$ имеет базис из n элементов; вместе с тем, поскольку, как известно, всякая конечная симметрическая группа является 2-порожденной, всякая конечная симметрическая полугруппа 3-порождена.

Свободные полугруппы — это в точности свободные произведения бесконечных моногенных полугрупп. Базис A свободной полугруппы A^+ обладает следующим характеристическим свойством: любое отображение множества A в произвольную полугруппу T может быть продолжено (и тогда единственным образом) до гомоморфизма полугруппы $\langle A \rangle$ в T; базис A с таким свойством называют *свободным базисом* полугруппы $\langle A \rangle$. Всякая полугруппа, имеющая свободный базис A, изоморфна полугруппе A^+. Если в определении свободного базиса все рассматриваемые полугруппы считать принадлежащими фиксированному классу $\mathcal{K}$, то получим понятие *$\mathcal{K}$-свободного базиса*; полугруппу, имеющую $\mathcal{K}$-свободный базис, называют *$\mathcal{K}$-свободной полугруппой* или *свободной полугруппой в классе $\mathcal{K}$*, а мощность ее $\mathcal{K}$-свободного базиса — *рангом* данной $\mathcal{K}$-свободной полугруппы. Если в классе $\mathcal{K}$ существуют свободные полугруппы ранга $\mathfrak{m}$, то все они изоморфны между собой, т. е. можно говорить о единственной с точностью до изоморфизма $\mathcal{K}$-свободной полугруппе $F_{\mathfrak{m}}$ ранга $\mathfrak{m}$, и любая полугруппа из $\mathcal{K}$, имеющая порождающее множество мощности $\mathfrak{m}$, является гомоморфным образом полугруппы $F_{\mathfrak{m}}$. Если полугруппа S свободна в классе $\{S\}$, состоящем лишь из S, то S называют *свободной в себе* или *относительно свободной*. Примеры: всякая моногенная полугруппа относительно свободна; прямоугольная полугруппа относительно свободна тогда и только тогда, когда она квадратна. Полугруппа S относительно свободна тогда и только тогда, когда она свободна в многообразии $\operatorname{var} S$. Не любой класс $\mathcal{K}$ имеет свободные полугруппы, но если $\mathcal{K}$ есть нетривиальное предмногообразие (в частности, квазимногообразие, многообразие), то для любого кардинала $\mathfrak{m}$ существует свободная в $\mathcal{K}$ полугруппа $F_{\mathfrak{m}}$ и при $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$ полугруппы $F_{\mathfrak{m}}$ и $F_{\mathfrak{n}}$ не изоморфны. Для тех или иных конкретных классов $\mathcal{K}$, говоря о свободных в них полугруппах, используют соответствующие прилагательные; так, можно говорить о *свободных коммутативных, свободных n-нильпотентных, свободных идемпотентных полугруппах* и т. п. В ряде случаев свободные полугруппы рассматриваемых классов имеют обозримые точные представления; например, свободная коммутативная полугруппа счетного ранга изоморфна полугруппе $(\mathbf{N} \setminus \{1\}, \cdot)$, свободная полурешетка произвольного ранга $\mathfrak{m}$ изоморфна полурешетке относительно объединения всех конечных подмножеств множества X такого, что $|X| = \mathfrak{m}$.

Каждый элемент полугруппы $S = \langle A \rangle$ может быть представлен в виде слова в алфавите A (т. е. элемента свободной полугруппы A^+); если $S = A^+$, то такое представление единственно. Обратно, если указанное представление каждого элемента $S = \langle A \rangle$ единственно, то S свободна и A — ее свободный базис. В случае когда полугруппа $S = \langle A \rangle$ не свободна, существуют различные слова w_1 и w_2 в алфавите A, которые представляют один и тот же элемент; в этой ситуации мы будем говорить, что слова w_1 и w_2 *равны в полугруппе* S, и писать $w_1 = w_2$. Всякое такое равенство называют *соотношением* в S. Положим

$$\rho(S, A) = \{(w_1, w_2) \in A^+ \times A^+ \mid w_1 = w_2 \text{ есть соотношение в } S\}.$$

Отношение $\rho(S, A)$ есть конгруэнция на A^+, причем $A^+/\rho(S, A) \simeq S$. Если в каждом классе конгруэнции $\rho(S, A)$ выбрать по одному элементу, то полученное множество называют *множеством канонических форм* для элементов S; нередко говорят об одной *канонической форме* элементов из S. Использование канонических форм бывает возможно (и удобно), если эффективно заданы множество таких форм и правило нахождения канонической формы для произведения. Простейшие примеры: если $F = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ — свободная коммутативная полугруппа со свободным базисом $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, то в качестве канонической формы произвольного элемента из F можно взять $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — неотрицательные целые числа, не равные одновременно нулю, и

$$a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n} \cdot a_1^{l_1} a_2^{l_2} \ldots a_n^{l_n} = a_1^{k_1 + l_1} a_2^{k_2 + l_2} \ldots a_n^{k_n + l_n};$$

если $\langle a \rangle$ — моногенная полугруппа типа (r, m), то канонической формой ее элементов будет a^k, где $k < r + m$, и

$$a^k \cdot a^l = \begin{cases} a^{k+l}, \text{ если } k + l < r + m, \\ a^{r+q}, \text{ если } k + l \geqslant r + m \text{ и } q \text{ есть} \\ \qquad \text{остаток от деления числа} \\ \qquad k + l - (r + m) \text{ на } m. \end{cases}$$

Канонические формы элементов некоторых других полезных полугрупп будут приведены в п. 2.5, где рассматриваются полугруппы, заданные определяющими соотношениями; алгоритмические аспекты, касающиеся полугрупп, заданных определяющими соотношениями, обсуждаются в п. 8.1.

Пусть $S = \langle A \rangle$ — конечно порожденная (к. п.) полугруппа, $|A| < \infty$. Через $\gamma_A(n)$ обозначим число элементов из S, представимых словами длины $\leqslant n$ в алфавите A; иначе говоря, $\gamma_A(n) = \left| \bigcup_{i=1}^{n} A^i \right|$. Функция $\gamma_A : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ называется *функцией роста* полугруппы S относительно порождающего множества A. Функции роста данной к. п. полугруппы относительно любых двух ее конечных порождающих множеств эквивалентны в смысле следующего определения. На множестве Φ всех неубывающих функций $\varphi\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ введем отношение $\preccurlyeq$ условием

$$\varphi \preccurlyeq \psi \Leftrightarrow \varphi(n) \leqslant c\psi(n) \text{ для некоторой константы } c \in \mathbf{N} \text{ и для всех } n \in \mathbf{N}.$$

Отношение $\preccurlyeq$ есть квазипорядок. Рассматривая соответствующее отношение эквивалентности $\sim$ ($\varphi \sim \sim \psi$ означает, что $\varphi \preccurlyeq \psi$ и $\psi \preccurlyeq \varphi$), обозначим через $\tilde{\varphi}$ $\sim$-класс, содержащий φ. Если $S = \langle A \rangle = \langle B \rangle$ и $|A| < \infty$, $|B| < \infty$, то имеет место $\gamma_A \sim \gamma_B$, т. е. класс $\tilde{\gamma}_A$ на самом деле не зависит от выбора A. Этот класс называют *ростом* полугруппы S. Рост называется *экспоненциальным* [*степенным* (или *полиномиальным*)], если соответствующие функции роста эквивалентны функции 2^n [функции n^c для некоторой константы $c \in \mathbf{N}$]. Экспоненциальный [степенной] рост имеет, например, свободная полугруппа конечного ранга $\geqslant 2$ [всякая коммутативная к. п. полугруппа]. Существуют к. п. полугруппы, рост которых не является ни экспоненциальным, ни степенным. К. п. полугруппа с сокращением имеет степенной рост тогда и только тогда, когда она обладает группой левых частных (см. п. 1.1), которая почти нильпотентна (определение см. п. II. 1.1) (Григорчук Р. И.//Мат. заметки. — 1988. — Т. 43, № 3. — С. 305—319). Существует континуум неизоморфных к. п. полугрупп квадратичного роста (Trofimov V. I.//Semigroup Forum. — 1980. — V. 21. — P. 351—360; в цитируемой работе указаны и другие источники, в которых рассматривается рост полугрупп).

Конечно порожденными будут в целом ряде случаев полугруппы с условием максимальности для (односторонних) конгруэнций (о таких полугруппах см., например, Hotzel E.//Semigroup Forum. — 1975/76. — V. 11, № 4. — P. 337—362). В коммутативном случае это условие эквивалентно конечной порожденности. Условие максимальности для левых [правых] конгруэнций обозначим через $\mathrm{Max}_{l\,\mathrm{Con}}$ [$\mathrm{Max}_{r\,\mathrm{Con}}$]. Полугруппа называется *слабопериодической*, если некоторая степень любого ее элемента попадает в глобально идемпотентный идеал. Среди слабо периодических полугрупп — эпигруппы. Если в слабопериодической полугруппе S с условием

$\mathrm{Max}_{l\,\mathrm{Con}}$ или $\mathrm{Max}_{r\,\mathrm{Con}}$ все подгруппы конечны, то S конечна. Полугруппа S с условием $\mathrm{Max}_{l\,\mathrm{Con}}$ или $\mathrm{Max}_{r\,\mathrm{Con}}$ будет к. п. в каждом из следующих случаев: 1) если S слабопериодическая, 2) если каждый $\mathcal{J}$-класс (см. п. 2.7) в S является нормальным комплексом. Вопрос о том, будет ли к. п. любая полугруппа с условием $\mathrm{Max}_{l\,\mathrm{Con}}$ или $\mathrm{Max}_{r\,\mathrm{Con}}$, пока (1989) открыт. О полугруппах с условием максимальности для (односторонних) конгруэнций см. также Kozhukhov I. B.//Semigroup Forum.— 1980.— V. 21, № 4.— С. 337—350.

Как и решетка подалгебр любой универсальной алгебры, $\mathrm{Sub}\,S$ для всякой полугруппы S является алгебраической решеткой. Компактными элементами в $\mathrm{Sub}\,S$ будут в точности к. п. подполугруппы. Множество всех к. п. подполугрупп из S есть, очевидно, верхняя подполурешетка в $\mathrm{Sub}\,S$, но, вообще говоря, не будет подрешеткой: например, в свободной полугруппе $\langle a, b\rangle^+$ подполугруппа $\langle a, ab\rangle \cap \langle a, ba\rangle$ не является к. п. Все подполугруппы полугруппы S будут к. п. тогда и только тогда, когда решетка $\mathrm{Sub}\,S$ удовлетворяет условию максимальности (это утверждение опять-таки есть конкретная версия общеалгебраического факта о решетках подалгебр). О полугруппах с условием максимальности для подполугрупп см. п. 6.2. В бесконечной моногенной полугруппе все подполугруппы к. п., причем для любого n существует подполугруппа с базисом из n элементов. Но уже свободная коммутативная полугруппа ранга 2 имеет не к. п. подполугруппы. Система подполугрупп $\{S_i\}_{i\in I}$ полугруппы S называется *локальной*, если $\bigcup_{i\in I} S_i = S$ и для любых i, $j \in I$ существует $k \in I$ такое, что $S_i \cup S_j \subseteq S_k$. Локальной системой будет, в частности, множество всех к. п. подполугрупп из S. Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс полугрупп. Полугруппу называют *локально $\mathcal{K}$-полугруппой*, если она обладает локальной системой из $\mathcal{K}$-полугрупп. Вообще говоря, более сильным является следующее условие: все к. п. подполугруппы суть $\mathcal{K}$-полугруппы; но если класс $\mathcal{K}$ наследствен, то оба условия эквивалентны. При рассмотрении локально $\mathcal{K}$-полугрупп большой частью приходится иметь дело с наследственными классами, так что распространенной является вторая форма определения. Например, *локально конечной* [*локально нильпотентной*] называется полугруппа, все к. п. подполугруппы которой конечны [нильпотентны]. Всякая локально конечная [локально нильпотентная] полугруппа будет периодической [нильполугруппой]; о более тонких соотношениях между этими классами см. пп. 6.3 и 6.4.

Всякая бесконечная к. п. полугруппа счетна. С другой стороны, всякая счетная полугруппа вложима в некоторую 2-порожденную полугруппу (см. [18], с. 153—154; [24], с. 520—523). Утверждения, аналогичные последнему, справедливы для вложений внутри некоторых важных классов полугрупп (см. Петров А. Н.//Исследования алгебраических систем по свойствам их подсистем. — Мат. зап. Уральск. гос. ун-та. — 1985. — Т. 14, № 1. — С. 128—140; в цитируемой работе указаны и другие источники, в которых рассматривается вложимость в к. п. полугруппы. См. также [22], с. 123). Так, всякая счетная периодическая полугруппа [нильполугруппа] вложима в 2-порожденную периодическую полугруппу [нильполугруппу]. Всякая счетная [счетная периодическая] полугруппа вложима в [периодическую] полугруппу, порожденную тремя идемпотентами. Всякая конечная полугруппа вложима в 2-порожденную (или порожденную тремя идемпотентами) конечную полугруппу. Среди полугрупп, порожденных двумя идемпотентами, лишь одна (с точностью до изоморфизма) бесконечна — это свободное произведение двух одноэлементных полугрупп.

Полугруппу, порожденную идемпотентами, называют *идемпотентно порожденной* (иногда — *полусвязкой*). Всякая полугруппа вложима в идемпотентно порожденную полугруппу (Howie J. M.//J. London Math. Soc. — 1966. — V. 41. — P. 707—716). О вложении полугрупп в идемпотентно порожденные полугруппы см. также [65], § 5.

Если полугруппа S клиффордова или инверсна (в частности, группа), то всякое ее порождающее множество будет, разумеется, порождающим множеством и в расширенной сигнатуре, включающей соответствующую унарную операцию $^{-1}$. Обратное, вообще говоря, неверно: тривиальный пример доставляет группа $(\mathbf{Z}, +)$, которая как группа 1-порождена, но не является моногенной полугруппой. Поэтому при рассмотрении таких полугрупп надо оговаривать (если не ясно из контекста), в каком смысле понимается порождаемость; в некоторых случаях удобны специальные обозначения для различения двух типов порождения, например, инв$\langle A\rangle$ или inv$\langle A\rangle$ [кл$\langle A\rangle$, или cl$\langle A\rangle$] для обозначения инверсной [клиффордовой] подполугруппы, порожденной подмножеством A данной инверсной [клиффордовой] полугруппы S. Если $S=$ инв$\langle A\rangle$ [$S=$ кл$\langle A\rangle$] и $A^{-1}=\{a^{-1}\mid a\in\in A\}$, то $A\cup A^{-1}$ будет порождающим множеством полугруппы S в обычной сигнатуре; при этом если A есть базис в расширенной сигнатуре, то $A\cup A^{-1}$ может не быть базисом S как полугруппы, но оба понимания конечной порожденности в рассматриваемой ситуации эквивалентны. Если S — периодическая клиффордова полугруппа, то оба типа порождения просто совпадают, так как для любого $a\in S$ имеет место $a^{-1}=a^m$ при некотором натуральном m. В случае периодических инверсных полугрупп такого совпадения нет. Пример: мультипликативная полугруппа матриц

$$B_2=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0\right\}$$

(о B_2 как полугруппе Брандта см. п. 3.2). Полугруппа B_2 инверсна. Если обозначить $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=a$, то $B_2=$ = инв$\langle a\rangle$, $\langle a\rangle=\{a,0\}$, т. е. $\langle a\rangle\neq B_2$. Инверсную полугруппу, порожденную как унарная полугруппа одним элементом, называют *моногенной* (или, чтобы избежать двусмысленности, *моногенно инверсной*). Классификация моногенных инверсных полугрупп в терминах определяющих соотношений приведена в п. 2.5. Моногенные унарные клиффордовы полугруппы — это попросту циклические группы.

Существуют разнообразные связи между полугруппами и решетками их подполугрупп. Многие классы полугрупп могут быть охарактеризованы в терминах решеток Sub S; при этом используются, как правило, стандартные теоретико-решеточные понятия, к которым добавляется полезное здесь понятие *однопокрывающего элемента* — так называется элемент решетки, для которого множество всех строго предшествующих элементов имеет наибольший элемент. Полугруппа C тогда и только тогда будет однопокрывающим элементом решетки $\operatorname{Sub} C$, когда C — моногенная полугруппа, либо бесконечная, либо имеющая индекс >1, либо примарная циклическая или единичная группа. В $\operatorname{Sub} S$ каждый элемент есть объединение некоторого множества однопокрывающих элементов. Простейшие примеры решеточных характеризаций: 1) полугруппа S периодична тогда и только тогда, когда в $\operatorname{Sub} S$ каждому элементу предшествует атом; 2) полугруппа S идемпотентна тогда и только тогда, когда всякий однопокрывающий элемент есть атом. Решеточно охарактеризованы могут быть, например, класс групп без кручения, класс абелевых групп без кручения. Каждый такой класс $\mathcal{K}$ *решеточно определяется* (или *решеточно замкнут*), т. е. из того, что $S \in \mathcal{K}$ и $\operatorname{Sub} T \simeq \operatorname{Sub} S$, всегда следует, что $T \in \mathcal{K}$. Если для любой полугруппы T из $\operatorname{Sub} T \simeq \operatorname{Sub} S$ следует $T \simeq S$, то полугруппа S называется *решеточно определяющейся.* Разумеется, любой абстрактный класс, состоящий из решеточно определяющихся полугрупп, решеточно замкнут. К числу решеточно определяющихся полугрупп принадлежат, например, всякая полугруппа, нетривиально разложимая в свободное произведение, и всякая коммутативная полугруппа с сокращением и без идемпотентов (в частности, всякая свободная и всякая свободная коммутативная полугруппа), всякая свободная полугруппа идемпотентов, свободная полурешетка ранга >2. При этом нередко каждый изоморфизм $\operatorname{Sub} S$ на $\operatorname{Sub} T$ (*решеточный изоморфизм* или *проектирование*) индуцируется изоморфизмом (или антиизоморфизмом) S на T; в таком случае говорят о *строгой решеточной* определяемости (с точностью до антиизоморфизма). Появление здесь антиизоморфизмов объясняется тем, что если полугруппа T антиизоморфна полугруппе S, то всякий антиизоморфизм (равно как и изоморфизм) S на T индуцирует решеточный изоморфизм данных полугрупп. Иногда происходит индуцируемость отображениями более общего типа — полуизоморфизмами. *Полугомоморфизмом* называется всякое отображение φ: $S \to T$ такое, что для любых $x, y \in S$ элемент $(xy)\varphi$ равен одному из элементов $x\varphi y\varphi$ или $y\varphi x\varphi$. *Полуизоморфизм* — это биективный полугомоморфизм. Всякий полуизоморфизм полугрупп с сокращением (и, более общо, прямоугольной связки полугрупп с сокращением) на произвольную полугруппу будет изоморфизмом или антиизоморфизмом. Заметим, что отображение, обратное к полуизоморфизму, может не быть полуизоморфизмом. Наложение тех или иных известных теоретико-решеточных условий на $\mathrm{Sub}\, S$ приводит, как правило, к четко очерченным классам полугрупп, иногда с редукцией к группам с соответствующими условиями. Например, $\mathrm{Sub}\, S$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда S периодична и разложима в сильную связку унипотентных полугрупп, каждая из которых есть идеальное расширение локально циклической группы с помощью нильполугруппы, в которой для любых подполугрупп A, B имеет место $\langle A, B\rangle = A \cup B$ (такая нильполугруппа необходимо 5-нильпотентна); $\mathrm{Sub}\, S$ есть решетка с относительными дополнениями тогда и только тогда, когда S есть ординальная сумма прямоугольных полугрупп; рассыпчатые полугруппы, и только они, имеют булевы решетки подполугрупп. Решетка $\mathrm{Sub}\,(\mathbf{N}, +)$ не удовлетворяет никакому решеточному тождеству. В терминах решетки $\mathrm{Sub}\, S$ формулируются различные условия конечности; о строении возникающих здесь полугрупп см. п. 6.2.

Если S — инверсная [клиффордова] полугруппа, то наряду с решеткой $\mathrm{Sub}\, S$ естественно рассматривать решетку соответствующих унарных подполугрупп $\mathrm{Subi}\, S$ [$\mathrm{Subc}\, S$]. Композит двух инверсных [клиффордовых] подполугрупп инверсной [клиффордовой] полугруппы S будет [не обязательно будет] инверсной [клиффордовой] подполугруппой, так что $\mathrm{Subi}\, S$ [$\mathrm{Subc}\, S$] есть [не обязательно есть] подрешетка в $\mathrm{Sub}\, S$. Любая решетка изоморфно (как подрешетка) вложима в решетку подгрупп некоторой группы, следовательно, автоматически существуют аналогичные вложения в решетки вида $\mathrm{Sub}\, S$, $\mathrm{Subi}\, S$, $\mathrm{Subc}\, S$. Не каждая алгебраическая (даже конечная) решетка изоморфна решетке $\mathrm{Sub}\, S$ для некоторой полугруппы S. Абстрактное замыкание класса всех решеток вида $\mathrm{Sub}\, S$ не может быть определено элементарными (см. п. 8.2) аксиомами. Подробная информация о решеточных свойствах полугрупп содержится в [84] и [43]; см. также [74], гл. V.

2.5. Определяющие соотношения. Всякому множеству Σ соотношений в полугруппе $S=\langle A\rangle$ можно сопоставить бинарное отношение ρ_Σ на A^+, полагая по определению

$$(u,\ v)\in\rho_\Sigma \Leftrightarrow u=v \text{ есть соотношение из } \Sigma.$$

Для множества всех соотношений в $S=\langle A\rangle$ соответствующее отношение на A есть конгруэнция $\rho(S,A)$ (см. п. 2.4). Произвольное множество соотношений Σ такое, что ρ_Σ порождает конгруэнцию $\rho(S,A)$ (т. е. $\rho_\Sigma^\#=\rho(S,\ A)$, см. п. 2.2), называют *множеством* (или *системой*) *определяющих соотношений*, а также *определяющей совокупностью соотношений* данной полугруппы. Полугруппу S в этом случае называют полугруппой, *заданной порождающим множеством* A и *определяющими соотношениями* Σ, и пишут $S=\langle A\,|\,\Sigma\rangle$ (употребительны также записи: $S=$ $=\langle A;\Sigma\rangle$, $S=\langle A:\Sigma\rangle$, $S=\langle A\|\Sigma\rangle$); пару $\langle A\,|\,\Sigma\rangle$ называют *копредставлением* (иногда *представлением* или *заданием*) полугруппы S. Если $A=\{a_1,\ \ldots,\ a_n\}$, $\Sigma=\{u_i=v_i\}_{i\in I}$, то применяется и более детальная запись $S=\langle a_1,\ \ldots,\ a_n\,|\,u_i=v_i,\ i\in I\rangle$. Всякая полугруппа может быть задана образующими и определяющими соотношениями. Задавая так полугруппу, перечень образующих элементов иногда опускают, подразумевая, что полугруппа порождается всеми элементами, фигурирующими в определяющих соотношениях в качестве букв.

Если $S=\langle A\,|\,\Sigma\rangle$, то для любого соотношения $u=v$ в S слово v получается из слова u конечной последовательностью элементарных ρ_Σ-переходов (см. п. 2.2), называемых применительно к словам из A^+ обычно *элементарными преобразованиями*: переход от w_1 к w_2 будет элементарным преобразованием, если $w_1\equiv w_2$ или для некоторых $x,\ y\in(A^+)^1$ имеет место $w_1\equiv xv_1y$, $w_2\equiv xv_2y$, где $v_1=v_2$ или $v_2=v_1$ есть соотношение из Σ. Если v получено из u конечной последовательностью элементарных преобразований, то соотношение $u=v$ называется *следствием* множества соотношений Σ. Таким образом (перефразировка исходного определения), любое соотношение в полугруппе $\langle A|\Sigma\rangle$ является следствием системы определяющих соотношений Σ. Отмеченное свойство объясняет оправданность для копредставления также термина *генетический код*, используемого иногда в этом смысле в теории групп. Если заменить в соотношениях Σ над алфавитом A буквы из A на буквы из равномощного алфавита A' в соответствии с некоторой биекцией φ: $A \to A'$ и полученную систему равенств обозначить Σ', то для любой полугруппы $T = \langle A'\rangle$, в которой выполняются соотношения Σ', отображение φ можно продолжить до гомоморфизма полугруппы $\langle A|\Sigma\rangle$ на T; кроме того, $\langle A|\Sigma\rangle \simeq \langle A'|\Sigma'\rangle$. Последний факт по существу означает, что полугруппа задается копредставлением однозначно с точностью до изоморфизма. Обратное неверно: различные копредставления могут задавать изоморфные полугруппы.

Для любого алфавита A и любого множества Σ формальных равенств слов над A существует полугруппа с копредставлением $\langle A|\Sigma\rangle$; такой полугруппой является факторполугруппа $A^+/\rho_\Sigma^\#$, где ρ_Σ определено в начале этого пункта. При этом нужно, вообще говоря, считаться с тем, что некоторые из образующих могут отождествиться; например, если полугруппа задана копредставлением $\langle a, b, c \,|\, ab = b^3, ac = a, b^4 = b, b^2 = c^2\rangle$, то следствием указанных соотношений будет равенство $a = b$. Если все соотношения $u_i = v_i$ из Σ тривиальны, т. е. $u_i \equiv v_i$ для любого i, то $\rho_\Sigma \subseteq \Delta$, откуда $\rho_\Sigma^\# = \Delta$, и тогда $\langle A|\Sigma\rangle$ есть попросту свободная полугруппа A^+. В этом вырожденном случае вместо ρ_Σ можно взять пустое соотношение; обычно и говорят, что свободная полугруппа задается пустым множеством определяющих соотношений. Другой вырожденный случай системы определяющих соотношений полугруппы $S = \langle A\rangle$ — ее *таблица умножения*; в этом случае $A = S$ и определяющие соотношения имеют вид $xy = z$, где x и y пробегают S. Если полугруппа A конечна, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то одним из способов задания таблицы умножения является *таблица Кэли* — квадратная таблица, в которой строки и столбцы индексированы элементами $a_1, \ldots, a_n$ в указанном порядке и на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит элемент a_k из A, равный произведению $a_i a_j$. Таблицей Кэли иногда удается пользоваться и для бесконечных полугрупп.

Способ задания полугрупп таблицами умножения довольно распространен, однако определенное его неудобство состоит в том, что далеко не для любого отображения f: $A \times A \to A$ копредставление группоида $\langle A \mid xy = f(x, y)$ для всех x, $y \in A\rangle$ задает ассоциативное умножение. Так, из 16 всевозможных таблиц Кэли для двухэлементного множества лишь 8 задают ассоциативные операции (причем попарно неизоморфных полугрупп получается 5: группа $C_{1,2}$, полугруппа с нулевым умножением $C_{2,1}$, полурешетка $\langle 0\rangle^1$, левосингулярные и правосингулярные полугруппы — будем обозначать их L_2 и R_2).

Найдены таблицы Кэли для всех различных (с точностью до изоморфизма или с точностью до изоморфизма и антиизоморфизма) полугрупп с небольшим числом элементов. См., например, [48], Appendix, где такие таблицы приведены для полугрупп порядка $\leqslant 5$; там же, с. 158, и, например, в [72], с. 20, указаны другие источники, содержащие таблицы Кэли для полугрупп малых порядков — максимально до шестого. В особенности см. [57], где содержатся более подробные сведения об источниках, в которых рассматривается число полугрупп порядка n (и, в частности, характер роста этого числа с ростом n) и приведена некоторая информация о числе полугрупп порядка 7 и порядка 8. В ряде случаев соответствующая работа осуществлялась с помощью ЭВМ. В упомянутой статье [57] дан общий обзор исследований по применению ЭВМ для изучения полугрупп. В следующей таблице представлены данные о числе различных полугрупп порядка n, где $2 \leqslant n \leqslant 6$:

Порядок полугруппы	2	3	4	5	6
Число неизоморфных полугрупп порядка n	5	24	188	1 915	28 634
Число неизоморфных и неантиизоморфных полугрупп порядка n	4	18	126	1 160	15 973

Если Φ и Ψ — два множества соотношений над одним и тем же алфавитом, то Ψ называют *след-*

ствием множества Φ, если каждое соотношение из Ψ является следствием Φ; множества Φ и Ψ называют *эквивалентными*, если каждое из них есть следствие другого. Для произвольной полугруппы любые два ее копредставления с одним и тем же порождающим множеством имеют эквивалентные системы определяющих соотношений. Множество соотношений Φ называется *неприводимым*, если оно не обладает собственным подмножеством, эквивалентным Φ. Не всякая полугруппа имеет копредставление с неприводимой системой определяющих соотношений, но если в копредставлении $\langle A \mid \Sigma \rangle$ система Σ конечна, то в ней есть конечная неприводимая подсистема определяющих соотношений. Если в копредставлении $S = \langle A \mid \Sigma \rangle$ оба множества A и Σ конечны, то полугруппа называется *конечно копредставленной* или *конечно определенной* (к. о.); в этом случае и для любого другого конечного порождающего множества B существует копредставление $S = \langle B \mid \Phi \rangle$ с конечной системой определяющих соотношений Φ. Таким образом, свойство полугруппы S быть конечно определенной инвариантно относительно выбора конечного порождающего множества. Если A бесконечно, а Σ конечно, то полугруппа $S = \langle A \mid \Sigma \rangle$ разложима в свободное произведение: $S = \langle A_1 \mid \Sigma \rangle * (A \setminus A_1)^+$, где A_1 — множество всех букв, участвующих в соотношениях из Σ (и, следовательно, $\langle A_1 \mid \Sigma \rangle$ есть к. о. полугруппа). В этом смысле рассмотрение полугрупп, заданных конечным числом определяющих соотношений, сводится к к. о. полугруппам.

Если к. о. полугруппа S имеет копредставление $\langle A \mid \Sigma \rangle$, где $|A| = n + k$ и $|\Sigma| = k$, то можно эффективно выбрать n образующих $a_1, \ldots, a_n$ из A таких, что подполугруппа $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ свободна и элементы $a_1, \ldots, a_n$ составляют ее свободный базис; это свойство к. о. полугрупп называют *условием Линдона*, а соответствующее утверждение — *обобщенной теоремой о свободе* (для многообразия всех полугрупп). См. по этому поводу [8], с. 5. Не всякая к. п. полугруппа будет к. о., но, например, всякая коммутативная к. п. полугруппа является к. о. (*теорема Редеи*, см., например, [18], § 9.3). Более широкий класс, нежели класс к. о. полугрупп, составляют *рекурсивно определенные* полугруппы — так называют к. п.

полугруппы, обладающие рекурсивно перечислимым множеством определяющих соотношений. Подполугруппа к. о. полугруппы не обязана быть даже к. п. полугруппой; например, как уже упоминалось в п. 1.2, в свободную полугруппу ранга 2 вложима свободная полугруппа счетного ранга. Произвольная к. п. подполугруппа к. о. полугруппы не обязана быть к. о. полугруппой; например, 4-порожденная подполугруппа $\langle a, ab, ba, b^2\rangle$ свободной полугруппы $\{a, b\}^+$ не является конечно определенной (заметим, что оценка 4 здесь точная; все 3-порожденные подполугруппы свободных полугрупп конечно определены, причем для 2-порожденных из них попросту выполняется альтернатива — быть подполугруппой бесконечной моногенной полугруппы или быть изоморфной свободной полугруппе ранга 2, см. [30], с. 54—55). Но всякая к. п. подполугруппа к. о. полугруппы рекурсивно определена. Обратно, любая рекурсивно определенная полугруппа вложима в некоторую к. о. полугруппу; это свойство иногда называют хигмановостью, т. е. говорят, что многообразие всех полугрупп *хигманово*. О хигмановых многообразих см. [8], § 1.

Если полугруппа $S = \langle A\rangle$ имеет единицу [нуль], то наряду с обычными соотношениями можно рассматривать (и нередко удобно применять) соотношения вида $u = 1$ $[u = 0]$, называемые *специальными* [*0-приведенными*]. Всякое специальное [0-приведенное] соотношение $u = 1$ $[u = 0]$ эквивалентно множеству обычных соотношений $ua = a$, $au = a$ $[ua = u, au = u]$, где a пробегает порождающее множество A. Если полугруппа $S = S^1$ $[S = S^0]$ может быть задана специальными [0-приведенными] определяющими соотношениями, то S называют *специальной* [*0-приведенной*].

Левым [*правым*] графом копредставления

$$\langle a_1, \ldots, a_n \mid u_1 = v_1, \ldots, u_m = v_m\rangle$$

называется граф с множеством вершин $\{a_1, \ldots, a_n\}$, в котором вершины a_i и a_j соединены ребром тогда и только тогда, когда для некоторого k буквы a_i и a_j будут крайними слева [справа] буквами слов u_k и v_k соответственно. Если левый [правый] граф копредставления не имеет циклов, то говорят, что само копредставление *не имеет левых* [*правых*] *циклов*.

Полугруппа, заданная копредставлением без левых [правых] циклов, будет с левым [правым] сокращением. Если $S = \langle A | \Sigma \rangle$ и копредставление $\langle A | \Sigma \rangle$ не имеет ни левых, ни правых циклов, то S вложима в группу, заданную системой определяющих соотношений Σ (см. [1], а также [2], с. 210).

В терминах определяющих соотношений можно определить ряд известных теоретико-полугрупповых конструкций. Например, полугруппа S будет свободным произведением полугрупп $\{S_i\}_{i \in I}$ тогда и только тогда, когда $\{S_i\}_{i \in I}$ есть порождающая россыпь в S и S может быть задана множеством определяющих соотношений, равным объединению множеств определяющих соотношений для каждой полугруппы S_i. Если полугруппа S имеет порождающую россыпь $\{S_i\}_{i \in I}$ и задана множеством определяющих соотношений, состоящим из определяющих соотношений каждой полугруппы S_i и соотношений, диктующих перестановочность любых двух элементов из различных полугрупп S_i и S_j (i, j пробегают I), то S назовем *коммутативно-свободным произведением полугрупп* S_i. Свободная коммутативная полугруппа разложима в коммутативно-свободное произведение бесконечных моногенных полугрупп.

Пусть $\mathscr{K}$ — произвольное предмногообразие полугрупп. Если A — алфавит и $\Sigma = \{u_i = v_i,\ i \in I\}$ — множество формальных равенств слов над A, то рассмотрим наименьшую $\mathscr{K}$-конгруэнцию $\rho_{\mathscr{K}}$ на полугруппе $\langle A | \Sigma \rangle$. Факторполугруппа $\langle A | \Sigma \rangle \rho_{\mathscr{K}}$ называется полугруппой, *заданной в* $\mathscr{K}$ *порождающим множеством* A *и определяющими соотношениями* Σ, обозначим ее $\langle A | \Sigma, \mathscr{K} \rangle$. Если A и Σ конечны, то полугруппа $\langle A | \Sigma, \mathscr{K} \rangle$ называется *конечно определенной в* $\mathscr{K}$. Полугруппа, конечно определенная в данном классе, может не быть конечно определенной в обычном смысле (т. е. в классе всех полугрупп).

Моногенная полугруппа типа (r, m) задается одним определяющим соотношением $a^r = a^{r+m}$; в частности, определяющее соотношение $a = a^{m+1}$ задает циклическую группу порядка m. Заметим, что моноид, заданный копредставлением $\langle a, b | aba = 1 \rangle$, есть бесконечная циклическая группа. Ниже приведены копредставления для нескольких других известных полугрупп и указаны некоторые простейшие свойства этих полугрупп.

Бициклическая полугруппа (или *бициклический моноид*) $B(a, b)$ — моноид, заданный копредставлением $\langle a, b \mid ab = 1 \rangle$. Канонической формой элементов из $B(a, b)$ будет $b^m a^n$, где m и n — неотрицательные целые числа. Полугруппа $B(a, b)$ инверсна и как унарная полугруппа моногенна, $B(a, b) = \text{инв}\langle a \rangle = \text{инв}\langle b \rangle$; очевидно, $a^{-1} = b$. Идемпотенты из $B(a, b)$ — это в точности элементы $b^m a^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$; полурешетка $E_{B(a, b)}$ есть цепь, изоморфная цепи целых отрицательных чисел. Одно из точных представлений бициклической полугруппы — декартов квадрат $(\mathbf{N} \cup \{0\}) \times (\mathbf{N} \cup \{0\})$ относительно операции $\circ$, заданной формулой

$$(k, l) \circ (m, n) = (k + m - \min(l, m), \ l + n - \min(l, m)).$$

Приведеннаая формула фактически задает правило перемножения указанных выше канонических форм элементов бициклической полугруппы. В полугруппе $B(a, b)$ элемент a [элемент b] обратим только справа [слева]; более того, если моноид S имеет элементы, обратимые только справа и только слева, то в S существует бициклический подмоноид. Если φ — сюръективный гомоморфизм полугруппы $B(a, b)$, то либо φ есть изоморфизм, либо $B(a, b)\varphi$ есть циклическая группа.

Свободная коммутативная полугруппа над алфавитом A может быть задана копредставлением

$$\langle A \mid a_i a_j = a_j a_i \text{ для любых } a_i, a_j \in A \rangle.$$

Некоторые свойства свободных коммутативных полугрупп были упомянуты выше в этом и предыдущем пунктах. Свободная коммутативная полугруппа любого ранга $\mathfrak{m}$ удовлетворяет закону сокращения, ее группой частных будет свободная абелева группа ранга $\mathfrak{m}$.

Полугруппа B_2, введенная в п. 2.4 как полугруппа матриц, может быть задана копредставлением

$$\langle a, b \mid aba = a, \ bab = b, \ a^2 = 0, \ b^2 = 0 \rangle.$$

Полугруппа A_2 задается копредставлением

$$\langle a, b \mid aba = a, \ bab = b, \ a^2 = a, \ b^2 = 0 \rangle.$$

Она (как и B_2) состоит из 5 элементов и изоморфна мультипликативной полугруппе матриц

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Полугруппа B_2 изоморфна рисовскому фактору прямого произведения $A_2 \times A_2$.

В ряде вопросов возникают следующие частные случаи полугрупп $N_l[T]$ и $L[T]$, введенных в п. 2.3. При $T = \{e\}$ вместо $N_l[T]$ будем писать $N_l[e]$. *Полугруппа* $N_l[e]$ задается копредставлением $\langle a, e \mid ae = 0,\ ea = a,\ e^2 = e\rangle$. Она состоит из трех элементов и изоморфна мультипликативной полугруппе $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$. Видно, что $N_l[e]$ вложима в B_2. Если $T = \langle g\rangle$ есть циклическая группа $C_{1,n}$ порядка n, то полугруппа $L[C_{1,n}]$ задается копредставлением $\langle g, f \mid g^n f = f,\ fg = f,\ g^{n+1} = g,\ f^2 = f\rangle$. Она состоит из $2n$ элементов: $L[C_{1,n}] = \{gf,\ g^2 f,\ \ldots,\ g^n f\} + \{g,\ g^2,\ \ldots,\ g^n\}$. При $n = 1$ $L[C_{1,n}]$ есть двухэлементная полурешетка.

Полугруппа $L_{3,1}$ задается копредставлением

$$\langle a,\ e \mid ea = e,\quad a^2 e = a^2,\quad a^3 = a^2,\quad e^2 = e\rangle.$$

Она состоит из четырех элементов и является идеальным расширением левосингулярной полугруппы $\{a^2, e, ae\}$ при помощи двухэлементной полугруппы с нулевым умножением.

Четырехспиральная полугруппа Sp_4 задается копредставлением

$$\langle a,\ b,\ c,\ d \mid ab = b,\ ba = a,\ bc = b,$$
$$cb = c,\ cd = d,\ dc = c,\ da = d\rangle.$$

Из написанных определяющих соотношений вытекает, что образующие a, b, c, d являются идемпотентами. Полугруппа Sp_4 изоморфна рисовской матричной полугруппе $\mathscr{M}\left[B(p, q);\ 2,\ 2;\ \begin{pmatrix}1&q\\1&1\end{pmatrix}\right]$ над бициклической полугруппой $B(p, q)$. Частично упорядоченное (естественным отношением порядка) множество идемпотентов E_{Sp_4} есть кардинальная сумма четырех цепей, изоморфных цепи отрицательных целых чисел; если идемпотенты соединить ребрами, указывающими левую и правую делимость, то получится бесконечная «разматывающаяся» спираль (см., например, [22], с. 172), откуда и проистекает название полугруппы Sp_4.

Полугруппы A_2, B_2, $L[C_{1,n}]$ и Sp_4 регулярны, причем B_2 инверсна, а $L[C_{1,n}]$ клиффордова. Наряду с полугруппами $N_l[e]$, $L_{3,1}$, $L[C_{1,n}]$ бывают нужны и двойственные им полугруппы $\overleftarrow{N_l[e]} = N_r[e]$, $\overleftarrow{L_{3,1}} = R_{3,1}$, $\overleftarrow{L[C_{1,n}]} = R[C_{1,n}]$. Заметим, что $\overleftarrow{A_2} \simeq A_2$, $\overleftarrow{B_2} \simeq B_2$, $\overleftarrow{\mathrm{Sp}_4} \not\simeq \mathrm{Sp}_4$, но полугруппы Sp_4 и $\overleftarrow{\mathrm{Sp}_4}$ вложимы друг в друга.

Произвольная моногенная (унарная) инверсная полугруппа будет полугруппой одного из следующих типов: 1) свободная инверсная полугруппа ранга 1 (задана копредставлением $\langle a \mid \varnothing \rangle$), 2) задана копредставлением $\langle a \mid a^n a^{-1} = a^{-1} a^n \rangle$, 3) задана копредставлением $\langle a \mid a^{n+1} a^{-1} = a^n \rangle$, 4) задана копредставлением $\langle a \mid a^r = a^{r+m} \rangle$, где n, m, r — натуральные числа. Полугруппы типов 1)—3) бесконечны, полугруппы типа 4) конечны. Полугруппа типа 1) в обычной полугрупповой сигнатуре может быть задана копредставлением $\langle a, b \mid aba = a,\ bab = b,\ a^m b^{m+n} a^n = b^n a^{n+m} b^m$, m и n пробегают $\mathbf{N} \rangle$; как уже отмечалось выше, она не является к. о. Каноническую форму ее элементов в сигнатуре унарной полугруппы см. в п. 5.3. При $n = 1, 2, \ldots$ каждое из семейств 2), 3) состоит из полугрупп как попарно не изоморфных, так и не изоморфных полугруппам другого семейства; при $n = 1$ полугруппа типа 2) — это бесконечная циклическая группа, полугруппа типа 3) — бициклическая полугруппа. Для любых r, m существует и единственна (с точностью до изоморфизма) полугруппа типа 4); ее порядок равен $\frac{r(r+1)(2r+1)}{6} + m - 1$. Детали см. в [76], гл. IX.

Общую информацию по теме данного пункта см. в [18], § 1.12 и гл. 9; [22], гл. 1, § 4; [24], гл. 9, § 1—3. К. о. коммутативным полугруппам посвящена монография [80]. О полугруппах, заданных определяющими соотношениями, в контексте теории многообразий и алгоритмических проблем см. в пп. 7.1 и 8.1.

2.6. Идеалы и делимость. Пересечение любого семейства левых [правых, двусторонних] идеалов полугруппы, если оно непусто, само будет левым [правым, двусторонним] идеалом. Если L — произвольный левый идеал, R — произвольный правый идеал, то $L \cap R \neq \varnothing$, так как $RL \subseteq L \cap R$; в частности, пересечение любых двух (а стало быть, и любого конечного числа) двусторонних идеалов непусто. Объединение любого семейства левых [правых, двусторонних] идеалов будет левым [правым, двусторонним] идеалом. Таким образом, частично упорядоченное множество $\operatorname{Id} S$ всех двусторонних идеалов полугруппы будет (дистрибутивной) решеткой, не обязательно полной. Иногда удобно считать элементом $\operatorname{Id} S$ и пустое множество; тогда $\operatorname{Id} S$ становится алгебраической решеткой. Множество $\operatorname{Id}_l S$ [$\operatorname{Id}_r S$] всех левых [правых] идеалов S есть полная верхняя полурешетка. Если полугруппа S имеет нуль, то он принадлежит любому ее одностороннему идеалу, так что $\operatorname{Id} S$, $\operatorname{Id}_l S$, $\operatorname{Id}_r S$ будут полными решетками. Если A — непустое подмножество полугруппы S, то пересечение $L(A)$ [$R(A), J(A)$] всех левых [правых, двусторонних] идеалов, содержащих A, будет наименьшим среди таких идеалов; его называют *левым* [*правым, двусторонним*] *идеалом, порожденным* A. Имеет место

$$L(A) = S^1 A, \quad R(A) = AS^1, \quad J(A) = S^1 A S^1.$$

Если левый [правый, двусторонний] идеал может быть порожден конечным множеством A, то его называют *конечно порожденным*; в случае когда A состоит из одного элемента a, получаем понятие главного левого [правого, двустороннего] идеала $L(a)$ [$R(a), J(a)$], порожденного a (см. пп. 1.1 и 2.1).

Если рассматриваемый идеал есть к. п. полугруппа, то он будет конечно порожденным и как идеал соответствующего типа; обратное вовсе не обязательно: тривиальный пример — не к. п. группа (она будет своим главным левым [правым, двусторонним] идеалом, порожденным любым элементом). Все левые [правые, двусторонние] идеалы полугруппы S будут конечно порожденными тогда и только тогда, когда решетка $\mathrm{Id}_l S$ [$\mathrm{Id}_r S, \mathrm{Id}\, S$] удовлетворяет условию максимальности; полугруппу S в этом случае иногда называют *нётеровой слева* [*справа*, просто *нётеровой*]. Если $\mathrm{Id}_l S$ [$\mathrm{Id}_r S, \mathrm{Id}\, S$] удовлетворяет условию минимальности, то S называют *артиновой слева* [*справа*, просто *артиновой*] полугруппой. Термины «нётерова» и «артинова» используют и для более сильных свойств — когда условию максимальности или минимальности удовлетворяет решетка соответствующих конгруэнций (обычных, левых или правых).

Элемент a полугруппы S называется *делителем* [*левым делителем*, *правым делителем*] элемента $b \in S$, если $b \in aS \cup Sa \cup SaS$ [$b \in aS$, $b \in Sa$]. Эти отношения делимости, очевидно, транзитивны, но, вообще говоря, не антисимметричны и не рефлексивны. Переходя к рефлексивным замыканиям, получаем отношения «несобственной» делимости, определяемые условиями:

$$a \mid b \Leftrightarrow b \in S^1 a S^1, \qquad a \mid_r b \Leftrightarrow b \in aS^1, \qquad a \mid_l b \Leftrightarrow b \in S^1 a.$$

Заметим, что использование буквы r для левой [буквы l для правой] несобственной делимости мнемонически лучше согласуется с тем, что в определении фигурирует принадлежность правому [левому] идеалу. Укажем также на связь отношения $|_r$ [отношения $|_l$] с отношением Грина $\mathscr{R}$ [соответственно $\mathscr{L}$], см. п. 2.7. При условии $a \mid_r b$ [$a \mid_l b$] можно говорить, что *a факторизует b справа* [*слева*].

Отношения $|_l$, $|_r$ и $|$ суть отношения квазипорядка. Соответствующие им отношения эквивалентности (см. п. I.2.1) рассматриваются в следующем пункте. В коммутативных полугруппах (где $|_l = |_r = |$) все эти три отношения эквивалентности превращаются в одно, называемое обычно отношением *асоциированности*. Обозначают его через $\mathscr{J}$; по определению,

$$x \mathscr{J} y \Leftrightarrow x \mid y \text{ и } y \mid x. \qquad (*)$$

Отношение ассоциированности (для коммутативных полугрупп) есть конгруэнция. В коммутативных моноидах с сокращением отношение $\mathscr{J}$ устроено особенно просто; если M — произвольный такой моноид и G — группа его обратимых элементов, то $x \mathscr{J} y$ тогда и только тогда, когда $x \in yG$ (эквивалентно $y \in xG$). В терминах коммутативных моноидов с сокращением можно унифицировать параллельные теории делимости в мультипликативных полугруппах таких классических колец, как, например, кольцо целых чисел и кольцо многочленов от одной переменной над полем. До конца абзаца сохраним смысл введенных выше обозначений M и G. Отношение $|$ индуцирует на фактормножестве $M/\mathcal{J}$ отношение частичного порядка, причем $G = \mathcal{J}(1)$ будет в $M/\mathcal{J}$ наименьшим элементом. Обычным образом можно определить понятие *наибольшего общего делителя* (н. о. д.) элементов $a, b \in M$. Вообще говоря, не любые два элемента из M имеют н. о. д., но если существует н. о. д. d элементов a и b, то он единствен с точностью до ассоциированности и в $M/\mathcal{J}$ имеет место $\mathcal{J}(d) = \inf(\mathcal{J}(a), \mathcal{J}(b))$. Элемент $x \in M$ называется *неприводимым*, если $x \notin G$ и класс $\mathcal{J}(x)$ является атомом в $M/\mathcal{J}$. Элемент $p \in M$ называется *простым*, если $p \notin G$ и из $p|ab$ всегда следует $p|a$ или $p|b$. Всякий простой элемент из M является неприводимым, обратное, вообще говоря, неверно. Следующие условия для M эквивалентны: (1) $M/\mathcal{J}$ удовлетворяет условию минимальности и любые два элемента из M имеют н. о. д.; (2) $M/\mathcal{J}$ удовлетворяет условию минимальности и всякий неприводимый элемент из M будет простым; (3) всякий элемент $a \in M \setminus G$ разложим в произведение неприводимых элементов, причем единственным образом с точностью до ассоциированности (т. е. если $a = x_1x_2 \ldots x_m$ и $a = y_1y_2 \ldots y_n$ — два таких разложения, то $m = n$ и множители можно перенумеровать так, что $x_i\mathcal{J}y_i$, $i = 1, \ldots, m$). Коммутативный моноид с сокращением, удовлетворяющий указанным условиям, называют *гауссовой полугруппой*. О гауссовых полугруппах см. [20], гл. 2, § 8.

Если S — произвольная полугруппа, то в полугруппе бинарных отношений $\mathcal{B}(S)$ отношения квазипорядка $|_l$ и $|_r$ перестановочны и их произведение равно $|$,

$$|_l \cdot |_r = |_r \cdot |_l = |.$$

Полезную роль играет также их пересечение $|_t = |_l \cap |_r$, являющееся тоже, вообще говоря, отношением квазипорядка. В группах и только в них имеет место $|_r = |_l = \nabla$ (тогда, очевидно, и $|_t = | = \nabla$), и методология теории полугрупп в большой степени обусловливается «мерой удаленности» тех или иных отношений делимости в рассматриваемых полугруппах от универсального отношения ∇ и богатством возможных здесь ситуаций. Для некоторых типов полугрупп, таких, как нильполугруппы, свободные полугруппы, комбинаторные инверсные полугруппы (в частности, полурешетки), отношения $|_l$, $|_r$, $|$ антисимметричны, т. е. являются отношениями частичного порядка. На любой полугруппе S, имеющей идемпотенты, отношение, индуцированное на E_S отношением $|_l$, совпадает с отношением естественного частичного порядка на E_S.

В полугруппах преобразований рассмотренные выше понятия получают очень естественную интерпретацию. Например, для элементов α, β произвольной симметрической полугруппы $\mathcal{T}(X)$

$$\alpha\,|_r\,\beta \Leftrightarrow \ker\alpha \subseteq \ker\beta,\quad \alpha\,|_l\,\beta \Leftrightarrow X\alpha \supseteq X\beta,\quad \alpha\,|\,\beta \Leftrightarrow \operatorname{rank}\alpha \geqslant \operatorname{rank}\beta.$$

Аналогично выглядит интерпретация указанных отношений в полугруппе $\operatorname{End}_F V$. Если V имеет конечную размерность n, то в изоморфной $\operatorname{End}_F V$ полугруппе $M_n(F)$ отношения $|_r$ и $|_l$ следующим образом могут быть описаны на языке рангов матриц: если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, то

$$A\,|_r B \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A\,|_l\, B \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \\ b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если $|X| = \mathfrak{n}$, то через $\mathfrak{n}^+$ обозначим следующее за $\mathfrak{n}$ кардинальное число; для любого $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}^+$ положим $\mathcal{T}_{\mathfrak{m}}(X) = \{\alpha \in \mathcal{T}(X) \mid \operatorname{rank}\alpha < \mathfrak{m}\}$. Все идеалы полугруппы $\mathcal{T}(X)$ исчерпываются множествами $\mathcal{T}_{\mathfrak{m}}(X)$, где $1 < \mathfrak{m} < \mathfrak{n}^+$. Если $\mathfrak{n}$ конечно, то $\mathcal{T}(X)$ имеет, таким образом, $\mathfrak{n}$ идеалов, образующих цепь; все они главные. При счетном $\mathfrak{n}$ единственный неглавный идеал в $\mathcal{T}(X)$ — это множество всех преобразований, имеющих конечные ранги. Аналогичные описания идеалов верны для полугрупп $\mathcal{PT}(X)$, $\mathcal{I}(X)$, $\operatorname{End}_F V$.

Любая конечная цепь в решетке $\operatorname{Id} S$, включающая единицу этой решетки, называется (конечным) *рядом идеалов* полугруппы S; в полугруппах с нулем разумно начинать каждый ряд идеалов с нуля, в полугруппах без нуля иногда такой ряд начинают с пустого множества. Если ряд идеалов есть неуплотняемая цепь в $\operatorname{Id} S$, то он *называется главным*. *Идеальным рядом* полугруппы S называется всякая последовательность подполугрупп

$$T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_m = S, \qquad (**)$$

где $T_i \lhd T_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Подполугруппа T_1 и рисовские факторы T_{i+1}/T_i называются *факторами* ряда (**), число m — его *длиной* (в полугруппах с нулем под длиной часто понимают число ненулевых факторов). Два идеальных ряда полугруппы называют *изоморфными*, если их длины равны и между их факторами можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие факторы изоморфны. Идеальный ряд $Q_1 \lhd Q_2 \lhd \ldots \lhd Q_n = S$ называется *уплотнением* ряда (**), если каждая подполугруппа T_i совпадает с одной из подполугрупп Q_j. Идеальный ряд называется *композиционным рядом*, если он не обладает отличными от него уплотнениями. Для любых двух идеальных рядов полугруппы существуют изоморфные уплотнения; в частности, в полугруппе, обладающей композиционным рядом, все такие ряды изоморфны (это теоретико-полугрупповые аналоги теорем Шрейера и Жордана — Гельдера о нормальных рядах групп, см., например, [18], § 2.6). Если полугруппа обладает композиционным рядом, то она имеет и главный ряд. Обратное неверно; в качестве контрпримера укажем полугруппу $N_l[G]$ (см. п. 2.3), где G — бесконечная циклическая группа. Главным рядом обладает, разумеется, любая конечная полугруппа. Если в регулярной полугруппе S частично упорядоченное множество E_S имеет конечную длину (в частности, если оно конечно), то S обладает главным рядом. Обратное неверно: контрпример — бициклическая полугруппа. С понятием главного ряда связано понятие главного фактора, см. п. 3.1.

Как и для нормальных рядов групп, приведенные понятия (и свойства) идеальных рядов могут быть естественным образом обобщены на бесконечные системы вложенных подполугрупп. В частности, *возрастающий* [*убывающий*] *идеальный ряд* полугруппы S — это последовательность $\{T_i\}_{i \in I}$ вложенных подполугрупп (среди которых и S), вполне упорядоченная по возрастанию [по убыванию], где на предельных местах стоят объединения [пересечения] предыдущих членов и для любого скачка $T_i \subset T_j$ (т. е. между T_i и T_j нет членов данной последовательности) имеет место $T_i \lhd T_j$. Подполугруппа T полугруппы S называется [*конечно*] *достижимой*, если она может быть включена в [конечный] возрастающий идеальный ряд S. Идеал I полугруппы T называется *характеристическим*, если для любой полугруппы S, содержащей T как идеал, имеет место $I \lhd S$; примеры — аннулятор $\operatorname{Ann} S$ полугруппы $S = S^0$, всякий глобально идемпотентный идеал.

Для произвольной подполугруппы T полугруппы S положим $I(T) = \{x \in S \mid xT \cup Tx \subseteq T\}$. Множество $I(T)$ будет наибольшей подполугруппой из S, содержащей T в качестве идеала, и называется *идеализатором* T. Аналогично определяется *левый* [*правый*] *идеализатор* $I_l(T)$ $[I_r(T)]$. О полугруппах, в которых все подполугруппы совпадают со своими идеализаторами [все собственные подполугруппы отличны от своих идеализаторов], см. п. 3.1 [п. 6.3].

Элемент a полугруппы S, являющийся левым [правым] делителем каждого элемента из S, называют *обратимым справа* [*слева*]. Если S — моноид, то это свойство совпадает с обратимостью справа [слева], введенной в п. 2.1. Только моноиды имеют элементы, обратимые одновременно слева и справа. Все элементы полугруппы S обратимы слева [справа] тогда и только тогда, когда в S нет собственных правых [левых] идеалов. Такие полугруппы будут рассмотрены в п. 3.1; тривиальный пример здесь доставляют правосингулярные [левосингулярные] полугруппы, в них каждый элемент обратим только слева [справа]. В моноидах наличие элементов, обратимых только с одной стороны, связано с увеличительными элементами. Элемент u полугруппы S называется *левым* [*правым*] *увеличительным элементом*, если существует такое собственное подмножество Q, что $uQ = S$ $[Qu = S]$. Всякий левый [правый] увеличительный элемент будет обратим справа [слева] и не обратим слева [справа]; если S — моноид, то верно и обратное: всякий обратимый только справа [слева] элемент u будет левым [правым] увеличительным элементом, причем — что особенно проясняет ситуацию — в S тогда существует бициклический подмоноид

$B(a, b)$, в котором $a = u$ $[b = u]$. В частности, моноид, имеющий элементы, обратимые только слева [справа], обязательно имеет и элементы, обратимые только справа [слева] (см. [24], гл. 3, §§ 5, 6).

Намного более широкий класс полугрупп, нежели класс полугрупп без собственных левых [правых] идеалов, составляют полугруппы S, для которых $\mathrm{Id}_l S = \mathrm{Id}\, S$ $[\mathrm{Id}_r S = \mathrm{Id}\, S]$ (это эквивалентно тому, что для любых $a, b \in S$ имеет место $a |_r ab$ $[b |_l ab]$). Полугруппа S с указанным свойством называется *левой* [*правой*] *дуополугруппой*. Полугруппа, являющаяся одновременно левой и правой дуополугруппой, называется *дуополугруппой*. Перечисленные свойства представляют собой весьма широкие обобщения коммутативности. Чуть более сильным, нежели свойство быть дуополугруппой, является *коммутаторное условие*: для любых $a, b \in S$ имеет место $ab \in Sa \cap bS$. Этому условию, кроме коммутативных полугрупп, удовлетворяет, например, любая инвариантная подполугруппа произвольной группы G, т. е. такая подполугруппа S, для которой $g^{-1}Sg \subseteq S$ при любом $g \in G$. Для регулярных полугрупп, нильполугрупп, моноидов, полугрупп с сокращением разница между свойствами «коммутаторность» и «дуо» пропадает. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S — регулярная дуополугруппа; (2) для любых левых идеалов L, L' и правых идеалов R, R' из S имеет место $LL' = L \cap L'$ и $RR' = R \cap R'$; (3) для любого левого идеала L и правого идеала R из S имеет место $L \cap R = LR$. В произвольной полугруппе всякий идеал, являющийся пересечением некоторого семейства вполне изолированных идеалов, будет изолированным; в дуополугруппах верно обратное утверждение: любой изолированный идеал представим в виде пересечения вполне изолированных. Дополнительную информацию о дуополугруппах и о полугруппах с коммутаторным условием см., например, в [86], § 11, и в [24], гл. 4, § 6. Обзор исследований по теории идеалов в коммутативных полугруппах дан в [45].

Минимальные элементы частично упорядоченного множества $\mathrm{Id}_l S$ $[\mathrm{Id}_r S, \mathrm{Id}\, S]$ называются *минимальными левыми* [*правыми*, *двусторонними*] *идеалами* полугруппы S. Не всякая полугруппа обладает минимальными идеалами; тривиальный пример — бесконечная моногенная полугруппа. Минимальный (двусторонний) идеал, если он существует, единствен и является наименьшим, т. е. содержится в любом другом идеале; он называется *ядром* (или *ядром Сушкевича*) полугруппы S. Если K — ядро полугруппы S, то в K нет не только строго содержащихся в нем идеалов полугруппы S, но и идеалов самой полугруппы K; если при этом K есть группа, то полугруппу S называют *гомогруппой*. Полугруппа S есть гомогруппа тогда и только тогда, когда в S существует *зероидный* элемент, т. е. элемент, для которого каждый элемент из S является левым и правым делителем. В этом случае ядро S состоит из всех зероидных элементов. Любая симметрическая полугруппа имеет ядро, состоящее из всех константных преобразований (и являющееся правосингулярной полугруппой). Всякая конечная полугруппа, разумеется, имеет ядро; конечная коммутативная полугруппа будет гомогруппой. Ядро конечной моногенной полугруппы (см. п. 2.4) есть циклическая группа; произвольная несвободная моногенная инверсная полугруппа (см. п. 2.5) имеет ядро, являющееся либо бициклической полугруппой, либо циклической группой. Если полугруппа S обладает минимальным левым идеалом L, то: 1) для любого $x \in S$ произведение Lx также будет минимальным левым идеалом, причем всякий минимальный левый идеал может быть получен таким способом; 2) каждый минимальный левый идеал не содержит своих собственных левых идеалов; 3) каждый левый идеал содержит некоторый минимальный левый идеал; 4) объединение всех минимальных левых идеалов (образующих, очевидно, россыпь полугруппы S) будет ядром S. Разумеется, верны утверждения, двойственные к только что перечисленным. Если полугруппа S обладает минимальным левым идеалом L и минимальным правым идеалом R, то $R \cap L = RL$ есть максимальная подгруппа, причем $L = Se$, $R = eS$, где e — единица этой подгруппы, RL совпадает с главным подмоноидом eSe, а LR является ядром S.

Для полугруппы с нулем естественно рассматривать ненулевые идеалы, и минимальный элемент в множестве ненулевых левых [правых, двусторонних] идеалов называется *0-минимальным* левым [правым, двусторонним] идеалом. Свойства 0-минимальных идеалов отчасти параллельны свойствам минимальных идеалов, но возникает и специфика. Например, 0-минимальный (двусторонний) идеал I не обязательно единствен, причем полугруппа I может содержать свои собственные ненулевые идеалы и может быть полугруппой с нулевым умножением; любая полугруппа с нулевым умножением может служить 0-минимальным идеалом некоторой полугруппы. Аналогичные утверждения верны и для односторонних 0-минимальных идеалов. Если e — идемпотент регулярной полугруппы S [с нулем], то следующие условия эквивалентны: (1) e примитивен; (2) Se есть [0-]минимальный левый идеал; (2′) eS есть [0-]минимальный правый идеал; (3) eSe есть [0-]группа. Объединение всех 0-минимальных левых [правых] идеалов полугруппы $S = S^0$ называется ее *левым* [*правым*] *цоколем* (по определению, если соответствующих 0-минимальных идеалов в S нет, то цоколь равен нулю). Минимальные и 0-минимальные идеалы играют заметную роль в структурной теории полугрупп; некоторые важные примеры будут приведены в пп. 3.1 и 5.1, более подробную информацию см., например, в [18], § 2.5, 2.7, гл. 6, § 7.7, 8.2, 8.3.

Максимальные элементы в множестве неединичных элементов полурешетки $\mathrm{Id}_l S$ [$\mathrm{Id}_r S$, $\mathrm{Id}\, S$] называются *максимальными левыми* [*правыми*, *двусторонними*] идеалами полугруппы S. Максимальные идеалы играют в теории полугрупп меньшую роль, нежели минимальные идеалы. Как и в теории колец, довольно типично их сопоставление с первичными идеалами. Двусторонний идеал P полугруппы S называется *первичным*, если для любых идеалов A, B из $AB \subseteq P$ следует $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$. Если M — максимальный идеал полугруппы S, то либо $M = S \setminus \{a\}$, где a — неразложимый элемент, либо M есть первичный идеал; отсюда следует, что в S всякий максимальный идеал будет первичным тогда и только тогда, когда S глобально идемпотентна. В полугруппе S с максимальными идеалами собственный первичный идеал P будет максимальным тогда (и, очевидно, только тогда), когда P содержит пересечение всех максимальных идеалов из S. Дополнительную информацию см. в [31], т. 3, с. 485.

Специализацией понятия радикала в терминах конгруэнций (см. п. 2.2) является понятие радикала как наибольшего идеала среди идеалов некоторого фиксированного типа. Основные понятия (равно как и результаты) здесь в значительной степени параллельны соответствующим теоретико-кольцевым и естественнее всего оформляются для полугрупп с нулем. Отправным является следующее понятие. Отображение ρ, ставящее в соответствие каждой полугруппе $S=S^0$ ее идеал $\rho(S)$, называется *радикалом* (*Куроша — Амицура*), если: 1) $\rho(S)$ совпадает с объединением таких идеалов I из S, что $\rho(I)=I$; 2) для любого идеала I из S выполняется включение $(\rho(S)\cup \cup I)/I\subseteq\rho(S/I)$; 3) $\rho(S/\rho(S))=0$. Если ρ — радикал, то полугруппа S называется ρ-радикальной [ρ-полупростой], если $\rho(S)=S$ [$\rho(S)=0$]. Класс $\mathscr{R}(\rho)$ [$\mathscr{S}(\rho)$] всех ρ-радикальных [ρ-полупростых] полугрупп радикала ρ называют *радикальным* [*полупростым*] классом радикала ρ. Класс $\mathscr{R}$ [$\mathscr{S}$] полугрупп с нулем будет радикальным [полупростым] классом некоторого радикала тогда и только тогда, когда он замкнут относительно факторполугрупп Риса и идеальных расширений и любая полугруппа с нулем имеет наибольший $\mathscr{R}$-идеал [замкнут относительно идеалов, идеальных расширений и рисовских подпрямых произведений]. Здесь *рисовским подпрямым произведением* называется подпрямое произведение, у которого ядро каждого проектирующего гомоморфизма есть конгруэнция Риса. Радикал ρ называется *наднильпотентным* [*подыдемпотентным*], если все нильпотентные полугруппы ρ-радикальны [все ρ-радикальные полугруппы глобально идемпотентны]. Всякий радикал является либо наднильпотентным, либо подыдемпотентным. Если ρ — радикал, то идеал $\rho(S)$ часто называют *ρ-радикалом* полугруппы S. Для тех или иных конкретных ρ соответствующие ρ-радикалы имеют особые названия. Перечислим некоторые из них, рассматривавшиеся в литературе (см., например, Bosák J.//Mat. časopis. — 1968. — V. 18, № 3. — P. 204—212). *Радикал Маккоя* $M(S)$ — пересечение всех первичных идеалов полугруппы S; этот радикал совпадает с *радикалом Бэра* $B(S)$ — наименьшим среди идеалов S, факторполугруппы Риса по которым не имеют ненулевых нильпотентных идеалов. *Ло-*

кально нильпотентный радикал (*радикал Шеврина*) $L(S)$ — наибольший локально нильпотентный идеал в S. *Нильрадикал* (*радикал Клиффорда*) $N(S)$ — наибольший нильидеал в S. *Обобщенный нильрадикал* $A(S)$ — наименьший среди идеалов S, факторполугруппы Риса по которым не имеют ненулевых нильэлементов; этот радикал совпадает с *радикалом Луга* $C(S)$ — пересечением всех вполне изолированных идеалов полугруппы S. Все перечисленные радикалы удовлетворяют аксиомам радикалов Куроша — Амицура. Наряду с ними рассматривался *радикал Шварца* $R(S)$ — объединение всех нильпотентных идеалов полугруппы S; для него не выполняется аксиома 3). Соотношения между указанными идеалами таковы: для любой полугруппы $S=S^0$

$$R(S) \subseteq M(S) = B(S) \subseteq L(S) \subseteq N(S) \subseteq A(S) = C(S),$$

причем все включения могут быть строгими, но, например, в коммутативной полугруппе все выписанные радикалы совпадают. Для произвольной полугруппы можно рассматривать соответствующие радикалы относительно фиксированного идеала I — переходя к факторполугруппе S/I, применяя к ней нужное определение и возвращаясь (беря полный прообраз возникающего идеала) к полугруппе S.

Информацию о радикалах-идеалах см. также в [63]. Многие общие свойства таких радикалов могут быть сформулированы для ситуации, когда рассматриваются радикалы в категориях; см. [5], гл. 5.

В каждом из частично упорядоченных множеств $\mathrm{Id}\, S$, $\mathrm{Id}_l\, S$, $\mathrm{Id}_r\, S$ естественно выделяются подмножества главных идеалов соответствующего типа: $\mathrm{Pr\,Id}\, S$, $\mathrm{Pr\,Id}_l\, S$, $\mathrm{Pr\,Id}_r\, S$. Эти множества главных идеалов полугруппы очень тесно связаны с отношением делимости; следующие соотношения фактически являются перефразировками определений:

$$a\,|_l\, b \Leftrightarrow L(a) \supseteq L(b), \quad a\,|_r\, b \Leftrightarrow R(a) \supseteq R(b),$$
$$a\,|\,b \Leftrightarrow J(a) \supseteq J(b).$$

Для бэровской полугруппы S (см. п. 2.1) естественно рассматривать множество $\mathcal{L}\,\mathrm{Ann}\, S$ [$\mathcal{R}\,\mathrm{Ann}\, S$] всех левых [правых] аннуляторов ее элементов. Имеет место $\mathcal{L}\,\mathrm{Ann}\, S \subseteq \mathrm{Id}_l\, S$ [$\mathcal{R}\,\mathrm{Ann}\, S \subseteq \mathrm{Id}_r\, S$], причем $\mathcal{L}\,\mathrm{Ann}\, S$

и $\mathscr{R}\operatorname{Ann} S$ суть ограниченные решетки, дуально изоморфные друг другу. Говорят, что решетка L *координатизируется* бэровской полугруппой S, если $L \simeq \mathscr{R}\operatorname{Ann} S$. Важность бэровских полугрупп подчеркивает то обстоятельство, что любая ограниченная решетка координатизируется подходящей бэровской полугруппой (см. [47]).

Обобщениями понятия идеала являются понятия квазиидеала и биидеала. Подмножество Q [подмножество B] полугруппы S называется *квазиидеалом* [*биидеалом*], если $SQ \cap QS \subseteq Q$ $[BSB \subseteq B]$. Каждый квазиидеал полугруппы S будет ее биидеалом; обратное справедливо тогда и только тогда, когда S регулярна. Группы, и только они, не имеют собственных квазиидеалов [биидеалов]. Пересечение произвольного семейства квазиидеалов [биидеалов], если оно непусто, само есть квазиидеал [биидеал]. Для произвольного непустого подмножества X полугруппы S пересечение $Q(X)$ $[B(X)]$ всех квазиидеалов [биидеалов], содержащих X, называется квазиидеалом [биидеалом], порожденным X; имеет место

$$Q(X) = L(X) \cap R(X) \qquad [B(X) = X \cup X^2 \cup XSX].$$

При $X = \{x\}$ получаем понятие *главного квазиидеала* $Q(x)$ [*главного биидеала* $B(x)$], порожденного x. Следующее характеристическое свойство квазиидеалов в значительной степени сводит их рассмотрение к односторонним идеалам: Q будет квазиидеалом полугруппы S тогда и только тогда, когда Q есть пересечение $L \cap R$ левого идеала L и правого идеала R полугруппы S. Аналогично случаю идеалов определяются понятия минимального и 0-минимального квазиидеала. Если полугруппа обладает минимальными квазиидеалами, то они суть в точности максимальные подгруппы ее ядра, которое в этом случае является вполне простой (см. п. 3.1) полугруппой. Если Q есть 0-минимальный квазиидеал полугруппы $S = S^0$, то Q — либо полугруппа с нулевым умножением, либо 0-группа; во втором случае $Q = eSe = eS \cap Se$, где e — единица Q. При этом eS $[Se]$ не обязан быть 0-минимальным правым [левым] идеалом; например, в 4-элементной полугруппе $S = S^0 = \{0, a, b, e\}$ с таблицей умножения $a^2 = b^2 = ab = ba = ae = eb = 0$, $ea = a$, $be = b$, $e^2 = e$ множество $Q = \{0, e\}$ есть 0-минимальный квазиидеал, но правый [левый] идеал $eS=\{0, e, a\}$ $[Se=\{0, e, b\}]$ не 0-минимален. Квазиидеал Q полугруппы $S=S^0$ будет 0-минимальным тогда и только тогда, когда $Q\setminus\{0\}$ есть $\mathscr{H}$-класс ($\mathscr{H}$ — отношение Грина, см. п. 2.7). Более подробную информацию о квазиидеалах и биидеалах см. в [18], § 2.7, и, особенно, в [86].

2.7. Отношения Грина. Указанные в заглавии отношения — это пять эквивалентностей $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{H}$ на произвольной полугруппе, определенные следующим образом:

$$x\mathscr{L}y \Leftrightarrow L(x)=L(y), \quad x\mathscr{R}y \Leftrightarrow R(x)=R(y),$$
$$x\mathscr{J}y \Leftrightarrow J(x)=J(y),$$
$$\mathscr{D}=\mathscr{L}\vee\mathscr{R} \text{ (объединение в решетке эквивалентностей)}, \quad \mathscr{H}=\mathscr{L}\cap\mathscr{R}.$$

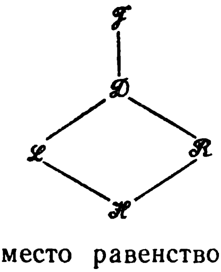
Для четырех из них определения можно перефразировать в терминах рассмотренных в п. 2.6 отношений делимости:

$$x\mathscr{L}y \Leftrightarrow x\,|_l\,y \text{ и } y\,|_l\,x, \qquad x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x\,|_r\,y \text{ и } y\,|_r\,x,$$
$$x\mathscr{J}y \Leftrightarrow x\,|\,y \text{ и } y\,|\,x, \qquad x\mathscr{H}y \Leftrightarrow x\,|_t\,y \text{ и } y\,|_t\,x.$$

Отношение $\mathscr{L}$ [отношение $\mathscr{R}$] есть правая [левая] конгруэнция. В полугруппе бинарных отношений $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$ перестановочны, откуда

$$\mathscr{L}\cdot\mathscr{R}=\mathscr{R}\cdot\mathscr{L}=\mathscr{D}.$$

Для коммутативной полугруппы $\mathscr{L}=\mathscr{R}=\mathscr{J}=\mathscr{D}=\mathscr{H}$, и определение этого отношения уже приводилось в п. 2.6 (см. там формулу (*)). В общем случае систему включений между отношениями Грина изображает следующая диаграмма.



Для эпигрупп (в частности, для периодических и конечных полугрупп), для бициклической полугруппы, для симметрических полугрупп, для полугрупп эндоморфизмов линейных пространств имеет место равенство $\mathscr{J}=\mathscr{D}$. В симметрической полугруппе выполняются соотношения

$$\alpha\mathcal{L}\beta \Leftrightarrow X\alpha = X\beta, \quad \alpha\mathcal{R}\beta \Leftrightarrow \ker\alpha = \ker\beta,$$
$$\alpha\mathcal{J}\beta \Leftrightarrow \operatorname{rank}\alpha = \operatorname{rank}\beta.$$

Аналогичные соотношения верны для полугруппы $\mathrm{End}_F V$. Если все элементы из данного $\mathcal{J}$-класса полугруппы $\mathcal{T}(X)$ или $\mathrm{End}_F V$ имеют ранг $\mathfrak{m}$, то говорят, что этот *$\mathcal{J}$-класс имеет ранг* $\mathfrak{m}$.

Следующий пример иллюстрирует возможность «предельного» различия отношений $\mathcal{D}$ и $\mathcal{J}$. На декартовом квадрате $S = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, где $\mathbf{R}_+$ — множество всех положительных действительных чисел, зададим умножение формулой $(a, b)(c, d) = (ac, bc + d)$. Тогда S есть полугруппа (с сокращением), в которой $\mathcal{D} = \Delta$, а $\mathcal{J} = \nabla$. В неодноэлементной левосингулярной [правосингулярной] полугруппе $\mathcal{R} = \Delta$, а $\mathcal{L} = \nabla$ [$\mathcal{L} = \Delta$, а $\mathcal{R} = \nabla$]. В прямоугольной несингулярной полугруппе, а также в бициклической полугруппе при равенстве $\mathcal{D} = \mathcal{J} = \nabla$ четыре отношения Грина различны, причем $\mathcal{H} = \Delta$; в моноиде, заданном копредставлением $\langle a, b, c \mid abc = 1\rangle$ все пять отношений Грина различны, причем попарно не совпадают классы $\mathcal{L}(1)$, $\mathcal{R}(1)$, $\mathcal{J}(1)$, $\mathcal{D}(1)$, $\mathcal{H}(1)$.

Классы отношений Грина имеют стандартные обозначения: $\mathcal{L}(a) = L_a$, $\mathcal{R}(a) = R_a$, $\mathcal{J}(a) = J_a$, $\mathcal{D}(a) = D_a$, $\mathcal{H}(a) = H_a$. Фактормножества $S/\mathcal{L}$, $S/\mathcal{R}$, $S/\mathcal{J}$, $S/\mathcal{H}$ естественным образом превращаются в частично упорядоченные (ч. у.) заданием следующих соотношений:

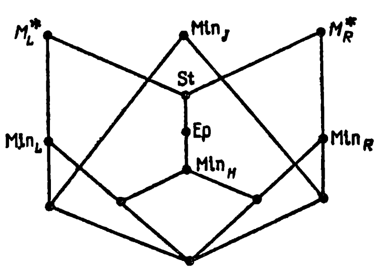
$$L_x \leqslant L_y \Leftrightarrow L(x) \subseteq L(y), \quad R_x \leqslant R_y \Leftrightarrow R(x) \subseteq R(y),$$
$$J_x \leqslant J_y \Leftrightarrow J(x) \subseteq J(y), \quad H_x \leqslant H_y \Leftrightarrow Q(x) \subseteq Q(y)$$

($Q(x)$ и $Q(y)$ — главные квазиидеалы, см. п. 2.6). Ч. у. множество $S/\mathcal{J}$ [$S/\mathcal{L}$, $S/\mathcal{R}$, $S/\mathcal{H}$] назовем $\mathcal{J}$- [$\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{H}$-] *остовом* полугруппы S; $\mathcal{J}$-остов называют также просто *остовом*; $\mathcal{L}$- [$\mathcal{R}$-] остов естественно назвать *левым* [*правым*] *остовом*. В полугруппе $\mathcal{T}(X)$ [$\mathrm{End}_F V$] остов представляет собой цепь, мощность которой равна $|X|$ [равна $\dim V + 1$, если $\dim V$ конечна, и равна $\dim V$, если $\dim V$ бесконечна]. Остов произвольной полугруппы является, очевидно, направленным вниз ч. у. множеством. Обратно, любое направленное вниз ч. у. множество изоморфно остову подходящей полугруппы S, причем S может быть выбрана комбинаторной вполне полупростой (см. п. 3.1) инверсной (Ash C. J.//J. Austral Math. Soc. — 1979. — V. 28. — P. 385—397; Meakin J.//J. London Math Soc. — 1980. — V. 21. — P. 244—256). Для конечного ч. у. множества направленность вниз эквивалентна наличию наименьшего элемента, всякое такое конечное ч. у. множество изоморфно остову подходящей конечной (причем даже комбинаторной инверсной) полугруппы (H a l l T. E.//Semigroup Forum, — 1973. — V. 6, № 3. — P. 263—264).

Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) для любого $\mathcal{J}$-класса содержащаяся в нем часть левого [правого] остова имеет минимальный элемент (это условие обычно обозначают через M_L^* [через M_R^*]); (2) содержащаяся в любом $\mathcal{J}$-классе часть левого [правого] остова есть антицепь; (3) для любых $a, b \in S$ из $a \in Sab$ $[a \in baS]$ следует $L(a) = L(ab)$ $[R(a) = R(ba)]$. Полугруппу, удовлетворяющую этим условиям, называют *устойчивой слева* [*справа*]. Полугруппа называется *устойчивой*, если она устойчива слева и справа; для регулярных полугрупп устойчивость слева эквивалентна устойчивости справа (о таких полугруппах см. в конце п. 3.1). В любой устойчивой полугруппе $\mathcal{J} = \mathcal{D}$. Если левый и правый остовы удовлетворяют условию минимальности, то и остов удовлетворяет условию минимальности; в остальном эти три условия минимальности независимы, см. соответствующую информацию в [18], § 6.6. Через Min_J [Min_L, Min_R, Min_H] обозначим условие минимальности для остова [левого остова, правого остова, $\mathcal{H}$-остова]; эти условия обозначают также M_J, M_L, M_R, M_H. Через Ep [через St] обозначим свойство быть эпигруппой [устойчивой полугруппой]. Следующие четыре конъюнкции эквивалентны (запишем это равенствами):

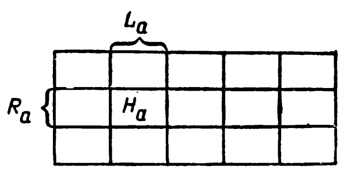
$$\mathrm{Min}_L \,\&\, \mathrm{Min}_R = \mathrm{Min}_J \,\&\, \mathrm{Min}_H = \mathrm{Min}_J \,\&\, \mathrm{Ep} = \mathrm{Min}_J \,\&\, \mathrm{St}.$$

Полная картина взаимоотношений между упомянутыми условиями и их конъюнкциями изображена на диаграмме



Для регулярной полугруппы S условия Min_L, Min_R и Min_H эквивалентны друг другу и эквивалентны условию минимальности для множества E_S. Если S вполне полупроста, то эти условия эквивалентны также условию M_J (см. Hall T. E., Munn W. D.//Glasgow Math. J. — 1979. — V. 20 — P. 133—140).

Для любых элементов a, b полугруппы S и любых x, $y \in S^1$ имеет место $L_{xa} \leqslant L_a$, $R_{ax} \leqslant R_a$, $J_{xay} \leqslant J_a$; если $L_a \leqslant L_b$ или $R_a \leqslant R_b$, то $J_a \leqslant J_b$; $L_a R_b \subseteq D_{ab}$; $L_a \cap R_b \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $D_a = D_b$, т. е. $\mathcal{L}$-класс и $\mathcal{R}$-класс пересекаются тогда и только тогда, когда они лежат в одном $\mathcal{D}$-классе. Любые два $\mathcal{L}$- [$\mathcal{R}$-, $\mathcal{H}$-] класса, лежащие в одном $\mathcal{D}$-классе, равномощны (уточнение этого свойства в терминах сдвигов см. в п. 4.2). Произвольный $\mathcal{D}$-класс наглядно может быть представлен в виде прямоугольной таблицы (так называемой *egg-box-картины* или *egg-box-диаграммы*),



где строки изображают $\mathcal{R}$-классы, столбцы — $\mathcal{L}$-классы, клетки — $\mathcal{H}$-классы. Следующие условия для $\mathcal{H}$-класса H полугруппы S эквивалентны: (1) $H^2 \cap H \neq \varnothing$; (2) H содержит идемпотент; (3) H есть группа (максимальная подгруппа из S). При этих условиях H называют *групповым* $\mathcal{H}$-классом. Таким образом, каждый $\mathcal{H}$-класс содержит не более одного идемпотента, и максимальные подгруппы — это в точности $\mathcal{H}$-классы, содержащие идемпотенты. Любая конгруэнция на полугруппе S, содержащаяся в $\mathcal{H}$, разделяет идемпотенты; если S регулярна, то справедливо обратное, и тогда $\mathcal{H}^\flat$ (см. п. 2.2) — наибольшая конгруэнция, разделяющая идемпотенты.

В полугруппах $\mathcal{T}(X)$ и $\mathrm{End}_F V$ $\mathcal{H}$-классы вычисляются следующим образом (см., например, [22], гл. 2, § 4). Любой $\mathcal{H}$-класс H из $\mathcal{T}(X)$, лежащий в $\mathcal{J}$-классе ранга $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} \leqslant |X|$), однозначно определяется эквивалентностью π на X такой, что $|X/\pi| = \mathfrak{m}$, и подмножеством Y из X таким, что $|Y| = \mathfrak{m}$:

$$H = H(\pi, Y) \underset{\mathrm{def}}{=} \{\alpha \in \mathcal{T}(X) \mid \ker \alpha = \pi \text{ и } X\alpha = Y\}.$$

Класс $H(\pi, Y)$ будет групповым тогда и только тогда, когда Y содержит в точности один элемент из каждого π-класса; в этом случае группа $H(\pi, Y)$ изоморфна симметрической группе $\mathcal{G}(Y)$. Любой $\mathcal{H}$-класс H из $\mathrm{End}_F V$, лежащий в $\mathcal{J}$-классе ранга $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} \leqslant \dim V$), однозначно определяется подпространствами A и B такими, что $\dim(V/A) = \mathfrak{m} = \dim B$:

$$H = H(A, B) \underset{\mathrm{def}}{=} \{\alpha \in \mathrm{End}_F V \mid \ker \alpha = A \text{ и } V\alpha = B\}.$$

Класс $H(A, B)$ будет групповым тогда и только тогда, когда $V = A \oplus B$; в этом случае группа $H(A, B)$ изоморфна общей линейной группе $GL(B, F)$. Как только что отмечено, максимальные подгруппы в симметрической полугруппе $\mathcal{T}(X)$ изоморфны симметрическим группам на подмножествах из X; то же самое верно относительно максимальных подгрупп в полугруппах $\mathcal{PT}(X)$ и $\mathcal{I}(X)$. Интересно отметить, что ситуация в полугруппе $\mathcal{B}(X)$ не только не аналогична, но полностью контрастирует с таковой для $\mathcal{T}(X)$, $\mathcal{PT}(X)$ и $\mathcal{I}(X)$: любая группа G изоморфна некоторой максимальной подгруппе полугруппы всех бинарных отношений на подходящем множестве X; если при этом G конечна [счетна], то и X можно взять конечным [счетным] (Montague J. S., Plemmons R. J.//J. Algebra. — 1969. — V. 13. — P. 575—587).

Следующие условия для $\mathcal{D}$-класса D эквивалентны: (1) D содержит идемпотент; (2) D содержит регулярный элемент; (3) все элементы из D регулярны. При этих условиях D называют *регулярным* $\mathcal{D}$-классом. Если D — регулярный $\mathcal{D}$-класс, то: 1) каждый $\mathcal{L}$- [$\mathcal{R}$-]класс из D содержит идемпотент, причем любой идемпотент e является правой [левой] единицей для элементов из L_e [из R_e]; 2) вместе с любым своим элементом D содержит и все инверсные к нему элементы; 3) если a' — инверсный элемент к элементу $a \in D$, то $\mathcal{H}$-классы $R_a \cap L_{a'}$ и $L_a \cap R_{a'}$ содержат соответственно идемпотенты aa' и $a'a$ и, с другой стороны, если элемент b таков, что $R_a \cap L_b$ и $L_a \cap R_b$ содержат идемпотенты e и f соответственно, то в H_b существует инверсный к a элемент b', для которого $ab' = e$, $b'a = f$; 4) все групповые $\mathcal{H}$-классы из D суть изоморфные группы. Из 3) следует, что идемпотенты e, f полугруппы S будут $\mathcal{D}$-эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие взаимно инверсные элементы a и a', что $e = aa'$, $f = a'a$. Если $e\mathcal{D}f$, то $eSe \simeq fSf$ (см. [65], с. 121). Для любых $a, b \in S$ включение $ab \in R_a \cap L_b$ имеет место тогда и только тогда, когда $R_b \cap L_a$ содержит идемпотент; в этом случае

$$aH_b = H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b.$$

Полугруппа S инверсна тогда и только тогда, когда в ней каждый $\mathscr{L}$-класс и каждый $\mathscr{R}$-класс содержит единственный идемпотент. Для $\mathscr{D}$-класса D инверсной полугруппы множества содержащихся в нем $\mathscr{L}$-классов и $\mathscr{R}$-классов равномощны, так что в egg-box-диаграмме «прямоугольник» $\mathscr{H}$-классов является «квадратом», $\mathscr{L}$- и $\mathscr{R}$-классы можно считать расположенными так, что групповые $\mathscr{H}$-классы идут по главной диагонали, при этом для любого $a \in D$ $\mathscr{H}$-класс $H_{a^{-1}}$ расположен симметрично к H_a относительно главной диагонали.

Приведенное выше утверждение 4) может быть распространено и на нерегулярные $\mathscr{D}$-классы: произвольному $\mathscr{H}$-классу H можно сопоставить некую группу $\Gamma(H)$ так, что для любых $\mathscr{H}$-классов H_a и H_b из одного и того же $\mathscr{D}$-класса имеет место $\Gamma(H_a) \simeq \Gamma(H_b)$, причем если H есть групповой $\mathscr{H}$-класс, то $\Gamma(H) \simeq H$. Группа $\Gamma(H)$ определяется в терминах сдвигов, см. п. 4.2.

Если T — подполугруппа полугруппы S, то, сохраняя обозначения отношений Грина на S, обозначим через $\mathscr{L}_T$, $\mathscr{R}_T$ и т. д. отношения Грина на T. Тогда выполнены очевидные включения $\mathscr{L}_T \subseteq \mathscr{L} \cap \nabla_T$, $\mathscr{R}_T \subseteq \mathscr{R} \cap \nabla_T$ и т. д.; причем все включения могут быть строгими; например, если $S = (\mathbf{Z}, +)$, а $T = (\mathbf{N}, +)$, то $\mathscr{L} = \mathscr{R} = \mathscr{J} = \mathscr{D} = \mathscr{H} = \nabla_S$, т. е. $\mathscr{L} \cap \nabla_T = \ldots = \nabla_T$, но $\mathscr{L}_T = \mathscr{R}_T = \mathscr{J}_T = \mathscr{D}_T = \mathscr{H}_T = \Delta_T$. Если же T — регулярная подполугруппа в S, то $\mathscr{L}_T = \mathscr{L} \cap \nabla_T$, $\mathscr{R}_T = \mathscr{R} \cap \nabla_T$, $\mathscr{H}_T = \mathscr{H} \cap \nabla_T$, но остальные два включения могут быть строгими.

Дополнительную информацию об отношениях Грина см., например, в [18], [22], [4], гл. 7.

§ 3. Простые полугруппы

3.1. Основные понятия и свойства. Для полугрупп, в отличие, скажем, от групп, имеется несколько вариантов определения понятия простоты. Все они объединяются требованием отсутствия собственных идеалов или конгруэнций того или иного фиксированного типа; в зависимости от рассматриваемого типа возникают соответствующие типы простых полугрупп. Полугруппа называется *идеально простой* (или, без наречия, *простой*), если она не содержит собственных (двусторонних) идеалов. Полугруппа называется *простой слева* [*справа*], если она не содержит собственных левых [правых] идеалов. Для полугрупп с нулем упомянутые понятия бессодержательны, здесь нужно иметь дело с ненулевыми идеалами. Если полугруппа $S = S^0$ не содержит ненулевых идеалов, то либо $S^2 = S$, либо S есть двухэлементная полугруппа с нулевым умножением. Полугруппа $S = S^0$ называется *0-простой* [*0-простой слева*, *0-простой справа*], если $S^2 \neq 0$ и S не содержит ненулевых двусторонних [левых, правых] идеалов. Полугруппа $S = S^0$ будет 0-простой тогда и только тогда, когда $SaS = S$ для любого ненулевого элемента $a \in S$. Если к простой слева полугруппе присоединить 0, то получится 0-простая слева полугруппа; обратно, если $S = S^0$ есть 0-простая слева полугруппа, то $S \setminus \{0\}$ будет простой слева подполугруппой в S. Таким образом, рассмотрения обоих типов полугрупп полностью параллельны и достаточно изучать только простые слева полугруппы. То же, конечно, относится к простым справа и 0-простым справа полугруппам.

Присоединение нуля к идеально простой полугруппе дает 0-простую полугруппу, но полного параллелизма, аналогичного одностороннему случаю, здесь нет, так как в 0-простой полугруппе S множество $S \setminus \{0\}$ вовсе не обязательно является подполугруппой ($S \setminus \{0\}$ будет подполугруппой тогда и, очевидно, только тогда, когда $\operatorname{Nil} S = 0$); эти отличия уже проявились при рассмотрении 0-минимальных идеалов в п. 2.6. Тем не менее, утверждения о 0-простых полугруппах, как правило, влекут за собой в качестве непосредственных следствий аналогичные утверждения об идеально простых полугруппах. Поэтому определяющее внимание к 0-простым полугруппам оправданно, хотя в ряде случаев аналогичные утверждения для идеально простых полугрупп звучат более изящно.

Полугруппа S называется *бипростой* [*0-бипростой*], если S имеет единственный $\mathscr{D}$-класс, т. е. $\mathscr{D} = \nabla$ [имеет два $\mathscr{D}$-класса, один из которых нулевой]. Полугруппа называется *конгруэнц-простой* (или *конгруэнц-свободной*), если ее конгруэнции исчерпываются отношениями Δ и ∇; конгруэнц-простые полугруппы называют иногда просто *простыми*. Всякая простая слева [справа] полугруппа бипроста. Бипростые и конгруэнц-простые полугруппы идеально просты, однако существуют идеально простые полугруппы, не только не являющиеся бипростыми, но даже такие, что $\mathscr{D} = \Delta$ (см. пример на множестве $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$

в п. 2.7). Существуют идеально простые инверсные полугруппы с произвольным числом $\mathcal{D}$-классов (см. п. 5.1). Любая полугруппа S вложима в идеально простой и даже в (необходимо регулярный) бипростой моноид M, причем если S инверсна, то и M можно выбрать инверсным (см. [18], § 8.5, 8.6; одну из конструкций, обеспечивающих вложение в идеально простой моноид, см. в п. 5.1). Любая полугруппа вложима в бипростую идемпотентно порожденную полугруппу (см. [65], § 5). Любая [инверсная] полугруппа вложима в конгруэнц-простую [и инверсную] полугруппу (Бокуть Л. А.//Сиб. мат. ж. — 1963. — Т. 4, № 3. — С. 500—518 — для случая полугрупп; Шутов Э. Г.//Мат. сб. — 1963. — Т. 62, № 4. — С. 496—511 — для обоих случаев; см. также п. 4.6, где говорится о вложимости в полные полугруппы).

Группы, и только они, суть полугруппы, простые слева и справа, всякая 0-группа 0-бипроста. Поэтому конструкции, возникающие при описании простых полугрупп ряда типов, часто включают в качестве одного из «блоков» группу или 0-группу — особенно при наличии идемпотентов в описываемых полугруппах; примеры такого сорта ниже встретятся не раз. Случай полугрупп без идемпотентов имеет, как правило, заметную специфику.

Важнейшим типом идеально простых [0-простых] полугрупп являются *вполне* [0-]*простые* полугруппы, определяемые как идеально простые [0-простые] полугруппы, содержащие примитивный идемпотент. Присоединение нуля к вполне простой полугруппе дает вполне 0-простую полугруппу, и о взаимоотношениях вполне простых и вполне 0-простых полугрупп можно сказать то же, что выше сказано о произвольных идеально простых и 0-простых полугруппах. Все идемпотенты вполне 0-простой полугруппы примитивны. Минимальным примером вполне 0-простой полугруппы с делителями нуля является пятиэлементная полугруппа матричных единиц B_2 (см. п. 2.4). Этот пример следующим образом естественно обобщается на случай матричных единиц любого размера. Для произвольного множества I положим $B(I) = I \times I \cup \{0\}$ и зададим на $B(I)$ умножение правилом

$$(i, j) \cdot (k, l) = \begin{cases} (i, l), & \text{если } j = k; \\ 0, & \text{если } j \neq k; \end{cases}$$

$$0 \cdot (i, j) = (i, j) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Тогда $B(I)$ превращается в полугруппу, называемую *полугруппой $I \times I$-матричных единиц*; она вполне 0-проста (и инверсна), а при $|I| > 1$ всякий ее ненулевой элемент является делителем нуля. Если $|I| = n$, то $B(I)$ обычно обозначают через B_n. Полугруппа $B(I)$ является частным случаем *полугруппы Брандта*, определяемой как полугруппа $S = S^0$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) каждому ненулевому элементу $a \in S$ соответствуют такие однозначно определенные элементы e, f и a^{-1} из S, что $ea = af = a$, $a^{-1}a = f$; 2) для любых двух ненулевых идемпотентов e, $f \in S$ имеет место $eSf \neq 0$. Указанные в аксиоме 1) элементы e и f будут идемпотентами, причем $fa^{-1} = a^{-1}e = a^{-1}$ и $aa^{-1} = e$. Кроме того, полугруппа Брандта удовлетворяет слабому закону сокращения и является категорийной в нуле. Частичный группоид, получающийся выкидыванием нуля из полугруппы Брандта, называется *группоидом Брандта*. Полугруппы Брандта — это в точности вполне 0-простые инверсные полугруппы. Об их представлении рисовскими матричными полугруппами см. в п. 3.2. Вполне [0-] простые моноиды — это в точности [0-] группы.

Для любого идеала $\mathcal{T}_n(X)$ (см. п. 2.6) симметрической полугруппы $\mathcal{T}(X)$, где n — натуральное число, $1 < n \leqslant |X|$, факторполугруппа $\mathcal{T}_{n-1}(X)/\mathcal{T}_n(X)$ вполне 0-проста. Еще одним важным примером вполне 0-простых полугрупп является подполугруппа всех эндоморфизмов ранга $\leqslant 1$ в полугруппе $\mathrm{End}_F V$ эндоморфизмов линейного пространства V над полем F (см. [22], гл. 3, п. 3.4).

Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S вполне [0-] проста; (2) S идеально простая [0-простая] эпигруппа; (3) S идеально проста [0-проста] и обладает [0-] минимальными левыми и правыми идеалами; (4) S идеально проста [0-проста], обладает [0-] минимальным левым или правым идеалом и содержит [ненулевой] идемпотент. Всякая вполне [0-] простая полугруппа S регулярна, [0-] бипроста и является объединением своих [0-] минимальных как левых (имеющих вид Se), так и правых (имеющих вид eS) идеалов, $e \in E_S \setminus \{0\}$. Если $\{H_{i\lambda}\}_{i \in I,\, \lambda \in \Lambda}$ — прямоугольник $\mathcal{H}$-классов из $\mathcal{D}$-класса $S \setminus \{0\}$ вполне 0-простой полугруппы S, то в каждой его строке ($\mathcal{R}$-классе) и в каждом столбце ($\mathcal{L}$-классе) есть хотя бы один групповой $\mathcal{H}$-класс, для каждого негруппового класса $H_{i\lambda}$ имеет место $H_{i\lambda}^2=0$, для любых $i,\ j\in I$ и $\lambda,\ \mu\in\Lambda$

$$H_{i\lambda}H_{j\mu}=\begin{cases}0, & \text{если } ab=0 \text{ хотя бы для одной} \\ & \text{пары элементов } a\in H_{i\lambda},\quad b\in H_{j\mu}, \\ H_{i\mu} & \text{— в противном случае,}\end{cases}$$

в любом случае для $a, b\in S$ имеет место $H_aH_b = H_{ab}$; множества $L_\lambda=\left(\bigcup\limits_{i\in I}H_{i\lambda}\right)\cup\{0\}$, $\lambda\in\Lambda$ $\left[R_i=\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}H_{i\lambda}\right)\cup\{0\},\ i\in I\right]$ — суть в точности 0-минимальные левые [правые] идеалы из S. О вполне [0-]простых полугруппах см. [18], § 2.7, 3.1—3.4; [22], гл. 3, § 1, 2; [24], гл. V, § 4—6. Строение вполне [0-]простых полугрупп в терминах рисовских матричных полугрупп описывает классический результат теории полугрупп, называемый теоремой Риса — Сушкевича, см. п. 3.2.

Свойство полугруппы S быть вполне простой эквивалентно, кроме соответствующих версий вышеприведенных условий (2) — (4), каждому из условий: (5) S есть прямоугольная связка (необходимо изоморфных друг другу) групп; (6) S регулярна и все ее идемпотенты примитивны. В силу (5) всякая вполне простая полугруппа клиффордова. Класс всех простых полугрупп, рассматриваемых как унарные полугруппы, является подмногообразием многообразия клиффордовых полугрупп, выделяемым тождеством $xyx(xyx)^{-1}=xx^{-1}$ (которое можно записать и в виде $(xyx)^0=x^0$, см. п. 2.1). Одна из конструкций для свободных вполне простых полугрупп приведена в п. 5.3. Полугруппы, в которых все подполугруппы совпадают со своими идеализаторами, — это в точности периодические вполне простые полугруппы. Идеально (и, автоматически, вполне) простые полугруппы идемпотентов — это в точности прямоугольные полугруппы.

Простые справа [слева] полугруппы, по причинам, ясным из соответствующих определений п. 2.6, называют также *полугруппами с правым* [*левым*] *делением* и *полугруппами с правой* [*левой*] *обратимостью*. Полугруппа S называется *правой* [*левой*] *группой*, если для любых $a,\ b\in S$ существует единственный элемент x такой, что $ax=b$ $[xa=b]$. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S есть правая группа; (2) S проста справа и содержит идемпотент; (3) S проста справа и удовлетворяет левому закону сокращения; (4) S регулярна и удовлетворяет левому закону сокращения; (5) S вполне проста и E_S есть правосингулярная полугруппа; (6) S есть левая связка (необходимо изоморфных) групп; (7) $S \simeq G \times R$, где G — группа, R — правосингулярная полугруппа. Верно, разумеется, и двойственное утверждение. Всякая вполне простая полугруппа является правой [левой] связкой (необходимо изоморфных) правых [левых] групп.

Дальнейшее рассмотрение односторонне простых полугрупп проводится ради определенности для правостороннего случая. Условия (5)—(7) выше показывают, что простые справа полугруппы с идемпотентами составляют подкласс класса вполне простых полугрупп и имеют очень ясную структуру. Для простых справа полугрупп без идемпотентов подобных структурных характеризаций нет, хотя в классе таких полугрупп имеются описанные ниже универсальные (по вложимости) полугруппы. Через $T(X, \delta, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ обозначим полугруппу всех таких преобразований $\varphi \in \mathcal{T}(X)$, что: 1) δ — эквивалентность на X и $\ker \varphi = \delta$, 2) $|X/\delta| = \mathfrak{m}$, 3) множество $X\varphi$ пересекается с каждым δ-классом не более чем по одному элементу, 4) множество δ-классов, не пересекающихся с $X\varphi$, имеет мощность $\mathfrak{n}$, причем $\mathfrak{n}$ бесконечна и $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$. Полугруппа $T(X, \delta, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ называется *полугруппой Тессье* типа $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$; в случае, когда δ есть отношение равенства, она называется *полугруппой Бэра — Леви* типа $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$. Всякая полугруппа Тессье проста справа и не имеет идемпотентов, а всякая полугруппа Бэра — Леви будет к тому же полугруппой с правым сокращением. Любая простая справа полугруппа S без идемпотентов [и с правым сокращением] вложима в подходящую полугруппу Тессье [Бэра — Леви], причем можно выбрать $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} = |S|$. Вообще же полугруппа S вложима в простую справа полугруппу без идемпотентов [удовлетворяющую дополнительно правому закону сокращения] тогда и, очевидно, только тогда, когда S без идемпотентов и из равенства $ac = bc$ $(a, b, c \in S)$ всегда следует $ax = bx$ для всех $x \in S$ [и удовлетворяет правому закону сокращения]. Об односторонне простых полугруппах см. [18], § 8.1, 8.2; [24], гл. VI, § 3.

Более широкий класс, нежели класс простых справа полугрупп без идемпотентов, составляют идеально простые полугруппы без идемпотентов, содержащие минимальные правые идеалы; в этом классе также есть хорошо обозримые универсальные полугруппы — так называемые *полугруппы Круазо — Тессье* (см. [18], § 8.2).

Односторонне простые полугруппы без идемпотентов являют собой один из типичных представителей класса бипростых, но не вполне простых полугрупп. Другие типичные представители этого класса, уже наделенные идемпотентами, — бициклическая и четырехспиральная полугруппа (см. п. 2.6). Обе они в некотором смысле минимальны среди бипростых, но не вполне простых полугрупп. Так, для любого идемпотента e идеально простой [0-простой], но не вполне [0-] простой полугруппы S существует бициклическая подполугруппа из S, в которой e является единицей. Последовательность идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ некоторой полугруппы называется *E-ломаной* (или *E-цепью*), если $e_i(\mathcal{L} \cup \mathcal{R})e_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. В бипростой идемпотентно порожденной полугруппе любые два идемпотента связаны некоторой E-ломаной, причем если они сравнимы в смысле естественного частичного порядка, то длина такой ломаной $\geqslant 4$; в полугруппе Sp_4 указанная длина для некоторых (на самом деле для бесконечного множества) пар идемпотентов достигает минимума. Как уже отмечалось, E_{Sp_4} есть кардинальная сумма четырех цепей, упорядоченных по типу отрицательных чисел; если S — произвольная бипростая, но не вполне простая полугруппа, порожденная конечным числом идемпотентов и такая, что E_S есть кардинальная сумма цепей, вполне упорядоченных по убыванию, то S содержит подполугруппу, изоморфную Sp_4. Более подробную информацию о четырехспиральной полугруппе см. в [65], § 5.

Как видно из упомянутых выше теорем вложения, локальное строение конгруэнц-простых полугрупп может быть сколь угодно сложным. Дополнительная особенность состоит здесь в том, что, в отличие от рассмотренных выше типов простоты, классу конгруэнц-простых полугрупп принадлежат не все (а лишь простые) группы. Для полугрупп с нулем ситуация значительно проясняется (Глускин Л. М.//Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 103, № 1. — С. 5—8): полугруппа $S = S^0$ будет конгруэнц-простой тогда и только тогда, когда она 0-проста и для любых различных элементов a, $b \in S$ существуют x, $y \in S$ такие, что выполнено одно и только одно из равенств $xay = 0$, $xby = 0$. В случае вполне 0-простых полугрупп это приводит к нижеследующему исчерпывающему описанию. Пусть $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ — две мощности, I и Λ — индексные множества, $|I| = \mathfrak{m}$, $|\Lambda| = \mathfrak{n}$, $P = (p_{\lambda i})$ — такая $\Lambda \times I$-матрица из нулей и единиц, в которой нет одинаковых строк и одинаковых столбцов (это связывает кардиналы $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ необходимыми условиями $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{n} \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$) и нет строк и столбцов, состоящих только из нулей. Через $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, P]$ обозначим полугруппу, множество элементов которой есть $(I \times \Lambda) \cup \{0\}$, а умножение задается правилом:

$$(i, \lambda) \cdot (j, \mu) = \begin{cases} (i, \mu), & \text{если } p_{\lambda j} = 1, \\ 0, & \text{если } p_{\lambda j} = 0; \end{cases}$$
$$0 \cdot (i, \lambda) = (i, \lambda) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Вполне 0-простая полугруппа будет конгруэнц-простой тогда и только тогда, когда она изоморфна некоторой полугруппе $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, P]$. Отметим, что полугруппа $I \times I$-матричных единиц является частным случаем полугруппы $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, P]$ — когда $I = \Lambda$ и P есть единичная $I \times I$-матрица. Описание конечных конгруэнц-простых полугрупп полностью редуцируется к группам. Прежде всего, любая полугруппа порядка $\leqslant 2$ конгруэнц-проста (пять двухэлементных полугрупп были перечислены в п. 2.5); если полугруппа S конечна и $|S| > 2$, то S будет конгруэнц-простой тогда и только тогда, когда S либо простая группа, либо изоморфна полугруппе $[m, n, P]$ для некоторых m, n (необходимо таких, что $1 < m < 2^n$, $1 < n < 2^m$). Таким образом, порядок конечной простой полугруппы с нулем — число вида $mn + 1$, где $m > 1$, $n > 1$. Существует бесконечно много натуральных чисел k таких, что k не может быть порядком конечной конгруэнц-простой полугруппы. В отличие от групп, не всякая конечная полугруппа S вложима в конечную конгруэнц-простую полугруппу; такое вложение возможно тогда и только тогда, когда S будет полугруппой одного из трех типов: 1) группа, 2) прямоугольная полугруппа, 3) полугруппа с нулем, категорийная в нуле и такая, что если λ [соответственно ρ] есть эквивалентность на $S\setminus\{0\}$, порожденная отношением $|_l$ [отношением $|_r$], то $\lambda\cap\rho=\Delta_{S\setminus\{0\}}$ (Munn W. D.// Semigroup Forum. — 1972. — Т. 4, № 1. — С. 46—60). Об инверсных конгруэнц-простых полугруппах см. п. 5.2.

Как и в теории групп, идеология использования простых (в первую очередь, идеально простых и 0-простых) полугрупп основывается на том, что многие полугруппы оказываются так или иначе «собранными» из простых полугрупп некоторых типов. Например, если полугруппа S обладает главным рядом $I_1\lhd I_2\lhd\ldots$ $\ldots\lhd I_n=S$, то I_1, будучи ядром S, есть идеально простая полугруппа, а каждый из остальных факторов I_{k+1}/I_k либо 0-прост, либо есть полугруппа с нулевым умножением.

Если x — произвольный элемент полугруппы S, то множество $N(x)=J(x)\setminus J_x$, если оно непусто, является наибольшим идеалом из S, содержащимся в $J(x)$. Факторполугруппа $J(x)/N(x)$ (или просто $J(x)=J_x$, если $N(x)=\varnothing$) называется *главным фактором* полугруппы S. Если S имеет главный ряд, то главные факторы S с точностью до изоморфизма исчерпываются факторами любого ее главного ряда. Каждый главный фактор либо идеально прост (такой фактор, если он имеется, единствен и совпадает с ядром полугруппы), либо 0-прост, либо есть полугруппа с нулевым умножением. Если главных факторов последнего типа нет, то полугруппа называется *полупростой*. Полугруппа полупроста тогда и только тогда, когда все ее идеалы глобально идемпотентны. В частности, всякая регулярная полугруппа полупроста. Полугруппа S называется *вполне полупростой*, если каждый ее главный фактор либо вполне прост (если это ядро S), либо вполне 0-прост. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S вполне полупроста; (2) S регулярна и устойчива (см. п. 2.7); (3) S регулярна и для любого ее $\mathscr{D}$-класса D множество $E_S\cap D$ есть антицепь (относительно естественного частичного порядка); (4) S регулярна и не содержит бициклической подполугруппы. Примером регулярной, но не вполне полупростой полугруппы служит полугруппа $\mathscr{T}(X)$ при бесконечном X (см. [18], т. 2, с. 50). О главных факторах см. [18], § 2.6, о вполне полупростых полугруппах — [18], § 6.6; [75], гл. II.

3.2. Рисовские матричные полугруппы над группой или группой с нулем. Теорема Риса — Сушкевича. Если T — полугруппа с нулем, то в рисовской матричной полугруппе $M=\mathscr{M}[T; I, \Lambda; P]$ (см. п. 2.3) множество $Z=\{(i, 0, \lambda) \mid i \in I, \ \lambda \in \Lambda\}$ есть идеал, и факторполугруппу M/Z принято обозначать $\mathscr{M}^0[T; I, \Lambda; P]$ (напомним, что наряду с квадратными скобками в этом обозначении пользуются и круглыми скобками). Другое полезное представление полугруппы $\mathscr{M}^0[T; I, \Lambda; P]$ над полугруппой $T=T^0$ осуществляется следующим образом. Произвольную $I\times\Lambda$-матрицу над T называют *матрицей Риса*, если она содержит не более одного ненулевого элемента. Через $(t)_{i\lambda}$ обозначим матрицу Риса над T, у которой в i-й строке и λ-м столбце стоит t, а на остальных местах — нули. Через P по-прежнему обозначается $\Lambda\times I$-матрица над T. На множестве всех $I\times\Lambda$-матриц Риса над T зададим операцию $\circ$ формулой

$$A\circ B=APB, \qquad (*)$$

где в правой части — обычное матричное умножение, очевидно, всегда определенное в силу определения матриц Риса. Относительно этой операции указанное множество образует полугруппу. Отображение $(t)_{i\lambda}\longmapsto(i, t, \lambda)$ является изоморфизмом построенной полугруппы на полугруппу $\mathscr{M}^0[T; I, \Lambda; P]$; обозначение $\mathscr{M}^0[T; I, \Lambda; P]$ применяется для обеих этих полугрупп Формула $(*)$ объясняет термин «сэндвич-матрица» для P. В случае, когда T есть 0-группа G^0, вместо $\mathscr{M}^0[G^0; I, \Lambda; P]$ пишут $\mathscr{M}^0[G; I, \Lambda; P]$. Полугруппу $\mathscr{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ называют *рисовской матричной полугруппой над 0-группой G^0 (с сэндвич-матрицей P)*. Для полугрупп $\mathscr{M}[G; I, \Lambda; P]$ и $\mathscr{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ группу G называют *структурной группой.* Матрицу P называют *регулярной*, если каждая ее строка и каждый столбец содержит ненулевой элемент. Полугруппа $\mathscr{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ над 0-группой будет регулярной тогда и только тогда, когда матрица P регулярна.

Если G — группа, то всякая полугруппа $\mathscr{M}[G; I, \Lambda; P]$ вполне проста, всякая регулярная полугруппа $\mathscr{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ вполне 0-проста. Обратно, всякая вполне [0-]простая полугруппа изоморфна некоторой [регулярной] рисовской матричной полугруппе над группой [над 0-группой]. Сформулированные взаимно обратные утверждения и составляют *теорему Риса-Сушкевича* (называемую иногда также теоремой Риса).

Конструкция рисовской матричной полугруппы является очень удобным инструментом для изучения всевозможных свойств вполне [0]-простых полугрупп. При этом, в соответствии с замечанием о взаимоотношениях свойств вполне 0-простых и вполне простых полугрупп (см. п. 3.1), для многих свойств рисовских матричных полугрупп над группой и над 0-группой существует параллелизм, позволяющий формулировать их только для случая полугруппы $\mathscr{M}^0[G;\ I,\ \Lambda;\ P]$. В самом деле, если в такой полугруппе сэндвич-матрица P не содержит нулей, то $\mathscr{M}^0[G;\ I,\ \Lambda;\ P]\setminus\{0\} = \mathscr{M}[G;\ I,\ \Lambda;\ P]$, и наоборот, присоединяя нуль к $\mathscr{M}[G;\ I,\ \Lambda;\ P]$, мы получим рисовскую матричную полугруппу над 0-группой G^0. Однако утверждения для рисовских матричных полугрупп над группой формулируются, как правило, несколько проще из-за отсутствия необходимости учитывать влияние нулей в сэндвич-матрице P. Вместе с тем, есть специфические свойства полугруппы $\mathscr{M}^0[G;\ I,\ \Lambda;\ P]$, не имеющие аналогов для рисовских полугрупп над группой.

Полугруппа S тогда и только тогда будет полугруппой Брандта, когда S изоморфна такой рисовской матричной полугруппе над 0-группой G^0, что индексные множества I и Λ равномощны, а сэндвич-матрица, если считать $I=\Lambda$, единична, т. е. имеет вид (δ_{ij}), где $\delta_{ij}=\begin{cases} e, & \text{если } i=j,\\ 0, & \text{если } i\neq j,\end{cases}$ а e — единица группы G. Обозначим единичную $I\times\Lambda$-матрицу через Δ (это мнемонически согласуется с обозначением той же буквой отношения равенства: Δ как булева матрица соответствует именно отношению равенства). Тогда последний факт может быть перефразирован так: S будет полугруппой Брандта тогда и только тогда, когда $S\simeq\mathscr{M}^0[G;I,I;\Delta]$ для некоторой группы G и некоторого множества I. Поскольку

$$\mathscr{M}^0[G;\ I,\ I;\ \Delta]\simeq\mathscr{M}^0[G_1;\ I_1,\ I_1;\ \Delta]\Leftrightarrow G\simeq G_1,\ |I|=|I_1|,$$

полугруппа Брандта однозначно, с точностью до изоморфизма, определяется структурной группой G и множеством I (точнее, его мощностью). Это позволяет обозначать соответствующую полугруппу Брандта через $B[G,I]$ или $B[G,\mathfrak{n}]$, где $\mathfrak{n}$ — кардинал. Если группа G единичная, то пользуются еще более коротким обозначением $B_{\mathfrak{n}}$. Полугруппа $B_{\mathfrak{n}}$ — это в точности полугруппа $\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}$-матричных единиц. При $\mathfrak{n}=2$ получаем обсуждавшуюся уже выше полугруппу B_2 (которая не раз встретится и в дальнейших разделах).

Полугруппа A_2, введенная в п. 2.5, изоморфна рисовской полугруппе

$$\mathscr{M}^0\left[\{e\};\ 2,\ 2;\ \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}\right].$$

Полугруппа $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, P]$, введенная в п. 3.1, изоморфна полугруппе $\mathscr{M}^0[\{e\}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, P]$, где сэндвич-матрица P регулярна и не имеет одинаковых строк и одинаковых столбцов.

Пусть M [соответственно $M=M^0$] — [регулярная] рисовская матричная полугруппа с $\Lambda\times I$-сэндвич-матрицей $P=(p_{\lambda i})$ над группой G [0-группой G^0]. Положим

$$R_i=\{(i,\ g,\ \lambda) \mid g\in G,\ \lambda\in\Lambda\},\ L_\lambda=\{(i,\ g,\ \lambda) \mid g\in G,\ i\in I\},$$
$$H_{i\lambda}=R_i\cap L_\lambda.$$

Egg-box-картина для M описывается следующим образом. Множества R_i — это в точности [ненулевые] $\mathscr{R}$-классы полугруппы M [а множества R_i^0 — в точности ее 0-минимальные правые идеалы]. Двойственные утверждения верны для множеств L_λ и L_λ^0. Множества $H_{i\lambda}$ — это в точности [ненулевые] $\mathscr{H}$-классы. $\mathscr{H}$-класс $H_{i\lambda}$ будет групповым тогда и только тогда, когда $p_{\lambda i}\neq 0$; в этом случае единица группы $H_{i\lambda}$ равна $(i,\ p_{\lambda i}^{-1},\ \lambda)$, и отображение $g\mapsto (i,\ gp_{\lambda i}^{-1},\ \lambda)$ есть изоморфизм группы G на $H_{i\lambda}$. Для любых $i, j\in I$, $\lambda,\ \mu\in\Lambda$

$$H_{i\lambda}\cdot H_{j\mu}=\begin{cases} H_{i\mu}, & \text{если } p_{\lambda j}\neq 0,\\ 0, & \text{если } p_{\lambda j}=0.\end{cases}$$

Структурная группа G (с точностью до изоморфизма) и мощности множеств I и Λ являются инвариантами полугруппы M. Что касается сэндвич-матрицы, то при разных матрицах P и Q могут получаться изоморфные рисовские матричные полугруппы. Критерий изоморфности таков: две регулярные полугруппы $\mathscr{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ и $\mathscr{M}^0[\tilde{G};\ \tilde{I},\ \tilde{\Lambda};\ Q]$ изоморфны тогда и только тогда, когда существуют такие изоморфизмы $\theta: G \to \tilde{G}$, биекции $\varphi: I \to \tilde{I}$, $f: \Lambda \to \tilde{\Lambda}$ и семейства $\{u_i\}_{i \in I}$, $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ элементов из $\tilde{G}$, что для любых $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$

$$q_{\lambda f,\, i\varphi} = v_\lambda \cdot p_{i\lambda}\theta \cdot u_i.$$

Сформулированный критерий имеет весьма наглядный смысл. А именно, изоморфные и только изоморфные регулярные рисовские матричные полугруппы получаются друг из друга конечной последовательностью следующих элементарных преобразований (причем достаточно выполнение каждого из них лишь по одному разу): замена структурной группы на изоморфную, перестановка строк и столбцов в сэндвич-матрице, умножение каждой строки сэндвич-матрицы слева на (фиксированный для этой строки) элемент структурной группы, умножение каждого столбца сэндвич-матрицы справа на (фиксированный для этого столбца) элемент структурной группы.

Из приведенного критерия изоморфности вытекает, что любая вполне [0-]простая полугруппа изоморфна такой регулярной рисовской матричной полугруппе над [0-]группой, у которой сэндвич-матрица *нормализована* — это значит, что для фиксированных i_0 и λ_0 каждый элемент λ_0-й строки и i_0-го столбца равен либо 0, либо единице структурной группы. При желании явно указать индексы i_0 и λ_0 говорят о (λ_0, i_0)-нормализованной матрице.

Представление в виде рисовской полугруппы с нормализованной сэндвич-матрицей особенно удобно, так как при нем те или иные утверждения и описания выглядят особенно просто. Приведем для примера описание конгруэнций на полугруппе $\mathscr{M}[G; I, \Lambda; P]$ (оно упоминается в начале § 10.7 из [18], в том же параграфе приводится другое описание конгруэнций на вполне 0-простой полугруппе). Будем считать, что I и Λ имеют общий индекс 1 и матрица $P = (p_{\lambda i})$ $(1, 1)$-нормализована. Пусть N — нормальный делитель группы G. На множестве I [на множестве Λ] введем эквивалентность α_N [β_N] следующим правилом:

$$(i, j) \in \alpha_N \Leftrightarrow Np_{\lambda i} = Np_{\lambda j} \text{ для всех } \lambda \in \Lambda,$$

$$[(\lambda, \mu) \in \beta_N \Leftrightarrow Np_{\lambda i} = Np_{\mu i} \text{ для всех } i \in I].$$

Тогда для любой конгруэнции ρ на $\mathscr{M}[G; I, \Lambda; P]$ существуют такие нормальный делитель N группы G, эквивалентность $\alpha \subseteq \alpha_N$ и эквивалентность $\beta \subseteq \beta_N$, что ρ-классами будут в точности подмножества

$$\alpha(i) \times Ng \times \beta(\lambda), \quad g \in G,\ i \in I,\ \lambda \in \Lambda; \qquad (**)$$

обратно, для любого нормального делителя N из G и любых эквивалентностей $\alpha \subseteq \alpha_N$ и $\beta \subseteq \beta_N$ разбиение полугруппы $\mathscr{M}[G; I, \Lambda; P]$ на подмножества вида (**) определяет конгруэнцию на этой полугруппе.

Теорема Риса — Сушкевича играет в теории полугрупп роль, аналогичную роли теоремы Веддербарна о конечномерных простых ассоциативных алгебрах в теории колец (см. п. III. 2.5). Аналогия эта не только внешняя, здесь имеется и содержательная внутренняя связь; см. по этому поводу начало гл. 3 в [18]. В свою очередь, в теории колец возникло аналогичное понятию рисовской матричной полугруппы понятие рисовского матричного кольца, в терминах которого дана еще одна характеризация простых ассоциативных колец с минимальными идеалами: это в точности кольца, изоморфные рисовским матричным кольцам над телом; см. [73], § II. 2.

§ 4. Разложения и расширения

4.1. Архимедовы полугруппы и полурешеточные разложения. От отношений делимости $|$, $|_l$, $|_r$, $|_t$ (см. п. 2.6) естественно происходят отношения «архимедовой делимости» $\uparrow$, $\uparrow_l$, $\uparrow_r$, $\uparrow_t$: по определению $a \uparrow b$ $[a \uparrow_l b, a \uparrow_r b, a \uparrow_t b]$, если для некоторого натурального n имеет место $a | b^n$ $[a |_l b^n, a |_r b^n, a |_t b^n]$. Полугруппа S называется *архимедовой* [*левоархимедовой* (или *архимедовой слева*), *правоархимедовой* (или *архимедовой справа*), *биархимедовой* (или *t-архимедовой*)], если $\uparrow = \nabla_S$ $[\uparrow_l = \nabla_S, \uparrow_r = \nabla_S, \uparrow_t = \nabla_S]$. Перефразировка определения: S архимедова, если для любых $a, b \in S$ существует такое n, что $b^n \in J(a)$ [и аналогично в трех других вариантах]. Для коммутативных полугрупп разница между четырьмя вариантами архимедовости, разумеется, пропадает. Полугруппа будет архимедовой [левоархимедовой, правоархимедовой, биархимедовой] тогда и только тогда, когда она не содержит собственных изолированных двусторонних [левых, правых, односторонних] идеалов. Таким образом, свойство полугруппы быть архимедовой (в любом из вариантов) можно рассматривать как некий ослабленный вид соответствующей простоты; в частности, всякая идеально [слева, справа] простая полугруппа является архимедовой [левоархимедовой, правоархимедовой], всякая группа есть биархимедова полугруппа. Всякая нильполугруппа биархимедова. Группы и только они суть архимедовы инверсные полугруппы, вполне простые полугруппы и только они суть архимедовы клиффордовы полугруппы. Строение архимедовой полугруппы (в каждом из четырех вариантов архимедовости) определяется тем, содержит или не содержит она идемпотент — и в этом отношении архимедовы полугруппы распадаются на два существенно различающихся класса.

Архимедовы полугруппы с идемпотентами допускают описание, осуществляющее редукцию к идеально простым полугруппам, нильполугруппам и идеальным расширениям. Полугруппа S с непустым множеством E_S архимедова [левоархимедова, правоархимедова] тогда и только тогда, когда S есть нильрасширение идеально простой полугруппы K [левой группы, правой группы]; здесь K — ядро и $K = J(e)$ для любого $e \in E_S$. В двух последних (односторонних) случаях S автоматически будет эпигруппой. В первом же случае S будет эпигруппой тогда и только тогда, когда K вполне проста, и это эквивалентно также тому, что E_S есть антицепь. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S — биархимедова полугруппа с идемпотентом; (2) S — унипотентная эпигруппа; (3) S — нильрасширение группы; (4) S разложима в подпрямое произведение группы и нильполугруппы.

Строение архимедовых полугрупп без идемпотентов труднее поддается изучению. Наибольший прогресс здесь достигнут в коммутативном случае — даны описания в терминах некоторых конструкций. Нижеследующая конструкция описывает архимедовы полугруппы с сокращением и без идемпотентов (см. [18], т. 1, с. 182); такие полугруппы иногда называют *N-полугруппами.* Пусть A — мультипликативная абелева группа, $\psi\colon A \times A \to (\mathbf{N} \cup \{0\}, +)$ — отображение, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $\psi(a, b) = \psi(b, a)$ для любых $a, b \in A$; 2) $\psi(a, b) + \psi(ab, c) = \psi(a, bc) + \psi(b, c)$ для любых $a, b, c \in A$; 3) $\psi(e, e) = 1$, где e — единица группы A; 4) для любого $a \in A$ существует $m > 0$ такое, что $\psi(a^m, a) > 0$. На множестве $S = (\mathbf{N} \cup \{0\}) \times A$ зададим умножение формулой

$$(m, a) \cdot (n, b) = (m + n + \psi(a, b), ab).$$

Тогда S превращается в N-полугруппу; обозначим ее через $S(A, \psi)$. Обратно, любая N-полугруппа изоморфна некоторой полугруппе $S(A, \psi)$. Полугруппа $S(A, \psi)$ будет конечно порожденной тогда и только тогда, когда A конечна.

Полугруппы, разложимые в полурешетку архимедовых полугрупп (и тем самым составляющие мальцевское произведение $\mathscr{A}\mathscr{S}$ класса архимедовых полугрупп $\mathscr{A}$ на класс полурешеток $\mathscr{S}$), будем называть *$\mathscr{A}\mathscr{S}$-полугруппами.* Прямоугольная связка архимедовых полугрупп будет снова архимедовой полугруппой, поэтому (см. в п. 2.3 утверждение о любых связках полугрупп) разложимость полугруппы S в связку архимедовых полугрупп эквивалентна тому, что $S \in \mathscr{A}\mathscr{S}$. Всякая $\mathscr{A}\mathscr{S}$-полугруппа S имеет единственное разложение в полурешетку архимедовых полугрупп; его компоненты называют *архимедовыми компонентами* полугруппы S. Полугруппа S будет $\mathscr{A}\mathscr{S}$-полугруппой тогда и только тогда, когда для любых a, $b \in S$ из того, что $a|b$, следует $a^2 \nmid b$; если при этом S есть эпигруппа, то указанные условия эквивалентны тому, что для любых $a \in S$ и $e \in E_S$ из того, что $a|e$, следует $a^2 \nmid e$ (см. [79], а также [90], гл. I). Другие (структурные) критерии принадлежности эпигруппы классу $\mathscr{A}\mathscr{S}$ см. в п. 6.1. Класс $\mathscr{A}\mathscr{S}$ весьма широк; он содержит все коммутативные полугруппы, а также, более общо, все *медиальные* (с тождеством $uxyv = uyxv$) и, еще более общо, все *экспоненциальные* (с тождествами $(xy)^n = x^n y^n$ для всех n) и все слабо коммутативные полугруппы. (Полугруппа S называется *слабо коммутативной*, если для любых x, $y \in S$ существует n такое, что $(xy)^n \in \in ySx$.) В класс $\mathscr{A}\mathscr{S}$ входят и все клиффордовы полугруппы. А именно, верен следующий основополагающий факт (*теорема Клиффорда*, см., например, [18], теорема 4.6): произвольная клиффордова полугруппа разложима в полурешетку вполне простых полугрупп. Архимедовы компоненты клиффордовой полугруппы называют также *вполне простыми компонентами.* Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S разложима в жесткую полурешетку вполне простых полугрупп; (2) S разложима в нормальную связку групп; (3) S регулярна и разложима в подпрямое произведение вполне простых полугрупп, быть может, с присоединенным нулем (см. [72], § IV. 4).

Элемент a полугруппы называется *регулярным слева* [*справа*], если $a \mathscr{L} a^2$ [$a \mathscr{R} a^2$], что эквивалентно условию $a^2 |_l a$ [$a^2 |_r a$], и называется *интрарегулярным*, если $a \mathscr{J} a^2$, что эквивалентно условию $a^2 | a$. Полугруппа называется *интрарегулярной* [*регулярной* *слева, регулярной справа*], если все ее элементы обладают соответствующим свойством. Клиффордовы полугруппы — это в точности полугруппы, регулярные слева и справа. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны (из односторонних вариантов мы формулируем только один): (1) S интрарегулярна [регулярна справа]; (2) каждый [правый] идеал из S изолирован; (3) S покрывается идеально простыми [простыми справа] полугруппами; (4) каждый $\mathcal{J}$-класс [$\mathcal{R}$-класс] есть подполугруппа; (5) S разложима в полурешетку идеально простых [имеет покрывающую россыпь простых справа] полугрупп. При этих условиях $\mathrm{Pr\,Id}\,S$ есть нижняя полурешетка: для любых $a, b \in S$ имеет место $J(a) \cap J(b) = J(ab)$ (см. [18], § 4.1).

Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S разложима в полурешетку полугрупп с сокращением; (2) S разложима в подпрямое произведение полугрупп с сокращением и, быть может, с присоединенным нулем; (3) S удовлетворяет квазитождествам

$$(x^2 = xy) \,\&\, (y^2 = yx) \to x = y,$$
$$(x^2 = yx) \,\&\, (y^2 = xy) \to x = y$$

(см. [72], § II.6, где полугруппы с условием (3) называются сепаративными). В общем случае условие (3) не эквивалентно сепаративности в смысле п. 1.1 (и полугруппы с этим условием называют также *слабо сократимыми*), но в коммутативном случае оба условия совпадают. Для коммутативной полугруппы S список условий, эквивалентных сепаративности, можно дополнить (см. [18], § 4.3): (1′) архимедовы компоненты S суть полугруппы с сокращением; (4) S имеет покрывающую россыпь из полугрупп с сокращением; (5) S вложима в клиффордову полугруппу; (5′) S вложима в коммутативную клиффордову полугруппу. В этом случае минимальная коммутативная клиффордова полугруппа, содержащая S, вообще говоря, не определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Пример. Пусть $S = (\mathbf{N}, \cdot)$. Тогда S имеет следующее разложение в полурешетку архимедовых полугрупп: $S = \mathrm{semilat}\, N_X$, где $N_X = \{n \in \mathbf{N} \mid X$ совпадает с множеством простых делителей числа $n\}$, а X пробегает множество всех конечных множеств простых чисел, $N_{\varnothing} = \{1\}$. Имеем: S вложима в полугруппу $Q_1 = \operatorname{semilat} G_X$, где G_X есть группа частных для N_X, но S вложима также и в группу Q_2 — мультипликативную группу положительных рациональных чисел. Обе полугруппы Q_1 и Q_2 суть минимальные клиффордовы полугруппы, содержащие S, но, очевидно, $Q_1 \not\cong Q_2$.

Наименьшую полурешеточную конгруэнцию на полугруппе S обозначим η_S или просто η. Имеется целый ряд характеризаций конгруэнции η. Например, $(x, y) \in \eta_S$ тогда и только тогда, когда для любого вполне изолированного идеала I из S выполняется альтернатива: $x, y \in I$ или $x, y \in S \setminus I$ (см. [72], § II.2). Следующие две характеризации описывают η в терминах некоторых «легко обозримых» порождающих отношений (Putcha M. S.//Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — V. 189. — P. 93—106): конгруэнция η_S совпадает с наименьшей эквивалентностью, содержащей пары (xy, xyx), (xyx, yx) при всевозможных $x, y \in S^1$ таких, что $xy \neq 1 \neq yx$; если через τ обозначить транзитивное замыкание отношения $\dagger$ (т. е. наименьшее содержащее $\dagger$ транзитивное отношение), то $\eta = \tau \cap \tau^{-1}$. В коммутативной полугруппе отношение $\dagger$ транзитивно, так что в этом случае $\eta = \dagger \cap \dagger^{-1}$, а η-классы суть в точности архимедовы компоненты (см. [18], § 4.3). Обратно, в произвольной $\mathcal{AP}$-полугруппе разложение в полурешетку архимедовых полугрупп будет наиболее дробным полурешеточным разложением. Для регулярных полугрупп справедливо равенство $\eta = \mathcal{J}^{\#}$ (см., например, [56], с. 93).

Подробная информация об архимедовых полугруппах и полурешеточных разложениях содержится в [79] и [48], а в книге [72] полурешеточные разложения служат одной из руководящих идей.

4.2. Сдвиги. Преобразование ρ полугруппы S называется *правым сдвигом*, если $(xy)\rho = x(y\rho)$ для любых $x, y \in S$. Двойственно определяются левые сдвиги, но (в отличие от правых сдвигов, записываемых как правые операторы) их удобно записывать как левые операторы: преобразование $\lambda \in \mathcal{T}_l(S)$ называется *левым сдвигом*, если $\lambda(xy) = (\lambda x)y$ для любых $x, y \in S$. Каждому элементу $a \in S$ можно поставить в соответствие преобразование $\lambda_a \in \mathcal{T}_l(S)$ $[\rho_a \in \mathcal{T}_r(S)]$, определяемое формулой $\lambda_a x = ax$

$[x\rho_a = xa]$ и являющееся, очевидно, левым [правым] сдвигом полугруппы S; этот сдвиг называется *внутренним левым* [*правым*] *сдвигом*, соответствующим элементу a. Говорят, что левый сдвиг λ и правый сдвиг ρ полугруппы S *коммутируют*, если $(\lambda x)\rho = \lambda(x\rho)$ для любого $x \in S$; очевидно, что любой внутренний левый сдвиг коммутирует с любым внутренним правым сдвигом. В глобально идемпотентной полугруппе любой левый сдвиг коммутирует с любым правым сдвигом. Множество $\Lambda(S)$ [$\mathrm{P}(S)$] всех левых [правых] сдвигов S всегда непусто (оно содержит тождественное отображение id_S) и является подполугруппой в $\mathcal{T}_l(S)$ [в $\mathcal{T}_r(S)$]; множество $\Lambda_0(S)$ [соответственно $\mathrm{P}_0(S)$] всех внутренних левых [правых] сдвигов есть левый идеал в $\Lambda(S)$ [правый идеал в $\mathrm{P}(S)$]. В полугруппах, имеющих левую [правую] единицу, и только в них, всякий левый [правый] сдвиг будет внутренним; следовательно, равенства $\Lambda_0(S) = \Lambda(S)$ и $\mathrm{P}_0(S) = \mathrm{P}(S)$ выполняются тогда и только тогда, когда S — моноид. Вырожденный случай $\Lambda(S) = \mathcal{T}_l(S)$ [$\mathrm{P}(S) = \mathcal{T}_r(S)$] имеет место тогда и только тогда, когда S левосингулярна [правосингулярна]; это эквивалентно тому, что $\mathrm{P}(S) = \{\mathrm{id}_S\}$ [$\Lambda(S) = \{\mathrm{id}_S\}$]. Отображение $a \mapsto \rho_a$ есть гомоморфизм S на $\mathrm{P}_0(S)$, называемый обычно *правым регулярным представлением* полугруппы S; двойственно определяется *левое регулярное представление*.

Точное представление произвольной полугруппы S, индуцированное правым регулярным представлением моноида S^1, и осуществляет то вложение S в $\mathcal{T}_r(S)$, о котором упоминалось в п. 1.2. Если S — инверсная полугруппа, то для любого $a \in S$ через $\tilde{\rho}_a$ обозначим отображение из $\mathcal{PT}(S)$, индуцированное внутренним правым сдвигом ρ_a на подмножестве Saa^{-1}. Таким образом, $\operatorname{dom} \tilde{\rho}_a = Saa^{-1}$, и тогда $\operatorname{ran} \tilde{\rho}_a = Sa^{-1}a$, причем $\tilde{\rho}_a$ биективно, т. е. $\tilde{\rho}_a \in \mathcal{I}(S)$. Отображение $a \mapsto \tilde{\rho}_a$ является точным представлением, осуществляющим то вложение S в $\mathcal{I}(S)$, о котором упоминалось в п. 2.1; его называют *представлением Вагнера* (или *Вагнера — Престона*). Об этих точных представлениях см., например, [18], § 1.3 и 1.9.

Если S — произвольная полугруппа, $x, y \in S$ и $x\mathcal{R}y$, то существуют такие элементы $a, b \in S^1$, что $xa = y$, $yb = x$; тогда отображения, индуцированные на L_x и соответственно на L_y внутренними правыми сдвигами ρ_a и ρ_b, являются взаимно обратными биекциями, сохраняющими $\mathcal{H}$-классы (т. е. для любых u, v из L_x [из L_y] справедлива эквивалентность $u\mathcal{H}v \Leftrightarrow ua\mathcal{H}va$ [$ub\mathcal{H}vb$]). Это утверждение (называемое *леммой Грина*) вместе с двойственным к нему и есть то уточнение факта равномощности $\mathcal{L}$- [$\mathcal{R}$-, $\mathcal{H}$-] классов, лежащих в одном $\mathcal{D}$-классе, о котором упоминалось в п. 2.7. По поводу леммы Грина см. [18], § 2.1, и [22], гл. 2, § 2. Совокупность преобразований Σ множества X называется *транзитивной* [*просто транзитивной*], если для любых $x, y \in X$ существует [единственное] $\sigma \in \Sigma$ такое, что $x\sigma = y$. Если X — подмножество полугруппы S, то положим $I_r(X) = \{a \in S^1 | Xa \subseteq X\}$ (в случае, когда X — подполугруппа, $I_r(X)$ есть правый идеализатор X в S^1, уже введенный в п. 2.6), через $\Gamma(X)$ обозначим множество всех преобразований из $\mathcal{T}(X)$, индуцированных внутренними правыми сдвигами ρ_a при $a \in I_r(X)$. Очевидно, $\Gamma(X)$ есть подполугруппа в $\mathcal{T}(X)$. Для произвольного $\mathcal{H}$-класса H полугруппа $\Gamma(H)$ является просто транзитивной группой подстановок множества H. Это и есть та группа, о которой упоминалось в п. 2.7; ее называют *группой Шютценберже* $\mathcal{H}$-*класса* H. Всегда $|\Gamma(H)| = |H|$, а если H — подгруппа, то $\Gamma(H)$ есть образ H при правом регулярном представлении H, т. е. $\Gamma(H) \simeq H$. Поскольку при $a\mathcal{D}b$ имеет место $\Gamma(H_a) \simeq \Gamma(H_b)$, всякую группу, изоморфную $\Gamma(H_a)$, называют иногда группой Шютценберже $\mathcal{D}$-класса D_a. Группу $\Gamma(H)$ иногда обозначают $\Gamma_r(H)$, используя обозначение $\Gamma_l(H)$ для аналогичной группы, индуцированной внутренними левыми сдвигами. О группе Шютценберже см. [18], § 2.4, и [22], гл. 2, § 3.

Элементы $a, b \in S$ называются *равнодействующими справа* [*слева*], если $\rho_a = \rho_b$ [$\lambda_a = \lambda_b$]. Если в полугруппе S нет различных равнодействующих справа [слева] элементов, другими словами, если ее правое [левое] регулярное представление будет точным, то S называют *редуктивной справа* [*слева*]. Полугруппу называют *редуктивной*, если она редуктивна справа и слева. Если полугруппа S имеет левую [правую] единицу или если S с левым [правым] сокращением, то S редуктивна справа [слева]; в частности, всякий моноид и всякая полугруппа с сокращением редуктивны. Элементы a и b полугруппы S называют *равнодействующими*, если $\rho_a = \rho_b$ и $\lambda_a = \lambda_b$. Полугруппа называется *слабо редуктивной*, если у нее нет различных равнодействующих элементов. Всякая полугруппа, редуктивная справа или слева, будет слабо редуктивной, но в слабо редуктивной полугруппе могут быть элементы, равнодействующие только с одной стороны (тривиальный пример — сингулярные полугруппы). Всякая регулярная полугруппа слабо редуктивна, всякая инверсная полугруппа редуктивна. Всякая слабо редуктивная глобально идемпотентная полугруппа разложима в подпрямое произведение редуктивной справа и редуктивной слева полугрупп.

Левый сдвиг λ и правый сдвиг ρ полугруппы S называются *связанными*, если $x(\lambda y) = (x\rho)y$ для любых $x, y \in S$; в этом случае пару (λ, ρ) называют *бисдвигом* полугруппы S. Для любого $a \in S$ пара $\pi_a = (\lambda_a, \rho_a)$ есть бисдвиг, называемый *внутренним бисдвигом*, соответствующим элементу a. В моноидах и только в них всякий бисдвиг внутренний. Множество $\Omega(S)$ всех бисдвигов полугруппы S есть подполугруппа в прямом произведении $\Lambda(S) \times \mathrm{P}(S)$; она называется *сдвиговой оболочкой* полугруппы S. Сдвиговая оболочка является моноидом, единицей которого служит $(\mathrm{id}_S, \mathrm{id}_S)$. Множество $\Omega_0(S) = \{\pi_a \mid a \in S\}$ есть идеал в полугруппе $\Omega(S)$, называемый ее *внутренней частью*. Отображение $a \longmapsto \pi_a$ является гомоморфизмом S на $\Omega_0(S)$, его называют *каноническим*. Таким образом, полугруппа слабо редуктивна тогда и только тогда, когда канонический гомоморфизм есть изоморфизм, и потому всякую слабо редуктивную полугруппу S можно, отождествляя ее с $\Omega_0(S)$, считать вложенной в свою сдвиговую оболочку в качестве идеала. Об особенностях этого вложения см. п. 4.3. Если S — слабо редуктивная полугруппа, то $\Omega(S)$ совпадает с идеализатором $\Omega(S)$ в полугруппе $\Lambda(S) \times \mathrm{P}(S)$, причем если $S \simeq T$, то каждый изоморфизм $\Omega_0(S)$ на $\Omega_0(T)$ может быть единственным образом продолжен до изоморфизма $\Omega(S)$ на $\Omega(T)$. Для правосингулярной полугруппы S имеет место $\Omega(S) \simeq \mathcal{T}_r(S)$, так что сдвиговая оболочка по своим свойствам может заметно отличаться от исходной полугруппы.

Приведенный пример показывает, что сдвиговая оболочка периодической (более того, идемпотентной) полугруппы может не быть даже эпигруппой; есть примеры, показывающие, что регулярность, вообще говоря, не сохраняется при переходе к сдвиговой оболочке. Но ряд свойств полугрупп наследуется сдвиговыми оболочками; таковы, в частности, свойства быть полугруппой с сокращением, инверсной полугруппой, полурешеткой, полурешеткой групп. Если S коммутативна, то $\Omega(S)$ не обязательно коммутативна, но будет таковой при дополнительном условии редуктивности S.

Сдвиги полугрупп и, в частности, сдвиговые оболочки играют существенную роль при изучении реальных расширений полугрупп (см., в частности, п. 4.3). Интересно отметить имеющуюся здесь некоторую аналогию с группами; она задается следующими парами понятий: нормальный делитель — идеал, группа автоморфизмов — сдвиговая оболочка, внутренний автоморфизм — внутренний бисдвиг, тривиальность центра — слабая редуктивность (для полугрупп с нулем эта аналогия обогащается парами центр — аннулятор и т. п.). Более прямая связь — вплоть до параллелизма отдельных результатов — возникает с кольцами; отметим, что если S есть мультипликативная полугруппа кольца, то слабая редуктивность [редуктивность слева, редуктивность справа] S имеет место, очевидно, тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ann}\, S = 0$ [$\mathrm{Ann}_l\, S = 0$, $\mathrm{Ann}_r\, S = 0$].

О сдвигах и сдвиговых оболочках полугрупп см. [18], § 1.3, и в особенности обстоятельный обзор [71], а также [72], гл. 5, где, в частности, описываются сдвиговые оболочки полугрупп ряда важных типов, прежде всего, рисовских матричных полугрупп. В [71] наряду со сдвиговыми оболочками полугрупп рассматриваются сдвиговые оболочки колец; имеющийся здесь параллелизм может быть распространен на более общие алгебраические системы (Шеврин Л. Н.// Мат. сб. — 1972. — Т. 88, № 2. — С. 218—228).

4.3. Идеальные расширения. Полугруппа T называется *расширением* полугруппы S, если S есть подполугруппа T. Часто под расширением понимают полугруппу, содержащую исходную полугруппу в качестве нормального комплекса. Если S есть ρ-класс конгруэнции ρ на T, то говорят, что T есть *расширение S при помощи полугруппы T/ρ*; при этом нередко на T/ρ смотрят с точностью до изоморфизма, отмечая тем или иным способом (в частности, в терминах T) тот идемпотент, прообразом которого является S. В случае, когда S есть идеал в T, т. е. соответствующий идемпотент — нуль, получаем *идеальное* *расширение*; в случае, когда S есть нормальная подполугруппа, т. е. соответствующий идемпотент — единица, расширение называют *нормальным*.

Примером использования идеальных расширений служит описание архимедовых полугрупп с идемпотентами (см. п. 4.1). Вообще роль идеальных расширений проявляется при наличии в рассматриваемых полугруппах идеальных рядов (см. п. 2.6), в частности, собственных идеалов, когда знание факторов ряда (а иногда и характера идеального расширения, см. ниже) может пролить свет на строение полугруппы. В этом отношении указанная роль сопоставима с ролью (нормальных) расширений в теории групп. Отметим еще, что каждое нетривиальное полурешеточное разложение «соткано» из идеальных расширений, ибо для любой его компоненты существует сравнимая с ней другая компонента, и для компонент A, B таких, что $A < B$, подполугруппа $A + B$ (см. п. 2.3) есть идеальное расширение A при помощи B^0. Что касается нормальных расширений в приведенном выше смысле, то (для полугрупп, не являющихся группами) они не играют той роли, что для групп, хотя и служили объектом рассмотрений; см., например, Глускин Л. М., Перепелицын И. Л.//Изв. вузов. Математика. — 1972. — № 12. — С. 46—54 (в цитируемой работе указан еще ряд источников); о *шрейеровых расширениях* см. [18], т. 1, с. 183; [4], с. 61—63. Но для регулярных полугрупп имеется и другое понятие нормального расширения (в случае групп совпадающее с обычным), лежащее в основе одного из методов получения полезных структурных теорем; см. о нем п. 5.1.

Предметом рассмотрения в данном пункте будут только идеальные расширения, и термин «расширение» до конца пункта будет иметь смысл «идеальное расширение».

Если $S \trianglelefteq T$, то каждый внутренний левый [правый] сдвиг полугруппы T индуцирует левый [правый] сдвиг полугруппы S. Полугруппа S тогда и только тогда обладает таким расширением T, что каждый левый и каждый правый сдвиг из S индуцируется некоторым внутренним сдвигом T, когда 1) для каждого $\lambda \in \Lambda(S)$ существует связанный с ним $\rho \in \mathrm{P}(S)$ и, наоборот, 2) любой $\lambda \in \Lambda(S)$ и любой $\rho \in \mathrm{P}(S)$ коммутируют; если при этом S слабо редуктивна, то из 1) следует 2), так что в соответствующем критерии остается лишь условие 1) (см. [18], т. 1, с. 30). Коммутативная глобально идемпотентная полугруппа S всегда обладает расширением T с указанным свойством.

Не для любых полугрупп S и $Q = Q^0$ существует расширение S при помощи Q. Простейший контрпример: S — бесконечная моногенная полугруппа, Q —

трехэлементная веерная полурешетка. Но, например, если а) в Q нет делителей нуля или б) $Q^2=0$ или в) $E_S \neq \varnothing$, то требуемое расширение существует.

В случае а) $Q \setminus \{0\}$ есть подполугруппа, и тогда $S + (Q \setminus \setminus \{0\})$ будет расширением S при помощи Q. В случае б) построение требуемого расширения может быть осуществлено применением следующей конструкции. Пусть $\{Q_x\}_{x \in S}$ — семейство попарно не пересекающихся множеств, причем $Q_x \cap S = \{x\}$ для любого $x \in S$. Распространим умножение в S на множество $T = \bigcup\limits_{x \in S} Q_x$, полагая $a \cdot b = xy$ для любых $a \in Q_x$, $b \in Q_y$, $x, y \in S$. Тогда T превращается в полугруппу, называемую *раздуванием* (inflation) полугруппы S. Если $Q^2 = 0$ и множество Q взять таким, что $|T \setminus S| = |Q \setminus \{0\}|$, то раздувание T будет расширением полугруппы S при помощи Q. Если подмножество $P \subseteq \subseteq S$ таково, что для любого $x \in S \setminus P$ имеет место $Q_x = \{x\}$, то говорят, что T есть раздувание S *над подмножеством* P. Наконец, в случае в) к требуемой цели приводит следующая конструкция. Пусть $\{A_e\}_{e \in E_S}$ — семейство попарно не пересекающихся полугрупп, причем e является нулем в A_e и $A_e \cap S = \{e\}$ для любого $e \in E_S$. На объединении $T = S \cup \left(\bigcup\limits_{e \in E_S} A_e \right)$ зададим умножение $\cdot$, считая его на S и на каждой A_e совпадающим с исходными операциями и полагая для любых различных $e, f \in \in E_S$ и любых $a \in A_e$, $b \in A_f$, $x \in S$

$$a \cdot b = ef, \quad a \cdot x = ex, \quad x \cdot b = xf.$$

Тогда T становится полугруппой, называемой *идемпотентным расширением* S при помощи полугрупп A_e. Ясно, что $S \trianglelefteq T$, причем факторполугруппа T/S есть ортогональная сумма полугрупп A_e; если положить $Q = A_e$ и $A_f = \{f\}$ при $f \neq e$, то T будет расширением S при помощи Q. Если подмножество $P \subseteq E_S$ таково, что $A_f = \{f\}$ для любого $f \in E_S \setminus P$, то говорят, что T есть идемпотентное расширение (полугруппами A_e) *над подмножеством* P.

Если S является подполугруппой в полугруппах T_1 и T_2, то всякий гомоморфизм T_1 в T_2, действующий тождественно на S, называется *S-гомоморфизмом*. Аналогично определяется понятие *S-изоморфизма*. Два расширения полугруппы S называют *эквивалентными*, если они S-изоморфны.

Описывать расширения естественно с точностью до эквивалентности. В самом общем случае описание условий, при которых существует расширение полугруппы S при помощи полугруппы $Q = Q^0$, не может быть достаточно содержательным и сводится фактически к формулированию требований, обеспечивающих возможность задать на множестве $T = S \cup (Q \setminus \{0\})$ ассоциативное умножение, при котором будет $S \trianglelefteq T$ (см., например,

[71], § 3, предложение 3). Содержательные результаты получаются при дополнительных ограничениях на S или Q или на характер расширения.

Расширение T полугруппы S называется *ретрактным*, если существует S-гомоморфизм T на S (называемый *S-эндоморфизмом*). Всякое ретрактное расширение полугруппы S при помощи полугруппы Q есть подпрямое произведение S и Q. Раздувания S, и только они, являются ретрактными расширениями S при помощи полугрупп с нулевым умножением. Все расширения полугруппы S будут ретрактными тогда и только тогда, когда S — моноид. Если T — ретрактное расширение полугруппы S и φ — соответствующий S-эндоморфизм, то ограничение $\tilde{\varphi}$ гомоморфизма φ на частичном группоиде $P = T \setminus S$ будет *частичным гомоморфизмом* P в S, т. е. для любых $a, b \in P$ из того, что ab определено в P, следует $(ab)\tilde{\varphi} = a\tilde{\varphi}b\tilde{\varphi}$. Обратно, если даны (не пересекающиеся) полугруппы S и $Q = Q^0$ и частичный гомоморфизм η: $Q \setminus \{0\} \to S$, то на множестве $T = S \cup (Q \setminus \{0\})$ можно, и притом единственным образом, определить умножение так, что T превратится в ретрактное расширение S, а отображение φ, продолжающее η тождественным действием на S, будет соответствующим S-эндоморфизмом; обозначим указанную полугруппу T через $[S, Q; \eta]$. Любое расширение слабо редуктивной полугруппы S при помощи Q вложимо в расширение $[\Omega(S), Q; \eta]$ ее сдвиговой оболочки, где частичный гомоморфизм η удовлетворяет следующему условию: для любых $a, b \in Q$ таких, что $ab = 0$, имеет место $a\eta b\eta \in \Omega_0(S)$.

Если $S \trianglelefteq T$, то для любого элемента $t \in T$ внутренний бисдвиг π_t полугруппы T индуцирует, очевидно, бисдвиг (обозначим его π^t) полугруппы S. Отображение τ: $T \to \Omega(S)$, переводящее каждый элемент t в π^t, называется *каноническим гомоморфизмом* T в $\Omega(S)$; он является продолжением канонического гомоморфизма π: $S \to \Omega(S)$ (см. п. 4.2), причем если S слабо редуктивна или глобально идемпотентна, то τ будет единственным продолжением π до гомоморфизма T в $\Omega(S)$. Подполугруппа $T\tau \subseteq \Omega(S)$ называется *типом* расширения T полугруппы S. Расширение называется *строгим*, если его тип совпадает с $\Omega_0(S)$ (т. е. если каждый элемент из T индуцирует внутренний бисдвиг S), и *чистым*, если $(T\tau)\tau^{-1} = S$ (т. е.

если ни один из элементов из $T \setminus S$ не индуцирует внутренний бисдвиг S). Полезность этих понятий состоит в том, что каждое расширение произвольной полугруппы будет чистым расширением некоторого ее строгого расширения. Всякое ретрактное расширение полугруппы S будет строгим; обратное выполняется тогда и только тогда, когда S есть раздувание некоторой слабо редуктивной полугруппы A над $A \setminus A^2$. Если $S \trianglelefteq T$, то конгруэнция σ на T называется *S-конгруэнцией*, если τ индуцирует на S отношение равенства Δ_S. Расширение T полугруппы S называется *плотным* (или *существенным*), если единственной S-конгруэнцией на T является Δ_T. Тип каждого расширения совпадает с типом некоторого плотного расширения. Любое расширение T полугруппы S при помощи полугруппы Q есть подпрямое произведение полугрупп D и Q, где D — плотное расширение S, имеющее тот же тип, что и T. Все плотные расширения слабо редуктивной полугруппы S (рассматриваемой как идеал $\Omega(S)$) исчерпываются, с точностью до эквивалентности, содержащими S подполугруппами из $\Omega(S)$. Из последних двух утверждений следует, что все расширения слабо редуктивной полугруппы S при помощи Q содержатся, с точностью до эквивалентности, в прямом произведении $\Omega(S) \times Q$.

Если T — максимальное (по включению) плотное расширение полугруппы S, то S называют *плотно вложенным идеалом* полугруппы T. Полугруппа S обладает максимальными плотными расширениями тогда и только тогда, когда S слабо редуктивна; при этом — если считать S вложенной в ее сдвиговую оболочку $\Omega(S)$ — максимальное плотное расширение S, с точностью до эквивалентности, единственно и совпадает с $\Omega(S)$.

Указанное уникальное свойство максимальных плотных расширений имеет многочисленные применения, в частности, для получения абстрактных характеризаций для полугрупп преобразований, в которых обнаруживаются плотно вложенные идеалы с определенными абстрактными свойствами (причем, что принципиально, имеющие существенно более простую структуру). В таблице 1 приведены такие характеризации для нескольких важнейших полугрупп (см. [24], с. 393—398). Утверждения, соответствующие каждой строке таблицы, имеют одну и ту же схему: полугруппа тогда и только тогда изоморфна полугруппе T, указанной в 1-м столбце, когда она обладает плотно вложенным идеалом с абстрактным свойством, указанным во 2-м столбце (по поводу этих свойств см. п. 2.1 и 3.2). В 3-м столбце указано конкретное характеристическое свойство элементов соответствующего плотно вложенного идеала в полугруппе T. (Аналогичную характеризацию имеет и полугруппа $\mathrm{End}_F V$, но ради экономии места мы воспроизводим ее в тексте после таблицы.)

Таблица 1

Полугруппа T	Ее плотно вложенный идеал S	
	абстрактное свойство S	реализация S в T
$\mathcal{T}(X)$	Правосингулярная полугруппа	S — множество всех константных преобразований множества X
$\mathcal{I}(X)$	Изоморфна полугруппе Брандта $B_{\lvert X\rvert}$ над единичной группой	S — множество всех взаимно однозначных частичных преобразований ранга $\leqslant 1$
$\mathcal{PT}(X)$	Изоморфна полугруппе $\mathcal{M}^0[\{1\};\ \mathcal{P}(X),\ X;\ (p_{Yx})]$, где $\mathcal{P}(X)$ — множество всех непустых подмножеств из X и $p_{Yx}=\begin{cases}1, & \text{если } x\in Y,\\ 0, & \text{если } x\notin Y\end{cases}$	S — множество всех частичных преобразований ранга $\leqslant 1$
$\mathcal{B}(X)$	Изоморфна полугруппе $\mathcal{M}^0[\{1\};\ \mathcal{P}(X),\ \mathcal{P}(X);\ (p_{YZ})]$, где $\mathcal{P}(X)$ — множество всех непустых подмножеств из X и $p_{YZ}=\begin{cases}1, & \text{если } Y\cap Z\neq\varnothing,\\ 0, & \text{если } Y\cap Z=\varnothing\end{cases}$	S — множество всех *прямоугольных* бинарных отношений, т. е. отношений вида $Y_1\times Y_2$, где $Y_1,\ Y_2\subseteq X$

Из приведенных характеризаций вытекает, в частности, что каждый автоморфизм любой из полугрупп $\mathcal{T}(X)$, $\mathcal{I}(X)$, $\mathcal{PT}(X)$, $\mathcal{B}(X)$ является внутренним, т. е. действует по правилу $a\longmapsto g^{-1}ag$, где g — фиксированный обратимый элемент соответствующей полугруппы. Отметим, что альтернативная характеризация полугруппы $\mathcal{T}(X)$ дана в [27], с. 314—327. Полугруппа тогда и только тогда изоморфна полугруппе $\mathrm{End}_F V$, когда она обладает плотно вложенным идеалом, изоморфным рисовской полугруппе $\mathcal{M}^0[F^*;\ I_V,\ \Lambda_{V^*};\ P]$, где $F^*=(F\setminus\{0\},\ \cdot)$, I_V [соответственно Λ_{V^*}] — множество всех одномерных подпространств из V [из сопряженного пространства V^*], и если фиксировать базисы $\{e_i\}_{i\in I_V}$ и $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_{V^*}}$, то сэндвич-матрица $P = (p_{\lambda i})$ задана условием $p_{\lambda i} = e_i\varphi_\lambda$ для всех $i\in I_V$ и $\lambda\in\Lambda_{V^*}$. В полугруппе $\mathrm{End}_F V$ плотно вложенный идеал с указанным свойством состоит из всех эндоморфизмов, имеющих ранг $\leqslant 1$ (эта вполне 0-простая полугруппа уже упоминалась в п. 3.1).

Имеются и другие полугруппы преобразований, характеризуемые в терминах плотно вложенных идеалов, либо тех или иных их обобщений (например, для случая односторонних идеалов). Достаточно подробная информация по этому поводу содержится в [71], § 4 и 5; см. также [67], § 1, 2, 5.

Хорошо изучены расширения полугруппы S при помощи полугруппы Q в ряде конкретных случаев: когда S вполне проста, когда S — группа, а Q — вполне 0-простая полугруппа, и др. Дальнейшую информацию по идеальным расширениям см. в [18], § 4.4 и 4.5, [71] (отметим, что § 6 этого обзора посвящен расширениям колец, § 7 — расширениям частично упорядоченных множеств), [72], гл. 3 и 5.

4.4. Полупрямые произведения и сплетения. Теорема Крона — Роудза. В этом пункте будем считать, что $\mathrm{End}\, S \subseteq \mathscr{T}_l(S)$. Пусть S и T — полугруппы. Образ элемента $t\in T$ относительно гомоморфизма φ полугруппы T будем обозначать через φ_t. Если φ отображает T в $\mathrm{End}\, S$, то операция умножения на декартовом произведении $S\times T$, заданная формулой

$$(s,\ t)(s',\ t') = (s\varphi_t(s'),\ tt'),$$

ассоциативна; полученная полугруппа обозначается $S\times_\varphi T$ и называется *полупрямым произведением* полугрупп S и T (со *связывающим гомоморфизмом* φ). В случае, когда φ тривиален, т. е. $\varphi_t = \mathrm{id}_S$ для любого $t\in T$, полупрямое произведение превращается в обычное прямое произведение $S\times T$. Отображение $(s, t)\longmapsto t$ является, очевидно, гомоморфизмом $S\times_\varphi T$ на T. Если T есть моноид с единицей 1, а связывающий гомоморфизм φ является моноидным (т. е. $\varphi_1 = \mathrm{id}_S$), то отображение $s\longmapsto(s, 1_T)$ будет вложением S в $S\times_\varphi T$. В этом случае полугруппу $S\times_\varphi T$ называют *расщепленным расширением* полугруппы S посредством моноида T.

Напомним, что запись $A|B$ означает, что полугруппа A *делит* (т. е. является делителем, см. п. 2.2) полугруппы B. Через R_2 обозначается двухэлементная правосингулярная полугруппа. Полугруппа S называется *сильно неприводимой* (нередко просто *неприводимой*), если для любых полугрупп A и B из $S|A\times_{\varphi}B$ следует $S|A$ или $S|B$. Сильно неприводимые полугруппы исчерпываются конечными простыми группами и делителями полугруппы R_2^1; последние же суть в точности сама R_2^1, полугруппа R_2, двухэлементная полурешетка и, наконец, одноэлементная полугруппа.

Через S^T обозначим полугруппу всех отображений полугруппы T в полугруппу S (записываемых справа от аргументов) относительно «поточечного» умножения, задаваемого формулой

$$t(\tau_1\cdot\tau_2)=(t\tau_1)\cdot(t\tau_2),$$

а через ψ — гомоморфизм из T в $\operatorname{End}(S^T)$, задаваемый условием $t'\psi_t(\tau)=(t't)\tau$ для любого отображения $\tau\in S^T$ и любых $t, t'\in T$. Тогда полупрямое произведение $S^T\times_{\psi}T$ обозначается $S\operatorname{wr}T$ и называется *сплетением* (иногда — *узловым произведением*) полугрупп S и T. Иными словами, умножение в $S\operatorname{wr}T$ задается формулой

$$(\tau_1,\ t_1)(\tau_2,\ t_2)=(\tau_3,\ t_1t_2), \qquad (*)$$

где по определению $t\tau_3=t\tau_1\cdot(tt_1)\tau_2$ для любого $t\in T$. Рассмотренное сплетение называют нередко *стандартным* (или *регулярным*), понимая при этом под сплетением в более общем смысле конструкцию, получающуюся из приведенного определения заменой S^T на S^Y, где Y — произвольное множество, для которого задано представление $\varphi\colon T\to\mathcal{T}_r(Y)$, и определяемую той же формулой $(*)$, где теперь по определению $y\tau_3=y\tau_1\cdot(y\varphi_{t_1})\tau_3$. Это *сплетение посредством* φ (или посредством п о л и г о н а Y, см. п. 10.1) обозначают $S\operatorname{wr}^{\varphi}T$ (или $(S\operatorname{wr}T|Y)$, употребляют и другие обозначения). Регулярное сплетение соответствует случаю, когда φ — правое регулярное представление (см. п. 4.2); при $|Y|=1$ сплетение попросту превращается в прямое произведение $S\times T$. Если S — моноид, то любое идеальное расширение S при помощи полугруппы T вложимо в сплетение $S\operatorname{wr}T$. Если T — моноид, то любое расщепленное расширение полугруппы

S посредством T вложимо в $S \operatorname{wr} T$. О сплетениях полугрупп см. [88] и [89], где указаны и другие источники. Для полугрупп с нулем имеется естественная модификация понятия сплетения — *0-сплетение* (см. Knauer U., Mikhalev A.//Semigroup Forum — 1980. — V. 19, № 2. — С. 177—187; № 3. — 189—198; № 4. — С. 355—369; в цитируемой работе указаны и другие источники, где рассматриваются сплетения и 0-сплетения полугрупп).

Класс полугрупп $\mathscr{K}$ называют *замкнутым* (относительно сплетений и делителей), если для любых полугрупп A, B из того, что $A, B \in \mathscr{K}$, следует $A \operatorname{wr} B \in \in \mathscr{K}$, а из того, что $B \in \mathscr{K}$ и $A \mid B$, следует $A \in \mathscr{K}$. Наименьший замкнутый класс, содержащий данный класс $\mathscr{K}$, называется *замыканием* класса $\mathscr{K}$ и обозначается $\overline{\mathscr{K}}$. Конечное семейство $\mathscr{F}$ конечных полугрупп [моноидов] называется *декомпозицией* полугруппы [моноида] S, если $S \in \overline{\mathscr{F}}$. *Теорема Крона — Роудза* (в одной из формулировок) гласит, что любая конечная полугруппа S имеет декомпозицию, состоящую из полугруппы R_2^1 и всех простых групп, делящих полугруппу S; декомпозиции в категории конечных моноидов — те же.

Теорема Крона — Роудза допускает более «тонкую» модификацию применительно к полугруппам преобразований; при этом модифицируется и понятие сплетения. Введем необходимую терминологию. Конечная полугруппа преобразований, называемая также *t-полугруппой*, — это пара $X = (P, S)$, где P — конечное множество, S — подполугруппа в $\mathscr{T}_r(P)$. Если t-полугруппы $X(P, S)$ и $X_1 = (P_1, S_1)$ таковы, что $P_1 \subseteq P$ и $S_1 \subseteq S$, то X_1 называется *t-подполугруппой* в X. Для t-полугрупп $X = (P, S)$ и $Y = (Q, T)$ *t-морфизмом* X в Y называют пару (φ, ψ), где φ: $P \to Q$ — отображение, а ψ: $S \to T$ — гомоморфизм, связанные тождеством

$$(ps)\varphi = (p\varphi)(s\psi), \quad p \in P, \quad s \in S.$$

t-морфизм (φ, ψ) называют *сюръективным* [*инъективным*, *биективным*], если соответствующим свойством обладают и φ, и ψ. Если существует биективный t-морфизм X на Y, то X и Y называют *подобными* (или *эквивалентными*) и пишут $X \approx Y$. Говорят, что X *делит* Y (или X есть *делитель* Y, или Y *накрывает* X)

и пишут $X|Y$ (или $X \prec Y$), если существует t-подполугруппа Z из Y и сюръективный t-морфизм Z на X. t-полугруппа (P, S) называется *t-моноидом* [*t-группой*], если $\operatorname{id} P \in S$ [S содержится в симметрической группе $\mathscr{G}(P)$].

Пусть даны t-полугруппы $X = (P, S)$ и $Y = (Q, T)$. Полупрямое произведение $S^Q \times_\varphi T$, где связывающий гомоморфизм определяется условием

$$q\varphi_t(\tau) = (qt)\tau \text{ для любых } q \in Q,\ t \in T \text{ и } \tau\colon Q \to S,$$

можно считать подполугруппой в $\mathscr{T}_r(P \times Q)$, если для $(p, q) \in P \times Q$, $(\tau, t) \in S^Q \times_\varphi T$ положить

$$(p, q)(\tau, t) = (p(q\tau), qt).$$

Тогда t-полугруппа $(P \times Q, S^Q \times_\varphi T)$ обозначается $X \operatorname{r} Y$ или $X \circ Y$ и называется *сплетением* t-полугрупп X и Y. В отличие от операции wr для абстрактных полугрупп, введенная операция ассоциативна, т. е. для любых t-полугрупп X, Y, Z имеет место $(X \circ Y) \circ Z \approx \approx X \circ (Y \circ Z)$. Кроме того, выполняется следующее свойство: если $X|X_1$ и $Y|Y_1$, то $X \circ Y | X_1 \circ Y_1$. Аналогично случаю абстрактных полугрупп вводится понятие замкнутого класса и, соответственно, замыкания данного класса t-полугрупп. При этом принципиально удобным обстоятельством оказывается тот факт, что для произвольного семейства t-полугрупп $\mathscr{F}$ t-полугруппа X принадлежит $\overline{\mathscr{F}}$ тогда и только тогда, когда

$$X \mid X_1 \circ X_2 \circ \ldots \circ X_n \qquad (**)$$

для некоторых t-полугрупп $X_1, X_2, \ldots, X_n$ из $\mathscr{F}$. Всякое соотношение вида (**) называют *декомпозицией* t-полугруппы X. Через $\tilde{n}$ обозначим t-полугруппу константных преобразований (см. п. 2.1) множества $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Например, $\tilde{2}^1$ — это t-полугруппа $\{(0, 1\}, S)$, где S изоморфна полугруппе R_2^1.

Теорема Крона — Роудза для t-полугрупп утверждает, что всякая t-полугруппа $X = (P, S)$ допускает декомпозицию вида (**), где для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant \leqslant n$, либо $X \approx \tilde{2}^1$, либо X_i — простая группа, делящая S_i; декомпозиции в категории t-моноидов те же.

Абстрактную (конечную) полугруппу S можно считать t-полугруппой (S^1, S), отождествляя S в качестве второй компоненты этой пары с полугруппой правых сдвигов полугруппы S^1. При таком подходе, отправляясь от теоремы Крона — Роудза, можно получить другие полезные теоремы декомпозиции. Напомним, что в регулярном $\mathcal{J}$-классе J полугруппы S все максимальные подгруппы изоморфны одной и той же группе (см. п. 2.7), обозначим ее через G_J. Класс J называют *существенным*, если $|G_J| \neq 1$. Пусть $\mathcal{E}$ — подмножество $\mathcal{J}$-остова $S/\mathcal{J}$ (см. п. 2.7), состоящее из всех существенных $\mathcal{J}$-классов. Положим $\mathcal{E}_0 = \varnothing$ и через $\mathcal{E}_i$, где $i > 0$, обозначим множество всех максимальных элементов множества $\mathcal{E} \setminus (\mathcal{E}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_{i-1})$. Число n такое, что $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_n$, где $\mathcal{E}_n \neq \varnothing$, называется *глубиной* полугруппы S. Иными словами, глубина полугруппы S — это максимальное число элементов в цепях из $S/\mathcal{J}$, состоящих из существенных $\mathcal{J}$-классов. Введем группы

$$K_i = \prod_{J \in \mathcal{E}_i} G_J, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда S допускает декомпозицию вида

$$S \mid C_n \circ K_n \circ C_{n-1} \circ \ldots \circ K_1 \circ C_0,$$

где $C_n, \ldots, C_0$ суть комбинаторные полугруппы. Последний факт мотивирует следующее определение. *Стандартной* (или *групповой*) сложностью полугруппы S называется наименьшее n, для которого существует декомпозиция вида

$$S \mid C_n \circ G_n \circ C_{n-1} \circ \ldots \circ G_1 \circ C_0,$$

где G_i — группы, C_j — комбинаторные полугруппы. Отметим, что стандартная сложность может быть меньше глубины полугруппы.

Теорема Крона — Роудза имеет приложения в теории автоматов и превращается там в утверждение о представлении автомата каскадной композицией триггеров и автоматов простых групп; см. [4], гл. 3—5; [17], гл. 6—9; [14], § 3.5 и 3.6. В [4], гл. 6, излагается и теория групповой сложности конечных автоматов и полугрупп. Теоремы декомпозиции для конечных моноидов рассматриваются также в [22], гл. 4. Детальное изложение вопросов, связанных с декомпозицией и сложностью (включая аксиоматический подход к понятию сложности) см. в [50], т. B.

4.5. Амальгамы. Пусть $\{S_i\}_{i \in I}$ — семейство полугрупп, U — полугруппа, вложимая в каждую полугруппу S_i, и φ_i: $U \to S_i$ — соответствующее вложение ($i \in I$). Систему $[\{S_i\}; U; \{\varphi_i\}]$ называют *полугрупповой амальгамой*. Пользуются и более кратким обозначением $[S_i; U; \varphi_i]$. Полугруппу U называют *сердцевиной* амальгамы $[S_i; U; \varphi_i]$. Часто удобно отождествлять каждую подполугруппу $U\varphi_i$ с U, т. е. представлять себе, что U попросту есть подполугруппа каждой из полугрупп S_i; тогда запись еще упрощается — $[S_i; U]$, причем обычно считают, что $S_i \cap S_j = U$ при $i \neq j$. Случай, когда $U = \varnothing$, при рассмотрении амальгам, как правило, не исключается. Каждой амальгаме $[S_i; U]$ естественным образом сопоставляется частичный группоид $\Gamma[S_i; U]$. Его носителем является множество $\bigcup S_i$, а операция определена только для пар элементов, попадающих в какую-либо из полугрупп S_i, и совпадает для них с исходной операцией в соответствующей полугруппе. Говорят, что амальгама $[S_i; U]$ *вложима в полугруппу* S, если $\Gamma[S_i; U] \subseteq S$ и операция в $\Gamma[S_i; U]$ индуцирована операцией в S. Амальгаму, вложимую в некоторую полугруппу, называют *совместной*.

В отличие от групп, не всякая полугрупповая амальгама совместна. Пример: пусть $U = \{u, v, w, 0\}$ — полугруппа с нулевым умножением, $S_1 = U \cup \{a_1\}$, $S_2 = U \cup \{a_2\}$, где $a_1 u = u a_1 = v$, $a_2 v = v a_2 = w$, а остальные произведения в S_1 и S_2 равны 0; тогда S_1 и S_2 суть полугруппы и $[S_1, S_2; U]$ — амальгама, не вложимая ни в какую полугруппу.

Для амальгамы $[S_i; U; \varphi_i]$ через σ обозначим бинарное отношение на свободном произведении $\prod^* S_i$, состоящее из всевозможных пар $(u\varphi_i, u\varphi_j)$, где $u \in U$, i, j пробегают индексное множество I амальгамы. Факторполугруппа $\prod^* S_i/\sigma^\#$ обозначается $\prod_U^* S_i$ и называется *свободным произведением амальгамы* $[S_i; U; \varphi_i]$ или *свободным произведением полугрупп* S_i *с объединенной подполугруппой* U. При $U = \varnothing$ свободное произведение амальгамы превращается, очевидно, в обычное свободное произведение. Через μ_i обозначим ограничение на S_i естественного гомоморфизма $\prod^* S_i$ на $\prod_U^* S_i$. Если отождествить с U каждую из подполугрупп $U\varphi_i \subseteq S_i$, то гомоморфизмы μ_i: $S_i \to \prod_U^* S_i$ совместно продолжаются до гомоморфизма μ частичного группоида $\Gamma[S_i; U]$ в $\prod^{*}_{U} S$; μ называется *каноническим гомоморфизмом* $\Gamma[S_i; U]$. Если канонический гомоморфизм μ инъективен и $S_i\mu_i \cap S_j\mu_j = U\mu$ для любых различных i, j, то μ осуществляет вложение амальгамы $[S_i; U]$ (говорят *естественное вложение*) в ее свободное произведение $\prod^{*}_{U} S_i$. Амальгама совместна тогда и только тогда, когда она естественно вложима в свое свободное произведение. Этот общий критерий сводит вопрос о совместности амальгамы к вопросу о ее вложимости уже в конкретную конструкцию. Но он оставляет потребность в получении достаточных критериев, носящих «внутренний» характер. Наиболее известный такой критерий будет приведен в следующем абзаце.

Подмножество U полугруппы S называют *унитарным слева* [*справа*], если для любого $x \in S$ из $Ux \cap U \neq \varnothing$ [$xU \cap U \neq \varnothing$] следует $x \in U$; подмножество называют *унитарным*, если оно унитарно слева и справа. В группе подгруппы, и только они, суть унитарные подполугруппы. Подмножество U полугруппы S называется *почти унитарным*, если существует такой идемпотентный бисдвиг $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$ с коммутирующими λ и ρ, что $\lambda|_U = \rho|_U = \mathrm{id}_U$ и U унитарно в подполугруппе $\lambda S \rho$. Если U — подполугруппа с единицей e из S, то U почти унитарна тогда и только тогда, когда U унитарна в eSe. Всякая подгруппа полугруппы S почти унитарна в S. Если в амальгаме $[S_i; U; \varphi_i]$ для любого i подполугруппа $U\varphi_i$ почти унитарна в S_i, то амальгама $[S_i; U; \varphi_i]$ совместна (см. [18], § 9.4; [56], § VII. 3).

Полугруппа U называется *базой амальгамирования*, если любая амальгама с сердцевиной U совместна. Как показывает приведенный выше пример, не всякая полугруппа будет базой амальгамирования. Базами амальгамирования будут, например, все инверсные, все конечные моногенные, все двухэлементные полугруппы (Hall T. E.//Quart. J. Math. Oxford. — 1978. — V. 29. — P. 309—334). Любая полугруппа вложима в полугруппу, являющуюся базой амальгамирования (Belyaev V. Y.//Semigroup Forum. — 1982. — V. 25, № 3/4. — P. 223—267). Если в амальгаме все полугруппы и сердцевина принадлежат классу $\mathscr{K}$, то назовем такую амальгаму *$\mathscr{K}$-амальгамой*. Говорят, что класс $\mathscr{K}$ обладает *свойством амальгамирования* (или *свойством вложимости амальгам*), если любая $\mathscr{K}$-амальгама вложима в $\mathscr{K}$-полугруппу. Как и класс групп, класс инверсных полугрупп обладает свойством амальгамирования (см. [56], § VII.4; [76], § XIII. 1), но, в отличие от ситуации в группах, класс конечных инверсных полугрупп не обладает свойством амальгамирования (см., например, [56], с. 252—253). О многообразиях, обладающих свойством амальгамирования, см. [44], § 12; [76], § XIII. 2, XIII. 3.

Рассмотренное выше понятие вложимости амальгам называют обычно *сильной вложимостью*, понимая под *слабой вложимостью* амальгамы $[S_i; U; \varphi_i]$ аналогичное свойство, в котором, при инъективности μ, вместо равенств $S_i\mu_i \cap S_j\mu_j = U\mu$ требуются лишь включения $U\mu \subseteq S_i\mu_i \cup S_j\mu_j$. Соответственно можно различать *сильное* и *слабое* свойства амальгамирования для класса $\mathscr{K}$. В каждом из этих двух вариантов рассмотрение вложимости произвольных $\mathscr{K}$-амальгам сводится к случаю $\mathscr{K}$-амальгам двух полугрупп. А именно, если класс $\mathscr{K}$ замкнут относительно объединений направленных семейств полугрупп, то из сильной [слабой] вложимости в $\mathscr{K}$-полугруппу $\mathscr{K}$-амальгамы двух полугрупп вытекает сильная [слабая] вложимость в $\mathscr{K}$-полугруппу любой $\mathscr{K}$-амальгамы. Имеется еще один вариант свойства амальгамирования. Пусть U — подполугруппа полугруппы S_1, и ψ — изоморфизм S_1 на S_2; если всякая $\mathscr{K}$-амальгама вида $[S_1, S_2; U; \mathrm{id}_U, \psi|_U]$ сильно вложима в $\mathscr{K}$-полугруппу, то говорят, что класс $\mathscr{K}$ обладает *специальным свойством амальгамирования*. Свойство сильного амальгамирования эквивалентно конъюнкции свойств слабого и специального амальгамирования. О соотношениях между названными свойствами амальгамирования см., например, [76], § I. 12, I.13.

Приведенный выше пример демонстрирует невыполнение даже слабого свойства амальгамирования для класса всех полугрупп. Следующий пример демонстрирует невыполнение и специального свойства амальгамирования: если ψ — изоморфизм группы $(\mathbf{Z}, +)$ на группу Z, то амальгама $[(\mathbf{Z}, +), Z; (\mathbf{N}, +); \mathrm{id}_{\mathbf{N}}, \psi|_{\mathbf{N}}]$ не является сильно совместной.

4.6. Уравнения над полугруппами. Рассмотрим алфавит $A \cup X$, состоящий из двух частей: $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$; буквы из A будем называть *константами*, буквы из X — *переменными* или *неизвестными*. *Полугрупповым уравнением* называется всякое формальное равенство вида

$$w_1 = w_2, \text{ где } w_1, w_2 \in (A \cup X)^+. \qquad (*)$$

Если A — подмножество полугруппы S, то говорят, что $(*)$ есть *уравнение над* S. Аналогично определяется понятие *неравенства* $w_1 \neq w_2$ над S. Система Ξ уравнений и неравенств с константами из S и неизвестными $x_1, \ldots, x_m$ называется *разрешимой* в S, если найдутся $b_1, \ldots, b_m$ такие, что при подстановке их соответственно вместо $x_1, \ldots, x_m$ в каждое уравнение или неравенство из Ξ получаются, соответственно, равные или неравные элементы из S.

Полугруппы ряда важных типов определяются явно или могут быть определены в терминах разрешимости в них тех или иных уравнений простейшего вида при любых значениях констант. В следующей таблице приведены некоторые наиболее известные примеры.

Уравнение или система (двух) уравнений	Тип полугруппы, если решение	
	существует	единственно
$axa = a$	регулярная	группа
$axa = a, \quad xax = x$	регулярная	инверсная
$a^2x = a$	регулярная справа	правая группа
$xa^2 = a$	регулярная слева	левая группа
$a^2x = a, \quad ya^2 = a$	клиффордова	группа
$ax = b$	простая справа	правая группа
$xa = b$	простая слева	левая группа
$ax = b, \quad ya = b$	группа	группа
$axa = b$	группа	группа
$xay = b$	идеально простая	одноэлементная

Из таблицы видно, в частности, что и вполне простые полугруппы могут быть определены как полугруппы, в которых при любых значениях констант разрешима некоторая система уравнений, а именно: $a^2x = a$, $ya^2 = a$, $zau = b$.

Наиболее известный тип полугрупп, определяемых в терминах разрешимости бесконечных систем уравнений, представляют собой полные полугруппы. Элемент a полугруппы S называется *полным*, если для любого n в S разрешимо уравнение $x^n = a$. Полугруппа называется *полной*, если все ее элементы полные. Аддитивную полную полугруппу обычно называют *делимой*. Полугруппу, в которой при любом n выполняется квазитождество $x^n = y^n \to x = y$, называют полугруппой *с однозначным извлечением корня*. Полную полугруппу с однозначным извлечением корня называют *однозначно полной*, в аддитивной терминологии — *однозначно делимой*. Любая полугруппа вложима в полную, а любая инверсная — в полную инверсную полугруппу, причем объемлющая полугруппа может к тому же быть конгруэнц-простой (Шутов Э. Г., работа, цит. в п. 3.1). Класс полных полугрупп гомоморфно и мультипликативно замкнут.

Изучение полных полугрупп достаточно продвинуто лишь в коммутативном случае (см. Tamura T.//Bull. Amer. Math. Soc. — 1963. — V. 69, № 1. — P. 713—716). Говоря ниже о коммутативных полных полугруппах, мы будем использовать традиционную здесь аддитивную терминологию и прилагательное «коммутативная» применительно к данным полугруппам будем опускать. Коммутативно-свободное произведение (см. п. 2.5) семейства $\{S_i\}$ аддитивных коммутативных полугрупп будем называть *свободной суммой* и обозначать $\sum^* S_i$. Класс делимых полугрупп замкнут относительно свободных сумм. Через $\mathbf{R}_+$ обозначим аддитивную полугруппу всех положительных рациональных чисел, это «ключевой» пример делимой полугруппы. Полугруппа S будет делимой тогда и только тогда, когда S есть гомоморфный образ свободной суммы $\sum\limits_{\gamma \in \Gamma}^* R_\gamma$ некоторого семейства полугрупп, изоморфных $\mathbf{R}_+$; минимальная мощность индексного множества Γ в таком представлении называется степенью полугруппы S. Приведем классификацию делимых полугрупп степени 1. Для фиксированного неотрицательного действительного числа ξ и фиксированной подгруппы G из $(\mathbf{R}, +)$ рассмотрим следующие отношения на полугруппе $\mathbf{R}_+$; при $\xi > 0$ полагаем

$$\rho_1(\xi, G) = \{(x, y) \mid x - y \in G, \text{ если } x, y > \xi\} \cup \Delta;$$

при рациональном ξ полагаем

$$\rho_2(\xi, G) = \{(x, y) \mid x - y \in G, \text{ если } x, y \geqslant \xi\} \cup \Delta.$$

Конгруэнции на $\mathbf{R}_+$ исчерпываются отношениями $\rho_i(\xi, G)$ при всевозможных значениях параметров, удовлетворяющих указанным условиям. Факторполугруппу $\mathbf{R}_+/\rho_i(\xi, G)$ обозначим $R_i(\xi, G)$. Любая делимая полугруппа степени 1 изоморфна подходящей полугруппе $R_i(\xi, G)$. При этом

$$R_i(\xi, G) \simeq R_j(\eta, H) \iff i = j, \ G \simeq H \text{ и } \eta \cdot G = \xi \cdot H.$$

Если $G = \text{гр}\langle r\rangle$ — циклическая подгруппа, то полугруппу $R_i(\xi, G)$ обозначим $R_i(\xi, r)$.

Любая коммутативная полугруппа S вложима в делимую. Семейство $\{D_\alpha\}$ минимальных (по включению) делимых полугрупп, содержащих S, всегда непусто, но не обязано состоять из одной, с точностью до изоморфизма, полугруппы. Пример: для моногенной полугруппы $C_{2,3}$ каждая из полугрупп $R_1(1, 3)$, $R_2(2, 3)$ будет минимальной делимой полугруппой, содержащей $C_{2,3}$, но $R_1(1, 3) \not\simeq R_2(2, 3)$.

Система уравнений и неравенств Ξ называется *совместной* над полугруппой S, если S может быть вложена в полугруппу, в которой Ξ разрешима. Полугруппа S называется *алгебраически замкнутой* (а. з.), если для любой конечной системы уравнений над S из совместности Ξ над S следует разрешимость Ξ в S. Более общим понятием является экзистенциальная замкнутость; см. обзор [6], где полугруппы рассматриваются в § 4, 5, 8. Произвольная неодноэлементная а. з. полугруппа S обладает следующими свойствами (см. Neumann B. H.//Studies in pure math. — N. Y.: Acad. Press, 1971. — P. 185—194; Belyaev V. Y., работа, цитированная в п. 4.5; Беляев В. Я.//Сиб. мат. ж. — 1984. — Т. 25, № 1. — С. 30—38): 1) S не является конечно порожденной; 2) S бипроста и конгруэнц-проста; 3) S есть база амальгамирования; 4) E_S бесконечно и все максимальные подгруппы из S суть (изоморфные) а. з. группы, причем если S счетна, то любая ее максимальная подгруппа может быть переведена на любую другую максимальную подгруппу некоторым автоморфизмом. Существует континуум счетных попарно не изоморфных а. з. полугрупп. Любая полугруппа вложима в а. з. полугруппу. Любая счетная а. з. группа G вложима в единственную, с точностью до изоморфизма, счетную а. з. полугруппу в качестве максимальной подгруппы, а для всякого несчетного кардинала α группа G вложима в качестве максимальной подгруппы в 2^α попарно не изоморфных а. з. полугрупп мощности α. Если две счетные а. з. полугруппы S_1 и S_2 имеют одни и те же, с точностью до изоморфизма, конечно порожденные подполугруппы, то $S_1 \simeq S_2$.

Об а. з. полугруппах с точки зрения алгоритмических аспектов, а также о разрешимости уравнений в свободной полугруппе см. п. 8.1.

Полугруппа S называется *эквационально компактной* (э. к.), если для любой системы уравнений Ξ над S из разрешимости в S каждой конечной подсистемы из Ξ следует разрешимость в S системы Ξ. Как и в случае других универсальных алгебр, важнейшим примером э. к. полугрупп служат компактные топологические полугруппы. Полугруппа S_1 называется *ретрактом* полугруппы S_2, если существуют гомоморфизмы φ_1: $S_1 \to S_2$ и φ_2: $S_2 \to S_1$ такие, что $\varphi_1\varphi_2 = \mathrm{id}_{S_1}$. (Если при этом S_1 — подполугруппа в S_2, то обычно считают φ_1 тождественным вложением S_1 в S_2; ср. с понятием ретрактного расширения, п. 4.3.) Ретракт э. к. (и, в частности, компактной топологической) полугруппы будет э. к. полугруппой, но существует э. к. полугруппа, которая не может быть ретрактом никакой топологической полугруппы. Любая э. к. полугруппа с сокращением есть группа. Об э. к. полугруппах см. Taylor W.//Semigroup Forum. — 1972. — V. 5, № 1. — P. 81—88.

Если в системе уравнений и неравенств Ξ над полугруппой S выделена константа a, то требование разрешимости Ξ при любых значениях других констант определяет одноместный предикат $\pi = \pi(a, \Xi, S)$ с переменной a. Говорят, что для элемента $a \in S$ *потенциально выполняется свойство* π, если S может быть вложена в полугруппу T такую, что $\pi(a, \Xi, T)$ истинно. Таким образом, потенциальное выполнение свойства такого типа представляет собой специальный усиленный вариант совместности системы Ξ. Определение потенциальной выполнимости может быть точно так же дано и для произвольного (не обязательно одноместного) формульного предиката. В том случае, когда предикат π определяется уравнениями обратимости $ax = b$ и (или) $ya = b$, соответствующие свойства элемента называют *потенциальной обратимостью* (если берется система написанных двух уравнений) и *потенциальной обратимостью справа* [*слева*] (если берется первое [второе] уравнение). Элемент a полугруппы S потенциально обратим справа тогда и только тогда, когда при любых $x, y \in S^1$ из $xa^2 = ya^2$ следует $xb = yb$ для любого $b \in S$. Двойственно формулируется критерий потенциальной обратимости слева. Следствие обоих критериев: в полугруппе с сокращением каждый элемент 1) потенциально обратим справа и 2) потенциально обратим слева. Потенциально обратимый элемент удовлетворяет, очевидно, обоим условиям 1) и 2). Обратное не обязательно. Пример: в полугруппе, заданной копредставлением

$$\langle a,\ a',\ b,\ b',\ c,\ c' \mid ab = ca,\quad a'b = c'a,\quad ab' = ca' \rangle,$$

выполняется закон сокращения и, следовательно, каждый элемент удовлетворяет условиям 1) и 2); однако элемент a не является потенциально обратимым. О свойствах потенциальной обратимости элементов см. [24], гл. 10, § 4. Полугруппа вложима в группу тогда (и, очевидно, только тогда), когда каждый ее элемент потенциально обратим (см. [9], с. 90).

4.7. Финитно аппроксимируемые полугруппы. Напомним (см. п. 2.2), что финитно аппроксимируемые (ф. а.) полугруппы — это в точности полугруппы, разложимые в подпрямое произведение конечных полугрупп. Простое достаточное условие финитной аппроксимируемости состоит в том, что каждый элемент полугруппы имеет лишь конечное число делителей; этому условию удовлетворяют, например, свободные, свободные коммутативные и свободные n-нильпотентные полугруппы. Среди других известных типов ф. а. полугрупп — полурешетки и прямоугольные полугруппы. Всякая конечно порожденная коммутативная полугруппа будет ф. а. (см. [27], с. 450—462), но среди некоммутативных полугрупп существуют конечно порожденные (даже конечно определенные), не являющиеся ф. а.; пример — бициклическая полугруппа. Класс ф. а. полугрупп является предмногообразием (см. п. 1.1). Он также замкнут относительно свободных произведений, ординальных сумм, но не замкнут относительно идеальных расширений.

Если S — ф. а. полугруппа, то, очевидно, 1) все максимальные подгруппы из S являются ф. а и 2) в S нет неидемпотентных полных (см. п. 4.6) элементов. Если S — коммутативная и регулярная полугруппа, то каждое из условий 1), 2) достаточно для финитной аппроксимируемости S, но вообще (даже в коммутативном случае) это не так: в полугруппе $S = S^0$ с копредставлением

$$\Big\langle a_1,\ a_2,\ \ldots \ \Big|\ a_i^2 = 0,\ i = 1, 2, \ldots,\ a_i a_j = a_k a_l \quad \text{при любых } i \neq j,\ k \neq l \Big\rangle$$

единственный полный элемент, составляющий одновременно единственную максимальную подгруппу, — это 0, но S не является ф. а. Если полугруппа S удовлетворяет условию 1), то S будет ф. а. в следующих случаях: S вполне 0-проста и имеет конечное число $\mathcal{L}$- или $\mathcal{R}$-классов; S регулярна и каждый ее главный фактор имеет конечное число идемпотентов (Голубов Э. А.// Мат. заметки. — 1975. — Т. 17, № 3. — С. 423—432; в цитируемой работе указаны многие другие работы, посвященные ф. а. полугруппам).

О многообразиях ф. а. полугрупп см. п. 7.2, о ф. а. полугруппах с точки зрения алгоритмических аспектов — п. 8.1.

Модификацией понятия финитной аппроксимируемости является финитная аппроксимируемость относительно предикатов. Пусть π — предикат, выделяющий свойства элементов и (или) подмножеств полугруппы. Примеры: «элемент x регулярен», «элементы x и y инверсны друг к другу», «элемент x принадлежит подполугруппе H» и т. п. Полугруппа S называется *финитно аппроксимируемой относительно предиката* π, если для любой комбинации значений элементов $\{a_i\}$ и (или) подмножеств $\{M_j\}$, при которой значение π ложно, существует такой гомоморфизм φ полугруппы S в конечную полугруппу, что значение π для $\{a_i\varphi\}$ и (или) $\{M_j\varphi\}$ также ложно. Обычная финитная аппроксимируемость соответствует в этом определении предикату равенства. Полугруппу, ф. а. относительно вхождения элемента в подполугруппу, называют *финитно отделимой.* О многообразиях полугрупп, ф. а. относительно некоторых предикатов см. [44], § 6.

4.8. Вложения. Для различных классов полугрупп $\mathcal{K}$ нередко рассматривается проблема вложения полугрупп в $\mathcal{K}$-полугруппы: нахождение критерия такой вложимости, либо установление того, что любая полугруппа вложима в некоторую $\mathcal{K}$-полугруппу; при этом в роли $\mathcal{K}$ выступают как абстрактные классы (например, класс групп), так и конкретные (например, класс полугрупп преобразований того или иного типа). Другой характер носит ситуация, когда при рассмотрении вложимости полугруппы S [семейства полугрупп $\{S_i\}$] в полугруппу T определяющим служит фиксированный тип взаимодействия компонент пары S, T [пары $\{S_i\}$, T]; пример: S есть плотно вложенный идеал в T (см. п. 4.3) [$\{S_i\}$ есть амальгама, вложенная в T (см. п. 4.5)]. Результаты того и другого характера приводятся в ряде пунктов этой главы; в данном пункте представлена лишь соответствующая «сводная картина». В главе упоминаются факты, касающиеся вложения полугрупп в $\mathscr{K}$-полугруппы следующих типов: группы (пп. 1.1, 1.2, 2.5, 4.6, 7.1, 7.4, 8.1), клиффордовы полугруппы (п. 4.1), простые полугруппы разных типов (пп. 3.1, 5.1, 8.1), полные (п. 4.6), алгебраически замкнутые (пп. 4.6, 8.1), конечно порожденные (пп. 1.2, 2.4 2.5, 7.2), идемпотентно порожденные (п. 2.4), конечно собранные (п. 6.2) полугруппы, полугруппы с нулем или единицей (п. 2.1), симметрические (пп. 1.2, 4.2), симметрические инверсные (пп. 2.1, 4.2) полугруппы. В главе рассматриваются следующие вложения с фиксированным типом взаимодействия компонент: в глобальную надполугруппу (п. 1.1), в прямое (п. 1.1) или полупрямое (п. 4.4) произведение, в сплетение (п. 4.4), в сдвиговую оболочку (пп. 4.2, 4.3), в идеальное расширение с теми или иными свойствами (п. 4.3), вложение алгебраически замкнутой группы в алгебраически замкнутую полугруппу в качестве максимальной подгруппы (п. 4.6), вложение амальгамы в полугруппу (п. 4.5), потенциальная выполнимость некоторого свойства элементов полугруппы (п. 4.6).

§ 5. Регулярные полугруппы

5.1. Множество идемпотентов и естественный частичный порядок. Разнообразная информация о регулярных полугруппах, начиная со свойств, эквивалентных определению (см. п. 2.1), содержится во многих пунктах § 2—4. При выделении ряда важнейших типов регулярных полугрупп и некоторых их подтипов часто — в определениях или эквивалентных характеризациях — используется множество идемпотентов полугруппы. Несколько основных примеров см. в пп. 2.1 и 3.1. В данном пункте рассмотрение таких примеров продолжается.

В регулярной полугруппе S множество всех ее идемпотентов E будет антицепью тогда и только тогда, когда S вполне проста. Если в полугруппе $S=S^0$ множество $E\setminus\{0\}$ есть антицепь (т. е., другими словами, все ненулевые идемпотенты из S примитивны), то S называют *примитивной.* Следующие условия для полугруппы $S = S^0$ эквивалентны: (1) S регулярна и примитивна; (2) S регулярна и совпадает со своим правым [левым] цоколем; (3) S есть ортогональная сумма вполне 0-простых полугрупп (см. [18], § 6.5). Примитивность инверсной полугруппы $S = S^0$ эквивалентна, очевидно, тому, что E есть веерная полурешетка, а также тому, что S есть ортогональная сумма полугрупп Брандта. Полугруппа S инверсна и примитивна тогда и только тогда, когда для любого $a \in S \setminus \{0\}$ существует единственный элемент x такой, что $axa = a$. Более широкий класс составляют *строгие* (strict) инверсные полугруппы — так называют всякую инверсную полугруппу S с тем свойством, что для любых $e, f, g \in E$ из $e \geqslant f$, $e \geqslant g$ и $f\mathcal{D}g$ вытекает $f = g$. Следующие условия для инверсной полугруппы S эквивалентны: (а) S строгая; (б) для любого элемента $a \in S$ подполугруппа $a^{-1}Sa$ клиффордова; (в) для любого $e \in E$ подполугруппа eSe клиффордова; (г) для любых $a, b \in S$ имеет место $(aSa)(bSb) = abSab$; (д) S разложима в подпрямое произведение полугрупп Брандта и групп (см. [76], § II.4). В силу условия (б) инверсная полугруппа S будет строгой [комбинаторной строгой] тогда и только тогда, когда S удовлетворяет тождеству $(x^{-1}yx)(x^{-1}yx)^{-1} = (x^{-1}yx)^{-1}(x^{-1}yx)$ $[(x^{-1}yx)^2 = x^{-1}yx]$. Инверсная полугруппа S идеально проста [бипроста] тогда и только тогда, когда для любых $e, f \in E$ существует $a \in S$ такой, что $aa^{-1} = e$, $a^{-1}a \leqslant f$ $[aa^{-1} = e,\ a^{-1}a = f]$. Если S — бипростой инверсный моноид с единицей e, то $\mathcal{R}$-класс R_e [$\mathcal{L}$-класс L_e] является полугруппой с правым [левым] сокращением, в которой множество главных левых [правых] идеалов замкнуто относительно пересечения. Обратно, по всякой полугруппе R [полугруппе L] с такими свойствами можно сконструировать бипростой инверсный моноид S, содержащий ее в качестве $\mathcal{R}$- [$\mathcal{L}$-] класса единицы; при этом

$$S = \{a^{-1}b \mid a,\ b \in R\} \quad [S = \{ab^{-1} \mid a,\ b \in L\}].$$

Детали см. в [18], § 8.4.

Регулярная полугруппа S, в которой E есть цепь, будет, очевидно, инверсной. Если при этом E вполне упорядочена, то S оказывается клиффордовой полугруппой и, следовательно, цепью групп (см. [18], т. 2, с. 57—58). В дуальном варианте — когда цепь E вполне упорядочена по убыванию — наиболее изучен случай, когда E упорядочена по типу целых отрицательных чисел. Такую цепь называют ω-*цепью*, а регулярную полугруппу с ω-цепью идемпотентов называют ω-*регулярной* (или *регулярной* ω-*полугруппой*). Произвольная ω-регулярная полугруппа, очевидно, относится к одному из трех типов: 1) идеально простая; 2) имеющая собственное ядро; 3) не имеющая ядра. В случае 3) ω-регулярные полугруппы исчерпываются ω-цепями групп. Полугруппа S тогда и только тогда будет ω-регулярной полугруппой типа 2), когда

$$S = K + G_1 + \ldots + G_n, \qquad (*)$$

где $G_1, \ldots, G_n$ суть группы, а K — полугруппа типа 1). Для формулировки структурной теоремы, описывающей ω-регулярные полугруппы типа 1) (и, попутно, бипростые ω-регулярные полугруппы), нужна следующая конструкция. Пусть T — моноид, θ — гомоморфизм T в его группу обратимых элементов $G(T)$, N — множество всех неотрицательных целых чисел. На множестве $N \times T \times N$ зададим умножение формулой

$$(m, a, n)(p, b, q) = (m - n + t,\ a\theta^{t-n} \cdot b\theta^{t-p},\ q - p + t),$$

где $t = \max(n, p)$ и $\theta^0 = \mathrm{id}_T$. Тогда $N \times T \times N$ превращается в полугруппу, называемую *полугруппой Брака — Рейли* над моноидом T (с определяющим гомоморфизмом θ) и обозначаемую $\mathrm{BR}(T, \theta)$. Всякая полугруппа $\mathrm{BR}(T, \theta)$ есть идеально простой моноид с единицей $(0, e, 0)$, где e — единица моноида T. Отображение $a \mapsto (0, a, 0)$ есть вложение T в $\mathrm{BR}(T, \theta)$. Если σ — эндоморфизм моноида T, отображающий T на $\{e\}$, то моноид $\mathrm{BR}(T, \sigma)$ идеально прост. Таким образом, любая полугруппа S вложима в идеально простой моноид $\mathrm{BR}(S^1, \sigma)$. Полугруппа $\mathrm{BR}(T, \theta)$ регулярна [инверсна] тогда и только тогда, когда полугруппа T регулярна [инверсна]. Если T инверсна, то $(m, a, n)^{-1} = (n, a^{-1}, m)$ для любых $m, n \in N$, $a \in T$. В вырожденном случае, когда $T = \{e\}$, полугруппа Брака — Рейли над T есть попросту бициклическая полугруппа. В более общем случае, когда G — группа и θ — произвольный ее эндоморфизм, полугруппа $\mathrm{BR}(G, \theta)$ будет бипростой ω-регулярной полугруппой. Обратно, всякая бипростая ω-регулярная полугруппа изоморфна некоторой полугруппе Брака — Рейли над группой. Если T есть цепь из d групп, то $\mathrm{BR}(T, \theta)$ будет идеально простой ω-регулярной полугруппой, имеющей в точности d $\mathscr{D}$-классов. Обратно, любая идеально простая ω-регулярная полугруппа изоморфна некоторой полугруппе $\mathrm{BR}(T, \theta)$, где T есть цепь конечного числа групп. В частности, любая ω-регулярная полугруппа типа 1) имеет лишь конечное число $\mathscr{D}$-классов. Об ω-регулярных полугруппах см. [18], т. 2, с. 138—139; [56], § V.6, V.7; [75], гл. III; [76], § II.5, II.6, гл. XI.

Более информативный взгляд на множество идемпотентов E регулярной полугруппы состоит в рассмотрении на этом множестве частичной операции $\circ$, заданной следующим образом. Если $e, f \in E$ и хотя бы одно из произведений ef, fe равно одному из элементов e, f, то $ef \in E$; полагают тогда $e \circ f = ef$. Возникающая частичная алгебра может быть охарактеризована аксиомами, использующими два отношения квазипорядка — ограничения на E отношений делимости $|_l$ и $|_r$ на S, — пересечение которых есть отношение естественного частичного порядка на E. Такая частичная алгебра будет так называемым (регулярным) *биупорядоченным множеством*. Произвольная регулярная полугруппа может быть определенным образом сконструирована из регулярного биупорядоченного множества и групп. О биупорядоченных множествах и их роли в изучении структуры регулярных полугрупп см., например, [65], § 6.

Через $V(a)$ обозначим множество всех элементов данной полугруппы S, инверсных к элементу $a \in S$. В регулярной полугруппе $a\mathscr{L}b$ $[a\mathscr{R}b, a\mathscr{H}b]$ тогда и только тогда, когда существуют $a' \in V(a)$ и $b' \in V(b)$ такие, что $a'a = b'b$ $[aa' = bb'$, $a'a = b'b$ и $aa' = bb']$. Следующие условия для регулярной полугруппы S эквивалентны: (1) S ортодоксальна (см. п. 2.1); (1′) каждый главный фактор (см. п. 3.1) из S ортодоксален; (2) $V(e) \subseteq E$ для любого $e \in E$; 3) $V(a)V(b) \subseteq V(ab)$ для любых a, $b \in S$; (4) для любых a, $b \in S$ из того, что $V(a) \cap V(b) \neq \varnothing$, следует $V(a)=V(b)$. Класс ортодоксальных полугрупп гомоморфно замкнут. Отношение γ на ортодоксальной полугруппе S, заданное формулой $\gamma = \{(x, y) \mid V(x)=V(y)\}$, есть наименьшая инверсная конгруэнция на S. Полугруппа идемпотентов E называется *равномерной* [*антиравномерной*], если для любых $f, g \in E$ имеет место $fEf \simeq gEg$ [из $fEf \simeq gEg$ следует, что f и g лежат в одной прямоугольной компоненте полугруппы E]. Полугруппа идемпотентов E равномерна [антиравномерна] тогда и только тогда, когда существует бипростая ортодоксальная полугруппа S такая, что $E_S \simeq E$ [каждая ортодоксальная полугруппа, подполугруппа идемпотентов которой изоморфна E, необходимо клиффордова]. В регулярной полугруппе S множество E_S унитарно слева тогда и только тогда, когда оно унитарно справа; при этом S ортодоксальна. Ортодоксальным полугруппам посвящены гл. VI в [56] и гл. 6 в [70]. Структурные теоремы для ортодоксальных клиффордовых полугрупп (ортогрупп) см. также в [75], гл. IV; одна из таких теорем приведена в п. 6.1.

Подмножество H регулярной полугруппы S называется *полным* [*самосопряженным*], если $E_S \subseteq H$ [для любого $a \in S$ и любого $a' \in V(a)$ имеет место $a'Ha \subseteq H$]. Если H — полная и самосопряженная регулярная подполугруппа в S, то H называют *нормальной подполугруппой* полугруппы S, а S — *нормальным расширением* полугруппы H. Последовательному использованию нормальных расширений для изучения структуры регулярных полугрупп посвящена монография [70]. О нормальных расширениях применительно к инверсным полугруппам см. [76], § VI. 6, VI. 7.

Множество конгруэнций на регулярной полугруппе S, разделяющих идемпотенты, составляет модулярную подрешетку с нулем Δ_S и единицей $\mathscr{H}^b$ (см. п. 2.2) в решетке $\operatorname{Con} S$. Если $\Delta_S = \mathscr{H}^b$ (т. е. указанная подрешетка одноэлементна), то S называется *фундаментальной*. Фундаментальные инверсные полугруппы называют также *антигруппами*. Всякая комбинаторная регулярная полугруппа будет фундаментальной. Для любого регулярного биупорядоченного множества E можно сконструировать фундаментальную регулярную полугруппу T_E, для которой E будет биупорядоченным множеством всех идемпотентов, причем для любой регулярной полугруппы S такой, что $E_S = E$, существует разделяющий идемпотенты гомоморфизм φ: $S \to T_E$, для которого $S\varphi$ будет полной подполугруппой в T_E. Известны различные конструкции для T_E (см., например, соответствующие работы, указанные в [31], т. 4, с. 936). Регулярная полугруппа S фундаментальна тогда и только тогда, когда упомянутый гомоморфизм φ инъективен. В случае когда S инверсна, биупорядоченное множество E_S превращается попросту в полурешетку, а для полугруппы T_E может быть дана нижеследующая прозрачная конструкция. Пусть E — полурешетка, τ — отношение на E, заданное формулой

$$\tau = \{(f, g) \mid Ef \simeq Eg\}.$$

Для каждой пары $(f, g) \in \tau$ через $T_{f,g}$ обозначим множество всех изоморфизмов Ef на Eg и положим $T_E = \bigcup\limits_{(f,g)\in\tau} T_{f,g}$. Множество T_E является (фундаментальной) инверсной подполугруппой симметрической инверсной полугруппы $\mathcal{I}(E)$; ее называют *полугруппой Манна* полурешетки E.

Примеры: 1) если E есть ω-цепь, то T_E — бициклическая полугруппа; 2) если E есть цепь натуральных чисел, то $T_E \simeq E$.

Полурешетка E в примере 1) [в примере 2)] равномерна [антиравномерна] (антиравномерность полурешетки E эквивалентна, очевидно, равенству $\tau = \Delta_E$). Для всякой равномерной полурешетки E полугруппа T_E бипроста. Для инверсной полугруппы S упомянутый выше гомоморфизм φ: $S \to T_E$ (где $E \simeq E_S$) задается равенством $a\varphi = \delta_a$, где δ_a — отображение из T_E, заданное условиями $\operatorname{dom}\delta_a = Eaa^{-1}$ и $e\delta_a = a^{-1}ea$ $(e \in \operatorname{dom}\delta_a)$. Отношение $\ker\varphi$ здесь совпадает с наибольшей конгруэнцией, разделяющей идемпотенты. Инверсная полугруппа S будет фундаментальной тогда и только тогда, когда S изоморфна некоторой полной инверсной подполугруппе из T_{E_S}. О фундаментальных инверсных полугруппах см. [56], § V.4.

Для элементов a и b регулярной полугруппы S положим $a \leqslant b$, если выполнено одно из следующих (в действительности эквивалентных) условий: (1) $a \in aV(a)b \cap bS$; (1′) $a \in bV(a)a \cap Sb$. Отношение $\leqslant$ будет частичным порядком на S (Nambooripad K. S. S.//Proc. Edinburgh Math. Soc. 1980. — V. 23, № 3. — P. 249—260), продолжающим естественный частичный порядок на E_S. Оно называется *естественным частичным порядком* на S. В случае когда S инверсна, соотношение $\leqslant$ эквивалентно каждому из следующих условий: (2) $a \in Eb$; (2′) $a \in bE$; (3) $a = aa^{-1}b$; (3′) $a = ba^{-1}a$; (4) $a^{-1}a = a^{-1}b$; (4′) $aa^{-1} = ab^{-1}$; (5) $a = ab^{-1}a$. Для произвольного подмножества H инверсной полугруппы S положим $\bar{H} = \{x \in S \mid h \leqslant x$ для некоторого $h \in H\}$. Отображение $H \mapsto \bar{H}$ есть оператор замыкания на множестве подмножеств $\mathscr{P}(S)$ и $\bar{H}$ называют *замыканием* подмножества H; если $H = \bar{H}$, то подмножество H называется *замкнутым*. Если H — инверсная подполугруппа, то $\bar{H}$ будет замкнутой инверсной полугруппой. Естественный частичный порядок на инверсной полугруппе иногда обозначают через ω, и тогда замыкание подмножества H обозначают $H\omega$. Для инверсной полугруппы S множество E_S будет унитарным тогда и только тогда, когда E_S замкнуто; полугруппа S с таким свойством называется *E-унитарной* (или *собственной*).

Нижеследующая конструкция описывает E-унитарные инверсные полугруппы. Пусть X — направленное вниз частично упорядоченное множество, G — группа автоморфизмов X (записываемых как левые операторы), Y — идеал в X, являющийся нижней полурешеткой и такой, что $GY = X$. Положим $P(Y, G, X) = \{\alpha, g) \in Y \times G \mid g^{-1}\alpha \in Y\}$. Зададим на $P(Y, G, X)$ умножение формулой

$$(\alpha, g) \cdot (\beta, h) = (\alpha \wedge g\beta, g \circ h).$$

Тогда $P(Y, G, X)$ превращается в E-унитарную инверсную полугруппу, называемую *P-полугруппой*. Обратно, всякая E-унитарная инверсная полугруппа изоморфна некоторой P-полугруппе.

Дополнительную информацию о E-унитарных инверсных полугруппах см. в п. 5.2; см. также [76], § III.7 и гл. VII. О естественном частичном порядке на регулярной полугруппе см., например, [65], с. 127, на инверсной полугруппе — [18], § 7.1, 7.2; [56], § V.2.

Для элементов φ и ψ симметрической инверсной полугруппы $\mathscr{I}(X)$ соотношение $\varphi \leqslant \psi$ выполняется тогда и только тогда, когда $\varphi \subseteq \psi$, если трактовать φ и ψ как подмножества из $X \times X$. Естественный частичный порядок на инверсной полугруппе S стабилен и согласован также с операцией $^{-1}$, т. е. из $a \leqslant b$ следует $ca \leqslant cb$, $ac \leqslant bc$, $a^{-1} \leqslant b^{-1}$ при любом $c \in S$. На произвольной регулярной полугруппе S отношение $\leqslant$ стабильно тогда и только тогда, когда для любого $e \in E_S$ подполугруппа eSe инверсна. Регулярную полугруппу с последним свойством называют *псевдоинверсной* (а также *локально инверсной*). Более широкий класс составляют *псевдоортодоксальные* полугруппы (называемые также *локально ортодоксальными*) — регулярные полугруппы S, в которых для любого $e \in E_S$ подполугруппа eSe ортодоксальна. О структурных теоремах для псевдоинверсных и псевдоортодоксальных полугрупп см., например, [65].

5.2. Конгруэнции на инверсных полугруппах. Напомним, что любая конгруэнция ρ на инверсной (и, более общо, регулярной) полугруппе определяется ρ-классами, содержащими идемпотенты. Семейство таких ρ-классов может быть охарактеризовано следующим образом. Пусть $\{S_i\}_{i \in I}$ — россыпь инверсных подполугрупп инверсной полугруппы S, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $E_S \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i$; 2) для любого $a \in S$ и любого $i \in I$ существует $j \in I$ такое, что $a^{-1}S_i a \subseteq S_j$; 3) для любых $a, b \in S$ из того, что $a, ab, bb^{-1} \in S_i$, следует $b \in S_i$. Такую россыпь называют *нормальной ядерной системой* (мы будем называть *нормальной россыпью*) полугруппы S. По нормальной россыпи $\mathcal{N} = \{S_i\}_{i \in I}$ определим на S отношение $\xi_{\mathcal{N}}$ следующим правилом:

$$a \xi_{\mathcal{N}} b \iff aa^{-1},\ bb^{-1},\ ab^{-1} \in S_i \text{ для некоторого } i \in I.$$

Тогда $\xi_{\mathcal{N}}$ — конгруэнция, причем семейство $\xi_{\mathcal{N}}$-классов, содержащих идемпотенты, совпадает с $\mathcal{N}$. Обратно, для любой конгруэнции ρ на S семейство $\mathcal{N}$ ρ-классов, содержащих идемпотенты, будет нормальной россыпью, причем $\rho = \xi_{\mathcal{N}}$. Имеется другой способ описания конгруэнций на произвольной инверсной полугруппе S. Если ρ — конгруэнция на S, то (инверсную) подполугруппу $\ker \rho = \bigcup_{e \in E_S} \rho(e)$ называют *ядром* ρ, а отношение $\operatorname{tr} \rho = \rho|_{E_S}$ — *следом* ρ. Конгруэнция τ на полурешетке E_S называется *нормальной*, если для любых $e, f \in E_S$, $a \in S$ из $e\tau f$ следует $a^{-1}ea\tau a^{-1}fa$. Пара (H, τ) называется *конгруэнц-парой* для S, если H — нормальная подполугруппа (см. п. 5.1), τ — нормальная конгруэнция на E_S и выполнены условия: а) из $ae \in H$ и $e\tau a^{-1}a$ следует $a \in H$ $(a \in S, e \in E_S)$; б) для любого $h \in H$ имеет место $hh^{-1}\tau h^{-1}h$. По конгруэнц-паре (H, τ) определим отношение $\rho(H, \tau)$ на S следующим правилом:

$$a\rho(H, \tau)b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H, \ a^{-1}a\tau b^{-1}b.$$

Тогда $\rho(H, \tau)$ есть конгруэнция, причем $\ker \rho(H, \tau) = H$ и $\operatorname{tr} \rho(H, \tau) = \tau$. Обратно, для любой конгруэнции ρ на S пара $(\ker \rho, \operatorname{tr} \rho)$ будет конгруэнц-парой, причем $\rho = \rho(\ker \rho, \operatorname{tr} \rho)$. Для конгруэнции ρ на инверсной полугруппе S через $\rho^{\min}$ $[\rho_{\min}]$ обозначается наименьшая конгруэнция на S, ядро [след] которой совпадает с $\ker \rho$ $[\operatorname{tr} \rho]$. Аналогичный (дуальный) смысл имеют обозначения $\rho^{\max}$ и $\rho_{\max}$. В решетке $\operatorname{Con} S$ выполняются равенства

$$\rho = \rho_{\min} \vee \rho^{\min} = \rho_{\max} \cap \rho^{\max}.$$

Через μ [через σ] обозначают наибольшую разделяющую идемпотенты [наименьшую групповую] конгруэнцию на инверсной полугруппе. Имеет место

$$\mu = \{(a, b) \mid a^{-1}ea = b^{-1}eb \text{ для любого идемпотента } e\},$$

$$\sigma = \{(a, b) \mid ae = be \text{ для некоторого идемпотента } e\} =$$
$$= \{(a, b) \mid a \geqslant c, \ b \geqslant c \text{ для некоторого элемента } c\}.$$

Выполняются равенства $\ker \mu = \operatorname{Cent}(E)$, $\ker \sigma = \bar{E}$. Равенство $\operatorname{Cent}(E) = E$ $[\operatorname{Cent}(E) \cap \bar{E} = E]$ справедливо для инверсной полугруппы S тогда и только тогда, когда S есть антигруппа (см. п. 5.1) [разложима в подпрямое произведение группы и антигруппы]. Из равенства $\ker \sigma = \bar{E}$, перефразируя определение E-унитарной полугруппы (см. п. 5.1), получаем, что E-унитарность эквивалентна условию $\ker \sigma = E$. Это означает, что класс E-унитарных инверсных полугрупп совпадает с мальцевским произведением многообразия всех полурешеток на многообразие всех групп. Внутри класса инверсных полугрупп он выделяется квазитождеством $xy = x \rightarrow y^2 = y$. E-унитарная инверсная полугруппа T называется *E-унитарным накрытием над группой G* инверсной полугруппы S, если $T/\sigma \simeq G$ и существует разделяющий идемпотенты сюръективный гомоморфизм ψ: $T \to S$. Всякая инверсная полугруппа имеет E-унитарное накрытие.

Говорят, что гомоморфизм φ инверсной полугруппы S *сохраняет групповую реплику*, если $S\varphi/\sigma \simeq S/\sigma$. Для любой конгруэнции ρ на инверсной полугруппе S имеет место $\rho_{\min} \subseteq \sigma$, и естественный гомоморфизм $\rho^{\natural}_{\min}$ сохраняет групповую реплику; кроме того, гомоморфизм ψ: $S/\rho_{\min} \to S/\rho$, заданный формулой $\rho_{\min}(a)\psi = \rho(a)$, разделяет идемпотенты. Таким образом, любой гомоморфизм инверсной полугруппы представим в виде произведения $\varphi\psi$, где φ сохраняет групповую реплику, а ψ разделяет идемпотенты. Следующие условия для конгруэнции ρ эквивалентны: (1) ρ есть E-унитарная конгруэнция; (2) подполугруппа $\ker \rho$ замкнута; (3) $\rho^{\max}$ есть групповая конгруэнция; (4) $\rho^{\max} = \rho \vee \sigma$.

Конгруэнц-простые инверсные полугруппы с единственным идемпотентом суть в точности простые группы. Если S — инверсная полугруппа, в которой $|E| > 1$, то S будет конгруэнц-простой тогда и только тогда, когда $\mathrm{Cent}(E) = E$, $\bar{E} = E$ и выполнено следующее условие: для любых $e, f, g, h \in E$ таких, что $e > f$ и $g > h$, найдутся $t_1, t_2, \ldots, t_n \in S$ такие, что

$$g = t_1^{-1} e t_1,$$

$$t_i^{-1} f t_i = t_{i+1}^{-1} e t_{i+1} \text{ при } i = 1, \ldots, n, \quad t_n^{-1} f t_n \leqslant h.$$

Конечная инверсная полугруппа будет конгруэнц-простой тогда и только тогда, когда она либо простая группа, либо полугруппа Брандта над единичной группой.

Подробная информация о конгруэнциях инверсных полугрупп содержится в [76], гл. III и гл. IV, § 3; см. также [18], § 7.4, 7.6; [24], гл. 7, § 3. Многие построения, касающиеся конгруэнций инверсных полугрупп, могут так или иначе быть распространены на регулярные полугруппы; обзор соответствующих исследований дан в [69].

5.3. Свободные инверсные и клиффордовы полугруппы. Как отмечено в п. 2.1, класс всех инверсных [клиффордовых] унарных полугрупп является многообразием, и, следовательно, для любого алфавита A можно рассматривать *свободную инверсную* [*клиф-*

фордову] полугруппу I_A [полугруппу C_A] над A. Изоморфизм $I_A \simeq I_B$ $[C_A \simeq C_B]$ имеет место тогда и только тогда, когда $|A|=|B|$, и мощность алфавита называется *рангом* соответствующей свободной полугруппы. Если через F_A обозначить свободную унарную полугруппу над A (т. е. алгебру термов в сигнатуре, состоящей из умножения и унарной операции $^{-1}$), то полугруппа I_A [полугруппа C_A] будет изоморфна факторалгебре F_A/ρ, где ρ — конгруэнция, порожденная бинарным отношением, соответствующим тождествам, которые задают многообразие инверсных [клиффордовых] полугрупп (см. п. 2.1). Для представления I_A вместо F_A можно (и удобнее) сразу рассматривать полугруппу $(A \cup A^{-1})^+$, где $A^{-1}=\{a^{-1} \mid a \in A\}$. Полугруппа $(A \cup A^{-1})^+$ очевидным образом превращается в унарную полугруппу: унарная операция определяется правилами

$$a \mapsto a^{-1}, \quad a^{-1} \mapsto a, \quad (x_1 \dots x_n)^{-1} = x_n^{-1} \dots x_1^{-1},$$

где $a \in A$, $x_1, \dots, x_n \in A \cup A^{-1}$. Это не что иное, как *свободная инволютированная полугруппа* над алфавитом A. Одну из канонических форм элементов I_A задают слова $w \in (A \cup A^{-1})^+$ вида $w = v_1 v_1^{-1} v_2 v_2^{-1} \dots \dots v_n v_n^{-1} v$, где все v_i и v суть приведенные слова в свободной группе над A (т. е. не содержащие подслов вида aa^{-1} и $a^{-1}a$, где $a \in A$), причем ни одно из слов v_i не является началом как слова v, так и слов v_j при $j \neq i$.

Имеются и другие конструкции для полугруппы I_A. Например, существует биективное соответствие между элементами I_A и конечными ориентированными деревьями, в которых: а) каждая дуга помечена буквой из A; б) две соседние дуги могут быть помечены одной и той же буквой лишь в том случае, если они одинаково направлены; в) выделены две вершины (корни). Моноид I_A^1 изоморфен P-полугруппе $P(Y, G_A, X)$ (см. п. 5.1), где G_A — свободная группа над A, Y — множество всех конечных непустых подмножеств $M \subseteq G_A$ таких, что $1 \in M$ и вместе с любым $w \in M$ подмножеству M принадлежит любой начальный отрезок слова w, $X = \{gM \mid g \in G_A, M \in Y\}$.

Свободная инверсная полугруппа любого ранга комбинаторна, вполне полупроста и финитно аппроксимируема, а ее правый и левый остовы удовлетворяют условию максимальности. Свободная инверсная полугруппа конечного ранга хопфова. Для любого неидемпотентного элемента $a \in I_a$ подполугруппа инв$\langle a \rangle$ является свободной инверсной полугруппой.

Для любого натурального n в инверсных полугруппах выполняется тождество $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$, что позволяет положить $x^{-n} = (x^n)^{-1}$. Канонической формой элементов $I_{\{a\}}$ будет $a^{-k}a^l a^{-m}$, где $l \geqslant k \geqslant 0$, $l \geqslant m \geqslant 0$, $l > 0$, с правилом перемножения

$$a^{-k_1}a^{l_1}a^{-m_1} \cdot a^{-k_2}a^{l_2}a^{-m_2} = a^{-k}a^l a^{-m},$$

где

$$k = k_1 + m_1 + k_2 - \min(l_1, m_1 + k_2),$$
$$l = l_1 + m_1 + k_2 + l_2 - \min(l_1, m_1 + k_2) - \min(l_2, m_1 + k_2),$$
$$m = m_1 + k_2 + m_2 - \min(l_2, m_1 + k_2).$$

Взятие инверсного элемента задается формулой

$$(a^{-k}a^l a^{-m})^{-1} = a^{m-l}a^l a^{k-l}.$$

Идемпотенты в $I_{\{a\}}$ имеют вид $a^{-k}a^{k+m}a^{-m}$. Полурешетка $E_{I\{a\}}$ изоморфна полурешетке, полученной отбрасыванием наибольшего элемента из прямого произведения двух цепей целых отрицательных чисел. Одно из точных представлений свободной моногенной инверсной полугруппы дает множество

$$\{(m, k, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid m \leqslant k,\ 0 \leqslant n,\ m < n\}$$

с умножением, определенным формулой

$$(m, k, n)(m', k', n') = (\min\{m, k + m'\},\ k + k',\ \max\{n, k + n'\}).$$

Свободная моногенная инверсная полугруппа разложима в подпрямое произведение двух бициклических полугрупп. Копредставление полугруппы $I_{\{a\}}$ в обычной полугрупповой сигнатуре см. в п. 2.5.

Среди наиболее важных подмногообразий многообразия клиффордовых полугрупп — многообразие вполне простых полугрупп. *Свободные вполне простые полугруппы* могут быть описаны в терминах рисовских матричных полугрупп; при этом нижеследующая конструкция охватывает и более общий случай — свободные полугруппы в многообразии $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ всех вполне простых полугрупп над фиксированным многообразием групп $\mathcal{X}$ (Расин В. В.//Исследования по современной алгебре. — Мат. зап. УрГУ. — 1979. — Т. 11, № 3. — С. 140—151; для случая, когда $\mathcal{X}$ есть многообразие всех групп, — Clifford A. H.//J. Algebra. — 1979. — V. 59. — P. 434—451). Пусть A — непустое множество с фиксированным элементом a_0. Положим $B = (A \setminus \setminus \{a_0\}) \times (A \setminus \{a_0\})$. Через F обозначим свободную $\mathscr{X}$-группу с $\mathscr{X}$-свободным базисом $A \cup B$, через e — единицу группы F. Определим $A \times A$-матрицу $P = (p_{xy})$ над группой F следующим правилом:

$$p_{xy} = \begin{cases} 0 & \text{если } x = a_0 \text{ или } y = a_0, \\ (x, y) \in B & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда рисовская матричная полугруппа $\mathscr{M}[F; A, A; P]$ будет свободной $\mathscr{M}(\mathscr{X})$-полугруппой с $\mathscr{M}(\mathscr{X})$-свободным базисом $\{(a, a, a) \mid a \in A\}$.

В [81] дан обзор основных исследований, посвященных описанию (с точки зрения канонических форм элементов, проблемы равенства слов и представлений теми или иными конструкциями) полугрупп I_A и C_A, а также свободных (унарных) полугрупп в некоторых подмногообразиях рассматриваемых двух многообразий, а именно — связок, вполне простых полугрупп и комбинаторных строгих (см. п. 5.1) инверсных полугрупп. О свободных связках конечного ранга см. п. 6.3. Подробная информация о свободных инверсных полугруппах содержится в [76], гл. VIII, IX.

§ 6. Эпигруппы

Некоторая предварительная информация об эпигруппах (определение см. в п. 2.1) содержится в пп. 2.3, 2.7, 3.1 и 4.1. Напомним, что класс эпигрупп включает в себя, кроме периодических и клиффордовых полугрупп, все вполне 0-простые полугруппы. Полугруппа S будет эпигруппой тогда и только тогда, когда для любого $a \in S$ каждая из убывающих последовательностей главных односторонних идеалов

$$L(a) \supseteq L(a^2) \supseteq \ldots \supseteq L(a^n) \supseteq \ldots,$$
$$R(a) \supseteq R(a^2) \supseteq \ldots \supseteq R(a^n) \supseteq \ldots$$

стабилизируется, начиная с некоторого номера (см., например, Drazin M.P.//Amer. Math. Monthly. — 1958. — V. 65. — P. 506—514). В частности, эпигруппой будет всякая регулярная полугруппа S, у которой множество E_S удовлетворяет условию минимальности. Всякая эпигруппа устойчива (см. п. 2.7).

6.1. Классы унипотентности. Пусть S — произвольная эпигруппа, $\{G_e\}_{e \in E}$ — россыпь ее максимальных подгрупп. Для каждого $e \in E$ положим

$$K_e = \{x \in S \mid x^n \in G_e \text{ для некоторого } n\}.$$

Множество K_e называется *классом унипотентности* эпигруппы S, соответствующим идемпотенту e. Классы унипотентности эпигруппы составляют ее разбиение (Munn W. D.//Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1961.—V. 57, № 2.—P. 247—250), а отображение $x \mapsto \bar{x} = (ex)^{-1}$, где $x \in K_e$ превращает эпигруппу в унарную полугруппу; элемент $\bar{x}$ называют *псевдообратным* к элементу x. Классы унипотентности периодической полугруппы обычно называют *классами кручения*; при этом определение класса K_e может быть заменено эквивалентным: $K_e = \{x \mid e \in \langle x \rangle\}$. В случае клиффордовых полугрупп классы унипотентности суть попросту максимальные подгруппы, а указанная унарная операция превращается в операцию $^{-1}$ клиффордовой унарной полугруппы.

В произвольной эпигруппе для любого идемпотента e имеет место $G_e \trianglelefteq \langle K_e \rangle$ (т. е. $\langle K_e \rangle$ есть гомогруппа), но даже в конечной полугруппе классы унипотентности не обязаны быть подполугруппами; минимальный контрпример — полугруппа B_2, в которой класс кручения $K_0 = \mathrm{Nil}\, B_2$ не является подполугруппой. Этот пример служит в некотором смысле характеристическим: все классы унипотентности эпигруппы S будут подполугруппами тогда и только тогда, когда S не содержит подполугруппу, являющуюся идеальным расширением унипотентной эпигруппы при помощи B_2. В частности, разбиением на унипотентные полугруппы обладает всякая эпигруппа, разложимая в связку архимедовых полугрупп (т. е. $\mathcal{AS}$-полугруппа, см. п. 4.1). Через $\mathrm{Reg}\, S$ обозначим множество всех регулярных элементов полугруппы S. Для эпигруппы S список условий, эквивалентных свойству $\mathcal{AS}$ (см. п. 4.1), можно дополнить следующими условиями: (а) $\mathrm{Reg}\, S = \mathrm{Gr}\, S$; (а′) каждый регулярный $\mathcal{D}$-класс в S есть подполугруппа; (б) среди эпифакторов (см. п. 2.2) полугруппы S нет подполугрупп A_2 и B_2; (б′) среди рисовских эпифакторов S нет A_2 и B_2. Эпигруппа разложима в связку унипотентных полугрупп тогда и только тогда, когда среди ее эпифакторов нет полугрупп A_2, B_2, $L_{3,1}$,

$R_{3,1} = \overleftarrow{L}_{3,1}$, $L[C_{1,p}]$ и $R[C_{1,p}]$ (см. п. 2.5) ни при каком простом p. (См. Шеврин Л. Н.//XVI Всесоюзн. алгебр. конф. — Ленинград, 1981. — С. 177, 188; XVII Всесоюз. алгебр. конф. — Минск, 1983. — С. 267—268.) В случае клиффордовых полугрупп последняя разложимость превращается в разложимость в связку групп; связки групп называют также *криптогруппами*. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S есть криптогруппа; (2) S клиффордова и для любых $a, b \in S$ имеет место $abS = a^2bS$ и $Sba = Sba^2$ (см. [18], т. 1, с. 173); (3) S клиффордова и среди ее эпифакторов нет полугрупп $L[C_{1,p}]$ и $R[C_{1,p}]$ ни при каком простом p. Ортодоксальную криптогруппу называют также *ортокриптогруппой*. Полугруппа S будет ортокриптогруппой тогда и только тогда, когда S регулярна и разложима в подпрямое (даже хребтовое, см. п. 1.1) произведение полугруппы идемпотентов и полурешетки групп (см., например, [75], § IV. 7).

Рассмотрению ряда типов полугрупп, определяемых требованием, чтобы некоторая степень каждого элемента являлась элементом с теми или иными фиксированными свойствами, в том числе эпигрупп (называемых *вполне π-регулярными полугруппами*), посвящено большинство глав в [48]. О классах кручения периодических полугрупп см. [24], гл. III, § 4.

6.2. Условия конечности. В соответствии с общеалгебраическим определением, абстрактное теоретико-полугрупповое свойство называется *условием конечности*, если этим свойством обладает любая конечная полугруппа. Условие конечности *нетривиально*, если ему удовлетворяет хотя бы одна бесконечная полугруппа. Примеры нетривиальных условий конечности: конечная порожденность, финитная аппроксимируемость и др. Среди таких условий — и свойство быть эпигруппой. В этом и следующем пунктах рассмотрены некоторые более сильные свойства.

Бесконечная эпигруппа с конечным числом идемпотентов необходимо содержит бесконечную унипотентную подэпигруппу. Если в эпигруппе S множество E_S бесконечно, то S содержит бесконечную подполугруппу, являющуюся нильпотентной полугруппой или полугруппой идемпотентов. Полугруппу с конечным числом идемпотентов и, следовательно, максимальных подгрупп и конечным числом негрупповых элементов назовем *конечно собранной*; такая полугруппа автоматически будет эпигруппой. Если в конечно собранной полугруппе S все максимальные подгруппы принадлежат фиксированному классу $\mathscr{K}$, то будем говорить, что *S конечно собрана из $\mathscr{K}$-групп*. Если эпигруппа S не обладает подполугруппами с единственным бесконечным базисом, то S конечно собрана. Обратное, вообще говоря, неверно (тривиальный контрпример — свободная группа ранга 2, она содержит свободную подполугруппу счетного ранга), но для периодических полугрупп конечная собранность влечет за собой отсутствие подполугрупп с единственным бесконечным базисом.

Если условие конечности, определяющее класс $\mathscr{K}$, таково, что а) $\mathscr{K}$ наследствен, б) $\mathscr{K}$ не содержит полугрупп с единственным бесконечным базисом, в) всякая полугруппа, покрываемая конечным числом $\mathscr{K}$-полугрупп, сама будет $\mathscr{K}$-полугруппой, то эпигруппа тогда и только тогда будет $\mathscr{K}$-полугруппой, когда она конечно собрана из $\mathscr{K}$-групп.

Сформулированный общий редукционный критерий может быть применен к различным конкретным полугрупповым условиям конечности. При этом в ряде случаев не требуется оговаривать, что рассматриваются эпигруппы, ибо многие условия влекут за собой даже периодичность. Таково, например, условие минимальности для подполугрупп (одно из непосредственных следствий соответствующего описания: если в бесконечной полугруппе S все собственные подполугруппы конечны, то S является группой). Еще два примера такого рода: 1) полугруппа S называется полугруппой *конечного ранга* r, если каждая конечно порожденная подполугруппа из S является r-порожденной, причем r — наименьшее число с таким свойством; 2) полугруппа S называется полугруппой *конечной ширины* r, если $\bigvee$-ширина ($=\bigwedge$-ширина) решетки $\mathrm{Sub}\, S$ (см. п. I. 2.1) равна r. Полугруппа S имеет ширину r тогда и только тогда, когда для любых ее $r+1$ элементов какой-либо из них принадлежит подполугруппе, порожденной остальными, причем в S есть подполугруппа с базисом из r элементов. Ранг полугруппы не превосходит ее ширины, но пример дискретного прямого произведения бесконечного множества циклических групп различных простых порядков (эта группа имеет ранг 1) показывает, что полугруппа конечного ранга может иметь бесконечную ширину. Для локально конечных полугрупп конечность ширины эквивалентна условию минимальности для подполугрупп, но в общем случае ни одно из этих условий не влечет другое.

Полугруппу с условием максимальности для подполугрупп назовем Max-*полугруппой*. Класс Max-полугрупп также удовлетворяет требованиям а)—в) приведенной выше схемы, но — как показывает пример бесконечной моногенной полугруппы — Max-полугруппа не обязана быть даже эпигруппой. Max-эпигруппы описывает общее утверждение упомянутой схемы. Коммутативные Max-полугруппы исчерпываются полугруппами, вложимыми в (коммутативные) полугруппы, конечно собранные из Max-групп (бесконечные абелевы Max-группы — это в точности прямые произведения бесконечной циклической группы на конечные абелевы группы). Существуют ли Max-полугруппы, не вложимые в полугруппы, конечно собранные из Max-групп, пока (1989) не известно.

Подробную информацию о подполугрупповых условиях конечности см. в [43], гл. 4. Для инверсных полугрупп естественно рассматривать также условия конечности, формулируемые в терминах инверсных подполугрупп и, в частности, в терминах решетки $\mathrm{Subi}\,S$. Соответствующую информацию см. в [43], гл. 5.

О полугруппах с условием максимальности для односторонних конгруэнций см. п. 2.4. Через $\mathrm{Min}_{l\,\mathrm{Con}}$ [$\mathrm{Min}_{r\,\mathrm{Con}}$] обозначим условие минимальности для левых [правых] конгруэнций, через Min [Min_{gr}] — условие минимальности для подполугрупп [для подгрупп]. Всякая полугруппа S с условием $\mathrm{Min}_{l\,\mathrm{Con}}$ [$\mathrm{Min}_{r\,\mathrm{Con}}$] будет периодической, удовлетворяет условию Min_{gr}, а ее правый остов $S/\mathcal{R}$ [левый остов $S/\mathcal{L}$] удовлетворяет не только условию минимальности, но и максимальности (т. е. все цепи в нем конечны); если при этом все подгруппы в S конечны, то и сама S конечна (H o t z e l E.//J. Algebra. — 1979. — V. 60.— P. 352—370). Если S — группа, то каждое из условий $\mathrm{Min}_{l\,\mathrm{Con}}$, $\mathrm{Min}_{r\,\mathrm{Con}}$ попросту эквивалентно условию Min_{gr}. В инверсных полугруппах условия $\mathrm{Min}_{l\,\mathrm{Con}}$ и $\mathrm{Min}_{r\,\mathrm{Con}}$ также эквивалентны друг другу и выполняются тогда и только тогда, когда полугруппа имеет конечное число идемпотентов и удовлетворяет условию Min_{gr} (Kozhukhov I. B., работа, цитированная в п. 2.4); это, в свою очередь, эквивалентно условию минимальности для инверсных подполугрупп.

В общем случае условия $\mathrm{Min}_{l\,\mathrm{Con}}$, $\mathrm{Min}_{r\,\mathrm{Con}}$ и Min независимы. Независимость Min от первых двух условий демонстрирует пример полугруппы Брандта $B(G, 2)$ над бесконечной группой с условием Min_{gr}. Независимость условия $\mathrm{Min}_{l\,\mathrm{Con}}$ от двух других условий демонстрирует левая группа $L_2 \times G$, где L_2 — двухэлементная левосингулярная полугруппа, G — бесконечная группа с условием Min_{gr}; двойственно получается независимость $\mathrm{Min}_{r\,\mathrm{Con}}$ от двух других условий. Для коммутативных полугрупп, разумеется, $\mathrm{Min}_{l\,\mathrm{Con}}$ и $\mathrm{Min}_{r\,\mathrm{Con}}$ совпадают и, кроме того, они эквивалентны условию Min.

6.3. Периодические и локально конечные полугруппы. Немедленным следствием определения является то, что всякая локально конечная (л. к.) полугруппа будет периодической. Обратное неверно: как известно (см. п. II. 1.5), существуют даже периодические группы (и, более того, группы ограниченного показателя, т. е. порядки элементов которых ограничены в совокупности), не являющиеся л. к. Соответствующие результаты группируются вокруг проблем Бернсайда, поэтому выяснение (или установление условий) локальной конечности периодических групп — а также и полугрупп — в тех или иных классах принято называть *проблемами бернсайдовского типа*. Если полугруппа S удовлетворяет тождеству $x^m = x^n$ при некоторых m, n таких, что $m < n$, то будем говорить, что S имеет *конечный* (или *ограниченный*) *тип*. Обозначим через $\mathscr{P}$ класс всех периодических полугрупп, через $\mathscr{P}_0$ — класс всех полугрупп конечного типа. Вопрос о том, будет ли л. к. каждая полугруппа из класса $\mathscr{P} \cap \mathscr{K}$ [класса $\mathscr{P}_0 \cap \mathscr{K}$], иногда называют *общей* [*ограниченной*] *проблемой Бернсайда для класса* $\mathscr{K}$. Примеры не л. к. полугрупп из класса $\mathscr{P} \cap \mathscr{K}$ и даже $\mathscr{P}_0 \cap \mathscr{K}$ существуют и для классов $\mathscr{K}$, далеких от групп, прежде всего — среди нильполугрупп. Наиболее известные (и наиболее «маленькие») из них — свободная полугруппа ранга 2 в многообразии $\mathrm{var}\{x^3 = 0\}$, свободная полугруппа ранга 3 в многообразии $\mathrm{var}\{x^2 = 0\}$. Вместе с тем для ряда классов $\mathscr{K}$ все полугруппы из $\mathscr{P} \cap \mathscr{K}$ будут л. к.; тривиальный пример доставляет класс коммутативных полугрупп, нетривиальный — класс полугрупп идемпотентов. Последний пример существенно обобщается следующим утверждением; при $n > 1$ многообразие $\mathrm{var}\{x^n = x\}$ состоит из л. к. полугрупп тогда (и, очевидно, только тогда), когда многообразие групп

$\mathrm{var}\{x^{n-1}=1\}$ состоит из л. к. групп. Еще более общее утверждение: если все максимальные подгруппы клиффордовой полугруппы S локально конечны, то и сама S локально конечна. Полугруппа S, обладающая разбиением на л. к. полугруппы, не обязана быть л. к., но если S разложима в связку л. к. полугрупп, то S сама будет л. к. Если ρ — такая конгруэнция на полугруппе S, что S/ρ локально конечна и все ρ-классы, являющиеся подполугруппами, суть л. к. полугруппы, то S будет л. к. (иными словами, класс л. к. полугрупп является идемпотентом относительно мальцевского умножения). В частности, класс л. к. полугрупп замкнут относительно идеальных расширений.

Через $B(k, m, n)$ обозначают свободную полугруппу ранга k в многообразии $\mathrm{var}\{x^m = x^n\}$, $0 \leqslant m < n$ (при $m = 0$ полугруппа $B(k, 0, n)$ есть группа). Полугруппа $B(2, 2, 3)$ бесконечна. Отсюда вытекает бесконечность полугруппы $B(k, m, n)$ при $k \geqslant 2$ и $n > m > 1$, так как всякая такая полугруппа имеет $B(2, 2, 3)$ своим гомоморфным образом. При фиксированном $n > 1$ конечность всех полугрупп $B(k, 1, n)$ эквивалентна конечности всех групп $B(k, 0, n-1)$ (перефразировка соответствующего утверждения из предыдущего абзаца). Имеется формула для подсчета числа элементов полугруппы $B(k, 1, 2)$ — свободной связки ранга k. Именно, положим $c_1 = 1$ и, далее, рекуррентно, $c_j = j^2 c_{j-1}$, т. е. $c_j = \prod_{i=1}^{j-1} (j-i+1)^{2^i}$ тогда;

$$|B(k, 1, 2)| = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} c_j.$$

Смысл параметра c_j таков: если A — свободный базис полугруппы $B(k, 1, 2)$, $|A| = k$, то каждый $\mathcal{J}$-класс из $B(k, 1, 2)$ индексируется некоторым подмножеством $X \subseteq A$; тогда c_j — число элементов $\mathcal{J}$-класса, индексированного подмножеством из j элементов. Приведем несколько первых значений числа $b_k = |B(k, 1, 2)|$:

k	1	2	3	4	5
b_k	1	6	159	332 380	2 751 884 514 765

Если S — периодическая полугруппа матриц над телом и все подгруппы из S локально конечны, то S будет л. к.; отсюда, в силу теоремы Шура, всякая периодическая полугруппа матриц над произвольным полем будет л. к.

Подробную информацию по теме данного пункта см. в [22], гл. 10; см. также [31], т. 3, с. 432—433. Проблемы бернсайдовского типа возникают, в частности, при изучении многообразий; см. по этому поводу п. 7.2.

6.4. Нильполугруппы. Нильполугруппу S, принадлежащую классу $\mathscr{P}_0$ (см. п. 6.3), называют нильполугруппой *конечного индекса*, и максимум индексов ее элементов называют *индексом* S. В произвольной нильполугруппе ни один ненулевой элемент не является своим делителем (*лемма о делителях*). В частности, $\mathscr{J}\,(=\mathscr{L}=\mathscr{R}=\mathscr{H})=\Delta$. Конечная нильполугруппа нильпотентна; локально нильпотентные (л. н.) полугруппы — это в точности локально конечные нильполугруппы. Примеры не л. н. нильполугрупп (даже конечного индекса) указаны в п. 6.3 (см. также [15], с. 286—288). В нильполугруппе все максимальные л. н. подполугруппы совпадают со своими левыми и правыми идеализаторами. Класс л. н. полугрупп замкнут относительно идеальных расширений, и, очевидно, наследствен и гомоморфно замкнут.

Возрастающая последовательность идеалов

$$0=A_0\subseteq A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots\subseteq A_\gamma\subseteq A_{\gamma+1}\subseteq\ldots$$

полугруппы $S=S^0$ называется *верхней аннуляторной* [*левоаннуляторной*, *правоаннуляторной*] цепью, если $A_1=\operatorname{Ann}S$ $[A_1=\operatorname{Ann}_l S,\ A_1=\operatorname{Ann}_r S]$, для любого γ факторполугруппа $A_{\gamma+1}/A_\gamma$ есть аннулятор [левый аннулятор, правый аннулятор] факторполугруппы S/A_γ, а на предельных местах стоят объединения предыдущих членов. Объединение $\Gamma\operatorname{Ann}S$ всех членов верхней аннуляторной цепи назовем (двусторонним) *гипераннулятором* полугруппы S. Аналогично определяется *левый* [*правый*] *гипераннулятор* $\Gamma\operatorname{Ann}_l S$ $[\Gamma\operatorname{Ann}_r S]$. Все три гипераннулятора полугруппы S содержатся в л. н. радикале (см. п. 2.6) полугруппы S. Имеет место $\Gamma\operatorname{Ann}S=\Gamma\operatorname{Ann}_l S\cap\Gamma\operatorname{Ann}_r S$, причем все три гипераннулятора могут быть различны. Возможна ситуация, когда один из гипераннуляторов $\Gamma\operatorname{Ann}_l S$, $\Gamma\operatorname{Ann}_r S$ равен 0, а другой — S.

Примеры: пусть полугруппа $P = P^0$ задана копредставлением

$$\langle a_1, a_2, \ldots \mid a_i a_j = 0 \text{ при } i \leqslant j \text{ и } i > j+1 \rangle,$$

$Q = \overleftarrow{P}$; тогда $\Gamma \operatorname{Ann}_l P = P$ и $\Gamma \operatorname{Ann}_r P = \Gamma \operatorname{Ann}_l T = 0$, а для полугруппы $T = P \overset{0}{\bigcup} Q$ имеет место $\Gamma \operatorname{Ann} T = 0$, $\Gamma \operatorname{Ann}_l T = P$, $\Gamma \operatorname{Ann}_r T = Q$.

Возрастающий ряд подполугрупп

$$0 = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \ldots \subset H_\beta = S \quad (*)$$

полугруппы $S = S^0$ называется возрастающим *аннуляторным* [*левоаннуляторным*, *правоаннуляторным*] *рядом*, если для любого скачка H_α, $H_{\alpha+1}$ имеет место $H_{\alpha+1}S \cup SH_{\alpha+1} \subseteq H_\alpha$ [$H_{\alpha+1}S \subseteq H_\alpha$, $SH_{\alpha+1} \subseteq H_\alpha$]. Члены возрастающего аннуляторного [левоаннуляторного, правоаннуляторного] ряда суть идеалы [правые идеалы, левые идеалы]. Полугруппа $S = S^0$ называется *исчезающей слева* [*справа*] (или *T-нильпотентной справа* [*слева*]), если для любой последовательности $x_1, x_2, \ldots$ элементов из S существует такое n, что $x_n x_{n-1} \ldots x_1 = 0$ [$x_1 x_2 \ldots x_n = 0$]. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S обладает возрастающим аннуляторным [левоаннуляторным, правоаннуляторным] рядом; (2) S — исчезающая слева и справа [исчезающая справа, исчезающая слева]; (2′) S — нильполугруппа, удовлетворяющая условию минимальности для остова [правого остова, левого остова] (см. п. 2.7); (3) S — нильполугруппа, обладающая возрастающим рядом [левых, правых] идеалов (*), в котором все факторы [разности $H_{\alpha+1} \setminus H_\alpha$] конечны. В полугруппе с указанными условиями верхняя аннуляторная [левоаннуляторная, правоаннуляторная] цепь превращается в *верхний аннуляторный* [*левоаннуляторный*, *правоаннуляторный*] *ряд*; длина этого ряда не превосходит длину любого другого возрастающего аннуляторного [левоаннуляторного, правоаннуляторного] ряда.

Для произвольной полугруппы S и любого непредельного ординала $\alpha > 1$ положим $S^\alpha = S^{\alpha-1}S$ и ${}^\alpha S = SS^{\alpha-1}$; если α — предельный ординал, то положим $S^\alpha = \bigcap_{\gamma<\alpha} S^\gamma$ и ${}^\alpha S = \bigcap_{\gamma<\alpha} {}^\gamma S$. Для первого бесконечного ординала ω имеет место ${}^{\omega}S = S^{\omega}$, но, вообще говоря, ${}^{\omega+1}S \neq S^{\omega+1}$. Если полугруппа S обладает возрастающим левоаннуляторным [правоаннуляторным] рядом и β — длина верхнего левоаннуляторного [правоаннуляторного] ряда S, то ${}^{\beta+1}S = 0$ $[S^{\beta+1} = 0]$. Всякая неодноэлементная полугруппа S с возрастающим аннуляторным рядом имеет единственный базис $S \setminus S^2$, но это, вообще говоря, неверно для полугруппы S, исчезающей слева или справа.

Локально нильпотентная полугруппа может быть глобально идемпотентной. Такова, например, фактор-полугруппа $(\mathbf{R}_+, +)/M_a$, где $\mathbf{R}_+$ — множество всех положительных действительных чисел, $M_a = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid x \geqslant a\}$.

Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) S нильпотентна; (2) S обладает конечным аннуляторным [левоаннуляторным, правоаннуляторным] рядом; (3) S — нильполугруппа, [левый, правый] остов которой имеет конечную длину; (4) S — нильполугруппа и существует такое n, что любая подполугруппа из S может быть включена в идеальный [левоидеальный, правоидеальный] ряд длины $\leqslant n$. Полугруппу, в которой каждая собственная подполугруппа отлична от своего [левого, правого] идеализатора, называют *I-полугруппой* [*I_l-полугруппой, I_r-полугруппой*]. Всякая I_l- [I_r-]полугруппа является идеальным расширением правосингулярной [левосингулярной] полугруппы при помощи л. н. полугруппы. Всякая I-полугруппа будет л. н. Всякая полугруппа с возрастающим аннуляторным рядом будет I-полугруппой; вопрос о справедливости обратной импликации (см. задачу 1.50а) в [34]) до сих пор (1989) открыт. Ненильпотентная нильполугруппа содержит нильпотентные подполугруппы сколь угодно большой ступени нильпотентности. Вопрос о том, существуют ли ненильпотентные нильполугруппы, все собственные подполугруппы которых нильпотентны (см. задачу 1.52 в [34]), до сих пор (1989) открыт.

При каждом из следующих условий нильполугруппа S будет конечной: 1) S артинова (см. п. 2.2); 2) S нётерова слева или справа; 3) все нильпотентные подполугруппы из S конечны.

Источники см. в [31], т. 3, с. 1041, 1042.

§ 7. Многообразия и близкие классы

7.1. Тождества. Если $\mathscr{V}$ — многообразие, то через $\mathrm{eq}\,\mathscr{V}$ будем обозначать совокупность всех тождеств, выполняющихся в каждой полугруппе из $\mathscr{V}$. Если система тождеств Ω, класс $\mathscr{K}$ и полугруппа S таковы, что $\mathscr{V} = \mathrm{var}\,\Omega = \mathrm{var}\,\mathscr{K} = \mathrm{var}\,S$, то вместо $\mathrm{eq}\,\mathscr{V}$ можно писать $\mathrm{eq}\,\Omega$, $\mathrm{eq}\,\mathscr{K}$, $\mathrm{eq}\,S$. Полугруппы S и T называются *эквационально эквивалентными*, если $\mathrm{eq}\,S = \mathrm{eq}\,T$. О механизме получения тождеств, составляющих $\mathrm{eq}\,\Omega$, из тождеств Ω (т. е. получения следствий из Ω) см., например, в [20], гл. 3, § 7.2. Система тождеств Ω называется *неприводимой*, если никакое тождество $\alpha \in \Omega$ не является следствием системы $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Если $\mathscr{V} = \mathrm{var}\,\Omega$ $(= \mathrm{var}\,S)$, то Ω называют *базисом тождеств* многообразия $\mathscr{V}$ [полугруппы S]. Многообразие $\mathscr{V}$ называется *конечно* [*неприводимо*] *базируемым*, если оно имеет конечный [неприводимый] базис тождеств. Это и другие понятия, связанные с базируемостью, аналогичным образом трактуются применительно к полугруппе, а также к системе тождеств; например, можно говорить о конечно базируемой полугруппе, неприводимо базируемой системе тождеств и т. п. Для ряда важных конкретных полугрупп найдены их базисы тождеств. Например,

$$\mathrm{var}\,A_2 = \{x^3 = x^2,\ xyxyx = xyx,\ xyxzx = xzxyx\},$$

$$\mathrm{var}\,B_2 = \{x^3 = x^2,\ xyxyx = xyx,\ x^2y^2 = y^2x^2\}.$$

Полугруппа B_2 инверсна, и можно рассматривать базисы ее тождеств в сигнатуре унарной полугруппы; только что указанные три тождества составляют и такой базис, еще один такой базис состоит из единственного тождества $xy^2x^{-1} = xyx^{-1}$.

Многообразие, не являющееся конечно базируемым (к. б.), называют *бесконечно базируемым* (б. б.). Всякое к. б. многообразие будет, очевидно, неприводимо базируемым, но существуют как бесконечные неприводимые системы тождеств, так и (автоматически бесконечные) системы тождеств, не являющиеся неприводимо базируемыми. Обзор (с некоторой классификацией) примеров б. б. систем тождеств см. в [42], § 1; там же приведены примеры б. б. систем унарных тождеств, задающих негрупповые многообразия инверсных полугрупп. Многообразие называют *n-базируемым*, если оно обладает базисом, состоящим не более чем из n тождеств. Для любого n существует к. б. многообразие, не являющееся n-базируемым. Всякое многообразие полугрупп идемпотентов 2-базируемо (т. е. 1-базируемо внутри многообразия всех полугрупп идемпотентов).

Если каждое собственное подмногообразие $\mathscr{V}$ является к. б., то в случае когда само $\mathscr{V}$ будет к. б. [б. б.], $\mathscr{V}$ называют *наследственно к. б.* [*предельным*]. В силу леммы Цорна каждое б. б. многообразие содержит некоторое предельное подмногообразие, так что многообразие $\mathscr{V}$ будет наследственно к. б. тогда и только тогда, когда $\mathscr{V}$ не содержит предельных подмногообразий. Конкретные примеры предельных многообразий полугрупп см. в [42], § 18. Единственным негрупповым предельным многообразием инверсных полугрупп является $\mathrm{var}\, B_2^1$. Примеры наследственно к. б. многообразий полугрупп см. ниже, а более подробную информацию о таких многообразиях — в [42], § 12—17. Наследственно к. б. многообразия инверсных полугрупп исчерпываются многообразиями вида $\mathscr{X}$, $\mathscr{X} \vee \mathrm{var}\, B_2$, $\mathscr{X} \vee \mathscr{S}$, где $\mathscr{X}$ — наследственно к. б. многообразие групп, $\mathscr{S}$ — многообразие полурешеток. Если $\mathscr{V}$ — многообразие инверсных полугрупп и $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{G} \vee \mathrm{var}\, B_2$, где $\mathscr{G}$ — многообразие всех групп, то $\mathscr{V}$ к. б. [неприводимо базируемо] тогда и только тогда, когда к. б. [неприводимо базируемо] $\mathscr{V} \cap \mathscr{G}$. В частности, полугруппа Брандта будет к. б. тогда и только тогда, когда к. б. ее структурная группа. Моногенная инверсная полугруппа инв$\langle a \rangle$ будет к. б. тогда и только тогда, когда инв$\langle a \rangle \in \mathscr{G} \vee \mathrm{var}\, B_2$. Это эквивалентно тому, что инв$\langle a \rangle$ будет типа 2) при $n = 1$, 2 или типа 4) при $r = 1$, 2 (см. п. 2.5). В частности, свободная моногенная инверсная полугруппа и бициклическая полугруппа являются б. б.

Для полугруппового слова w через $c(w)$ обозначим множество всех букв, встречающихся в w хотя бы один раз; множество $c(w)$ иногда называют *содержанием* слова w. Тождество $u = v$ называют *гомотипным* (или *нормальным*, *регулярным*, *однородным*), если $c(u) = c(v)$; и *гетеротипным* (*аномальным* и т. д.) — в противном случае. Следующие условия для многообразия $\mathscr{V}$ эквивалентны: (1) $\mathscr{V}$ имеет базис из гомотипных тождеств; (2) все тождества из eq$\mathscr{V}$ гомотипны; (3) $\mathscr{V}$ содержит многообразие всех полурешеток. Многообразие, для которого выполнены [не выполнены] условия (1)—(3), называют *гомотипным* [*гетеротипным*]. Многообразие $\mathscr{V}$ гомотипно [гетеротипно] тогда и только тогда, когда любая жесткая полурешетка полугрупп из $\mathscr{V}$ (см. п. 2.3) принадлежит $\mathscr{V}$ [$\mathscr{V}$ состоит из архимедовых полугрупп] (см. [44], с. 27 и с. 21). Тождество $u = v$ называется *уравновешенным*, если каждая буква входит в слова u и v одинаковое число раз. Частный случай уравновешенного тождества — *перестановочное* тождество, т. е. тождество вида $x_1x_2 \ldots x_n = x_{1\sigma}x_{2\sigma} \ldots \ldots x_{n\sigma}$, где σ — нетривиальная перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Следующие условия для многообразия $\mathscr{V}$ эквивалентны: (1′) $\mathscr{V}$ имеет базис из уравновешенных тождеств; (2′) все тождества из eq$\mathscr{V}$ уравновешенные; (3′) $\mathscr{V}$ содержит многообразие всех коммутативных полугрупп. В силу (3′) многообразия с указанными свойствами называют *надкоммутативными*. Многообразие не будет надкоммутативным тогда и только тогда, когда оно состоит из периодических полугрупп. Если многообразие $\mathscr{V}$ содержится в классе полугрупп $\mathscr{K}$, то нередко договариваются относить прилагательное, выделяющее $\mathscr{K}$-полугруппы, и к многообразию $\mathscr{V}$. Можно, например, говорить о *периодических*, *коммутативных* и пр. многообразиях. Перефразируя только что отмеченный факт, получаем, что произвольное многообразие полугрупп будет либо периодическим, либо надкоммутативным. Всякое архимедово многообразие является периодическим. Пару тождеств $zw = w$, $wz = w$, где $z \notin \notin c(w)$, можно заменить одним тождеством (в сигнатуре с фиксированным нулем) $w = 0$; тождества вида $w = 0$, а также многообразия, задаваемые такими тождествами, называют 0-*приведенными*. Всякое надкоммутативное и всякое 0-приведенное многообразие неприводимо базируемы. Примеры к. б. многообразий: 1) всякое коммутативное; 2) всякое периодическое, удовлетворяющее какому-либо перестановочному тождеству; 3) всякое заданное перестановочными тождествами. Многообразия типов 1) и 2) автоматически являются наследственно к. б.

Аксиоматическим рангом тождества $u = v$ называется число $\max\{|c(u)|, |c(v)|\}$. Если многообразие $\mathscr{V}$ обладает базисом тождеств, аксиоматические ранги которых не превосходят натурального числа r, то $\mathscr{V}$ называют многообразием *конечного аксиоматического ранга;* наименьшее r с указанным свойством называется *аксиоматическим рангом* многообразия $\mathscr{V}$ и обозначается через $r_a(\mathscr{V})$. В противном случае говорят, что $\mathscr{V}$ имеет *бесконечный аксиоматический ранг.* Всякое к. б. многообразие имеет, очевидно, конечный аксиоматический ранг, но существуют и б. б. многообразия конечного аксиоматического ранга; для локально конечных многообразий эти два условия эквивалентны.

В отличие от ситуации в группах и кольцах, конечная полугруппа (даже инверсная или клиффордова) не обязана быть к. б. Например, следующие полугруппы являются б. б.: 6-элементная полугруппа B_2^1, рисовская матричная полугруппа $\mathscr{M}\left[G;\ 2,\ 2;\ \begin{pmatrix} e & e \\ e & g \end{pmatrix}\right]$, где G — конечная группа с единицей e и выделенным элементом g, не имеющая конечного базиса тождеств в классе всех групп с выделенным элементом. К. б. будет всякая полугруппа S такая, что $|S| \leqslant 5$, а также всякая конечная ортогруппа. Конечная инверсная полугруппа S будет к. б. (причем и как полугруппа, и как унарная полугруппа) тогда и только тогда, когда $\operatorname{var} S$ не содержит полугруппу B_2^1. Локально конечное многообразие $\mathscr{V}$ [конечную полугруппу S] называют *существенно б. б.*, если каждое локально конечное многообразие $\mathscr{K}$ такое, что $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{K}$ $[S \in \mathscr{K}]$ будет б. б. Моноид B_2^1 является существенно б. б. Всякая конечная существенно б. б. полугруппа содержит существенно б. б. подмоноид.

Тождество $u = v$ называется *нетривиальным*, если $u \not\equiv v$. Слово w называется *изотермом для системы тождеств* Ω, если $\operatorname{eq}\Omega$ не содержит нетривиальных тождеств, одной из частей которых является w. Для каждого $n \geqslant 1$ определим слово Z_n, полагая

$$Z_1 \equiv x_1, \quad Z_n \equiv Z_{n-1}x_nZ_{n-1} \text{ при } n > 1. \qquad (*)$$

Конечная полугруппа S будет существенно б. б. тогда и только тогда, когда каждое из слов Z_n $(n \geqslant 1)$ является изотермом для $\operatorname{eq} S$.

Конечная базируемость полугруппы $\mathcal{T}(X)$ [полугрупп $\mathcal{PT}(X)$, $\mathcal{I}(X)$ и $\mathcal{B}(X)$] имеет место тогда и только тогда, когда либо X бесконечно, либо $|X| \leqslant 2$ [либо X бесконечно, либо $|X| = 1$]; при этом для симметрической инверсной полугруппы $\mathcal{I}(X)$ сформулированный критерий относится как к случаю обычной полугрупповой сигнатуры, так и к случаю сигнатуры унарных полугрупп. Полугруппа $\operatorname{End}_F V$, где поле F конечно, будет к. б. тогда и только тогда, когда либо $\dim V$ бесконечно, либо $\dim V = 1$.

Если в многообразии $\mathcal{V}$ выполняется какое-либо нетривиальное тождество, то в $\mathcal{V}$ выполнено нетривиальное тождество аксиоматического ранга 2. Если многообразие групп $\mathcal{X}$ удовлетворяет нетривиальному полугрупповому тождеству, то $\mathcal{X}$ может быть задано (в классе всех групп) базисом из полугрупповых тождеств. Среди наиболее важных примеров такого типа — многообразие $\mathcal{N}_n$ всех n-ступенно нильпотентных групп. Для любого $n \geqslant 0$ определим слова X_n, Y_n, полагая

$$X_0 \equiv x, \quad Y_0 \equiv y, \quad X_n \equiv X_{n-1} z_n Y_{n-1},$$
$$Y_n \equiv Y_{n-1} z_n X_{n-1} \quad \text{при} \quad n > 0.$$

Группа принадлежит многообразию $\mathcal{N}_n$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству $X_n = Y_n$. Полугруппу с тождеством $X_n = Y_n$ называют *n-ступенно нильпотентной в смысле Мальцева* (см. [27], с. 335—339). Всякая полугруппа с сокращением, удовлетворяющая нетривиальному тождеству, вложима в группу; всякая n-ступенно нильпотентная в смысле Мальцева полугруппа с сокращением вложима в n-ступенно нильпотентную группу.

В специальной полугруппе S (см. п. 2.5), не являющейся группой, тогда и только тогда выполняется нетривиальное тождество, когда S есть бесконечная циклическая или бициклическая полугруппа. Для специальных полугрупп, являющихся группами, ситуация прояснена лишь в случае одного определяющего соотношения: в этом случае полугруппа S удовлетворяет нетривиальному (полугрупповому) тождеству тогда и только тогда, когда S задана копредставлением $\langle a, b \mid ab^2a = 1 \rangle$. Рассмотрим следующие условия для полугруппы S: (1) в S выполняется нетривиальное тождество; (2) S не содержит свободных подполугрупп ранга 2; (3) S может быть задана копредставлением $\langle A | \Sigma \rangle$, где $|A| > |\Sigma|$; (4) S может быть задана копредставлением без левых или правых циклов. Для конечно определенной полугруппы S имеют место эквивалентности (1) & (3) $\Leftrightarrow$ (1) & (4) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (2) & (3). Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) верна, очевидно, для любой полугруппы S. Импликация же (2) $\Rightarrow$ (1) может не иметь места даже для конечно порожденных полугрупп, а вопрос о ее справедливости для конечно определенных полугрупп до сих пор (1989) открыт.

Подробную информацию по темам данного пункта см. в [42].

7.2. Структурные аспекты. Некоторые из связей между тождествами, выполняющимися в полугруппах, и строением полугрупп отмечались в п. 7.1. В этом пункте таким связям уделено преимущественное внимание, главным образом, с точки зрения условий конечности и разложений (детали и дополнительную информацию см. в [44]). Используемые ниже слова Z_n введены в п. 7.1 формулами (*); они возникают и при изучении локально конечных (л. к.) многообразий. Если $\mathscr{V} = \operatorname{var} \Omega$ есть 0-приведенное многообразие конечного аксиоматического ранга r, то следующие условия эквивалентны: (1) $\mathscr{V}$ — л. к. многообразие; (1′) хотя бы одно из тождеств системы Ω задает л. к. многообразие; (2) в $\operatorname{eq} \Omega$ содержится хотя бы одно тождество $Z_n = 0$. Если $\mathscr{V}$ — произвольное конечно базируемое л. к. многообразие, то для некоторого n слово Z_n не является изотермом (см. п. 7.1) для $\operatorname{eq} \mathscr{V}$.

Многообразие инверсных полугрупп будет л. к. тогда (и, очевидно, только тогда), когда в нем л. к. все группы и все антигруппы. Если $\mathscr{V}$ есть многообразие клиффордовых полугрупп или многообразие инверсных полугрупп, не содержащее B_2^1, то $\mathscr{V}$ будет л. к. тогда (и, очевидно, только тогда), когда л. к. все группы из $\mathscr{V}$.

Всякое многообразие $\mathscr{V}$, для которого все полугруппы из $\mathscr{P} \cap \mathscr{V}$ (см. п. 6.3) локально конечны, назовем *условно локально конечным* (у. л. к.). Многообразие всех n-нильпотентных в смысле Мальцева полугрупп (см. п. 7.1) будет у. л. к. тогда и только тогда, когда $n \leqslant 2$. Многообразие $\mathscr{V}$ конечного аксиоматического ранга будет у. л. к. тогда (и, очевидно, только тогда), когда л. к. все полугруппы из $\mathscr{P}_0 \cap \mathscr{V}$ (см. п. 6.3). Пусть многообразие $\mathscr{V} = \mathrm{var}\,\Omega$ имеет конечный аксиоматический ранг r. Следующие условия для $\mathscr{V}$ эквивалентны: (1) все нильполугруппы из $\mathscr{V}$ л. к.; (2) все полугруппы из $\mathrm{var}\{x^2 = 0\} \cap \cap \mathscr{V}$ л. к.; (3) слово Z_n не является изотермом для Ω. Если к тому же $\mathscr{V}$ непериодическое или все группы из $\mathscr{P}_0 \cap \mathscr{V}$ л. к., то перечисленные условия эквивалентны тому, что $\mathscr{V}$ — у. л. к. многообразие.

Тождество $u = v$ называется *n-тестируемым*, если у слов u и v совпадают начальные отрезки длины n, конечные отрезки длины n и множества всех подслов длины n. Через $\mathscr{T}_n$ обозначим многообразие, заданное всеми n-тестируемыми тождествами. Полугруппы из $\mathscr{T}_n$ называются *n-тестируемыми*. Полугруппу, n-тестируемую при некотором n, назовем *тестируемой* (их называют также *локально тестируемыми*). О связи тестируемых полугрупп с проблематикой теории формальных языков см. в п. 9.1. О базисах тождеств многообразия $\mathscr{T}_n$ см. в [42], § 20. Всякая тестируемая полугруппа локально конечна. Если S — тестируемая полугруппа, то все главные подмоноиды eSe суть полурешетки; для конечных полугрупп S справедлива и обратная импликация (см., например, [22], с. 228). Полугруппы из $\mathscr{T}_1$ — это в точности подпрямые произведения полугрупп, каждая из которых либо сингулярна, либо получается из сингулярной присоединением нуля. Если $S \in \mathscr{T}_n$, то S есть n-нильпотентное расширение некоторой полугруппы из $\mathrm{var}\,A_2$, а при $n \geqslant 2$ S к тому же есть $(n-1)$-нильпотентное расширение некоторой полугруппы из $\mathscr{T}_2$. Обратно, если полугруппа S есть $(n-1)$-нильпотентное расширение полугруппы из $\mathscr{T}_2$, то $S \in \in \mathscr{T}_{2(n-1)}$.

Многообразие $\mathscr{V}$ называется *резидуально малым* (р. м.), если мощности подпрямо неразложимых полугрупп из $\mathscr{V}$ ограничены в совокупности. Многообразие полугрупп $\mathscr{V}$ будет р. м. тогда и только тогда, когда для некоторого n выполняется одно из условий: а) $\mathscr{V} \subseteq \mathrm{var}\{x^{n+1}y = xy = xy^{n+1},\ xy^nz^nt = xz^ny^nt\}$ и все группы из $\mathscr{V}$ составляют р. м. многообразие групп; б) $\mathscr{V} \subseteq \mathrm{var}\{x^{n+1}y = xy,\ xyz = yxz\}$; в) условие, двойственное условию б). Следующие условия для многообразия полугрупп $\mathscr{V}$ эквивалентны: (1) $\mathscr{V}$ есть финитно аппроксимируемое (ф. а.) многообразие; (2) $\mathscr{V}$ есть л. к. и р. м. многообразие; (3) выполнено одно из только что приведенных условий а)—в), причем в случае а) все группы из $\mathscr{V}$ ф. а.; (4) выполнено одно из условий: а) $\mathscr{V}$ состоит из ортодоксальных полугрупп, являющихся раздуваниями нормальных связок ф. а. групп; б) $\mathscr{V} \subseteq \operatorname{var}\{xyz = yxz\}$ и $\mathscr{V}$ состоит из полугрупп, разложимых в связку раздуваний абелевых групп конечного показателя; в) условие, двойственное условию б). Другие эквивалентные характеризации см., например, в [44], § 4. Каждое ф. а. многообразие полугрупп порождается конечной полугруппой и будет, очевидно, р. м. многообразием. Вопрос о совпадении классов ф. а. многообразий и р. м. многообразий полугрупп пока (1989) открыт, он сводится к вопросу о том, будет ли л. к всякое периодическое р. м. многообразие групп. Многообразие инверсных [клиффордовых] полугрупп будет ф. а. тогда и только тогда, когда оно состоит из полурешеток ф. а. групп [из ортогрупп, разложимых в нормальную связку ф. а. групп].

Следующие условия для периодического многообразия $\mathscr{V}$ эквивалентны: (1) $\mathscr{V}$ состоит из $\mathscr{AS}$-полугрупп (см. п. 4.1); (2) в любой полугруппе из $\mathscr{V}$ каждый класс кручения есть подполугруппа; (3) $\mathscr{V} \subseteq \subseteq \operatorname{var}\{(xy)^n = (xy)^n(yx)^n(xy)^n\}$ для некоторого n; (4) $\mathscr{V}$ не содержит полугруппу B_2.

Многообразие $\mathscr{V}$ называют многообразием *конечного индекса*, если ступени нильпотентности нильпотентных полугрупп из $\mathscr{V}$ ограничены в совокупности; всякое многообразие конечного индекса является периодическим и состоит из $\mathscr{AS}$-полугрупп. Следующие условия для периодического многообразия $\mathscr{V}$ эквивилентны: (1′) $\mathscr{V}$ есть многообразие конечного индекса; (2′) любая полугруппа $\mathscr{V}$ разложима в полурешетку нильпотентных расширений вполне простых полугрупп; (3′) для некоторого m имеет место $\mathscr{V} \subseteq \subseteq \operatorname{var}\{x_1x_2 \ldots x_m = w\}$, где длина слова w больше m; (4′) $\operatorname{var}\{x^2 = 0, xy = yx\} \nsubseteq \mathscr{V}$.

Мальцевское произведение двух многообразий полугрупп не обязательно будет многообразием, так что относительно этого умножения множество всех полугрупповых многообразий представляет собой частичный группоид; множество всех 0-приведенных многообразий является максимальным подгруппоидом в этом частичном группоиде. Для многообразия $\mathscr{V}$ наименьшую $\mathscr{V}$-конгруэнцию $\rho_{\mathscr{V}}$ на полугруппе S называют *вербальной* $\mathscr{V}$-конгруэнцией; если $\rho_{\mathscr{V}} = \nabla$, то S называют *$\mathscr{V}$-неразложимой* полугруппой. Если на любой полугруппе все классы вербальной $\mathscr{V}$-конгруэнции, являющиеся подполугруппами, есть $\mathscr{V}$-неразложимые полугруппы, то многообразие $\mathscr{V}$ называют *достижимым*. Единственным нетривиальным достижимым многообразием полугрупп является многообравие полурешеток. Понятие достижимости может быть обобщено введением понятия γ-ступенной достижимости для произвольного ординала γ; подробную информацию о соответствующей проблематике (применительно и к другим типам универсальных алгебр) см. в [85].

Базисным [*инъекционным*] *рангом* многообразия $\mathscr{V}$ называется наименьшее кардинальное число r такое, что $\mathscr{V}$-свободная полугруппа ранга r порождает $\mathscr{V}$ [всякая счетная $\mathscr{V}$-полугруппа вложима в $\mathscr{V}$-полугруппу с r образующими]. Обозначим базисный [инъекционный] ранг многообразия $\mathscr{V}$ через $r_b(\mathscr{V})$ [$r_i(\mathscr{V})$]. Всегда $r_b(\mathscr{V}) \leqslant r_i(\mathscr{V})$. Если $\mathscr{V}$ — многообразие всех [всех коммутативных] полугрупп, то $r_b(\mathscr{V}) = r_i(\mathscr{V}) = 2$ [$r_b(\mathscr{V}) = 1$, $r_i(\mathscr{V}) = \aleph_0$]. Инъекционный ранг многообразия всех инверсных [любого негруппового многообразия клиффордовых] унарных полугрупп равен двум [бесконечен].

7.3. Решетка подмногообразий. Множество $L(\mathscr{V})$ всех подмногообразий многообразия $\mathscr{V}$ образует относительно включения полную решетку, которая (как и в случае любых универсальных алгебр) антиизоморфна решетке всех вполне характеристических конгруэнций на $\mathscr{V}$-свободной полугруппе счетного ранга. В этой решетке инфимум совпадает с теоретико-множественным пересечением, причем если для семейства $\{\mathscr{V}_i\}_{i \in I}$ имеет место $\mathscr{V}_i = \operatorname{var} \Omega_i$ $(i \in I)$, то $\bigcap_{i \in I} \mathscr{V}_i = \operatorname{var} \left(\bigcup_{i \in I} \Omega_i \right)$. Для супремума $\bigvee_{i \in I} \mathscr{V}_i$ имеет место $\operatorname{eq} \bigvee_{i \in I} \mathscr{V}_i = \bigcap_{i \in I} \operatorname{eq} \mathscr{V}_i$. Если $\mathscr{V}_i = \operatorname{var} S_i$ $(i \in I)$, то $\bigvee_{i\in I} \mathscr{V}_i = \operatorname{var} \prod_{i\in I} S_i$. Решетка $L(\mathscr{V})$ удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда все подмногообразия из $\mathscr{V}$ (включая и само $\mathscr{V}$) конечно базируемы. Многообразие $\mathscr{V}$ называется *малым*, если решетка $L(\mathscr{V})$ конечна. Всякое малое многообразие будет многообразием конечного индекса (см. п. 7.2), для многообразий коммутативных полугрупп верно и обратное. В отличие от групп и колец, конечная полугруппа порождает не обязательно малое многообразие; например, решетка $L(\operatorname{var} C^1_{2,1})$ бесконечна.

Если $\mathscr{V}$ — многообразие всех полугрупп, то $L(\mathscr{V})$ обозначим через $\mathfrak{L}$. Решетка $\mathfrak{L}$ континуальна и коалгебраична; ее кокомпактными элементами являются в точности конечно базируемые многообразия. Каждому ненулевому элементу из $\mathfrak{L}$ предшествует атом; атомы решетки $\mathfrak{L}$ называют *минимальными* (или *эквационально полными*) *многообразиями*. Вот их список: $\operatorname{var}\{x^2 = x,\ xy = yx\}$ — многообразие полурешеток; $\operatorname{var}\{xy = x\}$ $[\operatorname{var}\{xy = y\}]$ — многообразие левосингулярных [правосингулярных] полугрупп; $\operatorname{var}\{xy = zt\}$ — многообразие полугрупп с нулевым умножением; $\operatorname{var}\{x^py = y,\ \ xy = yx\}$ — многообразие абелевых групп показателя p (при любом простом p). Решетка $\mathfrak{L}$ не имеет коатомов; ее единица не равна объединению конечного числа нееднничных элементов. Решетка $\mathfrak{L}$ 0-дистрибутивна, т. е. удовлетворяет квазитождеству

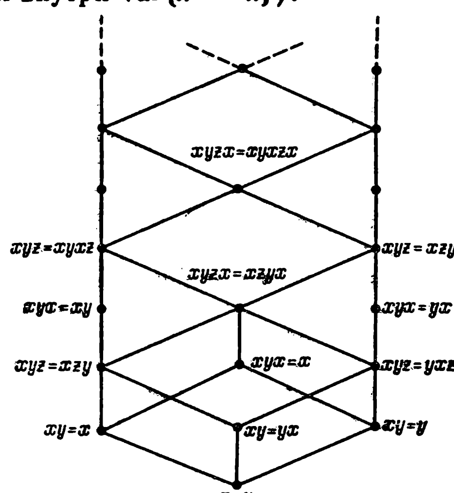
$$\mathscr{V}_1 \cap \mathscr{V}_2 = \mathscr{O}\ \&\ \mathscr{V}_1 \cap \mathscr{V}_3 = \mathscr{O} \to (\mathscr{V}_1 \vee \mathscr{V}_2) \cap \mathscr{V}_3 = \mathscr{O},$$

где $\mathscr{O}$ — нуль $\mathfrak{L}$.

Через $\mathfrak{P}$ [через $\mathfrak{Cl}$, $\mathfrak{Gr}$, $\mathfrak{Comb}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{Nil}$] обозначим множество всех периодических [клиффордовых, групповых, комбинаторных, идемпотентных, ниль-] многообразий. Очевидно, все эти множества суть идеалы в $\mathfrak{L}$, причем $\mathfrak{P}$ содержит пять остальных и выполняются следующие соотношения:

$$\mathfrak{Gr} \subset \mathfrak{Cl},\ \ \mathfrak{Nil} \subset \mathfrak{Comb},\ \ \mathfrak{Cl} \cap \mathfrak{Comb} = \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{Cl} \cap \mathfrak{Nil} = \{\mathscr{O}\} = \mathfrak{Gr} \cap \mathfrak{Comb}.$$

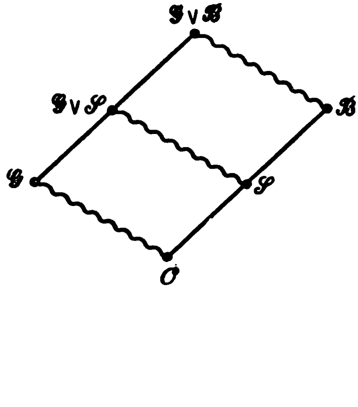
Принадлежность нетривиального многообразия $\mathscr{V}$ какому-то из идеалов $\mathfrak{Cl}$, $\mathfrak{Comb}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{Nil}$ может быть охарактеризована в терминах атомов решетки $\mathfrak{L}$, не содержащихся в $\mathscr{V}$. А именно, $\mathscr{V}$ принадлежит $\mathfrak{Cl}$ [принадлежит $\mathfrak{Gr}$; $\mathfrak{Comb}$; $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{Nil}$] тогда и только тогда, когда $\mathscr{V}$ не содержит многообразия $\mathscr{Z}$ полугрупп с нулевым умножением [ни одного из негрупповых атомов $\mathfrak{L}$; ни одного из групповых атомов $\mathfrak{L}$; $\mathscr{Z}$ и ни одного из групповых атомов $\mathfrak{L}$; ни одного из атомов $\mathfrak{L}$, кроме $\mathscr{Z}$]. Идеал $\mathfrak{B}$ счетен, идеалы $\mathfrak{Gr}$ и $\mathfrak{Nil}$ (а следовательно, и $\mathfrak{Cl}$, $\mathfrak{Comb}$ и $\mathfrak{P}$) континуальны; в $\mathfrak{Nil}$ уже многообразие $\operatorname{var}\{x^2 = 0\}$ имеет континуум подмногообразий. Идеал $\mathfrak{Cl}$ есть модулярная решетка, $\mathfrak{Nil}$ же (и, следовательно, $\mathfrak{Comb}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{L}$) не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству. Все 0-приведенные многообразия составляют в $\mathfrak{Nil}$ дистрибутивную подрешетку. Решетка $\mathfrak{B}$ дистрибутивна; закономерность ее облика видна из следующей диаграммы (в ней у нескольких нижних «этажей» отмечены тождества, задающие соответствующие многообразия внутри $\operatorname{var}\{x^2 = x\}$):



Дополнительную информацию о решетках многообразий полугрупп см. в [51] и [3].

Исследования решеток многообразий унарных полугрупп естественно распадаются на два направления: инверсные полугруппы и клиффордовы полугруппы. В случае клиффордовых полугрупп выделен целый ряд «опорных» элементов решетки многообразий, представляющих важнейшие типы клиффордовых полугрупп — от полугрупп идемпотентов и групп в нижних этажах решетки до связок групп и псевдоортодоксальных (см. п. 5.1) клиффордовых полугрупп в верхних ее этажах (см., например, Petrich M.// Semigroup Forum. — 1982. — V. 25, № 1/2. — P. 153—169; Polák L.//Semigroup Forum. — 1985.— V. 32, № 1. — P. 97—123; 1987. — V. 36, № 3. — С. 253—284; 1988. — V. 37, № 1. — P. 1—30; в цитируемых работах указаны многие другие источники по данной теме). Преимущественный подход к изучению этой решетки состоит в описании (как правило, «по модулю решетки групповых многообразий») тех или иных ее «блоков» и их взаимодействие друг с другом. Один из центральных полученных здесь результатов устанавливает модулярность решетки всех многообразий клиффордовых полугрупп (Pastijn F.//Notes Canad. Math. Soc. — 1988. — V. 20, N 8. — P. 21).

Обратимся к случаю инверсных полугрупп. В этом абзаце обозначение $L(\mathscr{V})$ трактуется в смысле решетки подмногообразий многообразия инверсных полугрупп $\mathscr{V}$; через $\mathscr{I}$ [через $\mathscr{G}$, $\mathscr{S}$] обозначается многообразие всех инверсных полугрупп [групп, полурешеток]; через $\mathscr{B}$ — многообразие инверсных полугрупп, порожденное полугруппой B_2 (заметим, что $\mathscr{B}$ — это в точности многообразие всех комбинаторных строгих инверсных полугрупп, см. п. 5.1). Атомами решетки $L(\mathscr{I})$ являются минимальные многообразия групп и $\mathscr{S}$ (они входят и в список атомов решетки $\mathfrak{L}$, см. выше). В нижней части решетки $L(\mathscr{I})$ находится решетка $L(\mathscr{G} \vee \mathscr{B})$, равная прямому произведению решетки групповых многообразий $L(\mathscr{G})$ и трехэлементной цепи. «Опорные» элементы решетки $L(\mathscr{G} \vee \vee \mathscr{B})$ указаны на следующей диаграмме.



Здесь каждый из четырех интервалов, изображенных с помощью прямого отрезка, прост, т. е. в нем верхний элемент покрывает нижний; интервалы, изображенные с помощью волнистой линии, изоморфны $L(\mathcal{G})$. Элемент $\mathcal{G} \vee \mathcal{S}$ есть в точности многообразие клиффордовых инверсных полугрупп. В отличие от решеток $\mathfrak{L}$ и $L(\mathcal{G})$, не всякий элемент решетки $L(\mathcal{I})$ имеет покрывающий его элемент; например, многообразие, заданное системой тождеств $\{(x_1 \ldots x_n x_1^{-1} \ldots \ldots x_n^{-1} = x_1 \ldots x_n x_1^{-1} \ldots x_n^{-1}, n = 1, 2, \ldots\}$, не имеет покрытий в $L(\mathcal{I})$. Многообразие $\mathcal{B}$ покрывается в $L(\mathcal{I})$ многообразием $\mathcal{B}^1$, порожденным полугруппой B_2^1. В то время как любое подмногообразие из $\mathcal{G} \vee \mathcal{B}$ определяется своими пересечениями с $\mathcal{G}$ и $\mathcal{B}$, это уже, вообще говоря, неверно для подмногообразий из $\mathcal{G} \vee \mathcal{B}^1$. Решетка $L(\mathcal{I})$ континуальна хотя бы уже в силу континуальности $L(\mathcal{G})$, но существует также континуум надгрупповых многообразий инверсных полугрупп. Единица решетки $L(\mathcal{I})$ не представима в виде объединения конечного числа нееденичных элементов. Решетка $L(\mathcal{I})$ не модулярна. Отображения φ_1: $\mathcal{V} \to \mathcal{V} \vee \mathcal{G}$ и φ_2: $\mathcal{V} \to \mathcal{V} \cap \mathcal{G}$ суть эндоморфизмы решетки $L(\mathcal{I})$. Каждый $\ker \varphi_1$-класс есть полная модулярная подрешетка в $L(\mathcal{I})$. Ограничение отображения φ_1 на произвольный $\ker \varphi_2$-класс является изоморфным вложением этого класса в подрешетку надгрупповых многообразий.

Подробную информацию о решетке многообразий инверсных полугрупп см. в [76], гл. XII.

7.4. Квазимногообразия. Определение квазимногообразия см. в п. 1.1. Кроме обычного задания квазитождествами, одна из естественных ситуаций появления квазимногообразий полугрупп описывается следующей полугрупповой версией общеалгебраического факта (см. [26], с. 274): если $\mathcal{K}$ — квазимногообразие универсальных алгебр, среди операций которых есть полугрупповая $\circ$, то класс всех полугрупп, вложимых в алгебры из $\mathcal{K}$, рассматриваемые только относительно операции $\circ$, будет квазимногообразием. Классический пример такой ситуации (когда $\mathcal{K}$ — класс всех групп)—квазимногообразие полугрупп, вложимых в группы. Другие примеры: квазимногообразия полугрупп, вложимых в инверсные полугруппы, в клиффордовы полугруппы, в мультипликативные полугруппы колец.

Аналогично случаю многообразий вводятся понятия *базиса квазитождеств*, *неприводимого базиса квазитождеств*, *решетки подквазимногообразий* и т. п. Квазимногообразие полугрупп, вложимых в группы, не является конечно базируемым (*теорема Мальцева*) ([27], с. 46—57; см. также [18], гл. 12). Квазимногообразие, порожденное трехэлементной моногенной полугруппой $C_{3,1}$, не имеет неприводимого базиса тождеств (Sapir M. V.//Semigroup Forum. — 1980.— V. 20, № 1. — P. 73—88). Атомы решетки $\mathfrak{LQ}$ всех квазимногообразий полугрупп исчерпываются квазимногообразием, порожденным бесконечной моногенной полугруппой и атомами решетки многообразий полугрупп (см. п. 7.3). В $\mathfrak{LQ}$ вложима свободная решетка счетного ранга (Sapir M. V.//Algebra Universalis. — 1985. — V. 21. — P. 172—180), так что, в частности, $\mathfrak{LQ}$ не удовлетворяет никакому решеточному тождеству. Малое многообразие (см. п. 7.3) может иметь континуальную решетку подквазимногообразий; например — многообразие $\mathrm{var}\{xyz = t^2, xy = yx\}$, решетка подмногообразий которого трехэлементна.

7.5. Псевдомногообразия. Класс полугрупп $\mathcal{P}$ называется *псевдомногообразием*, если он замкнут относительно делителей (см. п. 4.4) и конечных прямых произведений, т. е. условия $A, B \in \mathcal{P}$ и $C|A$ влекут за собой $C \in \mathcal{P}$ и $A \times B \in \mathcal{P}$. Обычно (и ниже в данном пункте) рассматриваются псевдомногообразия конечных полугрупп. Псевдомногообразие, порожденное классом $\mathcal{K}$ конечных полугрупп, обозначим через $\mathrm{psvar}\,\mathcal{K}$. Для любого многообразия $\mathcal{V}$ класс $\mathcal{FV}$ всех конечных полугрупп из $\mathcal{V}$ образует псевдомногообразие. Такое псевдомногообразие (определяемое тождествами) называют *эквациональным*. Если класс $\mathcal{K}$ (конечных полугрупп) конечен, то псевдомногообразие $\mathrm{psvar}\,\mathcal{K}$ эквационально. Говорят, что полугруппа S *финально удовлетворяет совокупности тождеств* $\Omega_I = \{u_i = v_i\}_{i \in I}$, где I — линейно упорядоченное (отношением $\leqslant$) множество индексов, если найдется индекс k такой, что S удовлетворяет тождествам $u_i = v_i$ при всех $i \geqslant k$. Через $\mathcal{F}^u(\Omega)$ обозначим класс всех конечных полугрупп, финально удовлетворяющих совокупности тождеств Ω. Аналогом теоремы Биркгофа для многообразий (см. п. 1.1) является следующая *теорема Эйленберга — Шютценберже*; класс $\mathcal{P}$ конечных полугрупп является псевдомногообразием тогда и только тогда, когда $\mathcal{P} = \mathcal{F}^u(\Omega)$ для некоторого семейства Ω тождеств $u_i = v_i$, $i \in \mathbf{N}$. В этом случае говорят, что $\mathcal{P}$ финально определяется тождествами Ω.

Примеры. Полугруппа называется *$\mathcal{J}$-тривиальной*, если на ней отношение Грина $\mathcal{J}$ совпадает с отношением равенства. Псевдомногообразие всех конечных комбинаторных [клиффордовых, $\mathcal{J}$-тривиальных] полугрупп финально определяется тождествами $x^{n+1} = x\,[x^{1+n!} = x,\ (xy)^n x = (xy)^n = y\,(xy)^n]$, $n \in \mathbf{N}$. Псевдомногообразие всех конечных полугрупп (в сигнатуре моноидов) финально определяется тождествами $x^{n!} = 1$, $n \in \mathbf{N}$.

О взаимосвязи псевдомногообразий с проблематикой теории формальных языков см. п. 9.1. Дополнительную информацию о псевдомногообразиях см. в [22], гл. 6, § 5; [50], т. В, гл. V.

§ 8. Алгоритмические и теоретико-модельные аспекты

8.1. Проблема равенства слов и родственные алгоритмические проблемы. *Алгоритмической* называется проблема нахождения алгоритма для решения бесконечной серии однотипных задач, либо доказательства несуществования такого алгоритма (на уточнении понятия алгоритма мы не останавливаемся; о возможных здесь вариантах см., например, [31], т. 1, с. 214—218). Соответственно двум возможным альтернативам, алгоритмическую проблему называют *разрешимой* или *неразрешимой*. Алгоритмические проблемы рассматриваются преимущественно для полугрупп, заданных тем или иным эффективным способом; наиболее типично их рассмотрение для полугрупп, заданных определяющими соотношениями. Если полугруппа S задана копредставлением $\langle A \mid \Sigma \rangle$, то *проблема равенства слов* (ПРС) или, короче, *проблема равенства* для S состоит в описании алгоритма, который по любым словам w_1, $w_2 \in A^+$ определяет, представляют ли они один и тот же элемент из $\langle A|\Sigma\rangle$ (т. е. совпадают ли классы $\rho_\Sigma^\#(w_1)$ и $\rho_\Sigma^\#(w_2)$, см. п. 2.5). Другие названия этой проблемы: *проблема эквивалентности слов* или *проблема тождества слов*. Если модифицировать определение ПРС, считая одно из слов, скажем w_1, фиксированным, а другое — переменным, то получим *проблему равенства фиксированному слову* w_1.

Классическая версия ПРС относится к случаю конечно определенных (к. о.) полугрупп (*проблема Туэ*); заметим, что в ряде исследований по алгоритмическим проблемам вместо термина «к. о. полугруппа» в эквивалентном смысле употребляется термин «ассоциативное исчисление». Существуют к. о. полугруппы с неразрешимой ПРС (*теорема Маркова—Поста*). «Рекордный» из известных примеров таких полугрупп задается копредставлением из трех определяющих соотношений над двухбуквенным алфавитом. Вопрос о возможности уменьшить число определяющих соотношений до двух (или даже до одного) в полугруппе с неразрешимой ПРС пока (1989) открыт. Проблема равенства фиксированному слову также неразрешима. Подробную информацию о к. о. полугруппах с неразрешимой ПРС см. в [29], § 58—60; [22], гл. 5, § 4,5; [2], § 3; [32], § 3; см. также [31], т. 1, с. 217. Обстоятельный анализ этой проблематики, включая информацию о степенях неразрешимости ПРС и проблемы равенства фиксированному слову (применительно к полугруппам, группам и кольцам и с характеризацией основных идей и методов доказательств центральных результатов) дан в обзоре [10].

При ряде ограничений на копредставления ПРС разрешима. Приведем некоторые наиболее известные примеры. Соотношение $u = v$ называется *несократимым слева* [*справа*], если крайние левые [правые] буквы слов u и v различны либо одно из слов u, v пусто (что имеет смысл в случае моноидов). Для копредставления $S = \langle A|\Sigma\rangle$ без левых и правых циклов ПРС будет разрешима, если она разрешима в содержащей S группе, заданной над алфавитом A определяющими соотношениями Σ. В частности, она разрешима для копредставления с одним несократимым слева и справа соотношением. Общий случай копредставления с одним соотношением сводится к случаю, когда соотношение несократимо слева или справа. ПРС разрешима, например, для копредставления с единственным соотношением вида $a = bwa$ $[a = awb]$, где w — произвольное слово над алфавитом $\{a, b\}$. Если в к. о. полугруппе $S = \langle A | \Sigma \rangle$ мера налегания слов, участвующих в соотношениях из Σ, меньше $1/2$, то в S ПРС разрешима. Оценка $1/2$ здесь точная: существует к. о. полугруппа с неразрешимой ПРС и мерой налегания $1/2$. Дополнительную информацию см. в [1] и [2], § 3.

Из ограничений общеалгебраического характера на к. о. полугруппы, обеспечивающих разрешимость ПРС, наиболее известна финитная аппроксимируемость. В частности, всякая коммутативная конечно порожденная (автоматически к. о.) полугруппа имеет разрешимую ПРС. Следующие условия для конечно порожденной полугруппы S эквивалентны: (1) S имеет разрешимую ПРС; (2) S вложима в любую неодноэлементную алгебраически замкнутую полугруппу (Macintyre A.//J. Symb. Logic. — 1972. — V. 37, № 3. — P. 512—520); (3) S вложима в конгруэнц-простую подполугруппу некоторой к. о. полугруппы (Boone W. W., Higman G.// J. Austral. Math. Soc. — 1974. — V. 18, № 1. — P. 41—53); (4) S вложима в конгруэнц-простой (конечно порожденный) рекурсивно определенный группоид (Evans T.// Algebra Universalis. — 1978. — V. 8, № 2. — P. 197—204). Связям ПРС с различными алгебраическими свойствами универсальных алгебр посвящен обзор [52]; см. также [10], с. 41; [22], с. 169.

Близкой к ПРС является *проблема левой [правой] делимости*, состоящая в отыскании алгоритма, позволяющего для любых двух слов w_1, w_2 узнавать, будет ли w_1 левым [правым] делителем w_2. Обычно проблему левой делимости (ПЛД) [проблему правой делимости (ППД)] рассматривают для моноидов, считая тем самым отношение делимости рефлексивным. Кроме того, нередко, говоря о разрешимости проблем делимости, имеют в виду, что алгоритм выдает и соответствующее частное. В полугруппе с одним специальным определяющим соотношением $u = 1$ разрешимы все три проблемы: ПРС, ПЛД и ППД. Существуют к. о. полугруппы с неразрешимой ПЛД, но с разрешимыми ПРС и ППД; разумеется, верно и двойственное утверждение. Наличие к. о. групп с неразрешимой ПРС (см. п. II. 4.4) показывает, что из разрешимости ПЛД и ППД (каковая в группах тривиальна) не обязана следовать разрешимость ПРС. Но если к. о. моноид S задан копредставлением без левых [правых] циклов, то из разрешимости в S ПЛД [ППД] вытекает и разрешимость ПРС; вопрос о том, будет ли всегда в таком моноиде разрешима ПЛД [ППД], пока (1989) открыт, положительный ответ известен в ряде случаев, например, для одного определяющего соотношения вида $a = bwa$ [$a = awb$], где w — произвольное слово над $\{a, b\}$. Вместе с тем, если S задан копредставлением без левых и правых циклов, то в S разрешимы обе проблемы делимости, ПЛД и ППД, а ПРС разрешима как в S, так и в группе, заданной теми же определяющими соотношениями. Для произвольного вложимого в группу к. о. моноида S из разрешимости в S ПРС, ПЛД и ППД не обязательно следует разрешимость ПРС в минимальном его групповом расширении. Для коммутативных полугрупп ПЛД и ППД превращаются, разумеется, в одну *проблему делимости*, которая для любой конечно порожденной коммутативной полугруппы разрешима. Если в определении ПЛД [ППД] положить $w_2 = 1$, то получим определение *проблемы правой* [*левой*] *обратимости*. Эта проблема разрешима для любого фиксированного к. о. моноида, но не разрешима для класса всех к. о. моноидов. Источники см. в [2], с. 209—211.

В значительной степени с алгоритмической точки зрения изучаются уравнения в свободной полугруппе, называемые также *уравнениями в словах* (см. [41]; [60]; [2], § 4; [61], гл. 9; [33], с. 149—151). *Проблема распознавания разрешимости уравнений* в свободной полугруппе разрешима. Из других алгоритмических проблем упомянем еще *проблему изоморфизма* для данного класса $\mathcal{K}$, т. е. проблему существования алгоритма, распознающего по любым двум к. о. полугруппам из $\mathcal{K}$, изоморфны они или нет. (Лингвистически точнее было бы называть эту проблему *проблемой изоморфности*; говорят также *проблема изоморфии*.) Для класса всех полугрупп проблема изоморфизма неразрешима, для коммутативных полугрупп — разрешима (источники см. в [10], с. 18—19; см. также [29], с. 395—396).

Если абстрактный класс полугрупп $\mathscr{K}$ таков, что существует к. о. $\mathscr{K}$-полугруппа и существует к. о. полугруппа, не вложимая ни в какую к. о. $\mathscr{K}$-полугруппу, то свойство полугруппы быть $\mathscr{K}$-полугруппой называют *марковским*. Многие рассматриваемые в теории полугрупп свойства являются марковскими: коммутативность, законы сокращения, инверсность, клиффордовость, периодичность, свойство быть эпигруппой и т. д. Проблема распознавания любого марковского свойства для к. о. полугрупп неразрешима (см. [28], гл. VI, § 11; см. также [29], с. 394—395; [10], с. 18).

Обозначим через $\mathscr{F}\mathscr{P}$ класс всех к. о. полугрупп. При рассмотрении ПРС для полугрупп из фиксированного многообразия $\mathscr{K}$ возникают два варианта этой проблемы: 1) для полугрупп из $\mathscr{F}\mathscr{P}\cap\mathscr{K}$, 2) для конечно порожденных $\mathscr{K}$-полугрупп, заданных внутри $\mathscr{K}$ конечным числом определяющих соотношений (см. п. 2.5). Обозначим класс полугрупп, указанных в 2), через $\mathscr{F}\mathscr{P}\mathscr{K}$. Если ПРС разрешима для любой полугруппы из $\mathscr{F}\mathscr{P}\mathscr{K}$, то говорят, что *проблема равенства* (слов) *в многообразии* $\mathscr{K}$ *разрешима*; в этом случае ПРС разрешима и для любой полугруппы из $\mathscr{F}\mathscr{P}\mathscr{K}$, так как $\mathscr{F}\mathscr{P}\cap\mathscr{K}\subseteq\mathscr{F}\mathscr{P}\mathscr{K}$. Наиболее естественно с точки зрения проблемы равенства рассматривать конечно базируемые (к. б.) многообразия. Разрешимость этой проблемы (равно как и других родственных алгоритмических проблем) для локально конечных многообразий тривиальна, так что в содержательных рассмотрениях фигурируют не локально конечные к. б. многообразия. Следующие условия для непериодического к. б. многообразия $\mathscr{K}$ эквивалентны: (1) в $\mathscr{K}$ разрешима проблема равенства; (2) разрешима элементарная теория (см. п. 8.2) каждой полугруппы из $\mathscr{F}\mathscr{P}\mathscr{K}$; (3) разрешима универсальная теория (см. п. 8.2) многообразия $\mathscr{K}$; (4) разрешима универсальная теория класса всех конечных полугрупп из $\mathscr{K}$; (5) каждая полугруппа из $\mathscr{F}\mathscr{P}\mathscr{K}$ финитно аппроксимируема; (6) каждая полугруппа из $\mathscr{F}\mathscr{P}\mathscr{K}$ представима матрицами над некоторым полем. При этих условиях все нильполугруппы из $\mathscr{K}$ локально конечны; о связи последнего свойства с другими свойствами многообразия см. в п. 7.2. Вопрос об описании произвольных к. б. многообразий полугрупп с разрешимой проблемой равенства сводится к аналогичному вопросу для многообразий периодических групп. Дальнейшую информацию о проблеме равенства в многообразиях см. в [10], п. 6.9 и [44], § 3.

8.2. Элементарные свойства. Разрешимые и неразрешимые теории. Произвольную совокупность L замкнутых формул логики первого порядка (рассматриваемых обычно в нормальной пренексной форме) называют *языком логики первого порядка.* Теорией класса полугрупп $\mathcal{K}$, ограниченной языком L (состоящим из формул полугрупповой сигнатуры), или, короче, *L-теорией класса $\mathcal{K}$* называется множество $L\mathcal{K}$ всех формул из L, истинных на каждой $\mathcal{K}$-полугруппе. В случае когда $\mathcal{K}$ состоит из одной полугруппы S, говорят о *L-теории полугруппы S.* Наиболее употребительны следующие языки: *элементарный* — совокупность всех формул указанного выше типа; *позитивный* — формулы которого не содержат отрицания; *диофантов* (или *позитивно-примитивный*) — формулы которого не содержат квантора всеобщности, а также дизъюнкции и отрицания; *универсальный* — формулы которого не содержат квантора существования; *квазиэквациональный* — формулы которого суть квазитождества; *эквациональный* — формулы которого суть тождества. Теории, ограниченные этими языками, называются соответственно *элементарной, позитивной, диофантовой, универсальной, квазиэквациональной, эквациональной.*

Одной из стандартных постановок задач теоретико-модельного характера является вопрос об аксиоматизируемости рассматриваемого класса $\mathcal{K}$ формулами, принадлежащими данному языку L. Класс $\mathcal{K}$ называется *L-аксиоматизируемым,* если существует множество формул $M \subseteq L$ такое, что $\mathcal{K}$ состоит из тех и только тех полугрупп, на которых истинны все формулы из M. Конкретизируя язык L, получаем соответственно *элементарную, позитивную* и т. д. аксиоматизируемость. Элементарно аксиоматизируемый класс называют просто *аксиоматизируемым*; [квази-] эквационально аксиоматизируемые классы — это не что иное, как [квази] многообразия. Многие известные классы полугрупп аксиоматизируемы в силу своего определения; кроме тех, которые являются [квази] многообразиями, к таковым относятся, например, определяемые в терминах уравнений классы, приведенные в таблице в начале п. 4.6. Такие классы, как класс всех эпигрупп [нильполугрупп] или всех периодических [нильпотентных] полугрупп, неаксиоматизируемы (простое применение свойства аксиоматизируемых классов, см., например, [26], с. 207). Класс мультипликативных полугрупп колец неаксиоматизируем (Когаловский С. Р.//Докл. АН СССР.—1961.— Т. 140, № 5.—С. 1005—1007).

Другая стандартная постановка задач — вопрос с разрешимости той или иной теории класса. Теория $L\mathcal{K}$ называется *разрешимой* [*неразрешимой*], если существует [не существует] алгоритм, распознающий по произвольной формуле языка L ее принадлежность $L\mathcal{K}$. Если $L' \subset L$ и существует алгоритм, выделяющий формулы из L' среди формул из L, то из разрешимости теории $L\mathcal{K}$ следует, очевидно, разрешимость теории $L'\mathcal{K}$; например, из разрешимости элементарной теории вытекает разрешимость позитивной теории. Теория $L\mathcal{K}$ называется *наследственно неразрешимой*, если неразрешима L-теория любого класса полугрупп, содержащего $\mathcal{K}$. Разрешимы [наследственно неразрешимы] элементарные теории, например, любой свободной коммутативной [свободной немоногенной] полугруппы, свободной (унарной) моногенной [немоногенной] инверсной полугруппы, класса полугрупп положительных элементов упорядоченных абелевых групп [всех коммутативных полугрупп с сокращением, всех мультипликативных полугрупп коммутативных колец] (см. [16], с. 98, 99). В частности, класс всех полугрупп и класс всех коммутативных полугрупп имеют неразрешимую элементарную теорию. Позитивная теория многообразия универсальных алгебр $\mathcal{V}$ совпадает с позитивной теорией $\mathcal{V}$-свободной алгебры счетного ранга. Позитивная теория класса всех полугрупп [инверсных полугрупп] разрешима [неразрешима]. Универсальные теории класса всех полугрупп и класса всех инверсных полугрупп неразрешимы. Элементарная теория многообразия полугрупп $\mathcal{K}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ будет одного из следующих типов: произвольное периодическое многообразие абелевых групп; многообразие всех прямоугольных [левых, правых] групп над произвольным периодическим многообразием абелевых групп; $\mathrm{var}\{xy=x^2\}$, $\mathrm{var}\{xy=y^2\}$, $\mathrm{var}\{xy=0\}$. Существует конечно базируемое многообразие полугрупп, эквациональная теория которого неразрешима. Более подробно о разрешимости теорий первого порядка многообразий полугрупп и свободных полугрупп см. в [12], § 2, 4. О многообразиях с разрешимой универсальной теорий см. также п. 8.1.

Для свободной полугруппы рассматриваются также теории в обогащенной сигнатуре, включающей, кроме символа операции, символы констант, интерпретируемые как свободные образующие. В этой сигнатуре: позитивная теория свободной полугруппы ранга 1 или счетного ранга разрешима, а в случае конечного ранга >1 — неразрешима; диофантова и универсальная теории свободной полугруппы конечного или счетного ранга разрешимы; диофантова теория свободной (унарной) инверсной полугруппы неразрешима в случае конечного ранга >1 или счетного ранга. Дальнейшую информацию см. в [12], § 2.

§ 9. Комбинаторные приложения полугрупп

Под комбинаторными приложениями здесь подразумеваются полугрупповые аспекты, возникающие при изучении языков, автоматов и кодов. Все они так или иначе базируются на рассмотрении слов в некотором (чаще всего — конечном) алфавите, т. е. по существу на рассмотрении свободных полугрупп. Определение и первоначальные свойства свободных полугрупп см. в пп. 1.2, 2.4 и 2.5, определение и характеризации свободного моноида — в п. 2.1. Многие свойства свободных моноидов и свободных полугрупп очевидным образом «параллельны»; но в ряде случаев (в частности, в рассмотрениях данного параграфа) предпочтительнее иметь дело именно со свободными моноидами. Кроме источников, упоминаемых в пп. 9.1—9.3, укажем книгу [61], в которой собраны воедино различные результаты и методы, связанные с комбинаторными свойствами слов, и некоторые их приложения (включая, например, основы теории свободных алгебр Ли).

9.1. Языки. Произвольное подмножество свободного моноида A^* называется (*формальным*) *языком*, а также *событием* (над алфавитом A). Для языков над A определены (*булевы*) операции объединения $\cup$, пересечения $\cap$ и дополнения ($L \mapsto A^* \setminus L$), а также произведение (в глобальном надмоноиде $\mathscr{P}(A)$, см. п. 1.1). Подмоноид, порожденный языком $L \subseteq A^*$, называется *итерацией* языка L и обозначается через $L^{(*)}$ или, если нет опасности недоразумения, через L^* или через $\{L\}$. Таким образом, $L^{(*)} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} L^n$, где $L^0 = \{1\}$. Для языка $L \subseteq A^*$ и слова $w \in A^*$ определено также *левое частное* Lw^{-1} [*правое частное* $w^{-1}L$], заданное следующим образом:

$$Lw^{-1} = \{u \in A^* \mid uw \in L\} \quad [w^{-1}L = \{u \in A \mid wu \in L\}].$$

Наименьший класс языков, содержащий все конечные языки из A^* и замкнутый относительно объединений, произведений и итераций, обозначается $\mathrm{Rat}\, A^*$. Языки, составляющие $\mathrm{Rat}\, A^*$, называются *рациональными языками* (или *регулярными событиями*). Язык $L \subseteq A^*$ называется *распознаваемым*, если существуют конечный моноид M, подмножество $M_0 \subseteq M$ и гомоморфизм φ: $A^* \to M$ такие, что $L = \varphi^{-1}\varphi(M_0)$. При этом говорят, что гомоморфизм φ *распознает* L. Последнее равенство показывает, в частности, что L *насыщен* относительно конгруэнции $\ker \varphi$, т. е. является объединением некоторых $\ker \varphi$-классов. Следующие условия для языка $L \subseteq A^*$ эквивалентны: (1) L распознаваем; (2) L насыщен относительно некоторой конгруэнции ρ на A^*, имеющей *конечный индекс* (т. е. конечное число ρ-классов); (2′) L насыщен относительно некоторой правой конгруэнции конечного индекса на A^*. Наибольшей конгруэнцией с указанным в (2) свойством служит синтаксическая конгруэнция P_L на A^*, определяемая условием

$$(w_1, w_2) \in P_L \Leftrightarrow \forall u,\ v \in A^* \quad (uw_1v \in L \Leftrightarrow uw_2v \in L).$$

Моноид $M(L) = A^*/P_L$ называют *синтаксическим моноидом* языка L, а канонический гомоморфизм A^* на $M(L)$ — *синтаксическим гомоморфизмом* языка L. Если гомоморфизм φ: $A^* \to M$ распознает L, то $M(L)$ будет гомоморфным образом моноида M. Очевидно, язык L распознаваем тогда и только тогда, когда его синтаксический моноид конечен. *Теорема Клини* гласит, что произвольный язык над конечным алфавитом распознаваем тогда и только тогда, когда он рационален.

Потоком языков называют всякий класс $\mathcal{S}$ множеств, удовлетворяющих следующим условиям: 1) каждое множество $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ состоит из языков над фиксированным (для $\mathcal{L}$) конечным алфавитом и замкнуто относительно булевых операций, а также относительно левых и правых частных; 2) если множества $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathcal{S}$ состоят из языков над алфавитами A_1 и A_2 соответственно, то для любого гомоморфизма $\varphi\colon A_1^* \to A_2^*$ из того, что $L \in \mathcal{L}_2$, следует $\varphi^{-1}(L) \in \mathcal{L}_1$. Для произвольного псевдомногообразия $\mathcal{P}$ конечных моноидов (п. 7.5) обозначим через $\overline{\mathcal{S}}(\mathcal{P})$ класс всех таких множеств, что каждое состоит из всех языков над фиксированным конечным алфавитом, синтаксические моноиды которых принадлежат $\mathcal{P}$. С другой стороны, для произвольного потока $\mathcal{S}$ рациональных языков обозначим через $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{S})$ псевдомногообразие моноидов, порожденное синтаксическими моноидами $M(L)$, где L пробегает множества, составляющие $\mathcal{S}$. *Теорема Эйленберга* гласит, что соответствия $\mathcal{P} \mapsto \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{P})$ и $\mathcal{S} \mapsto \overline{\mathcal{P}}(\mathcal{S})$ определяют взаимно обратные биекции между псевдомногообразиями конечных моноидов и потоками рациональных языков над конечными алфавитами.

Если $\mathcal{G}$ — фиксированное псевдомногообразие групп, то через $M(\mathcal{G})$ обозначим псевдомногообразие всех моноидов, подгруппы которых принадлежат $\mathcal{G}$. Поток языков $\overline{\mathcal{S}}(M(\mathcal{G})$ называется *потоком, определяемым группами* из $\mathcal{G}$. Всякий такой поток состоит из множеств, замкнутых относительно умножения языков.

Примеры. 1) Язык L называется *апериодическим*, если L может быть получен из некоторых конечных языков (над тем же алфавитом) конечным числом операций объединения, дополнения и умножения. Поток всех апериодических языков совпадает с потоком, определяемым тривиальными группами (*теорема Шютценберже*). Соответствующее (в теореме Эйленберга) псевдомногообразие — это в точности псевдомногообразие всех конечных комбинаторных моноидов. 2) Язык $L \subseteq A^*$ называется *кусочно тестируемым*, если L может быть получен из языков вида $A^*a_1A^*a_2 \ldots A^*a_kA^*$, где $a_1, \ldots, a_k \in A$, конечным числом булевых операций. Псевдомногообразие, соответствующее потоку всех кусочно тестируемых языков, — это в точности псевдомногообразие всех конечных $\mathcal{J}$-тривиальных (см. п. 7.5) моноидов.

Оно содержится в псевдомногообразии из предыдущего примера. 3) Пусть n — натуральное число, w — слово из A^+ длины $\geqslant n$. Обозначим через $L_n(w)$ [через $R_n(w)$] левый [правый] делитель слова w, имеющий длину n, и положим

$$I_n(w) = \{w' \in A^+ \mid l(w') = n \text{ и } w = uw'v, \quad u, v \in A^+\}.$$

Язык $L \subseteq A^+$ называется *строго n-тестируемым*, если существуют конечные множества $X, Y, Z \subseteq A$ такие, что

$$(A^+)^n = \{w \in A^+ \mid L_n(w) \in X, \ R_n(w) \in Y, \ I_n(w) \subseteq Z\}.$$

Язык, получаемый булевыми операциями из некоторых строго n-тестируемых языков, называется *n-тестируемым*. Язык называют *тестируемым* (или *локально тестируемым*), если он n-тестируем для некоторого натурального n. Псевдомногообразие полугрупп, соответствующее (в смысле полугрупповой версии теоремы Эйленберга, которая также справедлива) потоку всех тестируемых языков, — это в точности псевдомногообразие всех конечных тестируемых полугрупп (см. п. 7.2).

Дальнейшую информацию по темам данного пункта см. в [4] гл. 11; [22], гл. 6, § 1, 3 и 5, гл. 7, § 1; [33], гл. 2, 3; [50], т. A, гл. II, III; т. B, гл. VII—IX.

9.2. Автоматы. *Автоматом* называется пятерка $\mathfrak{A} = (Q, A, B, \delta, \lambda)$, где Q — *множество состояний* автомата $\mathfrak{A}$, A [соответственно B] — *множество входных* [*выходных*] *сигналов* (или *входной* [*выходной*] *алфавит*), δ: $Q \times A \to Q$ [λ: $Q \times A \to B$] *функция переходов* [*выходов*]. На произвольный автомат можно смотреть, как на трехосновную универсальную алгебру (см. п. VI. 1.7) с двумя операциями δ и λ, что позволяет без дополнительных пояснений пользоваться общеалгебраическими понятиями *подавтомата*, *порождающего множества*, *гомоморфизма* и т. п. Если множество состояний автомата, а также входной и выходной алфавиты конечны, то автомат называется *конечным*. Автомат называется *инициальным*, если в нем фиксировано состояние, называемое *начальным*. Для автомата $\mathfrak{A} = (Q, A, B, \delta, \lambda)$ каждый входной сигнал $a \in A$ определяет преобразование $\varphi_a \in \mathscr{T}_r(Q)$, задаваемое условием $q\varphi_a = \delta(q, a)$. Соответствие $a \mapsto \varphi_a$ определяет отображение алфавита A в $\mathscr{T}_r(Q)$, которое, согласно свойству свободного моноида, можно (однозначно) продолжить до гомоморфизма $\tau_{\mathfrak{A}}$: $A^* \to \mathscr{T}_r(Q)$. Моноид $T(\mathfrak{A}) = \tau_{\mathfrak{A}}(A)$ (изоморфный $A^*/\ker \tau_{\mathfrak{A}}$) называют *полугруппой* (или *моноидом переходов*) *автомата* $\mathfrak{A}$. Термин, называющий какое-либо абстрактное свойство полугруппы автомата $\mathfrak{A}$, нередко относят и к самому автомату; в этом смысле говорят, например, о коммутативных, групповых автоматах и т. п. По любому моноиду M можно построить инициальный автомат $\mathfrak{A}(M)=(M, M, M, \cdot, \cdot)$, где функции переходов и выходов совпадают с операцией умножения в M, а начальным состоянием служит 1. Автомат $\mathfrak{A}(M)$ называют *автоматом моноида* M. В тех случаях, когда при изучении связей между автоматами и полугруппами оказываются несущественными выходной алфавит и функция выходов, уместно рассматривать *автомат без выходов* (или *A-автомат*) $\mathfrak{A}=(Q, A, \delta)$. Всякий автомат без выходов $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как правый полигон над моноидом $T(\mathfrak{A})$ (см. п. 10.1). Это согласуется с использованием термина «M-автомат» для полигонов над моноидом M.

Говорят, что язык $L \subseteq A^*$ *распознается автоматом* $\mathfrak{A}$, если существуют (начальное) состояние q_0 и множество (заключительных) состояний Q_0 такие, что для любого $w \in A^*$ имеет место

$$w \in L \Leftrightarrow q_0\tau_{\mathfrak{A}}(w) \in Q_0.$$

Язык, распознаваемый автоматом $\mathfrak{A}$, называют также *событием, представимым автоматом* (или *в автомате*) $\mathfrak{A}$. Язык L распознаваем некоторым конечным автоматом тогда и только тогда, когда он распознаваем в смысле определения из п. 9.1. Для любого распознаваемого языка L существует распознающий его *минимальный автомат* $\mathfrak{A}(L)$, характеризуемый тем, что $\mathfrak{A}(L)$ является гомоморфным образом любого (порожденного своим начальным состоянием) автомата, распознающего L. Моноид $T(\mathfrak{A}(L))$ изоморфен синтаксическому моноиду $M(L)$.

Подробную информацию по темам данного пункта см. в [4], гл. 2; [17], гл. 7; [14], § 1.1, 1.7, 2.1, 2.2, 3.5, и в источниках, указанных в предыдущем пункте. См. также [31], т. 1, с. 66—68.

9.3. Коды. *Кодом* (или *кодовым множеством*) над алфавитом A называется всякое подмножество из A^*, являющееся базисом свободного подмоноида из A^*. Иначе говоря, $C \subseteq A^*$ есть код, если произвольное равенство $x_1 \ldots x_m = y_1 \ldots y_n$, где $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots$ $\ldots, y_n \in C$, влечет $m=n$ и $x_1=y_1, \ldots, x_n=y_n$. Если B — алфавит, равномощный некоторому коду

$C \subseteq A^*$, то всякую биекцию γ: $B \to C$ называют *кодированием* (или, более обстоятельно, *взаимно однозначным алфавитным кодированием*) множества B в алфавите A, а продолжающий ее (инъективный) гомоморфизм $\hat{\gamma}$ — кодирующим *гомоморфизмом*. Код $C \subseteq A^*$ называется *префиксным* [*суффиксным*], если никакое слово из C не является левым [правым] делителем другого слова из C, иными словами, если $CA^+ \cap C = \varnothing$ [$A^+C \cap C = \varnothing$]. Код, являющийся одновременно префиксным и суффиксным, называется *бипрефиксным*.

Пусть M — моноид, U — его подмоноид. Следующие условия эквивалентны: (а) Для любого $x \in M$ из того, что $Ux \cap U \neq \varnothing$ и $xU \cap U \neq \varnothing$, следует $x \in U$; (б) для любого $x \in M$ из того, что $Ux \cap xU \cap U \neq \varnothing$, следует $x \in U$. Подмоноид U, удовлетворяющий этим условиям, называют *слабо унитарным* в M. Более сильными свойствами подмоноидов являются левая [правая] унитарность и просто унитарность (см. п. 4.5). Унитарный подмоноид называют также *биунитарным*. Для групп все четыре условия унитарности совпадают и означают, что соответствующий подмоноид есть подгруппа. Подмоноид свободного моноида будет свободным тогда и только тогда, когда он слабо унитарен; следовательно, коды над алфавитом A — это в точности базисы слабо унитарных подмоноидов из A^*. Двухэлементное множество $\{u, v\} \subset A^+$ будет кодом тогда и только тогда, когда не существует такого $w \in A^+$, что $u \in \langle w \rangle$ и $v \in \langle w \rangle$. Бипрефиксные [префиксные, суффиксные] коды над алфавитом A — это в точности базисы унитарных [унитарных слева, унитарных справа] подмоноидов из A. Если φ: $M \to M'$ есть моноидный гомоморфизм, то каждое из условий унитарности сохраняется при взятии полных прообразов, т. е. из того, что подмоноид $H \subseteq M'$ унитарен [унитарен слева или справа, слабо унитарен], следует, что $\varphi^{-1}(H)$ удовлетворяет тому же условию. В частности, если M' есть группа, а H — ее подгруппа, то подмоноид $\varphi^{-1}(H)$ унитарен в M. Если в последней ситуации $M = A^*$, а гомоморфизм φ сюръективен, то базис всякого такого подмоноида $\varphi^{-1}(H)$ называется *групповым кодом*. Примером группового кода служит код Дика, см. пример 7) ниже. Все групповые коды бипрефиксны. Код над алфавитом A называется *макси-*

мальным, если он не содержится ни в каком другом коде над A. Любой код C над A содержится в некотором максимальном коде над A; если C конечен, то среди содержащих его максимальных кодов может не быть конечных, см. пример 6) ниже. Всякий групповой код максимален. Если U — максимальный (собственный) подмоноид в A^*, то его базис будет максимальным кодом. Обратное неверно: любой равномерный код (см. пример 1) ниже) максимален, но $(A^{km})^{(*)} \subset (A^m)^{(*)} \subset A^*$ при $k \neq 1$ и $m \neq 1$. Множество $P \subseteq A^*$ называется *плотным* в A^*, если $P \cap I \neq \varnothing$ для любого (двустороннего) идеала I из A^*, т. е. если каждое слово из A^* является делителем некоторого слова из P. Множество $P \subseteq A^*$, не являющееся плотным, называют *тонким*. Если код распознаваем (см. пп. 9.1 и 9.2), то он тонок. Обратное неверно (см. пример 5) ниже), но всякий тонкий групповой код распознаваем. Если подмоноид $P^{(*)}$ плотен в A^*, то множество P называют *полным*. Любой максимальный код полон. Полный, но не максимальный код (такие существуют, см. пример 7) ниже) необходимо плотен. Так что, в частности, тонкий код будет максимальным тогда и только тогда, когда он полон.

Пусть даны код Y над алфавитом A и кодирование γ: $B \to Y$. Рассмотрим соответствующий кодирующий гомоморфизм φ: $B^* \to A^*$. Для произвольного кода $X \subseteq B^*$ множество $C = \varphi(X)$ будет кодом над A. Этот код называют *композитом* кода X над кодом Y (относительно φ) и обозначают $X \otimes_\varphi Y$ или, если позволяет контекст, просто $X \otimes Y$. Говорят также, что код $C = X \otimes Y$ *разложим* над Y. Если при этом X и Y суть префиксные [суффиксные, полные, тонкие] коды, то и код C будет префиксным [суффиксным, полным, тонким]. Обратные утверждения справедливы в следующих более слабых версиях: если C — префиксный [суффиксный] код, то код X будет префиксным [суффиксным]; если C — полный [тонкий] код, то код Y будет полным [тонким]. Если код $C = X \otimes Y$ максимален, то X и Y суть максимальные коды; примеров, опровергающих обратное утверждение, пока (1989) нет, но оно справедливо при условии, что коды X и Y тонкие. Для любого кода $C \subseteq A^*$ существуют тривиальные разложения: $C = C \otimes A$ (когда в определении композита $B = A$ и $\varphi = \mathrm{id}_{A^*}$) и

$C = B \otimes C$ (где B — алфавит, равномощный C). Если других разложений код C не имеет, то C называется неразложимым. Операция $\otimes$ ассоциативна в том смысле, что справедливо равенство

$$(X \otimes_\varphi Y) \otimes_\psi Z = X \otimes_{\psi\circ\varphi} (Y \otimes_\psi Z).$$

Для любого конечного кода C существуют неразложимые коды $X_1, \ldots, X_m$ такие, что $C = X_1 \otimes \ldots \otimes X_m$. Число членов такого разложения не является инвариантом кода C, см. пример 8) ниже.

Примеры. 1) Для любого натурального числа n множество A^n будет кодом в A^*, называемым *равномерным* (или *однородным*) кодом степени n. Равномерный код является бипрефиксным и групповым. Код A^n разложим над некоторым кодом Y тогда и только тогда, когда $Y = A^m$, где m — некоторый делитель n; в частности, для простого p код A^p неразложим. 2) Множество $\{a^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$ есть префиксный код над алфавитом $\{a, b\}$, не являющийся суффиксным. 3) Множество $\{a^2, ba^2, ba\}$ есть код над $\{a, b\}$, не являющийся ни префиксным, ни суффиксным. 4) Множество $\{a, ab, ba\}$ не является кодом. 5) Множество $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ есть тонкий код, не являющийся распознаваемым. 6) Множество $\{a^5, ba^2, ab, b\}$ есть код над $\{a, b\}$, причем любой содержащий его максимальный код бесконечен. 7) Пусть $A = X \cup \bar{X}$, где $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $\bar{X} = \{b_1, \ldots, b_n\}$, δ: $A^* \to FG(X)$ есть гомоморфизм на свободную группу над алфавитом X, продолжающий отображение $a_i \longmapsto a_i$, $b_i \longmapsto a_i^{-1}$. Базис подмоноида $\delta^{-1}(1)$ обозначается через D_n и называется *кодом Дика над A* (или *над $2n$ буквами*). (Сам подмоноид $\delta^{-1}(1) = D_n^*$ называют *языком Дика*.) Для многих иллюстраций полезен уже код Дика D_2 Например, D_2 есть плотный код; для любого $x \in D_2$ код $D_2 \setminus \{x\}$ остается плотным (и, следовательно, будет полным), но, очевидно, не максимален. 8) Для кода $C = \{a^3 b\}$ над $\{a, b\}$ имеют место следующие разложения на неразложимые коды (над соответствующими алфавитами):

$$C = \{xy\} \otimes \{u^2, v\} \otimes \{a, ab\}, \quad C = \{xy\} \otimes \{a^3, b\}.$$

Дальнейшую информацию по теме данного пункта см. в [22], гл. 5, § 1—3, гл. 8; [30], гл. II; [33], гл. 4. Обстоятельное изложение теории кодов см. в [46].

§ 10. Представления полугрупп преобразованиями

Общее определение представления см. в п. 2.2. Как отмечено в пп. 1.2 и 4.2, любая полугруппа имеет (точное) представление в классе полугрупп преобразований. Некоторые важнейшие полугруппы преобразований рассмотрены в п. 1.2; во многих последующих пунктах они (и те или иные их подполугруппы) служат объектом внимания при рассмотрении соответствующих вопросов. В настоящем параграфе основные понятия и свойства, связанные с представлениями, излагаются на (ставшем фактически уже общеупотребительным) языке полигонов. Изучались и представления полугрупп частичными преобразованиями. Некоторые работы, в которых приводятся конструкции, описывающие все такие представления произвольной полугруппы, указаны в [18], т. 2, с. 304; там же, на с. 310—311, охарактеризована возможность сведе́ния изучения представлений частичными преобразованиями к случаю обычных преобразований (называемых иногда *полными*), см. также [24], с. 49—50. Одно из упомянутых описаний излагается в [18], § 11.4. Как отмечено в пп. 2.1 и 4.2, любая инверсная полугруппа имеет точное представление взаимно однозначными частичными преобразованиями. Имеется описание таких представлений, основанное на идее, обобщающей на случай инверсных полугрупп описание транзитивных представлений групп перестановками множеств смежных классов по подгруппам; изложение упомянутого описания см. в [18], § 7.2, 7.3, а также в [56], § V. 8, или [76], § IV. 4.

Полигоны ныне составляют предмет довольно разветвленной теории. Общий обзор исследований в этой области дан в [35]; [37], § 5; [59]. Полигонам и полугруппам частных посвящен подробный обзор [87].

10.1. Представления и полигоны; основные понятия и свойства. Пусть S — полугруппа, P — множество. Произвольный гомоморфизм

$$\varphi\colon S \to \mathcal{T}_r(P) \qquad (*)$$

называют (*правым*) *представлением полугруппы* S *преобразованиями множества* P. *Правым* S-*полигоном* называют тройку (P, S, δ), где $\delta\colon P \times S \to P$ — отображение, удовлетворяющее условию

$$\delta(\delta(x, \lambda), \mu) = \delta(x, \lambda\mu) \qquad (**)$$

для любых $x \in P$, $\lambda, \mu \in S$. Двойственно определяются *левые представления* (называемые иногда *антипредставлениями*) и *левые полигоны*. Мы будем рассматривать правые полигоны, называя их просто *полигонами*. S-полигон называют также *полигоном над* S;

в качестве синонимов используют еще ряд терминов: *S-автомат* (ср. п. 9.2), *S-операнд*, *S-система*, *S-полумодуль*, *S-действие*, *S-множество*. Представления и полигоны эквивалентны в следующем смысле: каждому представлению (*) однозначно отвечает S-полигон (P, S, δ_φ), где $\delta_\varphi(x, \lambda) = x\varphi(\lambda)$; обратно, S-полигону (P, S, δ) отвечает представление φ_δ: $S \to \mathcal{T}_r(P)$, заданное условием $x\varphi_\delta(\lambda) = \delta(x, \lambda)$. Представление φ [полигон (P, S, δ_φ)] называют *ассоциированным* с полигоном (P, S, δ) [представлением φ]. О полугруппе S говорят, что она *действует* в S-полигоне, а соответствующее отображение δ называют *действием*. Обычно вместо $\delta(x, \lambda)$ пишут просто $x\lambda$. Тогда равенство (*) принимает вид $(x\lambda)\mu = x(\lambda\mu)$, а в записи полигона нет необходимости упоминать δ, и применяются более простые записи: $(P; S)$, P_S или даже просто P. Полугруппу S обычно считают моноидом, полагая $x1 = x$ для любого $x \in P$.

Важный пример — S-полигон S_S, ассоциированный с правым регулярным представлением полугруппы S (см. п. 4.2). Любая универсальная алгебра, операции которой унарны, может рассматриваться как полигон над свободным моноидом A^*; где A есть множество этих операций.

Ядром S-полигона P называют конгруэнцию

$$\mathrm{Ker}_P = \{(\lambda, \mu) \in S \times S \mid x\lambda = x\mu \text{ для всех } x \in P\}$$

на полугруппе S; это не что иное, как ядро ассоциированного представления (см. п. 2.2). Полигон P называется *точным*, если $\mathrm{Ker}_P = \Delta_S$. *Гомоморфизмом* полигона $P = P_S$ в полигон $Q = Q_S$ называется всякое отображение θ: $P \to Q$ такое, что

$$\theta(x\lambda) = \theta(x)\lambda$$

для всех $x \in P$, $\lambda \in S$. Обычным образом определяются *эндоморфизм*, *изоморфизм* и *автоморфизм* полигонов. Можно, в частности, говорить о к а т е г о р и и полигонов над данной полугруппой. Представления, ассоциированные с изоморфными полигонами, называют *эквивалентными*. *Конгруэнцией* S-полигона P называется всякая эквивалентность ε на P, устойчивая относительно действия полугруппы S, т. е. такая, что

$$(x, y) \in \varepsilon \Rightarrow (x\lambda, y\lambda) \in \varepsilon$$

для любых $x, y \in P$, $\lambda \in S$. В решетке $\operatorname{Con} P$ всех конгруэнций полигона P нулем [единицей] служит Δ_P [соответственно ∇_P]; эти две конгруэнции называются *тривиальными*. Если P есть S-полигон и $\varepsilon \in \operatorname{Con} P$, то фактормножество P/ε очевидным образом превращается в S-полигон, называемый *факторполигоном* полигона P по конгруэнции ε. Между гомоморфизмами и конгруэнциями полигонов имеется обычная связь, устанавливаемая «теоремой о гомоморфизмах». Для подмножества $Q \subseteq P_S$ положим $QS = \{q\lambda \mid q \in Q, \lambda \in S\}$. Подмножество $Q \subseteq P$ называется *инвариантным* (или *устойчивым*) относительно действия S, если $QS \subseteq Q$; в этом случае Q очевидным образом превращается в S-полигон, называемый *подполигоном* полигона P_S. Подполигон Q *тривиален*, если $|Q| = 1$ или $Q = P$. Если $Q = \{c\}$, то c называют *неподвижным* элементом. Множество всех неподвижных элементов полигона P обозначают через P^0. Полигон P называют *центрированным*, если он имеет единственный неподвижный элемент (обозначаемый обычно через 0_P). Подполигону $Q \subseteq P$ отвечает *рисовская конгруэнция* ε_Q на P, задаваемая формулой $\varepsilon_Q = (Q \times Q) \cup \Delta_P$. Соответствующий *рисовский факторполигон* обозначается просто P/Q. [Центрированный] полигон $P = P/S$ называется *транзитивным* [*0-транзитивным*], если для любых $x, y \in P$ $[x, y \in P \setminus \{0_P\}]$ найдется такой элемент $\lambda \in S$, что $x\lambda = y$. Очевидно, транзитивность полигона P эквивалентна отсутствию у P собственных подполигонов.

Конгруэнции [подполигоны, неподвижные элементы] полигона S_S — это в точности правые конгруэнции [правые идеалы, левые нули]. Полигон S_S транзитивен тогда и только тогда, когда полугруппа S проста справа.

Разложением [*0-разложением* центрированного] полигона P называют разбиение P на подполигоны [представление в виде объединения подполигонов, пересекающихся по 0_P]. Если у P нет таких разложений, имеющих более одной компоненты, то P называется [0-]*неразложимым*. Любой [центрированный] полигон имеет единственное разложение на [0-]неразложимые подполигоны. Если компоненты указанного разложения [0-]транзитивны, то полигон называется *вполне* [0-]*приводимым*. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: (1) для всякого [центрированного] S-полигона P подполигон PS вполне [0-]приводим; (2) полигон S_S вполне [0-]приводим; (3) S является объединением своих минимальных [невырожденных (т. е. не лежащих в $\operatorname{Ann} S$) 0-минимальных] правых идеалов.

Полигон P_S называют [*строго*] *циклическим*, если $P = aS \cup \{a\}$ $[P = aS]$ для некоторого $a \in P$; такой элемент a называется [*строго*] *порождающим*. Полигон P_S называется *неприводимым* [*вполне неприводимым* (или *простым*)], если он не имеет нетривиальных подполигонов [конгруэнций] и $PS \not\subseteq P_S^0$. Полигон P_S называется *дважды транзитивным*, если для любых x, y, u, $v \in P$ таких, что $u \neq v$, существует такой элемент $\lambda \in S$, что $u\lambda = x$, $v\lambda = y$. Всякий дважды транзитивный полигон неприводим. Полигон неприводим тогда и только тогда, когда он транзитивен или 0-транзитивен. Всякий вполне неприводимый полигон неприводим, обратное же — в отличие от ситуации с аналогичными понятиями в кольцах — неверно. Правая конгруэнция ρ на полугруппе S называется *модулярной*, если $\rho \neq \nabla_S$ и S содержит левую единицу по модулю ρ, т. е. такой элемент e, что $(es, s) \in \rho$ для всех $s \in S$. Всякий неприводимый полигон P будет строго циклическим, причем P^0 совпадает с множеством $\hat{P}$ всех непорождающих элементов полигона P. Обратно, если P — неодноэлементный циклический полигон, то рисовский факторполигон $P/\hat{P}$ неприводим (здесь возможно $\hat{P} = \varnothing$, тогда $P_{\hat{P}} = P$). Полигон P будет строго циклическим [вполне неприводимым] тогда и только тогда, когда он изоморфен S-полигону S/ρ, где ρ — модулярная [максимальная модулярная] правая конгруэнция на S. Моноид эндоморфизмов вполне неприводимого полигона является группой или 0-группой (аналог классической леммы Шура).

Полугруппу S, обладающую точным неприводимым [вполне неприводимым, транзитивным, 0-транзитивным] S-полигоном, будем называть *неприводимой* [*вполне неприводимой*, *транзитивной*, 0-*транзитивной*] (*справа*), ср. [18], т. 2, с. 330. [Вполне] неприводимые полугруппы называют также [*вполне*] *примитивными*, но термин «примитивная полугруппа» используется чаще в другом смысле (см. п. 5.1).

Свободное произведение $S*T$ при $|S|=|T|=1$ не транзитивно, а в остальных случаях транзитивно (справа и слева); в частности, свободная полугруппа ранга >1 транзитивна с обеих сторон. Транзитивными с обеих сторон будут также бициклическая полугруппа (см. п. 2.5), полугруппа Бэра — Леви (см. п. 3.1). Транзитивная справа полугруппа редуктивна слева (см. п. 4.2). Коммутативная полугруппа [0-]транзитивна тогда и только тогда, когда она является [0-]группой.

Полигон P_S, имеющий не более одного неподвижного элемента, называют *первичным*, если для любых $\lambda, \mu \in S$ и любого $a \in P_S \setminus P_S^0$ из того, что $a\sigma\lambda = a\sigma\mu$ при любом $\sigma \in S^1$, следует $(\lambda, \mu) \in \operatorname{Ker} P_S$. Полугруппа S называется *первичной* (*справа*), если она обладает точным первичным S-полигоном. Полугруппа будет первичной тогда и только тогда, когда для любого ее ненулевого идеала T и любых различных $\lambda, \mu \in S$ существует элемент $\tau \in T$ такой, что $\lambda\tau \neq \mu\tau$.

Более подробную информацию см. в [18], § 11.1—11.3, 11.5, 11.9; [82], гл. I, § 1—3.

10.2. Радикалы, связанные с представлениями. Определение радикала см. в п. 2.2. Имеется значительная аналогия между теорией радикалов в ассоциативных кольцах и полугруппах. Одним из общих обстоятельств, лежащих в основе этой аналогии, является связь радикалов с представлениями — и соответствующий подход может быть унифицирован на языке радикалов Ω-колец (Скорняков Л. А.//Избранные вопросы алгебры и логики. — Новосибирск: Наука, 1973. — С. 283—299). В данном пункте рассматриваются некоторые основные радикалы полугрупп, связанные с представлениями: радикал Джекобсона, верхний радикал и радикал Бэра. Радикал Джекобсона ассоциативного кольца R можно определить как идеал, состоящий из всех элементов, аннулирующих все неприводимые R-модули, а также как пересечение всех максимальных модулярных правых идеалов из R (см. п. III. 2.6). При переходе к аналогичному понятию для полугрупп происходит раздвоение, поскольку здесь раздваивается понятие неприводимости (равно как и не всякая правая конгруэнция реализуется правым идеалом).

Если $\mathscr{K}$ есть класс неприводимых [вполне неприводимых] полугрупп, то радикал $\rho_{\mathscr{K}}$ (см. п. 2.2) называют *радикалом Джекобсона* [*верхним радикалом* (*Джекобсона*)] и обозначают через J или rad [через $\overline{J}$ или $\overline{\text{rad}}$]. Верхний радикал называют также *простым радикалом* и обозначают через P. Для любой полугруппы S конгруэнция $J(S)$ [конгруэнция $\overline{J}(S)$] совпадает с пересечением всех модулярных [максимальных модулярных] правых конгруэнций на S; ясно, что $J(S) \subseteq \overline{J}(S)$, причем включение может быть строгим: например, группа без максимальных подгрупп $\overline{J}$-радикальна, но не J-радикальна. Следовательно, $J \neq \overline{J}$. Полугруппа $\mathscr{T}_r(P)$ при $|P| > 1$ неприводима (даже транзитивна) справа, но не слева (см., например, [18], т. 2, с. 336), так что — в отличие от колец — левый и правый радикалы Джекобсона не совпадают. Для любой полугруппы S конгруэнция $J(S)$ состоит из всех пар (s, t) со следующим свойством: для любого $x \in S^1$ существует n такое, что $(sx)^n s = (sx)^n t$ и $(tx)^n t = (tx)^n s$. Отсюда вытекает, что J-радикальные полугруппы — это в точности левые нильполугруппы (см. п. 2.1). Для полугруппы S с нулем $J(S)$-класс, содержащий 0, — это в точности радикал Клиффорда (см. п. 2.6). Удобного структурного описания J-полупростых полугрупп нет; J-полупросты, например, инверсные полугруппы и полугруппы с левым сокращением. Коммутативная полугруппа J-полупроста тогда и только тогда, когда она сепаративна.

Если $\mathscr{K}$ есть класс первичных полугрупп, то радикал $\rho_{\mathscr{K}}$ называют *радикалом Бэра* (или *нижним радикалом*) и обозначают через B. Для любой полугруппы S имеет место $B(S) \subseteq J(S)$, но $B \neq J$ даже в классе мультипликативных полугрупп колец (см., например, [82], с. 328). Если полугруппа S обладает [0-]минимальным правым идеалом (в частности, конечна или вполне [0-]проста), то $B(S) = J(S)$. Последовательность пар (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... элементов из S называется *правой m-последовательностью*, если для любого i существуют элементы $z_i \in \{x_i, y_i\}$ и $s_i \in S$ такие, что $x_{i+1} = z_i s_i x_i$ и $y_{i+1} = z_i s_i y_i$. Говорят, что такая последовательность *обрывается*, если $x_i = y_i$ для некоторого i. Последовательность элементов a_1, a_2, ... из S называется *m-последовательностью*, если

$(a_1, a_1)(a_2, a_2), \ldots$ есть правая m-последовательность. Конгруэнция $B(S)$ состоит из всех пар (x, y) таких, что любая правая последовательность, начинающаяся с (x, y), обрывается. Полугруппа B-радикальна тогда и только тогда, когда любая m-последовательность ее элементов содержит левый нуль.

В обзоре [82], где содержится подробная информация о радикалах, связанных с представлениями, рассматривается еще несколько таких радикалов: радикал Брауна — Маккоя, компрессивный радикал и др. См. также [18], § 11.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адян С. И. Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп//Тр. МИАН.— 1966.— Т. 85.
2. Адян С. И., Маканин Г. С. Исследования по алгоритмическим вопросам алгебры//Тр. МИАН. — 1984. — Т. 168. — С. 197—217.
3. Айзенштат А. Я., Богута Б. К. О решетке многообразий полугрупп//Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов. — Л.: Изд-во ЛПИ, 1979. — С. 3—46.
4. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп/Под ред. Арбиба М. А. — М.: Статистика, 1975.
5. Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука. — 1979.
6. Беляев В. Я., Тайцлин М. А. Об элементарных свойствах экзистенциально замкнутых систем//Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, № 2. — С. 39—94.
7. Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1983.
8. Бокуть Л. А. Алгоритмические проблемы и теоремы вложения: некоторые открытые вопросы для колец, групп и полугрупп//Изв. вузов. Математика.— 1982.— № 11.— С. 3—11.
9. Бокуть Л. А. Вложение колец//Успехи мат. наук.— 1987.— Т. 42, № 4. — С. 87—111.
10. Бокуть Л. А., Кукин Г. П. Неразрешимые алгоритмические проблемы для полугрупп, групп и колец//Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. — 1987. — Т. 25. — С. 3—66.
11. Вагнер В. В. Основания дифференциальной геометрии и современная алгебра//Тр. IV Всесоюзн. мат. съезда. Т. I. — Л., 1963. — С. 17—29.
12. Важенин Ю. М. Разрешимость теорий первого порядка классов полугрупп//Алгебраические системы и их многообразия. — Свердловск, 1988. — С. 24—41.
13. Габович Е. Я. Линейно упорядоченные полугруппы и их приложения//Успехи мат. наук. — 1976. — Т. 10, № 1. — С. 137—201.
14. Глушков В. М., Летичевский А. А., Годлевский А. Б. Методы математической биологии. Кн. 6: Методы синтеза дискретных моделей биологических систем. — Киев: Вища школа, 1983.
15. Джекобсон Н. Строение колец. — М.: ИЛ. — 1961.

16. Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А. Элементарные теории//Успехи мат. наук. — 1964. — Т. 20, № 4. — С. 37—108.
17. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
18. Клиффорд Г., Престон А. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1972.
19. Кон П. Свободные кольца и их связи. — М.: Мир, 1975.
20. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — 2-е изд. — М.: Наука, 1973.
21. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года. — М.: Наука, 1974.
22. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. — М.: Мир. — 1985.
23. Любич Ю. И. Введение в теорию банаховых представлений групп. — Харьков: Вища школа, 1985.
24. Ляпин Е. С. Полугруппы. — М.: Физматгиз, 1960.
25. Ляпин Е. С., Айзенштат А. Я., Лесохин М. М. Упражнения по теории групп. — М.: Наука, 1967.
26. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
27. Мальцев А. И. Избранные труды. Т. I: Классическая алгебра. — М.: Наука, 1976.
28. Марков А. А. Теория алгорифмов. — М.: Изд-во АН СССР, 1954.
29. Марков А. А., Нагорный Н. М. Теория алгорифмов. — М.: Наука, 1984.
30. Марков Ал. А. Введение в теорию кодирования. — М.: Наука, 1982.
31. Математическая энциклопедия. Т. 1—5. — М.: Советская энциклопедия, 1977—1985.
32. Матиясевич Ю. В. Об исследованиях по некоторым алгоритмическим проблемам алгебры и теории чисел//Тр. МИАН. — 1984. — Т. 168. — С. 218—235.
33. Саломаа А. Жемчужины теории формальных языков. — М.: Мир, 1986.
34. Свердловская тетрадь. — 2-е изд. — Свердловск. — 1979.
35. Скорняков Л. А. Обобщения модулей//Модули III. Препринт. — Новосибирск, 1973. — С. 22—27.
36. Скорняков Л. А. Элементы алгебры. — М.: Наука, 1986.
37. Скорняков Л. А., Михалев А. В. Модули//Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. — 1976. — Т. 14. — С. 57—191.
38. Сушкевич А. И. Теория обобщенных групп. — Харьков; Киев: Гос. науч.-техн. изд-во Укр., 1937.
39. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.
40. Хилле Е., Филипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
41. Хмелевский Ю. И. Уравнения в свободной полугруппе// Тр. МИАН. — 1971. — Т. 107.
42. Шеврин Л. Н., Волков М. В. Тождества полугрупп// Изв. вузов. Математика. — 1985. — № 11. — С. 3—47.
43. Шеврин Л. Н., Овсянников А. Я. Полугруппы и их подполугрупповые решетки. — Свердловск: Изд-во Урал. ун-та. — Ч. 1, 1990; Ч. 2, 1991.

44. Шеврин Л. Н., Суханов Е. В. Структурные аспекты теории многообразий полугрупп//Изв. вузов. Математика.— 1989. — № 6. — С. 3—39.
45. Anderson D. D., Jonson E. W. Ideal theory in commutative semigroups//Semigroup Forum. — 1984. — V. 30, N 2. — P. 127—158.
46. Berstel J., Perrin D. Theory of codes. — Academic Press, 1985.
47. Blyth T. S. Janowitz M. F. Residuation Theory. — Pergamon Press, 1972. — (Pure and applied math., Vol. 102).
48. Bogdanović S. Semigroups with a system of subsemigroups. — Novi Sad: Institute of Matematics, 1985.
49. Clifford A. Radicals in semigroups//Semigroup Forum. — 1970. — V. 1. — P. 103—127.
50. Eilenberg S. Automata, Languages, and Machines. — V. A, B. — New York; London: Academic Press, 1974, 1976.
51. Evans T. The lattice of semigroup varieties//Semigroup Forum. — 1971. — V. 2. — P. 1—43.
52. Evans T. Word problems//Bull. Amer. Math. Soc. — 1978.— V. 84. — P. 789—802.
53. Gluskin L. M., Schein B. M., Sneperman L. B., Yaroker I. S. Addendum to «A survey of semigroups of continuous selfmaps»//Semigroup Forum. — 1977. — V. 14, N 2. — P. 95—125.
54. Hofmann K. H. Topological semigroups. History, Theory, Applications//Jber. d. Dt. Math. — Verein. — 1976. — V. 78. — P. 9—59.
55. Hofmann K. H., Mostert P. Elements of compact semigroups. — Columbus (Ohio), 1966.
56. Howie J. M. An introduction to semigroup theory. — London: Academic Press. — 1976.
57. Jürgensen H. Computers in semigroups//Semigroup Forum. — 1977. — V. 15, N 1. — P. 1—20.
58. Kapp K. M., Schneider H. Completely 0-simple semigroups. — New York: W. A. Benjamin, 1969.
59. Kilp M., Knauer U., Michalev A. V., Skornjakov L. A. Acts over monoids. A bibliografical survey of publications 1975—1981. — Oldenburg, 1982.
60. Lentin A. Equations dans les Monoides Libres. — Gauthiers-Villars, 1972.
61. Lothaire M. Combinatorics on words. — Addison-Wesly, 1983. — (Encyclopedia of Mathematics and its applications. V. 17).
62. Magill K. D., Jr. A survey of semigroups of continuous selfmaps//Semigroup Forum. — 1975. — V. 11, N 3. — P. 1—189.
63. Márki L. Radical semisimple classes and varieties of semigroups with zero//Algebraic theory of semigroups. — Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 20.— North-Holland, 1979.— P. 357—370.
64. McAlister D. B. Representations of semigroups by linear transformations I; II//Semigroup Forum. — 1971. — V. 2. — P. 189—263; P. 283—320.
65. Meakin J. The Rees construction in regular semigroups// Semigroups. Structure and universal algebraic problems. — Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 39. — North-Holland, 1985. — P. 115—156.

66. Mitch H. Semigroups and their lattice of congruences// Semigroup Forum. — 1983. — V. 26, N 1—2. — P. 1—64.
67. Molchanov V. A. Semigroups of mappings of graphs//Semigroup Forum. — 1983. — V. 27, N 1—4. — P. 155—199.
68. Paalman-de Miranda A. Topological semigroups. — Amsterdam: Math. centrum, 1964.
69. Pastijn F. Congruences on regular semigroups//Proc. 1984 Marquette Conf. on Semigroups. — Marquette, 1984. — P. 159—176.
70. Pastijn F., Petrich M. Regular semigroups as extensions. — Pitman Publ. Inc., 1985. — (Research Notes Math. V. 136).
71. Petrich M. The translation hull in semigroups and rings// Semigroup Forum. — 1970. — V. 1. — P. 283—360.
72. Petrich M. Introduction to semigroups. — Columbus, Ohio: Charles E. Merrill, 1973.
73. Petrich M. Rings and semigroups. — Springer, 1974.
74. Petrich M. Lectures in semigroups. — Berlin: Academic Press. — 1977.
75. Petrich M. Structure of regular semigroups. — Montpellier, 1977. — (Cahiers mathematiques. V. 11).
76. Petrich M. Inverse semigroups. — John Wiley & Sons, 1984.
77. Ponizovskii J. S. Semigroup rings//Semigroup Forum. — 1987. — V. 36. — P. 1—46.
78. Pultr A., Trnková V. Combinatorial, algebraic and topological representations of groups, semigroups and categories. — Prague, 1980.
79. Putcha M. S. Semilattice decompositions of semigroups// Semigroup Forum. — 1973. — V. 6, N 1. — P. 12—34.
80. Rédei L. The theory of finitely generated commutative semigroups. — Pergamon Press, 1965.
81. Reilly N. R. Free objects in certain varieties of semigroups//Atti del 2 Seminario di Algebra non Commutativa. — Siena, 1987. — P. 39—99.
82. Roiz E. N., Schein B. M. Radicals of semigroups//Semigroup Forum. — 1978. — V, 16, N 3. — P. 299—344.
83. Satyanarayana M. Positively ordered semigroups. — Marcel Dekker, 1979. — (Lect. Notes Pure Appl. Math. V. 42).
84. Shevrin L. N., Ovsyannikov A. J. Semigroups and their subsemigroup lattices//Semigroup Forum. — 1983. — V. 27, N 1—4. — P. 1—154.
85. Ševrin L. N., Martynov L. M. Attainability and solvability for classes of algebras//Semigroups. Structure and universal algebraic problems. — Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 39. — North-Holland. — 1985. — P. 397—459.
86. Steinfeld O. Quasi — ideals in rings and semigroups. — Budapest: Akadémiai Kiado, 1978.
87. Weinert H. J. S-sets and semigroups of quotients//Semigroup Forum. — 1980. — V. 19, N 1. — P. 1—78.
88. Wells C. Some applications of the wreath product construction//Amer. Math. Monthly. — 1976. — V. 83. — P. 317—338.
89. Meldrum J. Wreath products of groups and semigroups. — Longman Group, 1989.
90. Putcha M. S. Linear algebraic monoids. — Cambridge Univ. Press, 1988.

ГЛАВА V

РЕШЕТКИ

§ 1. Общие свойства решеток

1.1. Основные определения. Частично упорядоченное множество P называется *нижней* [*верхней*] *полурешеткой* (или *полуструктурой*), если каждое двухэлементное его подмножество имеет точную нижнюю (верхнюю) грань. Если частично упорядоченное множество является нижней и верхней полурешеткой одновременно, то оно называется *решеткой* (или *структурой*). В настоящее время термин «структура» чаще употребляется в другом смысле (ср. [3]).

Решеткой, разумеется, является всякая полная решетка. Цепь целых чисел — это решетка, не являющаяся полной решеткой. Всякая конечная решетка полна.

Если P — коммутативная полугруппа идемпотентов (т. е. $a^2 = a$ для всех $a \in P$), то отношение $\leqslant$, где $a \leqslant b$ означает, что $a = ab$ $[b = ab]$, оказывается порядком. Возникшее таким образом частично упорядоченное множество P оказывается нижней [верхней] полурешеткой. Наоборот, любая нижняя [верхняя] полурешетка P становится коммутативной полугруппой идемпотентов, если положить $ab = \inf_P\{a, b\}$ $[a + b = \sup_P\{a, b\}]$ для любых $a, b \in P$.

Если L — решетка, то операции $+$ и $\cdot$, где $a + b = \sup_L\{a, b\}$ и $ab = \inf_L\{a, b\}$, обладают следующими свойствами:

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$;	1′) $(ab)c = a(bc)$;
2) $a + b = b + a$;	2′) $ab = ba$;
3) $a + a = a$;	3′) $aa = a$;
4) $(a + b)a = a$;	4′) $ab + a = a$.

Наоборот, каждое множество P с двумя операциями $+$ и $\cdot$, обладающими свойствами 1)—4) и 1′)—4′), можно превратить в решетку, положив $a \leqslant b$, если $a = ab$ $[a + b = b]$. В обоих случаях имеем $a + b = \sup\{a, b\}$ и $ab = \inf\{a, b\}$.

Если от решетки, рассматриваемой как частично упорядоченное множество, перейти описанным выше способом к множеству с двумя операциями, а от него — к частично упорядоченному множеству, то возникает исходная решетка. То же самое имеет место и при переходе от множества с двумя операциями к частично упорядоченному множеству, являющемуся решеткой, а затем снова к множеству с двумя операциями.

Таким образом, на каждую решетку можно смотреть как на алгебраическую систему с операциями $+$ и $\cdot$ и предикатом $\leqslant$. Решетки образуют многообразие универсальных алгебр сигнатуры, состоящей из двух бинарных операций. Поэтому гомоморфный образ решетки и прямое произведение решеток является решеткой. Решетками оказываются также ординальная сумма и лексикографическое произведение решеток. Отметим, наконец, что многообразие всех решеток конгруэнц-дистрибутивно, т. е. решетка конгруэнций любой решетки дистрибутивна (см. [8], с. 110, теорема 11).

Если L — решетка и $a, b, c, d \in L$, то: 1) если a максимален [минимален], то он является наибольшим [наименьшим] элементом; 2) эквивалентны следующие утверждения: (а) $a \leqslant b$; (б) $a = ab$; (в) $a + b = b$; 3) если $a, b \leqslant c$, то $a + b \leqslant c$; 4) если $c \leqslant a, b$, то $c \leqslant ab$; 5) если $a \leqslant b$ и $c \leqslant d$, то $a + c \leqslant b + d$ и $ac \leqslant bd$; 6) $ac + bc \leqslant (a + b)c$; 7) $(ab + ac)(ab + bc) = ab$; 8) если $a + b = ab$, то $a = b$.

Полная решетка L называется *непрерывной сверху* [*снизу*], если для любого $a \in L$ и любого направленного вверх [вниз] подмножества $X \subseteq L$ имеет место

$$a(\sup_L X) = \sup_L \{ax \mid x \in X\} \; [a + \inf_L X = \inf\{a + x \mid x \in X\}].$$

О непрерывных сверху модулярных (дедекиндовых) решетках см. пп. 2.1, 2.2.

Отображение φ решетки L в решетку L' называется *верхним* [*нижним*] гомоморфизмом, если $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ $[\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)]$ для любых $a, b \in L$. *Гомоморфизм* решетки L в решетку L'

определяется как отображение, являющееся верхним и нижним гомоморфизмом одновременно. Взаимно однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом.* Как верхний, так и нижний гомоморфизм являются изотонными отображениями. Однако не всякое изотонное отображение решеток оказывается верхним или нижним гомоморфизмом и существуют верхние [нижние] гомоморфизмы, не являющиеся гомоморфизмами. Более того, решетка L оказывается цепью тогда и только тогда, когда всякое ее изотонное отображение в любую решетку L' оказывается гомоморфизмом. Тем не менее, изоморфизм решеток, рассматриваемых как частично упорядоченные множества, является решеточным изоморфизмом.

Отображение φ решетки L в решетку L' называется *антигомоморфизмом*, если $\varphi(a+b)=\varphi(a)\varphi(b)$ и $\varphi(ab)=\varphi(a)+\varphi(b)$. Взаимно однозначный антигомоморфизм называется *антиизоморфизмом.* Произведение двух гомоморфизмов [антигомоморфизмов] оказывается гомоморфизмом [антигомоморфизмом].

Гомоморфизм φ решетки L в полную решетку L' называется *полным*, если для всякого подмножества $X\subseteq L$, для которого существует $\sup_L X$ [существует $\inf_L X$], имеет место $\varphi(\sup_L X)=\sup_{L'}\varphi(X)$ [$\varphi(\inf_L X)=\inf_{L'}\varphi(X)$]. Любой изоморфизм решеток оказывается полным гомоморфизмом. Примером неполного гомоморфизма может служить отображение φ отрезка $[0, 1]$ действительной оси на двухэлементную цепь, где $\varphi(1)=1$ и $\varphi(x)=0$, если $x\neq 1$. Если φ — полный гомоморфизм полной решетки L на полную решетку L' и $a'\in L'$, то множество $\{x \mid x\in L,\ \varphi(x)=a'\}$ оказывается замкнутым интервалом. Для неполных гомоморфизмов это не всегда так.

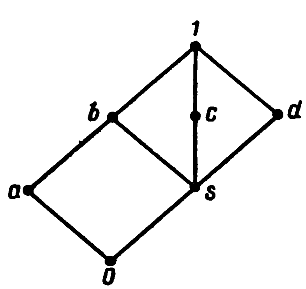
Гомоморфизм, изоморфизм, антигомоморфизм и антиизоморфизм решетки L в себя называется *эндоморфизмом*, *автоморфизмом*, *антиэндоморфизмом* и *антиавтоморфизмом* соответственно. Совокупность всех эндоморфизмов [всех автоморфизмов] решетки образует моноид [группу], обозначаемый обычно через $\operatorname{End} L$ [через $\operatorname{Aut} L$]. Всякий моноид изоморфен моноиду эндоморфизмов некоторой решетки (см. [8], с. 378, теорема 11).

1.2. Подрешетки, идеалы, фильтры. Непустое подмножество H решетки L называется *подрешеткой*, если a, $b \in H$ влечет за собой $a+b \in H$ и $ab \in H$. Часто оказывается удобным считать подрешеткой и пустое подмножество. При этом предположении пересечение любого множества подрешеток оказывается подрешеткой. К числу подрешеток относятся все интервалы и полуинтервалы (открытые, замкнутые, финальные и инициальные). Совокупность конечных подмножеств бесконечного множества также оказывается подрешеткой решетки всех его подмножеств. Подрешетка H полной решетки L называется *полной*, если для любого непустого подмножества $X \subseteq H$ имеет место $\sup_L X \in H$ и $\inf_L X \in H$. Заметим, что в этой ситуации имеем

$$\sup_H X = \sup_L X \quad \text{и} \quad \inf_H X = \inf_L X.$$

Примером полной подрешетки может служить замкнутый интервал. Пересечение любого непустого множества полных подрешеток, если оно непусто, очевидно, является полной подрешеткой. Поэтому среди полных подрешеток, содержащих данное множество X, существует наименьшая, про которую говорят, что она вполне порождается множеством X. Например, единичный отрезок $[0, 1]$ действительной оси вполне порождается множеством принадлежащих ему рациональных чисел. Подчеркнем, что подрешетка полной решетки L может быть полной решеткой, не будучи полной подрешеткой решетки L. Каждое подмножество решетки L является подрешеткой тогда и только тогда, когда L — цепь. Пересечение $\Phi(L)$ всех максимальных собственных (т. е. отличных от L) подрешеток данной решетки L называют ее *подрешеткой Фраттини*. В решетке L с условием обрыва убывающих (или возрастающих цепей) условие $\Phi(L) = \varnothing$ равносильно тому, что L — цепь. Пересечение всех подрешеток решетки L, содержащих данное непустое подмножество X, оказывается подрешеткой, про которую говорят, что она *порождается множеством* X. Подрешетка, порожденная одноэлементным подмножеством $\{x\}$, совпадает с этим подмножеством. То же самое верно для подмножества $X = \{x', x''\}$, где $x' < x''$. Всякая конечная или счетная решетка вложима в решетку, порожденную тремя элементами ([8], с. 368, следствие 12). Совокупность всех подрешеток решетки L (включая пустую) образует частично упорядоченное множество по включению и оказывается полной решеткой, обозначаемой обычно через $\operatorname{Sub} L$ (ср. п. VI. 1.1). Подчеркнем, что $\operatorname{Sub} L$ не является, как правило, подрешеткой решетки всех подмножеств множества L. Полную решетку образуют и выпуклые подрешетки решетки L. Однако эта решетка не является, как правило, подрешеткой решетки $\operatorname{Sub} L$.

Непустое подмножество I решетки L называется *идеалом* [*фильтром* или *дуальным идеалом*], если $x, y \in I$ и $z \leqslant x$ $[x \leqslant z]$ влечет за собой $x + y \in I$ и $z \in I$ $[xy \in I$ и $z \in I]$. К числу идеалов [фильтров] принадлежит нижний конус a^{∇} [верхний конус a^{Δ}] для любого $a \in L$. Такие идеалы [фильтры] называются *главными*. Все идеалы [фильтры] решетки L оказываются главными в том и только том случае, когда L удовлетворяет условию максимальности [минимальности]. Импликация $(z \leqslant x) \Rightarrow (z \in I)$ $[(x \leqslant z) \Rightarrow (z \in I)]$ равносильна импликации $((x \in I) \,\&\, (y \in L)) \Rightarrow xy \in I$ $[(x \in I) \,\&\, (y \in L) \Rightarrow (x + y \in L)]$, что сближает понятие идеала в решетках с одноименным понятием теории колец. Непустое подмножество I решетки L оказывается идеалом [фильтром] в том и только том случае, когда для любых $x, y \in L$ справедлива эквивалентность $(x \in I) \,\&\, (y \in I) \Leftrightarrow (x + y \in I)$ $[(x \in I) \,\&\, (y \in I) \Leftrightarrow (xy \in I)]$. Разумеется, нуль [единица] решетки L (если они есть) принадлежит любому ее идеалу [фильтру]. Если φ — гомоморфизм решетки L на решетку L' с нулем $0'$ [с единицей $1'$], то полный прообраз $\varphi^{-1}(0')$ [соответственно $\varphi^{-1}(1')$] оказывается идеалом [фильтром] решетки L. Такой идеал [фильтр] называется *ядерным*. В отличие от колец, не всякий идеал решетки оказывается ядерным. Так, например, идеал $\{0, a, b, s\}$ решетки



ядерным не является. Различным гомоморфизмам может соответствовать один и тот же ядерный идеал [фильтр].

Если F — фильтр, а I — идеал решетки L, то пересечение $F \cap I$ или пусто, или является выпуклой подрешеткой решетки L. Всякая выпуклая подрешетка представляется в виде такого пересечения.

Идеал P [фильтр P] называется *простым*, если $ab \in P$ $[a+b \in P]$ влечет $a \in P$ или $b \in P$. Подрешетка P решетки L, отличная от L, оказывается простым идеалом [фильтром] тогда и только тогда, когда $L \setminus P$ — простой фильтр [идеал].

Идеал I решетки L называется *замкнутым*, если $I^{\Delta\nabla} = I$. Идеал замкнут тогда и только тогда, когда он является пересечением некоторого множества главных идеалов. В частности, всякий главный идеал замкнут. Замкнутые идеалы решетки L образуют полную решетку, изоморфную пополнению частично упорядоченного множества L сечениями (ср. п. I. 2.3).

Идеал [фильтр] называется *полным*, если он является полной подрешеткой.

Если φ: $L \to L'$ — гомоморфизм решеток и H — подрешетка в L, то $\varphi(H)$ и, в частности, $\operatorname{Im}\varphi$ — подрешетка в L'. Если φ — гомоморфное наложение и H — идеал [фильтр] в L, то $\varphi(H)$ оказывается идеалом [фильтром] в L'. Если H' — подрешетка, выпуклая подрешетка, идеал или фильтр в L', то

$$\varphi^{-1}(H') = \{x \mid x \in L,\ \varphi(x) \in H'\}$$

— подрешетка, выпуклая решетка, идеал или фильтр в L соответственно. В частности, $\varphi^{-1}(x')$ — выпуклая подрешетка в L для любого $x' \in L'$.

Эквивалентность θ, определенная на решетке L, называется *конгруэнцией*, если $(a, c) \in \theta$ и $(b, d) \in \theta$ влечет $(a+b, c+d) \in \theta$ и $(ab, cd) \in \theta$. Смежный класс конгруэнции является выпуклой подрешеткой. Далее рассмотрим фактормножество $\bar{L} = L/\theta$. Обозначая через $\bar{a}$ смежный класс конгруэнции θ, определяемый элементом a, и полагая

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad \text{и} \quad \bar{a}\bar{b} = \overline{ab},$$

нетрудно убедиться, что операции определены корректно и фактормножество $\bar{L}$ с этими операциями оказывается решеткой. Эта решетка называется *факторрешеткой* решетки L по конгруэнции θ. Ясно, что естественное отображение является гомоморфизмом, который также называется *естественным*.

Пусть теперь $\varphi\colon L \to L'$ — гомоморфизм решеток. Тогда отношение

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{(a, b) \mid a, b \in L, \varphi(a) = \varphi(b)\}$$

оказывается конгруэнцией, которая называется *ядром гомоморфизма* φ. Имеет место *теорема о гомоморфизме*: если φ — гомоморфное наложение решетки L на решетку L', то существует такой изоморфизм χ решетки L' на факторрешетку $L/\operatorname{Ker}\varphi$, что $\chi(\varphi(a)) = \pi(a)$ для всех $a \in L$, где π — естественный гомоморфизм решетки L на $L/\operatorname{Ker}\varphi$.

Если I и F — ядерные идеал и фильтр решетки L соответственно, то пересечение $I \cap F$ или пусто или является смежным классом некоторой конгруэнции решетки L.

Идеал I решетки L называется *стандартным*, если для любых $a, b \in L$ и $s \in I$ неравенство $a \leqslant b + s$ влечет $a = x + t$, где $x \leqslant b$ и $t \in I$. Всякий стандартный идеал является ядерным идеалом конгруэнции

$$\theta = \{(x, y) \mid x + y = xy + u \text{ для некоторого } u \in I\}.$$

В решетке, изображенной на с. 196, s^∇ — стандартный идеал, а a^∇ — не стандартный. Тем не менее, идеал a^∇ оказывается ядерным идеалом гомоморфизма на двухэлементную цепь.

Эквивалентны следующие свойства решетки L: (1) L полна; (2) L содержит наименьший [наибольший] элемент и всякая подрешетка решетки L имеет точную верхнюю [нижнюю] грань в L; (3) для любого изотонного отображения φ решетки L в себя найдется такой элемент $a \in L$, что $\varphi(a) = a$; (4) все замкнутые идеалы [фильтры] решетки главные.

Идеалы любой решетки L, будучи упорядочены теоретико-множественным включением, образуют полную решетку $\operatorname{Id} L$. При этом

$$I_1 + I_2 = \{a \mid a \leqslant x_1 + x_2 \text{ для некоторых } x_1 \in I_1 \text{ и } x_2 \in I_2\}$$

и

$$I_1 I_2 = I_1 \cap I_2.$$

Решетка $\operatorname{Id} L$ *эквационально эквивалентна* решетке L, т. е. какое-либо тождество истинно в решетке L тогда и только тогда, когда оно истинно в решетке $\operatorname{Id} L$. Поскольку $a^\nabla + b^\nabla = (a+b)^\nabla$ и $a^\nabla \cap b^\nabla = (ab)^\nabla$ для любых $a, b \in L$, то главные идеалы решетки L образуют в $\operatorname{Id} L$ подрешетку, изоморфную решетке L. Таким образом, каждая решетка вкладывается в полную решетку $\operatorname{Id} L$, эквационально эквивалентную ей. В частности, каждая дистрибутивная решетка вкладывается в полную дистрибутивную решетку. Вложение решетки L в полную решетку $\operatorname{Id} L$ называется *идеальным пополнением* для L. Идеальное пополнение в общем случае в отличие от пополнения сечениями не сохраняет имеющиеся в L точные грани (даже для дистрибутивных решеток). В то же время пополнение сечениями не сохраняет тождеств, имевшихся в исходной решетке: например, пополнение сечениями дистрибутивной решетки может быть даже не модулярной решеткой.

Интервалы $[a, b]$ и $[c, d]$ решетки L называются *транспонированными*, если $a = bc$ и $d = b + c$. Другими словами, это интервалы вида $[uv, u]$ и $[v, u+v]$. Положим $\varphi_u(x) = xu$ для всех $x \in [v, u+v]$ и $\psi_v(y) = y + v$ для всех $y \in [uv, u]$. Тогда φ_u и ψ_v оказываются изотонными отображениями интервалов $[v, u+v]$ в $[uv, u]$ и $[uv, u]$ в $[v, u+v]$ соответственно, причем $\varphi_u(\psi_v(\varphi_u(x))) = \varphi_u(x)$ для всех $x \in [v, u+v]$ и $\psi_v(\varphi_u(\psi_v(y))) = \psi_v(y)$ для всех $y \in [uv, u]$. Если для интервалов $[a, b]$ и $[c, d]$ найдутся такие интервалы $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, m$, что оказываются транспонированными интервалы $[a, b]$ и $[x_0, x_1]$, $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$ для всех $i = 1, \ldots, m-1$ и $[x_{m-1}, x_m]$ и $[c, d]$, то $[a, b]$ и $[c, d]$ называются *проективными интервалами* (см. [2], с. 28).

1.3. Специальные элементы. Элемент a решетки L называется *неразложимым в объединение* или $\cup$-*неразложимым* [*неразложимым в пересечение* или $\cap$-*неразложимым*], если равенство $a = b + c$ $[a = bc]$ влечет $a = b$ или $a = c$.

К числу $\cup$-неразложимых элементов относятся все атомы, а к числу $\cap$-неразложимых — все коатомы. В решетке, изображенной на с. 196, $\cup$-неразложимы элементы 0, a, s, c и d, а $\cap$-неразложимы — a, b, c, d и 1.

Представление элемента $a = a_1 \ldots a_n$ называется *несократимым* $\cap$-*представлением*, если a_i суть $\cap$-неразложимые элементы и

$$a \neq a_1 \ldots a_{i-1}a_{i+1} \ldots a_n$$

для любого i. Двойственным образом определяется *несократимое* $\cup$-*представление*.

Элемент a полной решетки L называется *вполне* $\cup$-неразложимым, если для любого подмножества $X \subseteq L$ равенство $a = \sup_L X$ влечет, что $a \in X$. Двойственно определяются *вполне* $\cap$-*неразложимые элементы*. Элемент c из L называется *компактным*, если для любого подмножества $X \subseteq L$ из неравенства $c \leqslant \sup_L X$ вытекает существование такого конечного подмножества $X_0 \subseteq X$, что $c \leqslant \sup_L X_0$.

Полная решетка называется *алгебраической*, если каждый ее элемент представим как точная верхняя грань некоторого множества компактных элементов. Эквивалентны следующие свойства полной решетки L: (1) L алгебраична; (2) L изоморфна решетке всех подалгебр некоторой универсальной алгебры; (3) L изоморфна решетке всех конгруэнций некоторой универсальной алгебры; (4) L изоморфна решетке всех идеалов некоторой верхней полурешетки с нулем (см. [44], теорема 2.3.1; [30], § 18, теорема 3; [8], с. 111, теорема 13). Другие результаты, связанные с изоморфностью данной решетки тем или иным конкретным решеткам, можно найти в § 2 и 3, а также в [10, 34].

Решетка L называется *решеткой с относительными дополнениями*, если для всякого элемента c из любого ее интервала $[a, b]$ найдется такой элемент d, что $c + d = b$ и $cd = a$. Конечно, $d \in [a, b]$. Элемент d называется *дополнением элемента c в интервале* $[a, b]$. Решетка L с нулем 0 и единицей 1 называется *решеткой с дополнениями*, если каждый ее элемент имеет дополнение в интервале $[0, 1]$. Дополнения в интервале $[0, 1]$ называются просто *дополнениями*. Если каждый элемент решетки обладает в точности одним дополнением, то она называется решеткой *с единственными дополнениями*. Всякая решетка вложима в решетку с единственными дополнениями (см. [8], с. 376, следствие 8). Элементы a и b

решетки L с дополнениями называются *перспективными*, если они имеют общее дополнение, т. е. $a+c=b+c=I$ и $ac=bc=0$ для некоторого $c\in L$. Элемент c называется в этом случае *осью перспективы*.

В решетке, изображенной на с. 196, элемент d есть дополнение элемента a, элемент s дополнений не имеет. Дополнениями элемента b в интервале $[s, 1]$ являются элементы c и d, а элементы a и s служат друг для друга единственными дополнениями в интервале $[0, b]$. Решетка $\{0, a, b, s\}$ является решеткой с единственными дополнениями.

Ядерный идеал любой конгруэнции решетки с относительными дополнениями стандартен. Полная атомная решетка с относительными дополнениями *атомична*, т. е. каждый ее ненулевой элемент представляется как точная верхняя грань некоторого множества атомов. Атомичные решетки называют также *точечными* или *атомно порожденными* (см. [15], с. 69, теорема 10; с. 70, теорема 12).

Решетка конечной длины с относительными дополнениями либо конгруэнц-проста, либо разлагается в прямое произведение (см. [2], с. 99, теорема 14).

Каждая конгруэнция на решетке с относительными дополнениями определяется любым из своих смежных классов. Отметим попутно, что любые две конгруэнции на такой решетке перестановочны (см. [15], с. 64, теорема 6; с. 65, теорема 7).

Элемент e решетки L с 0 и 1 называется *центральным*, если при любом представлении $L=A\times B$ в виде прямого произведения $e=(0, 1)$ или $e=(1, 0)$. Совокупность всех центральных элементов решетки L называется ее *центром*. Центр любой решетки оказывается ее подрешеткой, которая является булевой алгеброй. Элемент z решетки L называется *нейтральным* или *дистрибутивным*, если для любых $a, b\in L$ подрешетка решетки L, порожденная тройкой $\{a, b, z\}$, дистрибутивна. Нейтральный элемент имеет не более одного дополнения. Каждое дополнение нейтрального элемента нейтрально. Центр любой решетки с 0 и 1 состоит из ее нейтральных элементов, обладающих дополнениями (см. [2], с. 94, теорема 10; с. 97, теорема 12).

1.4. Свободные решетки. В отличие от произвольных универсальных алгебр, понятие свободной решетки оказывается весьма емким в связи с возможностью внести порядок в базисное множество и рассматривать различные аспекты сохранения свойств получившегося частично упорядоченного множества при вложении его в свободную решетку.

Пусть P — некоторое частично упорядоченное множество. Подмножество M множества P называется *суммируемым* [*перемножаемым*], если существует $\sup_P M$ [$\inf_P M$]. Выделим в P некоторые системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суммируемых и перемножаемых множеств соответственно. Решетка F называется $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-*свободным расширением частично упорядоченного множества* P, если:

1) существует изоморфизм Φ частично упорядоченного множества P на подмножество решетки F;

2) F порождается множеством $\Phi(P)$;

3) для любого $M \in \mathfrak{A}$ существует $\sup_F \Phi(M)$ и $\sup_F \Phi(M) = \Phi(\sup_P M)$;

4) для любого $N \in \mathfrak{B}$ существует $\inf_F \Phi(N)$ и $\inf_F \Phi(N) = \Phi(\inf_P N)$;

5) для любого изотонного отображения φ частично упорядоченного множества P в некоторую решетку L такого, что каковы бы ни были $M \in \mathfrak{A}$ и $N \in \mathfrak{B}$, существуют $\sup_L \varphi(M)$ и $\inf_L \varphi(N)$, совпадающие с $\varphi(\sup_P M)$ и $\varphi(\inf_P M)$ соответственно, найдется такой гомоморфизм ψ решетки F в решетку L, что $\psi(\Phi(x)) = \varphi(x)$ для всех $x \in P$.

Важнейшими частными случаями являются *свободное* и *вполне свободное расширения*. Первое из них возникает, когда $\mathfrak{A}$ состоит из всех суммируемых, а $\mathfrak{B}$ — из всех перемножаемых пар множества P, второе — когда как $\mathfrak{A}$, так и $\mathfrak{B}$ — пустые множества. Свободное и вполне свободное расширения тривиального частично упорядоченного множества совпадают. Соответствующая решетка называется *свободной*. Свободное расширение кардинальной суммы решеток называется их *свободным произведением* (ср. п. VI. 2.1).

Для решения вопроса о существовании $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-свободного расширения частично упорядоченного множества P введем понятие *слова*. Именно, словами веса 0 назовем элементы множества P. Слова веса n определим как выражения $A + B$ и AB, где A и B — слова меньшего веса. Слова A и B, а также все их подслова называются *подсловами* слов $A+B$ и AB. Конечно, вес слова при этом не определяется однозначно. Однако среди весов, отвечающих данному слову A, существует наименьший, который будет обозначаться символом $w(A)$. Его в дальнейшем и будем называть *весом слова* A. Слова A и B веса 0 считаются равными (в обозначениях: $A\equiv B$), если они равны как элементы множества P. Равенства $A+B\equiv C+D$ и $AB\equiv CD$, по определению, имеют место тогда и только тогда, когда $A\equiv C$ и $B\equiv D$. Слова веса 0 и слова вида AB [слова веса 0 и слова вида $A+B$] называются $\bigcup$-*неразложимыми* [$\bigcap$-*неразложимыми*]. Представление слова A в форме

$$A\equiv A_1+\ldots+A_m, \tag{$*$}$$

где $m\geqslant 1$, слова A_i $\bigcup$-неразложимы и имеется в виду некоторое распределение скобок, называется $\bigcup$-*каноническим представлением.* Представление слова A в форме

$$A\equiv A_1\ldots A_m, \tag{$**$}$$

где $m\geqslant 1$, слова A_i $\bigcap$-неразложимы и имеется в виду некоторое распределение скобок, называется $\bigcap$-*каноническим представлением.* Легко понять, что для каждого слова оба эти представления существуют и определяются однозначно. Однако хотя бы для одного из них $m=1$. Если $m>1$, то веса слов A_i меньше веса слова A. Каноническое представление слова A называется *собственным*, если $m>1$ или A — слово веса 0. *Значением* $v(A)$ слова A веса 0 назовем элемент A. *Значение* $v(A)$ слова A с $\bigcup$-каноническим представлением ($*$) [с $\bigcap$-каноническим представлением ($**$)] определяется в случае, когда для всех i определены значения $v(A_i)$ и множество $\{v(A_i)\mid i=1,\ldots,m\}$ принадлежит системе $\mathfrak{A}$ [системе $\mathfrak{B}$]. При этих условиях полагаем

$$v(A)=\sup_P\{v(A_i)\mid i=1,\ldots,m\},$$
$$[v(A)=\inf_P\{v(A_i)\mid i=1,\ldots,m\}].$$

Итак, значением слова служит однозначно определяемый элемент из P. Однако не всякое слово имеет значение.

На множестве слов определим отношения $\leqslant_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), полагая

$$A \leqslant_1 B \underset{\text{def}}{=} \boxed{A = B \text{ или } v(A) \leqslant v(B) \text{ в } P}$$

и при $n \geqslant 2$

$A \leqslant_n B \underset{\text{def}}{=}$

(i) $A \leqslant_{n-1} C$ и $C \leqslant_{n-1} B$ для некоторого слова C

или

(ii) $A \equiv A_1 + \ldots + A_m$ — собственное $\bigcup$-каноническое представление и $A_i \leqslant_{n-1} B$ для $i = 1, \ldots, m$,

или

(iii) $A \equiv A_1 \ldots A_m$ — собственное $\bigcap$-каноническое представление и $A_i \leqslant_{n-1} B$ для некоторого i,

или

(iv) $B \equiv B_1 \ldots B_m$ — собственное $\bigcap$-каноническое представление и $A \leqslant_{n-1} B_i$ для $i = 1, \ldots, m$,

или

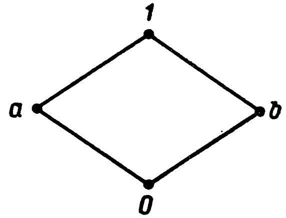
(v) $B = B_1 + \ldots + B_m$ — собственное $\bigcup$-каноническое представление и $A \leqslant_{n-1} B_i$ для некоторого i.

Теперь положим

$$A \leqslant B \underset{\text{def}}{=} \boxed{A \leqslant_n B \text{ для некоторого } n}$$

Отношение $\leqslant$ оказывается квазипорядком на множестве всех слов. Соответствующее частично упорядоченное множество F (см. п. I.2.1) оказывается решеткой, причем $A + B = \sup\{A, B\}$ и $AB = \inf\{A, B\}$. Более того, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ состоят только из конечных множеств, то эта решетка F оказывается $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-свободным расширением частично упорядоченного множества P.

Свободное расширение тривиального частично упорядоченного множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ обозначим через $FL(n)$. Легко проверяется, что $FL(1)$ одноэлементна, а $FL(2)$ изоморфна четырехэлементной решетке



Решетка $FL(3)$ содержит $FL(n)$ для всех n. Если $n \geqslant 3$, то решетка $FL(n)$ не является полной. Элементы $u_1, \ldots, u_m$ решетки $FL(n)$ являются свободными образующими порождаемой ими подрешетки тогда и только тогда, когда

$$u_i \nleqslant u_1 + \ldots + u_{i-1} + u_{i+1} + \ldots + u_m$$

и

$$u_1 \ldots u_{i-1} u_{i+1} \ldots u_m \nleqslant u_i$$

для любого i (см. [15], § 5).

Естественно желание определить в классе полных решеток решетку, аналогичную свободной. Для тривиального частично упорядоченного множества P соответствующее определение должно звучать так: полная решетка F называется *свободной полной решеткой* с системой свободных образующих P, если

1) $P \subseteq F$;

2) F вполне порождается множеством P;

3) для всякого отображения φ множества P в произвольную полную решетку L найдется такой полный гомоморфизм ψ решетки F в решетку L, что $\psi(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in P$. Однако оказывается, что такой полной решетки не существует (см. [15], с. 105, теорема 8).

§ 2. Полумодулярные и модулярные решетки

2.1. Полумодулярные решетки. Пару (a, b) элементов решетки L назовем *модулярной*, если $ab \leqslant x \leqslant \leqslant b$ влечет за собой $x = (x + a)b$. В этом случае будем писать aMb или $(a, b) \in M$. Соотношение aMb равносильно справедливости импликации

$$(x \leqslant b) \Rightarrow (x + ab = (x + a)b)$$

для любого $x \in L$. Решетка L оказывается модулярной (дедекиндовой) в том и только том случае, когда aMb для всех a, $b \in L$. Решетка L называется *полумодулярной сверху* или *М-симметричной*, если aMb влечет bMa для всех $a, b \in L$. Для решетки L конечной длины равносильны следующие условия: (1) L полумодулярна сверху; (2) если $a, b, c \in L$ и как a, так и b покрывает c, то a и b покрываются некоторым элементом $d \in L$; (3) если $a, b \in L$ и a покрывает ab, то $a + b$ покрывает b. Решетка, *полумодулярная снизу*, определяется двойственно. Отношение, двойственное отношению M, часто обозначается через M^*. Всякая модулярная решетка полумодулярна как сверху, так и снизу. Любая выпуклая подрешетка полумодулярной сверху [снизу] решетки полумодулярна сверху [снизу]. Для полумодулярности сверху [снизу] кардинального произведения двух решеток необходимо и достаточно, чтобы полумодулярными сверху [снизу] были оба сомножителя. Во всякой полумодулярной сверху или снизу решетке конечной длины выполняется условие Жордана — Дедекинда. Решетка всех замкнутых подпространств банахова пространства полумодулярна как сверху, так и снизу, но не модулярна. Все интервалы конечной длины полумодулярной сверху орторешетки оказываются модулярными решетками. Полумодулярная сверху решетка L конечной длины оказывается решеткой с дополнениями [решеткой с относительными дополнениями] тогда и только тогда, когда ее наибольший элемент [любой ее элемент, отличный от 0] равен точной верхней грани некоторого конечного множества атомов. Полумодулярная сверху решетка с дополнениями может не быть решеткой с относительными дополнениями (см. рис. V.1, где элемент a не имеет дополнения в интервале $[0, b]$). Пополнение сечениями в общем случае не сохраняет полумодулярность.

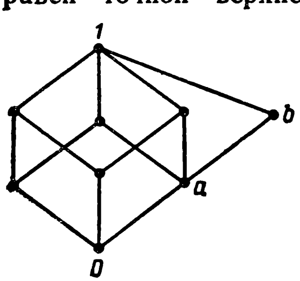


Рис. V.1

На любой решетке L, все интервалы которой имеют конечную длину и удовлетворяют условию Жордана — Дедекинда, может быть определена *функция размерности* или *функция высоты*, т. е. целочисленная функция d, обладающая следующим свойством:

если $x, y \in L$ и y покрывает x, то $d(y) = d(x) + 1$. Если при этом L обладает нулем 0 и $d(0) = 0$, то число $d(a)$ называется *высотой элемента* a.

Полумодулярная сверху решетка называется *геометрической*, если она полна, все ее атомы компактны и каждый ее ненулевой элемент равен точной верхней грани некоторого множества атомов. Для геометричности полумодулярной сверху решетки необходимо и достаточно, чтобы она была алгебраической, а ее компактными элементами служили точные верхние грани конечных множеств атомов, и только они. Интервалы геометрической решетки суть геометрические решетки. Любая геометрическая решетка оказывается решеткой с относительными дополнениями и разлагается в прямое произведение неразложимых геометрических решеток. Неразложимость геометрической решетки равносильна перспективности любых двух ее атомов. Для решетки L с дополнениями, имеющей конечную длину, равносильны следующие условия: (1) L геометрическая; (2) L полумодулярна сверху; (3) если $a \in L$ и p — атом в L, то или $p \leqslant a$, или $a + p$ покрывает a; (4) если $a \in L$, p и q — атомы в L и $a < a + q \leqslant a + p$, то $a + p = a + q$; (5) если $a_1, \ldots, a_n \in L$ и $(a_1 + \ldots + a_i)a_{i+1} = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то $(a_{\sigma(1)} + \ldots + a_{\sigma(i)})a_{\sigma(i+1)} = 0$ для любых $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$ и любой подстановки σ на множестве $\{1, \ldots, n\}$.

Примеры геометрических решеток. 1) Решетка всех подпространств линейного пространства над телом (пространство не предполагается конечным). Эта геометрическая решетка модулярна. 2) Решетка всех линейных многообразий или, что то же самое, всех смежных классов по подпространствам линейного пространства над телом. 3) Совокупность всех разбиений некоторого множества.

Всякая решетка вкладывается в решетку разбиений некоторого множества. Это, в частности, означает, что всякая решетка вкладывается в полумодулярную сверху решетку. Более того, всякую конечную решетку можно вложить в решетку разбиений подходящего конечного множества (см. [2], с. 130; [8], с. 255).

Назовем *геометрией* непустое множество G, на решетке всех подмножеств которого задан оператор замыкания $^{-}$, обладающий следующими свойствами: 1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$; 2) $\overline{\{x\}}=\{x\}$ для любого $x\in G$; 3) если x, $y\in G$, $X\subseteq G$, $x\notin\overline{X}$ и $x\in\overline{X\cup\{y\}}$, то $y\in\overline{X\cup\{x\}}$; 4) если $X\subseteq G$ и $x\in\overline{X}$, то $x\in\overline{X}_0$ для некоторого конечного подмножества $X_0\subseteq X$. Подмножество $X\subseteq G$ называется *замкнутым*, если $\overline{X}=X$. Замкнутые подмножества любой геометрии образуют геометрическую решетку. Наоборот, если L — геометрическая решетка и A — совокупность всех ее атомов, то, положив

$$\overline{X}=\{p\mid p\in A,\ p\leqslant \sup\nolimits_L X_0 \text{ для некоторого конечного подмножества } X_0\subseteq X\}$$

для любого $X\subseteq A$, превратим A в геометрию. Решетка всех замкнутых подмножеств этой геометрии изоморфна решетке L.

Приведенные результаты можно найти в [2], гл. IV, и [8], § IV.2—IV.4. См. также [15], с. 126, теорема 24.

Точечную решетку L называют AC-решеткой, когда в ней выполняется следующее условие покрываемости: если элемент a не содержит атома p, то элемент $a+p$ покрывает a. Свойство покрываемости в точечной решетке L равносильно тому, что pMx для любого атома p и любого $x\in L$. Оно имеет место во всякой полумодулярной сверху решетке с 0, так что точечная полумодулярная сверху решетка всегда будет AC-решеткой (но обратное, вообще говоря, неверно). Пополнение сечениями AC-решетки является AC-решеткой. Совокупность всех замкнутых подпространств гильбертова пространства образует ортомодулярную AC-решетку.

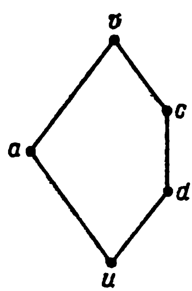
Элемент a точечной решетки L называется *конечным*, если $a=0$ или a является объединением конечного числа атомов. Конечные элементы AC-решетки L образуют идеал $F(L)$, который сам будет AC-решеткой. При этом в $F(L)$ выполняется цепное условие Жордана — Дедекинда.

Матроидная решетка — это непрерывная снизу AC-решетка. Каждая матроидная решетка полумодулярна сверху. Матроидная решетка L изоморфна решетке всех идеалов своей подрешетки (идеала) конечных элементов $F(L)$. Таким образом, матроидная решетка модулярна (дистрибутивна) тогда и только тогда, когда модулярна (дистрибутивна) ее подрешетка $F(L)$. Дистрибутивные матроидные решетки — это в точности полные атомные булевы алгебры. Решетка подпространств проективного пространства является модулярной матроидной решеткой. С другой стороны, с каждой модулярной матроидной решеткой L связано некоторое проективное пространство, решетке подпространств которого изоморфна L. Точками этого пространства служат атомы решетки L, а прямая, проходящая через точки p и q, определяется как множество всех атомов решетки L, содержащихся в объединении $p+q$. О полумодулярных сверху решетках и AC-решетках см. [38].

2.2. Модулярные решетки. Решетка L называется *модулярной* или *дедекиндовой*, если для любых a, b, $c \in L$, где $a \leqslant c$, справедлив *модулярный закон*: $(a+b)c = a+bc$.

Важнейшим примером модулярной решетки является решетка всех подпространств линейного пространства. Модулярными оказываются и решетки всех нормальных подгрупп произвольной группы, всех идеалов любого кольца, всех подмодулей всякого модуля. Напротив, решетки всех подгрупп группы, всех линейных многообразий аффинного пространства и всех эквивалентностей на данном множестве могут не быть модулярными.

Следующие свойства решетки L эквивалентны: (1) L модулярна; (2) $a(ab+c) = ab+ac$ для любых a, b, $c \in L$; (3) если $a \leqslant b$ и для некоторого $c \in L$ справедливо $a+c = b+c$ и $ac = bc$, то $a=b$; (4) L не содержит *пентагона*, т. е. решетки, изоморфной



(5) Решетка идеалов решетки L модулярна.

Из условия (2) видно, что модулярные решетки образуют подмногообразие многообразия всех решеток. Следовательно, подрешетки, факторрешетки и прямые произведения модулярных решеток модулярны. Модулярна и ординальная сумма модулярных решеток. Далее, ясно, что существуют свободные модулярные решетки. Отметим, что свободная модулярная решетка с тремя свободными порождающими содержит 28 элементов, а при наличии четырех свободных порождающих бесконечна.

Для любой решетки L, все интервалы которой имеют конечную длину, равносильны следующие свойства: (1) L модулярна; (2) L полумодулярна сверху и снизу; (3) L удовлетворяет условию Жордана — Дедекинда и на ней может быть определена такая функция размерности d, что $d(x+y)+d(xy)=$ $=d(x)+d(y)$ для любых $x, y \in L$.

Пусть $a, b, c, d, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ — элементы модулярной решетки L. Тогда: 1) если $(a+b)c=0$, то $a(b+c)=ab$ (*закон сокращения*); 2) $a+b(a+c)=$ $=(a+b)(a+c)$; 3) $(a+bc)(b+c)=a(b+c)+bc$; 4) если $a \leqslant c$ и $d \leqslant b$, то $a+b(c+d)=(a+b)c+d$; 5) если $a \leqslant c \leqslant a+b$, то $a+bc=c$; 6) если $a \leqslant b \leqslant$ $\leqslant c+d$, $ac=bc$ и $(a+c)d=(b+c)d$, то $a=b$; 7) $(ab+ac)(ab+bc)=ab$; 8) если $(a+b)c=bc$, то $a(b+c)=ab$; 9) если $(a_1+\ldots+a_n)b=0$, то $(a_1+b)\ldots$ $\ldots(a_n+b)=a_1\ldots a_n+b$; 10) если $a_i \leqslant b_j$ при $i \neq j$, то $(a_1+\ldots+a_n)b_1\ldots b_n=a_1b_1+\ldots+a_nb_n$. Заметим, что каждое из свойств 2)—6) равносильно модулярному закону.

Число $\bigcup$-неразложимых элементов любой конечной модулярной решетки равно числу ее $\bigcap$-неразложимых элементов (см. [2], с. 138).

Элементы $a_1, \ldots, a_n$ модулярной решетки L с нулем 0 назовем *независимыми*, если

$$(a_1+\ldots+a_{i-1}+a_{i+1}+\ldots+a_n)a_i=0$$

для $i=1, \ldots, n$. Непосредственно из определения вытекает: если $a_i \leqslant b_i$ $(i=1, \ldots, n)$ и $b_1, \ldots, b_n$ независимы, то $a_1, \ldots, a_n$ также независимы. Если $a_1, \ldots, a_n$ таковы, что

$$(a_1+\ldots+a_{i-1})a_i=0$$

для $i=1, \ldots, n$, то они независимы. Если $a_1, \ldots, a_n$ независимы, а I и J — некоторые подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$, то

$$\left(\sum_{i \in I} a_i\right)\left(\sum_{j \in J} a_j\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } I \cap J \text{ пусто}, \\ \sum_{k \in I \cap J} a_k & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Если

$$a_i = a_{i1} + \ldots + a_{ik_i} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

элементы $a_{i1}, \ldots, a_{ik_i}$ независимы для каждого i и элементы $a_1, \ldots, a_n$ также независимы, то независимы и элементы

$$a_{11}, \ldots, a_{1k_1}, a_{21}, \ldots, a_{2k_2}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nk_n}.$$

Если, наконец, $a_1, \ldots, a_n$ — независимые элементы модулярной решетки L с нулем 0, то подрешетка решетки L, порожденная интервалами $[0, a_i]$ ($i = 1, \ldots, n$), изоморфна прямому произведению

$$[0, a_1] \times [0, a_2] \times \ldots \times [0, a_n]$$

(см. [15], § 6).

Поскольку решетки нормальных подгрупп, идеалов и подмодулей модулярны, то важную роль для приложений играет *теорема о композиционных рядах*: все композиционные ряды модулярной решетки (если они существуют) имеют одинаковую длину, и *теорема Куроша — Оре*: если

$$w = a_1 \ldots a_m = b_1 \ldots b_n$$

— два несократимых $\cap$-представления элемента w модулярной решетки L, то $m = n$ и для всякого a_i найдется такой элемент b_j, что

$$w = a_1 \ldots a_{i-1} b_j a_{i+1} \ldots a_m.$$

Если

$$a = p_1 + \ldots + p_n,$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — атомы модулярной решетки L, то решетка $[0, a]$ обладает композиционным рядом.

Если $a_1, \ldots, a_n$ — независимые элементы, то сумму их будем называть *прямой* и обозначать через $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$. Элемент a называется *неразложимым*, если он не может быть представлен в форме $a = b \oplus c$, где $b, c \neq 0$.

Если $p_1, \ldots, p_n$ — атомы модулярной решетки L, $b \in L$ и $a = b + p_1 + \ldots + p_n$, то при подходящей нумерации имеем

$$a = b \oplus p_1 \oplus \ldots \oplus p_m$$

(возможно, что $m = 0$).

Отметим некоторые свойства модулярной решетки L, обладающей композиционным рядом: 1) всякий ненулевой элемент $a \in L$ представим в форме $a = a_1 \oplus \ldots \oplus a_m$, где $a_1, \ldots, a_m$ — неразложимые элементы; 2) если

$$1 = a_1 \oplus \ldots \oplus a_m = b_1 \oplus \ldots \oplus b_n,$$

где $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ — неразложимые элементы, то $m = n$ и для всякого a_i найдется такой элемент b_j, что

$$1 = a_1 \oplus \ldots \oplus a_{i-1} \oplus b_j \oplus a_{i+1} \oplus \ldots \oplus a_m$$

(*теорема Оре*).

Тройка $\{a, b, c\}$ элементов решетки L называется *дистрибутивной* (в обозначениях: $(a, b, c)D$), если она порождает дистрибутивную подрешетку. Для любых $a, b, c \in L$ имеет место $(ab, bc, ac)D$ и $(a + b, b + c, a + c)D$. Если L — модулярная решетка, то дистрибутивность тройки $\{a, b, c\}$ равносильна как равенству $a(b + c) = ab + ac$, так и равенству $a + bc = (a + b)(a + c)$ (см. [2], с. 56—57).

Элементы a и b модулярной решетки обладают дополнениями тогда и только тогда, когда дополнения имеются у элементов $a + b$ и ab.

Если a и b — элементы модулярной решетки L, то интервалы $[ab, a]$ и $[b, a + b]$ изоморфны. При этом изоморфизм осуществляется отображениями

$$\varphi_b(x) = x + b \quad (ab \leqslant x \leqslant a)$$

и

$$\psi_a(y) = ay \qquad (b \leqslant y \leqslant a + b).$$

Если a и b перспективны с осью перспективы c, то произведение $\varphi_c\psi_c$ оказывается изоморфизмом интервала $[0, a] = [ac, a]$ на интервал $[bc, b] = [0, b]$, который называется ***перспективным отображением с осью c*** и обозначается через $P_{(a \to b;\ c)}$. Нетрудно понять, что $P_{(a \to b;\ c)}$ отображает элемент $x \in [0, a]$ на элемент $y = (x + c)b \in [0, b]$.

Если L — решетка, состоящая из пустого множества, точек и прямых проективной плоскости и самой плоскости, то перспективное отображение $P_{(a \to b;\ c)}$ ставит в соответствие точке x на прямой a точку y на прямой b (рис. V. 2). Этим и объясняется название.

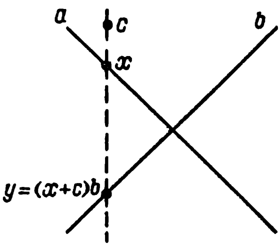


Рис. V.2

Множество $\{a_1, \ldots, a_n\}$ называется *однородным базисом ранга n* модулярной решетки L с 0 и 1, если $1 = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$ и a_i перспективен a_j при любых i и j.

Пусть L — модулярная решетка с дополнениями. Тогда: 1) L — решетка с относительными дополнениями, причем если $a, x, b \in L$, $a \leqslant x \leqslant b$ и y — дополнение элемента x, то $a + by$ оказывается дополнением элемента x в интервале $[a, b]$; 2) если L удовлетворяет условию минимальности, то она удовлетворяет условию максимальности; 3) центр решетки L совпадает с множеством всех ее элементов, имеющих единственное дополнение; 4) конгруэнции решетки L находятся во взаимнооднозначном соответствии с ее *нейтральными идеалами*, т. е. идеалами, которые вместе с любым элементом содержат и все перспективные ему; 5) если $a, b, x \in L$ и $a \leqslant b$, то существует такое дополнение c элемента a в отрезке $[0, b]$, что $x = (a + x)(c + x)$; 6) в L справедливо тождество

$$p(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_6) + v \leqslant q(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_6) + v$$

от $x, y, z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ и x_6, где

$$v \underset{\text{def}}{=} xy + yz + xz,$$

$$\bar{x}_i \underset{\text{def}}{=} x_i(xu + v) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

при

$$u \underset{\text{def}}{=} (x + y)(y + z)(x + z),$$

$$p(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_6) \underset{\text{def}}{=} (\bar{x}_1 + \bar{x}_4)(\bar{x}_2 + \bar{x}_5)(\bar{x}_3 + \bar{x}_6)$$

и

$$q(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_6) \underset{\text{def}}{=} (w + \bar{x}_2)\bar{x}_1 + (w + \bar{x}_5)\bar{x}_4$$

при

$$w \underset{\text{def}}{=} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_4 + \bar{x}_5)((\bar{x}_1 + \bar{x}_3)(\bar{x}_4 + \bar{x}_6) + (\bar{x}_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_5 + \bar{x}_6)).$$

Последний результат позволяет установить существование модулярных решеток, не вложимых ни в какую модулярную решетку с дополнениями. Однако в модулярную решетку с дополнениями вложима любая модулярная решетка длины, не превосходящей трех. Кроме того, любая модулярная решетка с дополнениями вкладывается в модулярную геометрическую решетку (см. [15], § 6; [2], с. 102, с. 106, с. 107; [8], с. 273, с. 276—278).

Каждый ненулевой элемент полной атомной модулярной решетки L с дополнениями представляется как точная верхняя грань некоторого множества атомов. Если модулярная решетка с дополнениями удовлетворяет условию минимальности, то каждый ее элемент представляется как сумма конечного множества атомов. Любой интервал атомной модулярной решетки с дополнениями является атомной решеткой. Если L — непрерывная сверху модулярная решетка и ее единица равна точной верхней грани множества всех ее атомов, то L атомна, обладает дополнениями и каждый ее отличный от нуля элемент представляется как точная верхняя грань некоторого множества атомов. Если модулярная решетка конечной длины является решеткой с относительными дополнениями, то она разлагается в прямое произведение конгруэнц-простых решеток с дополнениями, также имеющих конечную длину. Для модулярной решетки L, обладающей композиционным рядом, эквивалентны следующие свойства: (1) L — решетка с дополнениями; (2) каждый элемент из L представляется как прямая сумма атомов; (3) 1 представляется как сумма атомов (см. [15], § 6; [2], с. 99).

2.3. Координатизация. Рассмотрим следующие термы в алфавите $\{x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2\}$:

$$u \underset{\text{def}}{=} (x_0 + y_0)(x_1 + y_1)(x_2 + y_2),$$

$$w \underset{\text{def}}{=} (x_0 + x_1)(y_0 + y_1)(x_0 + x_2)(y_0 + y_2) + \\ + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

и

$$v \underset{\text{def}}{=} (w + x_1)\,x_0 + (w + y_1)\,y_0.$$

Решетка называется *дезарговой* (а также *аргезиевой* или *арговой*), если в ней справедливо тождество

$uv = u$ или, что то же самое, $u \leqslant v$. Модулярная геометрическая решетка длины, не меньшей 4, оказывается дезарговой, если для любых ее различных атомов p и q найдется атом r такой, что $r \neq p$, q и $r \leqslant p + q$. Всякая модулярная геометрическая решетка изоморфна прямому произведению булевой алгебры и *проективных геометрий*, т. е. решеток, изоморфных решеткам всех подпространств линейных пространств над телами. Эквивалентны следующие свойства модулярной геометрической решетки L: (1) L — проективная геометрия; (2) L конгруэнц-проста; (3) L неразложима в прямое произведение; (4) любые два атома решетки L перспективны. Решетка L является проективной геометрией тогда и только тогда, когда она является дезарговой атомной модулярной решеткой с дополнениями, атомы которой компактны и для любых ее различных атомов p и q найдется такой атом r, отличный от p и q, что $r \leqslant p + q$ (см. [4], гл. VII; [8], § IV.5; [2], § IV.6, IV.7).

Эквивалентны следующие свойства модулярной решетки L с дополнениями: (1) L вкладывается в прямое произведение решеток всех подпространств линейных пространств над телами; (2) L вкладывается в дезаргову геометрическую решетку; (3) вкладывается в решетку всех подгрупп некоторой абелевой группы; (4) L дезаргова; (5) существует вложение φ решетки L в решетку разбиений множества M, обладающее следующими свойствами: для любых a, $b \in L$ и x, $y \in M$ элементы x и y лежат в одном классе разбиения $\varphi(a + b)$ в том и только том случае, когда для подходящего $z \in M$ элементы x и z лежат в одном классе разбиения $\varphi(u)$, а z и y — в одном классе разбиения $\varphi(b)$ (*теорема Йонссона* — см. [8], § IV.5).

Если F — левый модуль n-мерных строк над регулярным кольцом R, то конечно порожденные подмодули модуля F образуют дедекиндову решетку с дополнениями, являющуюся подрешеткой решетки всех подмодулей модуля F. Элементы $E_1 = R(1, 0, \ldots, 0)$, $E_2 = R(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $E_n = R(0, \ldots, 0, 1)$ образуют однородный базис этой решетки. Наоборот, всякая модулярная решетка с дополнениями, обладающая однородным базисом ранга n, где $n \geqslant 4$, изоморфна решетке всех конечно порожденных подмодулей левого модуля всех n-мерных строк над некоторым регулярным кольцом. Заметим, что последняя решетка изоморфна решетке всех главных левых идеалов кольца $M_n(R)$ всех $n \times n$-матриц над R. Поскольку кольцо $M_n(R)$ регулярно, то сказанное означает, что модулярная решетка с дополнениями, обладающая однородным базисом ранга n ($n \geqslant 4$), изоморфна решетке главных левых идеалов некоторого регулярного кольца. Заметим, что «левых» можно заменить на «правых». Кроме того, требование существования однородного базиса может быть несколько ослаблено. Для того чтобы модулярная решетка с дополнениями, содержащая однородный базис ранга n, обладала ортодополнениями, необходимо и достаточно, чтобы она была изоморфна решетке всех главных левых идеалов некоторого $*$-регулярного кольца (см. [14], с. 23, теорема 2; с. 25, теорема 4; с. 82, теорема 10; с. 84, теорема; с. 119, теорема 18; с. 168, теорема 26; см. также [38], [41]).

Полная непрерывная сверху модулярная решетка с дополнениями называется *непрерывной геометрией*. Непрерывная геометрия L называется *антидистрибутивной*, если ни для какого ненулевого a из L решетка a^{∇} не является дистрибутивной. Всякая антидистрибутивная непрерывная геометрия обладает однородным базисом ранга 2^n для любого $n \geqslant 1$ (см. [14], с. 119, теорема 18).

§ 3. Дистрибутивные решетки

3.1. Основные определения и критерии дистрибутивности. Решетка L называется *дистрибутивной*, если в ней выполняются тождества

$$x(y+z)=xy+xz \quad \text{и} \quad x+yz=(x+y)(x+z),$$

называемые *дистрибутивными законами*. Решетка дистрибутивна уже тогда, когда в ней имеет место один из указанных дистрибутивных законов. Из многочисленных свойств, равносильных дистрибутивности решетки L, можно выделить следующие:

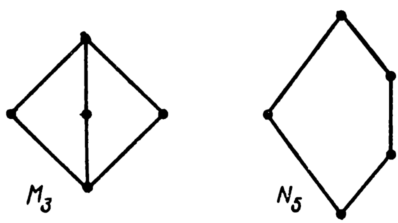
1) в L тождественно выполняется любое из неравенств $x(y+z) \leqslant xy+xz$ или $x+yz \geqslant (x+y)(x+z)$

(противоположные неравенства имеют место в любой решетке);

2) в L выполняется тождество $xy+yz+zx=$ $=(x+y)(y+z)(z+x)$;

3) для любого фиксированного $a\in L$ истинно квазитождество $a+x=a+y\ \&\ ax=ay\rightarrow x=y$;

4) решетка L не содержит ни подрешеток, изоморфных решетке M_3 («ромб», «диамант»), ни подрешеток, изоморфных N_5 («пятиугольник», «пентагон»):



5) каждый элемент a решетки L имеет не более одного относительного дополнения в каждом интервале, содержащем a;

6) всякий идеал решетки L является ядром некоторого гомоморфизма;

7) для любых двух различных элементов a, b решетки L найдется простой идеал этой решетки, содержащий a и не содержащий b;

8) всякий идеал решетки L является ядерным идеалом некоторой конгруэнции;

9) всякая выпуклая подрешетка решетки L является классом некоторой конгруэнции;

10) (свойство продолжаемости конгруэнций) всякая конгруэнция произвольной подрешетки L^* решетки L продолжается до конгруэнции решетки L.

Всякая дистрибутивная решетка модулярна, так как модулярный закон представляет собой ослабленную форму дистрибутивного закона $x(y+z)=xy+$ $+xz$.

Примеры дистрибутивных решеток. 1) Решетка $(P(X), \cup, \cap)$ всех подмножеств произвольного множества X с теоретико-множественными операциями объединения и пересечения. 2) Решетка открытых и решетка замкнутых подмножеств любого топологического пространства. 3) Любая линейно упорядоченная решетка (цепь). 4) Множество натуральных чисел (вместе с нулем), упорядоченное делимостью, где точная верхняя грань двух чисел совпадает с их наименьшим общим кратным, а точная нижняя грань — с наибольшим общим делителем. 5) Решетка подгрупп обобщенной циклической группы G, где $AB = A \cap B$, а $A + B$ — подгруппа, порожденная в G подгруппами A и B. 6) Решетка конгруэнций произвольной решетки L, где $\theta_1\theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2$, а $\theta_1 + \theta_2$ — транзитивное замыкание теоретико-множественного объединения $\theta_1 \cup \theta_2$ конгруэнций θ_1 и θ_2. 7) Решетка многообразий (т. е. эквационально определимых классов) решеток: точной нижней гранью для семейства многообразий является их теоретико-множественное пересечение, а точной верхней гранью — эквациональное замыкание теоретико-множественного объединения входящих в семейство многообразий.

Непустая совокупность подмножеств некоторого множества X называется *решеткой* (или *кольцом*) *множеств*, если она замкнута относительно теоретико-множественных операций объединения и пересечения. Всякая решетка множеств дистрибутивна. Из приведенных примеров дистрибутивных решеток решетками множеств будут первые два. Элементами решеток, указанных в примерах 5 и 6, тоже являются подмножества соответствующих множеств, но объединение (в отличие от пересечения) здесь не совпадает с теоретико-множественным.

Решетка множеств называется *полной решеткой множеств*, если она замкнута относительно теоретико-множественных объединений и пересечений произвольных семейств составляющих ее подмножеств. Решетка множеств может быть полной решеткой, но не быть полной решеткой множеств. Например, в полной решетке замкнутых [открытых] подмножеств топологического пространства точные верхние грани [точные нижние грани] бесконечных семейств не совпадают, вообще говоря, с их теоретико-множественными объединениями [пересечениями]. Всякая полная решетка множеств одновременно является атомной и коатомной решеткой. Атомами в ней будут подмножества вида $\bigcap_{x \in A} A$, а коатомами — подмножества вида $\bigcup_{x \notin A} A$, где x — произвольная фиксированная точка наибольшего из множеств, входящих в решетку.

Из определения дистрибутивной решетки видно, что класс дистрибутивных решеток является многообразием. Следовательно, любая подрешетка и любой гомоморфный образ дистрибутивной решетки снова будут дистрибутивными решетками, так же как и прямое произведение любого семейства дистрибутивных решеток. Многообразие дистрибутивных решеток не содержит собственных нетривиальных подмногообразий и само содержится в любом нетривиальном многообразии решеток. Это единственный атом решетки многообразий решеток.

Если в дистрибутивных законах взаимно заменить символы $+$ и $\cdot$, то законы эти перейдут друг в друга. Поэтому система тождеств для класса дистрибутивных решеток (в нее, кроме дистрибутивных законов, входят еще стандартные тождества, задающие многообразие всех решеток) при такой взаимной замене в целом не изменится. На этом основан *принцип двойственности для дистрибутивных решеток*: если в классе дистрибутивных решеток истинно некоторое утверждение, то истинным будет и двойственное утверждение, т. е. то, которое получается из данного взаимной заменой символов $+$ и $\cdot$.

В дистрибутивной решетке каждый элемент имеет не более одного дополнения. Дистрибутивные решетки с дополнениями называются *булевыми решетками*. Им посвящен § 4.

Важную роль в дистрибутивных решетках играют неразложимые (в объединение) элементы. В любой дистрибутивной решетке с нулем неразложимыми будут нуль и все атомы (если они, конечно, существуют). В цепи неразложим каждый элемент, а в решетке натуральных чисел, упорядоченных делимостью, неразложимы в точности степени простых чисел. Элемент a дистрибутивной решетки неразложим тогда и только тогда, когда из неравенства $a \leqslant x+y$ вытекает по крайней мере одно из неравенств $a \leqslant x$ или $a \leqslant y$. Таким образом, если элемент a неразложим и $a \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i$, то a содержится хотя бы в одном из x_i.

Любая максимальная (т. е. неуплотняемая) цепь конечной дистрибутивной решетки имеет длину, равную числу ненулевых неразложимых элементов этой решетки.

Представление $a = \sum_{i=1}^{n} x_i$ элемента a дистрибутивной решетки L несократимо тогда и только тогда, когда никакой из элементов x_i не содержится в x_j при $i \neq j$. Каждый элемент дистрибутивной решетки имеет самое большее одно несократимое представление в виде объединения конечного числа неразложимых элементов. При этом два таких разложения считаются одинаковыми, если они различаются только порядком компонент в записи объединения.

В дистрибутивной решетке, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепей, каждый элемент однозначно разложим в объединение конечного числа неразложимых элементов. Например, в решетке натуральных чисел, упорядоченных делимостью, это означает однозначность разложения числа на простые множители. Дистрибутивную решетку с условием обрыва убывающих цепей образуют также и алгебраические многообразия над произвольным полем.

Если в дистрибутивной решетке все цепи конечны, то она содержит лишь конечное число неразложимых элементов и, значит, сама будет конечной.

По принципу двойственности вводятся соответствующие понятия и получаются результаты, связанные с разложимостью элементов в пересечения — в дистрибутивных решетках с условием обрыва возрастающих цепей (такие решетки называют иногда *нётеровыми*).

Каждый элемент полной дистрибутивной решетки L имеет самое большее одно несократимое представление в виде (быть может, бесконечного) объединения вполне неразложимых (в объединение) элементов этой решетки. В классе бесконечно $\cap$-дистрибутивных решеток, в которых каждый элемент представим в виде объединения вполне неразложимых элементов, любая решетка L с точностью до изоморфизма определяется своим частично упорядоченным подмножеством $\operatorname{Irr} L$ вполне неразложимых элементов (т. е. если L_1 и L_2 — две решетки из указанного класса и частично упорядоченные множества $\operatorname{Irr} L_1$ и $\operatorname{Irr} L_2$ изоморфны, то изоморфны и решетки L_1 и L_2) — Гильман Е. А.//Упорядоченные множества и решетки. Вып. 9. — Саратов, 1986. — С. 12—16. В частности, каждая конечная дистрибутивная решетка L с точностью до изоморфизма определяется своим частично упорядоченным подмножеством $\operatorname{Irr} L$, образованным неразложимыми элементами. В полной дистрибутивной решетке L каждый элемент может быть представлен в виде несократимого объединения вполне неразложимых элементов тогда и только тогда, когда L бесконечно $\bigcup$-дистрибутивна и при этом каждый начальный интервал $[0, a]$, $a > 0$, является коатомной решеткой (Горбунов В. А.//Алгебра и логика. — 1978. — Т. 17, № 5. — С. 495—511).

О критериях дистрибутивности решетки см. [15], § 7, о разложении элементов в дистрибутивных решетках — [1], гл. IX, § 7, [33], § 21, [24].

3.2. Алгебраические конструкции. Как уже отмечалось (см. 3.1), всякая подрешетка дистрибутивной решетки сама дистрибутивна. В дистрибутивной решетке с 0 и 1 подрешетку образуют, например, элементы, имеющие дополнение. Пересечение всех максимальных собственных подрешеток решетки L (т. е. пересечение всех коатомов решетки $\mathrm{Sub}\, L$ всех подрешеток решетки L) называется *подрешеткой Фраттини* решетки L. Всякая дистрибутивная решетка изоморфна подрешетке Фраттини некоторой дистрибутивной решетки.

Если решетка L дистрибутивна и решетки $\mathrm{Sub}\, L$ и $\mathrm{Sub}\, L^*$ изоморфны, то дистрибутивной будет и решетка L^*. Решетка $\mathrm{Sub}\, L$ модулярна тогда и только тогда, когда L — цепь.

Конечная n-элементная решетка L называется *разборной*, если в $\mathrm{Sub}\, L$ существует цепь $L_1 \subset L_2 \subset \ldots \ldots \subset L_n = L$ такая, что $|L_i| = i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Например, любая решетка, содержащая не более семи элементов, является разборной. Конечная дистрибутивная решетка L тогда и только тогда будет разборной, когда ее диаграмму можно нарисовать без самопересечений (такие решетки называют *плоскими*), см. [8], с. 77, 97.

Если L — конечная дистрибутивная решетка, имеющая не менее трех элементов, и M — ее максимальная собственная подрешетка (т. е. коатом решетки $\mathrm{Sub}\, L$), то $|M| \geqslant \frac{2}{3} |L|$ и длина максимальных цепей в M разве лишь на единицу меньше длины максимальных цепей в L. Если же L — конечная булева решетка и $|L| \geqslant 4$, то для любого коатома $M \in$

$\in \mathrm{Sub}\, L$ имеет место равенство $|M| = \frac{3}{4}|L|$ и, кроме того, длины максимальных цепей в L и M равны (Rival I.// Proc. Amer. Math. Soc. — 1974. — V. 44, N 2. — P. 263—268).

Конгруэнции произвольной решетки L образуют полную дистрибутивную решетку $\mathrm{Con}\, L$. Если L — дистрибутивная решетка и в ней $a \leqslant b$, то наименьшая из конгруэнций, отождествляющих элементы a и b, определяется условием

$$(x, y) \in \theta_{a,b} \Leftrightarrow xa = ya \;\&\; x + b = y + b.$$

Решетка $\mathrm{Con}\, L$ конгруэнций дистрибутивной решетки тогда и только тогда обладает дополнениями (т. е. является булевой), когда каждый интервал решетки L конечен (см. [24], с. 80).

Если a и b — различные элементы дистрибутивной решетки L, то существует разделяющая их конгруэнция θ (т. е. конгруэнция θ со свойством $(a, b) \notin \theta$) такая, что факторрешетка L/θ — двухэлементная цепь.

Всякая конечная дистрибутивная решетка вкладывается в решетку натуральных чисел, упорядоченных делимостью. Отображение, сопоставляющее каждому элементу дистрибутивной решетки L с условием обрыва убывающих цепей совокупность всех содержащихся в этом элементе ненулевых неразложимых элементов, является вложением решетки L в решетку множеств $P(\mathrm{Irr}\, L)$.

Если L_1 и L_2 — дистрибутивные решетки и моноиды $\mathrm{End}\, L_1$ и $\mathrm{End}\, L_2$ их эндоморфизмов изоморфны, то L_1 и L_2 изоморфны или дуально изоморфны (см. [16], с. 38).

Число неизоморфных дистрибутивных решеток длины n (т. е. с максимальными цепями длины n) равно числу неизоморфных частично упорядоченных множеств с n элементами. Всякая конечная дистрибутивная решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторой конечной решетки и изоморфна решетке нормальных подгрупп подходящей группы.

Если a — некоторый элемент дистрибутивной решетки L, то отображение φ: $x \mapsto (xa, x + a)$ представляет собой вложение решетки L в прямое произведение интервалов $a^{\nabla} \times a^{\Delta}$. Если элемент a имеет дополнение в L, то φ будет изоморфизмом.

Всякая неодноэлементная дистрибутивная решетка изоморфна подходящему подпрямому произведению двухэлементных цепей. Так как прямое произведение семейства $\{L_i \mid i \in I\}$ двухэлементных цепей изоморфно решетке $P(I)$ всех подмножеств множества I, то получается, что всякая дистрибутивная решетка изоморфна подходящей решетке множеств.

Говорят, что дистрибутивная решетка F *свободно порождается* подмножеством $X \subseteq F$, если X порождает решетку F и всякое отображение множества X в произвольную дистрибутивную решетку L может быть продолжено до гомоморфизма решетки F в L. При этом элементы множества X называются *свободными порождающими* решетки F. Пусть F — дистрибутивная решетка, порожденная подмножеством $\{x_i \mid i \in I\}$. Решетка F тогда и только тогда свободно порождается этим подмножеством, когда для любых непустых конечных $I_1, I_2 \subseteq I$ из неравенства $\prod\limits_{i \in I_1} x_i \leqslant \sum\limits_{i \in I_2} x_i$ следует, что $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$.

Дистрибутивная решетка, свободно порожденная каким-нибудь своим подмножеством, называется *свободной дистрибутивной решеткой*. Подрешетка свободной дистрибутивной решетки, порожденная частью свободных порождающих, свободна. Две свободные дистрибутивные решетки F_1 и F_2, имеющие равномощные множества порождающих X_1 и X_2 соответственно, изоморфны. Следовательно, для каждого кардинального числа α существует единственная (с точностью до изоморфизма) свободная дистрибутивная решетка с α свободными порождающими. Она обозначается $FD(\alpha)$. Любая цепь в свободной дистрибутивной решетке конечна или счетна. Свободная дистрибутивная решетка с конечным числом порождающих конечна: $2^n - 2 \leqslant |FD(n)| \leqslant 2^{2^n-2}$. В частности, $FD(3)$ имеет 18 элементов. Если *фильтром* (или *возрастающим подмножеством*) в частично упорядоченном множестве назвать подмножество, вместе с каждым своим элементом a содержащее и весь верхний конус a^{Δ}, то $FD(n)$ оказывается изоморфной решетке всех фильтров (всех возрастающих подмножеств) упорядоченного теоретико-множественным включением множества собственных непустых подмножеств n-элементного множества. Свободная дистрибутивная решетка с бесконечным числом порождающих вкладывается в свободную модулярную решетку с тем же числом порождающих (см. [18], с. 163).

О свойствах алгебраических конструкций для дистрибутивных решеток см. [8].

3.3. Идеалы. Пополнения. Бесконечная дистрибутивность. Пусть J — идеал дистрибутивной решетки L. Отношение

$$\theta_J = \{(a, b) \in L \times L \mid (\exists x \in J)(a + x = b + x)\}$$

является конгруэнцией на L, и гомоморфизм решетки L на факторрешетку (с нулем) L/θ_J имеет своим ядром данный идеал J. Решетка L дистрибутивна тогда и только тогда, когда каждый ее идеал является ядром подходящего гомоморфизма. Два разных гомоморфизма дистрибутивной решетки на одну и ту же решетку с нулем могут иметь совпадающие ядерные идеалы.

Решетка $\mathrm{Id}\, L$ всех идеалов дистрибутивной решетки L дистрибутивна. Для дистрибутивных решеток L (и только для таких решеток) операция объединения в решетке $\mathrm{Id}\, L$ выражается формулой

$$J_1 + J_2 = \{a \in L \mid (\exists x_1 \in J_1,\ x_2 \in J_2)(a = x_1 + x_2)\}.$$

Сопоставляя каждому элементу a дистрибутивной решетки L порожденный им главный идеал a^∇, получаем вложение решетки L в полную дистрибутивную решетку $\mathrm{Id}\, L$ — *идеальное пополнение* решетки L. Идеальное пополнение $\mathrm{Id}\, L$ дистрибутивной решетки L в общем случае не сохраняет имеющиеся в L точные грани.

Пополнение сечениями (т. е. вложение дистрибутивной решетки L в полную решетку $\mathrm{Cl}(L)$ ее замкнутых идеалов), напротив, является *полным*, т. е. сохраняет все имеющиеся в данной решетке точные грани, но зато в отличие от идеального пополнения оно не сохраняет эквациональные свойства исходной решетки. Так, пополнение сечениями дистрибутивной решетки может не быть даже модулярной решеткой. Более того, не существует общей конструкции, при помощи которой произвольную дистрибутивную решетку можно было бы полно вложить в некоторую полную дистрибутивную решетку. Если же дистрибутивная решетка L обладает дополнениями, т. е. является булевой, то такой конструкцией будет как раз пополнение сечениями: решетка $\mathrm{Cl}(L)$ в этом случае также булева. Собственное подмножество J решетки L тогда и только тогда будет ее простым идеалом, когда в L тождественно выполняются эквивалентности $x \in J \,\&\, y \in J \Leftrightarrow x + y \in J$ и $xy \in J \Leftrightarrow x \in J \vee y \in J$.

Простые идеалы решетки — это в точности ядерные идеалы ее гомоморфизмов на двухэлементную цепь. Решетка тогда и только тогда будет цепью, когда каждый ее идеал — простой. Если каждый простой идеал дистрибутивной решетки с единицей является главным, то и все идеалы этой решетки будут главными. Каждый простой идеал подрешетки L^* дистрибутивной решетки L является следом на L^* некоторого простого идеала всей решетки L. Если J — идеал дистрибутивной решетки L и $a \notin J$, то в L существует простой идеал, содержащий J и не содержащий a. Следовательно, каждый идеал дистрибутивной решетки содержится в подходящем простом идеале (и совпадает с пересечением всех содержащих его простых идеалов). В дистрибутивной решетке всякий простой идеал содержит минимальный (по включению) простой идеал.

Каждый максимальный (в смысле включения) собственный идеал дистрибутивной решетки будет ее простым идеалом. Дистрибутивная решетка тогда и только тогда обладает дополнениями (т. е. является булевой решеткой), когда всякий ее простой идеал максимален.

Пусть L — дистрибутивная решетка. Если через $\mathscr{P}(x)$ обозначить множество всех простых идеалов решетки L, не содержащих элемент x, то для любых a, $b \in L$ будет

$$\mathscr{P}(a+b) = \mathscr{P}(a) \cup \mathscr{P}(b), \quad \mathscr{P}(ab) = \mathscr{P}(a) \cap \mathscr{P}(b),$$

$$\mathscr{P}(a) = \mathscr{P}(b) \Rightarrow a = b.$$

Следовательно, отображение $x \mapsto \mathscr{P}(x)$ является вложением решетки L в решетку всех подмножеств множества простых идеалов решетки L. Это еще одно (см. 3.2) представление дистрибутивной решетки в виде решетки множеств (оно называется *стоуновским представлением* для L).

Топологическое пространство X, на котором задан некоторый частичный порядок $\leqslant$, называется *упорядоченным топологическим пространством.* Упорядоченные топологические пространства X и Y, по определению, *порядково гомеоморфны*, если они гомеоморфны как топологические пространства и изоморфны как частично упорядоченные множества. Подмножество A упорядоченного топологического пространства X называется *убывающим*, если оно является идеалом в частично упорядоченном множестве $(X, \leqslant)$ (т. е. если из $a \in A$ и $x \leqslant a$ следует, что $x \in A$). Об упорядоченном топологическом пространстве X говорят, что оно *вполне несвязно*, если для любых его точек x, y таких, что $x \not\geqslant y$, существует открыто-замкнутое убывающее подмножество A, содержащее x и не содержащее y. Совокупность $X^{\circledast}$ всех открыто-замкнутых убывающих подмножеств вполне несвязного упорядоченного топологического пространства X образует дистрибутивную решетку относительно теоретико-множественных операций объединения и пересечения.

Пусть L — ограниченная (т. е. с 0 и 1) дистрибутивная решетка. Обозначим через $L^{\circledast}$ множество всех ее простых идеалов, частично упорядоченное теоретико-множественным включением и снабженное топологией, предбазу которой образуют подмножества вида $A_a = \{P \in L^{\circledast} \mid a \notin P\}$ и их дополнения $(a \in L)$. Тогда $L^{\circledast}$ будет компактным вполне несвязным упорядоченным топологическим пространством, решетка открыто-замкнутых убывающих подмножеств которого изоморфна решетке L, т. е. $L^{\circledast\circledast} \simeq L^{\circledast}$ (изоморфизм устанавливается отображением $a \longmapsto A_a$). С другой стороны, упорядоченное топологическое пространство $X^{\circledast\circledast}$, соответствующее в указанном смысле ограниченной дистрибутивной решетке $X^{\circledast}$ открыто-замкнутых убывающих подмножеств компактного вполне несвязного упорядоченного топологического пространства X, порядково гомеоморфно самому X — при отображении $x \longmapsto \{A \in X^{\circledast} \mid x \notin A\}$, где $x \in X$. Тем самым устанавливается так называемая *двойственность*

Пристли между ограниченными дистрибутивными решетками и компактными вполне несвязными упорядоченными топологическими пространствами (Priestly H. A.//Proc. London Math. Soc. — 1972. — Т. 24. — С. 507—530).

В булевой решетке L всякий простой идеал максимален, поэтому $L^{\circledast}$ оказывается (тривиально упорядоченным) булевым пространством и двойственность Пристли превращается в стоуновскую двойственность между булевыми алгебрами и булевыми топологическими пространствами.

Полная решетка L называется *бесконечно дистрибутивной*, если в ней тождественно выполняются *бесконечные дистрибутивные законы*

(1) $x \sum\limits_{i \in I} x_i = \sum\limits_{i \in I} xx_i$ (*бесконечная* $\cap$*-дистрибутивность*),

(2) $x + \prod\limits_{i \in I} x_i = \prod\limits_{i \in I} (x + x_i)$ (*бесконечная* $\cup$*-дистрибутивность*).

Например, первый из этих законов (но не второй) имеет место в полной решетке натуральных чисел, упорядоченных делимостью, а также в полной решетке конгруэнций произвольной решетки. Второй (но не первый) выполняется в полной решетке замкнутых подмножеств в обычной плоскости. Оба закона истинны в полных цепях, а также в полных булевых решетках. Всякая бесконечно дистрибутивная решетка допускает полное вложение в подходящую полную булеву решетку.

В полной дистрибутивной решетке L свойство (1) — так же как и (2) — имеет место уже тогда, когда оно справедливо для любой цепи $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq L$ и любого $x \in L$.

Полная решетка L называется *вполне дистрибутивной*, если в ней тождественно выполняется *закон полной дистрибутивности*

$$\prod_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B_\alpha} x_{\alpha\beta} = \sum_{\varphi \in \Phi} \prod_{\alpha \in A} x_{\alpha\varphi(\alpha)},$$

где A — любое непустое множество, $\{B_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — произвольное семейство множеств, а Φ — множество всевозможных функций φ, сопоставляющих каждому элементу $\alpha \in A$ элемент $\varphi(\alpha)$ из B_α. Во всякой полной решетке закон полной дистрибутивности равносилен двойственному ему соотношению и влечет оба бесконечных дистрибутивных закона. Любая полная цепь вполне дистрибутивна. Полная решетка тогда и только тогда вполне дистрибутивна, когда она допускает полное вложение в прямое произведение полных цепей (см. [2], гл. V, § 5).

3.4. Дистрибутивные решетки с относительными дополнениями. Псевдодополнения. Решетка L дистрибутивна тогда и только тогда, когда любой ее элемент a имеет не более одного относительного дополнения в каждом интервале, содержащем a. В дистрибутивной решетке L с 0 и 1 всякий элемент a, имеющий дополнение a', имеет и относительное дополнение в любом интервале $[b, c]$, которому он принадлежит: таковым будет элемент $x = (a' + b)c$.

Следующие условия равносильны в дистрибутивной решетке L: (1) L — решетка с относительными дополнениями; (2) всякая выпуклая подрешетка решетки L является классом в точности одной конгруэнции; (3) любые две конгруэнции решетки L перестановочны (т. е. $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$, где, по определению, $\theta_1 \circ \theta_2 = \{(a, b) \mid (\exists x)(a, x) \in \theta_1 \mathbin{\&} (x, b) \in \theta_2\}$); (4) всякий идеал решетки L представляет собой ядерный идеал в точности одной конгруэнции (*ядерным идеалом конгруэнции* называется ядерный идеал соответствующего ей гомоморфизма на факторрешетку); (5) среди гомоморфных образов решетки L нет трехэлементных цепей; (6) никакой простой идеал решетки L не содержится в другом ее простом идеале.

Если L — дистрибутивная решетка с относительными дополнениями, то любая собственная ее подрешетка включается в некоторую максимальную собственную подрешетку (т. е. каждый отличный от L элемент решетки $\mathrm{Sub}\,L$ содержится в некотором коатоме).

Дистрибутивная решетка с нулем и относительными дополнениями называется *обобщенной булевой решеткой*. Примером может служить решетка конечных (включая пустое) подмножеств множества натуральных чисел: если в ней $B \subseteq A \subseteq C$, то относительным дополнением для A в интервале $[B, C]$ будет подмножество $B \cup (C \setminus A)$. Дистрибутивная решетка с 0 уже тогда будет обобщенной булевой, когда каждый ее элемент a имеет относительное дополнение $c \setminus a$ в любом начальном интервале решетки L, т. е. в интервале вида $[0, c]$, $c \in L$, где $a \leqslant c$. Действительно, если $b \leqslant a \leqslant c$, то относительным дополнением для a в $[b, c]$ будет $x = b + (c \setminus a)$. Обобщенная булева решетка с единицей 1 является булевой решеткой.

Пусть a, b — произвольные элементы обобщенной булевой решетки L. Относительное дополнение элемента a в интервале $[0, a + b]$ называется *разностью* элементов b и a и обозначается $b \setminus a$. Заметим, что в булевой решетке $y \setminus x = x'y$.

Отображение φ_a: $x \mapsto (ax, x \setminus a)$, $a \in L$, является изоморфизмом обобщенной булевой решетки L на прямое произведение $a^{\nabla} \times a^{\perp}$, где $a^{\perp}$ обозначает множество всех элементов решетки L, *ортогональных* элементу a (т. е. таких $b \in L$, что $ab = 0$) (Ершов Ю. Л.//Алгебра и логика.— 1979.— Т. 18, № 6.— С. 680—772).

Обобщенная булева решетка, рассматриваемая как универсальная алгебра сигнатуры $(+, \cdot, \setminus, 0)$ типа $(2, 2, 2, 0)$, называется *обобщенной булевой алгеброй*. Обобщенные булевы алгебры образуют эквациональный класс (многообразие).

Ассоциативное кольцо, все элементы которого идемпотентны, называется *обобщенным булевым кольцом*. Всякое такое кольцо коммутативно и имеет характеристику 2. Булево кольцо — это обобщенное булево кольцо с единицей. Всякое обобщенное булево кольцо $(R, \boldsymbol{+}, \circ)$ можно превратить в обобщенную булеву решетку R^*, полагая $xy = x \circ y$, $x + y = x \boldsymbol{+} y \boldsymbol{+} x \circ y$. С другой стороны, если в обобщенной булевой решетке $(L, +, \cdot)$ положить $x \circ y = xy$, $x \boldsymbol{+} y = (x + y) \setminus xy$, то получается обобщенное булево кольцо L^*. При этом $R^{**} = R$ и $L^{**} = L$. Подмножество A тогда и только тогда является 0-подрешеткой (т. е. подрешеткой, содержащей 0) обобщенной булевой решетки L, когда A — подкольцо в L^*, и является идеалом в L в точности, когда оно представляет собой кольцевой идеал в L^*. Отображение φ: $L \to M$ одной обобщенной булевой решетки в другую будет 0-гомоморфизмом (т. е. решеточным гомоморфизмом, сохраняющим 0) в том и только том случае, когда φ — гомоморфизм кольца L^* в кольцо M^*. Описанное соответствие устанавливает, в частности, двойственность между булевыми решетками и булевыми кольцами (см. § 4).

Пусть L — произвольная решетка. *Псевдодополнением элемента a относительно элемента b* называется наибольший из элементов x решетки L, удовлетворяющих неравенству $ax \leqslant b$. Если такой элемент существует, он определяется однозначно заданием a и b и обозначается через $a * b$. Решетка, в которой бинарная операция $x * y$ всюду определена, называется *решеткой с относительными псевдодополнениями* (или *брауэровой решеткой*). Всякая решетка L с относительными псевдодополнениями дистрибутивна и имеет наибольший элемент 1 (для любого $x \in L$ будет $x * x = 1$). Любая конечная дистрибутивная решетка и любая цепь с 1 обладают относительными псевдодополнениями. В булевой решетке $a * b = a' + b$ для любых элементов a и b.

Решетка с относительными псевдодополнениями, имеющая наименьший элемент 0, называется *псевдобулевой* (или *гейтинговой*) решеткой. Всякая решетка L с относительными псевдодополнениями вложима в псевдобулеву решетку: к L (если в ней нет нуля) присоединяют новый элемент 0 и полагают $x + 0 = 0 + x = x$, $x0 = 0x = 0$. Тогда $x * 0 = 0$ и $0 * x = 1$ для любого $x \in L$. Псевдобулева решетка L тогда и только тогда будет булевой, когда $x(x * 0) = 0$ для всех $x \in L$.

Полная решетка L тогда и только тогда обладает относительными псевдодополнениями, когда она бесконечно $\bigcap$-дистрибутивна. Примерами таких решеток, кроме приводившихся ранее (когда речь шла о бесконечной дистрибутивности), могут служить решетка идеалов дистрибутивной решетки с нулем, решетка открытых подмножеств любого топологического пространства. Однако, например, решетка замкнутых подмножеств числовой прямой уже не будет входить в этот список: не существует наибольшего замкнутого подмножества, не содержащего произвольную фиксированную точку. Любая решетка с относительными псевдодополнениями вкладывается в решетку всех открытых подмножеств подходящего компактного T_0-пространства.

Решетки с относительными псевдодополнениями образуют эквациональный класс (многообразие) универсальных алгебр в сигнатуре $(+, \cdot, *)$ типа $(2, 2, 2)$.

Псевдодополнением элемента a в решетке с нулем называется относительное псевдодополнение $a * 0$, обозначаемое символом a^*. *Решетка с псевдодополнениями* — это такая решетка с 0, каждый элемент которой имеет псевдодополнение. Например, каждая псевдобулева решетка будет решеткой с псевдодополнениями. В любой дистрибутивной решетке с псевдодополнениями выполняются тождества $(x+y)^* = x^*y^*$ и $(xy)^{**} = x^{**}y^{**}$, $x^{***} = x^*$, $x \leqslant x^{**}$.

Пусть L — произвольная решетка с псевдодополнениями. Тогда ее подмножество $S(L) = \{a^* \mid a \in L\}$ является булевой решеткой относительно частичного порядка, индуцированного частичным порядком решетки L, причем точная нижняя грань элементов a, $b \in S(L)$ совпадает с их точной нижней гранью в L, а точная верхняя грань для $a, b \in S(L)$ есть $(a+b)^{**}$. Нулем этой булевой решетки будет нуль 0 решетки L, единицей — элемент 0^*, а дополнением для a^* служит элемент a^{**}. Отображение $x \mapsto x^{**}$ является наложением решетки L на булеву решетку $S(L)$ (*теорема Гливенко*). О решетках с относительными псевдодополнениями см. [2], § II. 11, V. 10; [8], § II. 6; [20]; [42], § IV. 1.

Дистрибутивной p-алгеброй называется дистрибутивная решетка с псевдодополнениями, рассматриваемая в сигнатуре $(+, \cdot, *, 0, 1)$ типа $(2, 2, 1, 0, 0)$. Дистрибутивные p-алгебры образуют эквациональный класс (многообразие). Его собственные подмногообразия составляют цепь, упорядоченную по типу натурального ряда, атомом которой является многообразие булевых алгебр. Дистрибутивная p-алгебра тогда и только тогда будет булевой алгеброй, когда 1 является ее единственным элементом с псевдодополнением, равным 0 (такие элементы называются *плотными*). Произвольная дистрибутивная p-алгебра обладает свойством продолжаемости конгруэнций, т. е. любая конгруэнция ее подалгебры является следом на этой подалгебре подходящей конгруэнции всей алгебры.

Дистрибутивная p-алгебра будет, по определению, *стоуновой алгеброй*, если в ней выполняется тождество $x^* + x^{**} = 1$. Следующие условия равносильны для любой дистрибутивной p-алгебры L: (1) L — стоунова алгебра; (2) в L выполняется тождество $(x+y)^{**}=x^{**}+y^{**}$; (3) в L выполняется тождество $(xy)^*=x^*+y^*$; (4) $P+Q=L$ для любых двух различных минимальных простых идеалов P и Q решетки L; (5) каждый простой идеал решетки L содержит в точности один минимальный простой идеал; (6) множество $S(L)=\{a^* \mid a \in L\}$ является подалгеброй в L; (7) L вкладывается в дистрибутивную p-алгебру всех идеалов решетки $P(X)$ всех подмножеств подходящего множества X.

Множество плотных элементов $D(L)$ стоуновой алгебры L замкнуто относительно пересечения и вместе с каждым a содержит все элементы верхнего конуса $a^{\Delta} \subseteq L$. В частности, $1 \in D(L)$. Таким образом, $D(L)$ является дистрибутивной решеткой с единицей. Из тождества $x=x^{**}(x+x^*)$, истинного в любой стоуновой алгебре L, следует, что каждый элемент $a \in L$ представим в виде $a=bc$, где $b \in S(L)$, $c \in D(L)$. Если $D(L)$ и $S(L)$ — полные решетки, то полной решеткой будет и L.

Подпрямо неразложимыми стоуновыми алгебрами являются только двухэлементные и трехэлементные цепи. Поэтому всякая стоунова алгебра изоморфна подпрямому произведению двухэлементных и трехэлементных цепей. Конечная дистрибутивная решетка тогда и только тогда будет стоуновой алгеброй, когда она изоморфна прямому произведению (конечных) дистрибутивных решеток, каждая из которых имеет единственный атом.

Стоуновы алгебры образуют многообразие (эквациональный класс), единственным собственным подмногообразием которого является многообразие булевых алгебр.

О дистрибутивных p-алгебрах и стоуновых алгебрах см. [8], § II.6.

§ 4. Булевы алгебры

4.1. Общие определения и решеточные свойства. *Булевой решеткой* называется дистрибутивная решетка с дополнениями, т. е. дистрибутивная решетка с 0 и 1, в которой каждый элемент имеет дополнение. Очевидным примером является решетка всех подмножеств непустого множества с теоретико-множественными операциями объединения и пересечения. Предполагается, что в булевой решетке имеется по крайней мере два элемента: 0 и 1. Иногда рассматривается и одноэлементная булева решетка. Ее называют *вырожденной*. Всякая дистрибутивная решетка вкладывается в некоторую булеву решетку, например, в булеву решетку всех подмножеств подходящего множества.

В булевой решетке B каждый элемент x имеет в точности одно дополнение, которое обозначается символом x'. Соответствие $x \mapsto x'$ можно считать унарной операцией на B. Булева решетка, рассматриваемая как универсальная алгебра сигнатуры $(+, \cdot, ', 0, 1)$ типа $(2, 2, 1, 0, 0)$, называется *булевой алгеброй*. Понятия изоморфизма, подалгебры, гомоморфизма, конгруэнции, факторалгебры, прямого и подпрямого произведений для булевых алгебр имеют обычный алгебраический смысл (подробнее см. в соответствующих разделах).

Примеры. 1) Булева алгебра $(P(X), \cup, \cap, ', \varnothing, X)$ всех подмножеств произвольного непустого множества X с теоретико-множественными операциями объединения, пересечения и дополнения, с двумя выделенными подмножествами: пустым и самим множеством X. 2) Пусть X — произвольное непустое множество. Булеву алгебру — как и в первом примере, относительно теоретико-множественных операций — образуют конечные подмножества и дополнения конечных подмножеств множества X. Можно взять также, например, не более чем счетные подмножества и дополнения не более чем счетных подмножеств множества X (имеющего соответствующую мощность). Аналогичные построения приводят к булевой алгебре для любого фиксированного кардинального числа. 3) Булева алгебра открыто-замкнутых (т. е. одновременно открытых и замкнутых) подмножеств топологического пространства. 4) Открытое подмножество A непустого топологического пространства X называется *регулярным*, если $A^{\perp\perp} = A$, где $A^{\perp} = A^{-\prime}$ (дополнение замыкания). Регулярные открытые множества образуют булеву алгебру относительно теоретико-множественного пересечения, объединения $A + B = (A \cup B)^{\perp\perp}$ и дополнения $A' = A^{\perp}$. 5) Двоичная булева алгебра логики — двухэлементное множество $\{0, 1\}$ с операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. 6) Пусть $\mathscr{F}$ — множество всех формул некоторой формальной теории, основанной на двузначной логике. Будем отождествлять в $\mathscr{F}$ две формулы F_1 и F_2, если они равносильны в том смысле, что формула $F_1 \Leftrightarrow F_2$ является теоремой данной теории. Тогда $\mathscr{F}$ становится булевой алгеброй относительно операций, определяемых логическими связками дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Это так называемая *алгебра Линденбаума* для рассматриваемой формальной теории. 7) Случайные события, связанные с некоторым экспериментом, образуют булеву алгебру относительно операций сложения $A+B$ (наступление хотя бы одного из данных событий A, B), умножения AB (одновременное появление A и B), перехода $A \longmapsto \overline{A}$ к противоположному событию (наступающему в точности при непоявлении данного события). Кроме того, фиксируются невозможное (никогда не наступающее) событие $\varnothing$ и достоверное (всегда наступающее при проведении данного эксперимента) событие Ω. При этом отождествляются события, эквивалентные в том смысле, что появление одного из них влечет появление другого.

Непустая совокупность подмножеств некоторого множества X называется *алгеброй* (или *полем*) *множеств*, если она замкнута относительно теоретико-множественных операций объединения, пересечения и дополнения. Всякая алгебра множеств содержит базисное множество X и пустое подмножество $\varnothing$ и является булевой алгеброй.

Из приведенных примеров булевых алгебр алгебрами множеств будут первые три. Булева алгебра регулярных открытых подмножеств топологического пространства (пример 4)) не будет алгеброй множеств, так как операция объединения в ней не является теоретико-множественной (и дополнение тоже). Алгебру множеств образуют измеримые по Лебегу подмножества числовой прямой. Еще один пример — совокупность всех борелевских подмножеств произвольного топологического пространства.

Булева алгебра может быть определена следующей системой тождеств.

I. $x+x=x$, $xx=x$ (идемпотентность);

II. $x+y=y+x$, $xy=yx$ (коммутативность);

III. $x+(y+z)=(x+y)+z$, $x(yz)=(xy)z$ (ассоциативность);

IV. $x+xy=x$, $x(x+y)=x$ (поглощение);

V. $x(y+z)=xy+xz$, $x+yz=(x+y)(x+z)$ (дистрибутивность);

VI. $x+0=x$, $x\cdot 1=x$;

VII. $x+x'=1$, $x\cdot x'=0$.

Таким образом, булевы алгебры образуют эквациональный класс (многообразие) алгебр в вышеуказанной сигнатуре. Следовательно, любая подалгебра и любой гомоморфный образ булевой алгебры будут снова булевыми алгебрами, так же, как и прямое произведение любого семейства булевых алгебр. Многообразие булевых алгебр не имеет собственных нетривиальных подмногообразий. Приведенная система аксиом избыточна: можно ограничиться, например, тождествами II, V—VII. Если в выписанных тождествах взаимно заменить символы $+$ и $\cdot$, а также 0 и 1, то получится то же самое множество тождеств. На этом основан *принцип двойственности для булевых алгебр*: если в классе булевых алгебр доказана истинность некоторого утверждения, то истинным будет и двойственное утверждение, т. е. то, которое получается из данного взаимной заменой символов $+$ и $\cdot$, а также 0 и 1. Единственная известная неизбыточная (независимая) самодвойственная система аксиом для булевых алгебр состоит из тождеств $(x+y)y = y$, $x(y+z) = yx + zx$, $xx' = 0$ и им двойственных. (Padmanabhan R.//Notices AMS. — 1974. — V. 21. — P. A — 368).

Следующие получаемые из аксиом соотношения особенно часто используются в булевых вычислениях:

1) $(x')' = x$ (*инволютивность дополнения*);

2) $(xy)' = x' + y'$, $(x+y)' = x'y'$ (*законы де Моргана*);

3) $x \leqslant y \Rightarrow x' \geqslant y'$ (*антиизотонность дополнения*);

4) $x \leqslant y \Leftrightarrow xy' = 0$, $x \leqslant y \Leftrightarrow x' + y = 1$.

В булевой алгебре вводятся некоторые добавочные операции, производные от основных. Важнейшими из них являются: *вычитание* $a \setminus b \underset{\text{def}}{=} ab'$, *симметрическая разность* $a \oplus b \underset{\text{def}}{=} (a \setminus b) + (b \setminus a)$, *импликация* $a \to b \underset{\text{def}}{=} a' + b$, *эквивалентность* $a \leftrightarrow b \underset{\text{def}}{=} (a \to b)(b \to a)$, *штрих Шеффера* $a \mid b \underset{\text{def}}{=} a'b'$.

Каждая булева алгебра B обладает относительными дополнениями: если в ней $a < b$ и $a \leqslant x \leqslant b$, то *относительным дополнением* для x в интервале $[a, b]$ будет элемент $\bar{x} = a + bx'$ (т. е. $x\bar{x} = a$ и $x + \bar{x} = b$). При этом алгебра $([a, b], +, \cdot, ^-, a, b)$ будет булевой алгеброй (но, вообще говоря, не подалгеброй исходной булевой алгебры B: унарная и обе нульарные операции у нее другие).

Пусть α — бесконечное кардинальное число. Булева алгебра B называется *α-полной*, если каждое ее подмножество мощности, не превосходящей α, имеет точную верхнюю грань и точную нижнюю грань. Булева алгебра, α-полная для каждого кардинального числа α, называется *полной*. Счетно-полная булева алгебра называется также *σ-полной* или *σ-алгеброй*. Примером α-полной булевой алгебры может служить булева алгебра подмножеств мощности, не превосходящей α, и дополнений таких подмножеств в бесконечном множестве X. Полной булевой алгеброй будет алгебра всех подмножеств произвольного множества, а также булева алгебра регулярных открытых подмножеств топологического пространства $\Bigl($в ней $\sum_{i \in I} A_i = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\perp\perp}$ и $\prod_{i \in I} A_i = \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\perp\perp}$ для любого семейства $\{A_i \mid i \in I\}\Bigr)$. Измеримые по Лебегу подмножества числовой прямой, а также борелевские подмножества любого топологического пространства дают примеры σ-алгебр множеств. Каждая бесконечная σ-алгебра несчетна (см. [12], с. 108).

Алгебра множеств называется *α-полной*, если она замкнута относительно теоретико-множественных объединений (а значит, и пересечений) семейств мощности, не превосходящей α. Алгебра множеств, α-полная для каждого кардинального числа α, называется *полной*. Заметим, что α-полная алгебра множеств будет α-полной булевой алгеброй, но алгебра множеств может быть α-полной булевой алгеброй, не будучи α-полной как алгебра множеств: точная верхняя [точная нижняя] грань бесконечной совокупности в общем случае не обязана совпадать с теоретико-множественным объединением [пересечением] подмножеств, являющихся элементами этой совокупности. Такое совпадение, однако, имеет место в любой алгебре множеств, содержащей все одноэлементные подмножества соответствующего базисного пространства (см. [12], с. 93).

В любой булевой алгебре выполняются *обобщенные законы де Моргана*:

$$\left(\sum_{i \in I} x_i\right)' = \prod_{i \in I} x_i', \quad \left(\prod_{i \in I} x_i\right)' = \sum_{i \in I} x_i',$$

причем обе части каждого равенства определены или не определены одновременно. Отсюда следует, что если в булевой алгебре каждое непустое подмножество мощности, не превосходящей α, имеет точную верхнюю грань, то эта булева алгебра α-полна. По принципу двойственности критерием α-полноты булевой алгебры является также существование точной нижней грани у каждого ее непустого подмножества мощности, не превосходящей α.

В любой булевой алгебре выполняются взаимно двойственные *законы бесконечной дистрибутивности*

$$x \sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x x_i, \quad x + \prod_{i \in I} x_i = \prod_{i \in I} (x + x_i),$$

причем обе части каждого равенства определены или не определены одновременно. Полная решетка L тогда и только тогда допускает полное, т. е. сохраняющее все имеющиеся точные грани вложение в полную булеву решетку, когда L бесконечно дистрибутивна, т. е. в ней выполнены указанные законы.

Полная булева алгебра называется *вполне дистрибутивной*, если в ней выполняется закон полной дистрибутивности (см. п. 3.3). Полная булева алгебра тогда и только тогда вполне дистрибутивна, когда она изоморфна алгебре всех подмножеств подходящего множества.

Элемент a булевой алгебры B называется *атомом*, если для любого $x \in B$ из $0 < x \leqslant a$ следует, что $x = a$ (т. е. если a *покрывает* наименьший элемент 0). Булева алгебра, в которой каждый ненулевой элемент содержит некоторый атом, называется *атомной* (или *дискретной*). Если в булевой алгебре нет ни одного атома, ее называют *безатомной* (или *непрерывной*). Атомной будет, например, алгебра всех подмножеств непустого множества: ее атомами являются одноэлементные подмножества. Примером безатомной булевой алгебры может служить полная булева алгебра регулярных открытых подмножеств отрезка [0, 1] числовой прямой.

Булева алгебра тогда и только тогда будет атомной, когда наибольший ее элемент 1 представляет собой точную верхнюю грань множества всех атомов. В атомной булевой алгебре каждый элемент является объединением всех содержащихся в нем атомов.

Булева алгебра тогда и только тогда изоморфна алгебре всех подмножеств некоторого непустого множества, когда она полная и атомная. Таким образом, с точностью до изоморфизма полные атомные булевы алгебры исчерпываются алгебрами всех подмножеств непустых множеств. В частности, конечная булева алгебра с n атомами изоморфна алгебре всех подмножеств n-элементного множества и, следовательно, имеет 2^n элементов. Полная алгебра множеств всегда будет атомной и, значит, изоморфной алгебре всех подмножеств некоторого (не обязательно своего базисного) множества.

Всякая полная не атомная булева алгебра разлагается в прямое произведение полной атомной и полной безатомной булевых алгебр (первая называется иногда ее *дискретной*, а вторая — *непрерывной компонентами*).

Булева алгебра B называется *сверхатомной*, если каждый ее гомоморфный образ — атомная булева алгебра. Это равносильно тому, что каждая подалгебра в B является атомной. Таковы, например, все конечные булевы алгебры. Существует сверхатомная несчетная булева алгебра со счетным множеством атомов. Никакая бесконечная сверхатомная булева алгебра не является σ-полной (см. [12], с. 58, 146).

Каждая счетная безатомная булева алгебра изоморфна алгебре всех открыто-замкнутых подмножеств счетного канторова дисконтинуума (для бесконечного кардинального числа α канторов α-дисконтинуум D_α — это произведение α экземпляров дискретного двухточечного топологического пространства. Счетный канторов дисконтинуум гомеоморфен канторову совершенному множеству действительных чисел).

Два элемента a, b булевой алгебры B, по определению, *ортогональны* (или *дизъюнктны*), если $ab = 0$. Например, каждый элемент в B ортогонален своему дополнению. *Ортогональная система* — это подмножество в B, элементы которого попарно ортогональны. Ортогональная система $\{a_i \mid i \in I\}$ называется *полной* (или *разбиением единицы* 1), если $\sum_{i \in I} a_i = 1$. Каждая ортогональная система булевой алгебры содержится в некоторой полной ортогональной системе: если ортогональная система $\{a_i \mid i \in I\}$ неполна, к ней нужно добавить элемент $\left(\sum_{i \in I} a_i\right)'$. Во всякой бесконечной булевой алгебре имеются счетные ортогональные системы. В булевой алгебре, удовлетворяющей условию обрыва возрастающих цепей (или условию обрыва убывающих цепей), нет бесконечных ортогональных систем и, следовательно, такая булева алгебра конечна.

Булева алгебра, в которой каждая ортогональная система мощности, не превосходящей α, имеет точную верхнюю грань, α-полна. Следовательно, булева алгебра, в которой каждая ортогональная система имеет точную верхнюю грань, полна (см. [12], с. 111).

В полной булевой алгебре B для любого подмножества $\{b_i \mid i \in I\}$ существует ортогональная система $\{a_i \mid i \in I\}$ такая, что: 1) $a_i \leqslant b_i$ для всякого $i \in I$, 2) $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} b_i$. Если вполне упорядочить множество I, то такую ортогональную систему образуют элементы $a_i = b_i \left(\sum_{j<i} b_j \right)'$, $i \in I$.

Говорят, что в булевой алгебре B выполняется *σ-цепное условие*, если мощность каждой ортогональной системы в B не более чем счетна. В σ-алгебре B это условие равносильно тому, что всякое вполне упорядоченное подмножество в B не более чем счетно. Булева σ-алгебра, в которой выполняется σ-цепное условие, полна. Среди булевых алгебр, удовлетворяющих σ-цепному условию, отметим булеву алгебру регулярных открытых множеств топологического пространства, алгебру открыто-замкнутых подмножеств любого канторова дисконтинуума, алгебру всех подмножеств счетного множества.

4.2. Алгебраические конструкции. *Подалгеброй булевой алгебры* называется ее подмножество, замкнутое относительно всех сигнатурных операций. В частности, всякая подалгебра булевой алгебры содержит элементы 0 и 1. Непустое подмножество булевой алгебры будет ее подалгеброй уже тогда, когда оно замкнуто относительно операций объединения и дополнения (или пересечения и дополнения).

Совокупность $\operatorname{Sub} B$ всех подалгебр булевой алгебры B, упорядоченная теоретико-множественным включением, образует полную решетку, наименьшим элементом которой является двухэлементная подалгебра $\{0, 1\}$ (*тривиальная подалгебра*), а наибольшим — сама B (*несобственная подалгебра*). Решетка $\operatorname{Sub} B$ для конечной булевой алгебры B с 2^n элементами дуально изоморфна решетке всех разбиений n-элементного множества. Две булевы алгебры, имеющие изоморфные решетки подалгебр, сами изоморфны. Всякая конечная подалгебра произвольной булевой алгебры B имеет дополнение в решетке $\mathrm{Sub}\,B$. Для счетной булевой алгебры B решетка $\mathrm{Sub}\,B$ будет решеткой с дополнениями (см. [18], с. 10—11).

Пересечение всех подалгебр, содержащих подмножество X булевой алгебры B, является подалгеброй. Это *подалгебра, порожденная подмножеством* X. Например, пустое подмножество порождает двухэлементную подалгебру, а подалгебра, порожденная одним элементом $a \notin \{0, 1\}$, состоит из четырех элементов 0, 1, a и a'. Элементы множества X, порождающего подалгебру A, называются *порождающими* этой подалгебры. Подалгебра, порожденная подмножеством X, состоит из элементов вида $a = \sum_{i=1}^{n(a)} \prod_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ $\left(\text{или } a = \prod_{i=1}^{n(a)} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}\right)$, где каждый x_{ij} является либо элементом подмножества X, либо дополнением элемента из X. Если X имеет n элементов, то порожденная этим подмножеством подалгебра содержит самое большее 2^{2^n} элементов. Таким образом, подалгебра булевой алгебры, порожденная конечным числом элементов, всегда конечна.

Пусть α — некоторое кардинальное число. Подалгебра A булевой алгебры B называется *α-полной* (или *α-правильной*), если вычисленная в B точная верхняя грань каждого подмножества из A, имеющего мощность, не превосходящую α, принадлежит подалгебре A. При этом и все имеющиеся в B точные нижние грани подмножеств указанного вида из A также лежат в A. Подалгебра A булевой алгебры B называется ее *полной подалгеброй*, если A является α-полной подалгеброй в B для любого кардинального числа α. Понятно, что α-подалгебра α-полной булевой алгебры α-полна. В частности, полная подалгебра полной булевой алгебры сама будет полной булевой алгеброй.

Подалгебра A булевой алгебры B называется *плотной* в B, если для любого ненулевого элемента x из B найдется ненулевой элемент y в A такой, что $y \leqslant x$. Если A — плотная подалгебра в B, то каждый элемент из B является точной верхней гранью всех элементов из A, которые он содержит.

Гомоморфизм булевых алгебр или *булев гомоморфизм* — это отображение одной булевой алгебры в другую, сохраняющее все пять булевых операций. В частности, при любом булевом гомоморфизме φ обязательно $\varphi(0)=0$ и $\varphi(1)=1$. Гомоморфизмом булевой алгебры A в булеву алгебру B будет уже отображение $\varphi\colon A\to B$, сохраняющее две операции: объединение и дополнение (или пересечение и дополнение), т. е. если $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(x')=[\varphi(x)]'$(или $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ и $\varphi(x')=[\varphi(x)]')$.

Для булевых гомоморфизмов, разумеется, имеют место обычные алгебраические свойства. Так, если $\varphi\colon B\to C$ — гомоморфизм булевой алгебры B в булеву алгебру C, то образ $\varphi(A)$ всякой подалгебры A из B будет подалгеброй в C, а полный прообраз $\varphi^{-1}(D)$ каждой подалгебры D из C есть подалгебра в B. Полный прообраз нуля $\varphi^{-1}(0)$ называется *ядром булева гомоморфизма* φ.

Для любого элемента a булевой алгебры B, отличного от 1, существует гомоморфизм $\varphi\colon B\to\{0,1\}$ (*двузначный гомоморфизм*) такой, что $\varphi(a)=0$. Двойственно, для любого ненулевого элемента $a\in B$ существует двузначный гомоморфизм, переводящий a в 1.

Гомоморфизмы булевой алгебры в себя называются ее *эндоморфизмами*. Эндоморфизмы булевой алгебры B образуют моноид $\operatorname{End}B$, нейтральным элементом которого является тождественное преобразование множества B. Булевы алгебры с изоморфными моноидами эндоморфизмов изоморфны (см. [16], с. 38).

Булев гомоморфизм φ взаимно однозначен (и в этом случае он называется *булевым вложением*) тогда и только тогда, когда он взаимно однозначен в нуле (или в единице), т. е. когда единственным прообразом нуля [единицы] при отображении φ является нуль [единица]. Взаимно однозначный сюръективный булев гомоморфизм называется *булевым изоморфизмом*. Всякий решеточный изоморфизм одной булевой алгебры на другую (т. е. изоморфизм относительно операций объединения и пересечения) будет булевым изоморфизмом.

Типом изоморфности данной булевой алгебры называется совокупность всех изоморфных ей булевых алгебр. Имеется континуум различных типов изоморфности счетных булевых алгебр (см. [12], с. 44).

Изоморфизм булевой алгебры на себя называется ее *автоморфизмом*. Автоморфизмы булевой алгебры B образуют группу $\operatorname{Aut} B$. Группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} B$ конечной булевой алгебры B, имеющей 2^n элементов, изоморфна симметрической группе на n-элементном множестве. Существуют неизоморфные счетные булевы алгебры с изоморфными группами автоморфизмов ([18], с. 11). Булева алгебра B называется *жесткой*, если она не имеет нетождественных автоморфизмов, т. е. если группа $\operatorname{Aut} B$ одноэлементна. Из конечных булевых алгебр жесткими являются только двухэлементные. Однако для любого бесконечного несчетного кардинального числа α существуют жесткие булевы алгебры мощности α. Всякая булева алгебра может быть вложена в σ-полную жесткую булеву алгебру. Неизвестно, существует ли полная жесткая булева алгебра (см. [18], с. 11, 15).

Пусть X — множество порождающих булевой алгебры A и φ — отображение множества X в булеву алгебру B. Отображение φ тогда и только тогда можно продолжить до булева гомоморфизма из A в B, когда для любого конечного набора $x_1, x_2, \ldots, x_m$ элементов из X или дополнений элементов из X, удовлетворяющего условию $x_1x_2 \ldots x_m = 0$, имеет место равенство $\varphi(x_1)\varphi(x_2) \ldots \varphi(x_m) = 0$. Если φ взаимно однозначно отображает множество X порождающих булевой алгебры A на некоторое множество Y, порождающее булеву алгебру B, то φ можно продолжить до изоморфизма булевой алгебры A на B тогда и только тогда, когда в вышеуказанных обозначениях

$$x_1x_2 \ldots x_m = 0 \Leftrightarrow \varphi(x_1)\varphi(x_2) \ldots \varphi(x_m) = 0.$$

Если A — подалгебра булевой алгебры B и C — полная булева алгебра, то каждый гомоморфизм из A в C можно продолжить до гомоморфизма всей B в C. Если A — плотная подалгебра в B, то каждое булево вложение $\varphi\colon A \to C$ можно продолжить до булева вложения всей B в C. Пусть A и B — полные булевы алгебры, φ — изоморфизм некоторой подалгебры из A на некоторую плотную в B подалгебру.

Тогда всякий булев гомоморфизм из A в B, продолжающий φ, сюръективен (т. е. отображает A на всю B).

Пусть B — некоторая булева алгебра. Ее *конгруэнцией* называется всякое отношение эквивалентности θ на множестве B, согласованное с булевыми операциями: если $(a, b) \in \theta$, то 1) $(a', b') \in \theta$, и 2) если еще $(c, d) \in \theta$, то $(a + c, b + d) \in \theta$ и $(ac, bd) \in \theta$. Условие 2) можно заменить более слабым: 2′) $(a + x, b + x) \in \theta$ для любого $x \in B$ (или $(ax, bx) \in \theta$ для любого $x \in B$). Конгруэнции булевой алгебры B образуют полную дистрибутивную решетку $\operatorname{Con} B$. Ее наименьшим элементом является *тождественная конгруэнция* Δ, а наибольшим — декартов квадрат $B \times B$ (*несобственная конгруэнция*).

Пусть θ — собственная конгруэнция на булевой алгебре B. В фактормножестве B/θ (элементами которого являются классы $[x]$ конгруэнции θ) вводятся операции объединения, пересечения и дополнения по формулам

$$[x] + [y] = [x + y], \quad [x][y] = [xy], \quad [x]' = [x'].$$

Фиксируя еще классы $\mathbf{0} = [0]$ и $\mathbf{1} = [1]$, получаем булеву алгебру $(B/\theta, +, \cdot, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$, которая называется *факторалгеброй* булевой алгебры B по конгруэнции θ. Отображение $B \to B/\theta$: $x \longmapsto [x]$, сопоставляющее каждому элементу $x \in B$ содержащий его θ-класс, является гомоморфизмом (*естественный гомоморфизм*) булевой алгебры B на факторалгебру B/θ. С другой стороны, если φ — гомоморфизм булевой алгебры B на булеву алгебру C, то C изоморфна факторалгебре $B/\operatorname{Ker} \varphi$, где конгруэнция $\operatorname{Ker} \varphi$ (*ядерная конгруэнция гомоморфизма* φ) определяется условием

$$(x, y) \in \operatorname{Ker} \varphi \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \varphi(x) = \varphi(y).$$

Пусть $\{B_i \mid i \in I\}$ — семейство булевых алгебр. Декартово произведение множеств B_i (т. е. совокупность всех таких отображений a: $I \to \bigcup\limits_{i \in I} B_i$, что $a(i) \in B_i$) можно превратить в булеву алгебру, определив операции покомпонентно:

$$(a+b)(i)=a(i)+b(i),$$
$$(ab)(i)=a(i)\,b(i),$$
$$a'(i)=[a(i)]'$$

и в качестве нуля [единицы] взяв отображение, значениями которого являются нули [единицы] соответствующих булевых алгебр. Полученная булева алгебра называется *прямым произведением булевых алгебр* B_i и обозначается через $\prod_{i\in I} B_i$, а при $I=\{1, 2, \ldots, n\}$ — через $B_1\times B_2\times \ldots \times B_n$. Прямое произведение [$\alpha$-]полных булевых алгебр является [α-]полной булевой алгеброй.

Булева алгебра B изоморфна прямому произведению (или еще говорят — *разлагается в прямое произведение*) булевых алгебр $B_1, B_2, \ldots, B_n$ тогда и только тогда, когда в B существует полная ортогональная система $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ такая, что интервал $[0, a_i]$ изоморфен булевой алгебре B_i для каждого $i=1, 2, \ldots, n$. При этом если h_i: $[0, a_i]\to B_i$ — указанный изоморфизм, то отображение h: $B\to B_1\times B_2\times \ldots \times B_n$, $x\mapsto h_i(a_ix)$, $i=1, 2, \ldots, n$, будет искомым булевым изоморфизмом. Точно так же обстоит дело с разложением полной булевой алгебры B в прямое произведение полных булевых алгебр B_i, $i\in I$.

Существует булева алгебра B, изоморфная прямому произведению $B\times\{0, 1\}\times\{0, 1\}$, но не изоморфная своему удвоению $B\times\{0, 1\}$, и существует счетная булева алгебра B, изоморфная своему прямому кубу $B\times B\times B$, но не изоморфная прямому квадрату $B\times B$ (см. [31], § 28, [16], с. 20).

Отображение π_i: $\prod_{i\in I} B_i\to B_i$, ставящее в соответствие каждому элементу a прямого произведения элемент $a(i)$ булевой алгебры B_i, является булевым гомоморфизмом, который называется *естественной проекцией*. Подалгебра A прямого произведения $\prod_{i\in I} B_i$ называется *подпрямым произведением* булевых алгебр B_i, если $\pi_i(A)=B_i$ для каждого $i\in I$. Говорят, что булева алгебра A представлена в виде подпрямого произведения булевых алгебр B_i, $i\in I$, или что A является подпрямым произведением булевых алгебр B_i, если она изоморфна некоторому подпрямому произведению этих булевых алгебр. Булева алгебра, по определению, *подпрямо неразложима*, если ее нельзя представить в виде подпрямого произведения не изоморфных ей булевых алгебр. Единственной (с точностью до изоморфизма) подпрямо неразложимой булевой алгеброй будет двухэлементная. Всякая булева алгебра является подпрямым произведением двухэлементных булевых алгебр.

4.3. Идеалы и фильтры. *Идеалом* булевой алгебры B называется ее подмножество J, которое 1) включает в себя нуль, 2) замкнуто относительно объединения, 3) вместе с каждым своим элементом a содержит все элементы из B, содержащиеся в a. Последнее условие часто заменяют следующим, равносильным ему: 3′) если $a \in J$ и $x \in B$, то $ax \in J$. Например, нижний конус a^{∇} любого элемента $a \in B$ является идеалом. Это — *главный идеал*, порожденный элементом a. Все идеалы булевой алгебры B будут главными тогда и только тогда, когда B конечна. Пример неглавного идеала — совокупность всех конечных подмножеств бесконечного множества X, рассматриваемая в алгебре всех подмножеств этого множества. Идеал в булевой алгебре всех борелевских подмножеств числовой прямой образуют борелевские подмножества лебеговой меры нуль.

Сама булева алгебра является своим идеалом — это ее *несобственный идеал*. Все остальные идеалы называются *собственными*. Идеал будет собственным тогда и только тогда, когда он не содержит элемента 1.

Идеалы булевой алгебры находятся во взаимно однозначном соответствии с ее конгруэнциями. Именно, если θ — конгруэнция на булевой алгебре B, то класс $J_\theta = [0]$, содержащий элемент 0, является идеалом в B, причем выполняется соотношение

$$(a,\ b) \in \theta \Leftrightarrow (\exists x \in J_\theta)(a + x = b + x).$$

Обратно, если J — какой-либо идеал в B, то отношение θ_J на B, определенное условием

$$(a,\ b) \in \theta_J \Leftrightarrow (\exists x \in J)(a + x = b + x),$$

будет конгруэнцией, причем $[0] = J$. Если θ — конгруэнция булевой алгебры B, то факторалгебра B/θ обычно обозначается через B/J, где J — идеал, соответствующий в вышеуказанном смысле конгруэнции θ.

Ядро всякого булева гомоморфизма является собственным идеалом, и, с другой стороны, каждый собственный идеал J булевой алгебры B представляет собой ядро некоторого ее гомоморфизма (например, естественного гомоморфизма алгебры B на фактор-алгебру B/J). Если φ — гомоморфизм булевой алгебры B на булеву алгебру C, то C изоморфна факторалгебре $B/\varphi^{-1}(0)$.

Факторалгебра B/a^{∇} изоморфна булевой алгебре $[0, a']$, где a' — дополнение элемента a в B. Фактор-алгебра алгебры $P(X)$ всех подмножеств бесконечного множества X по идеалу конечных подмножеств дает пример безатомной булевой алгебры.

Идеалы булевой алгебры B образуют относительно теоретико-множественного включения полную дистрибутивную решетку, изоморфную решетке $\operatorname{Con} B$ конгруэнций на B. Наименьшим элементом решетки идеалов является нулевой идеал $0^{\nabla} = \{0\}$, а наибольшим — несобственный идеал, т. е. сама B. При этом для идеалов J_1, J_2 будет

$$J_1 + J_2 = \{x \in B \mid (\exists a \in J_1,\ b \in J_2)(x \leqslant a + b)\},$$
$$J_1 J_2 = J_1 \cap J_2.$$

Отображение булевой решетки B в решетку ее идеалов, сопоставляющее каждому $a \in B$ главный идеал a^{∇}, является решеточным вложением. Булева алгебра называется *простой*, если у нее нет собственных ненулевых идеалов. Простая булева алгебра тривиальна, т. е. содержит только два элемента.

Пусть X — подмножество булевой алгебры B. Наименьший из идеалов, содержащих это подмножество (т. е. пересечение всех содержащих X идеалов), называется *идеалом, порожденным подмножеством* X, и обозначается через $J(X)$. При этом

$$J(X) = \{x \in B \mid (\exists a_1, a_2, \ldots, a_n \in X)(x \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\} \cup \{0\}.$$

В частности, идеал, порожденный конечным набором элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, есть не что иное как главный идеал, порожденный объединением $\sum_{i=1}^{n} a_i$ этих элементов.

Максимальный идеал булевой алгебры B — это собственный ее идеал, не содержащийся в других собственных идеалах. Идеал $J \subseteq B$ максимален тогда и только тогда, когда для любого $a \in B$ в точности один из элементов a, a' входит в J. Другое условие, равносильное максимальности идеала J булевой алгебры B, — факторалгебра B/J двухэлементна (иначе говоря, максимальные идеалы булевой алгебры — это прообразы нуля при ее двузначных гомоморфизмах). Главный идеал a^{∇} максимален тогда и только тогда, когда элемент a оказывается коатомом булевой алгебры B или, что равносильно, элемент a' является ее атомом. Пример максимального неглавного идеала — совокупность всех конечных подмножеств в алгебре конечных подмножеств и дополнений конечных подмножеств бесконечного множества.

Максимальный идеал содержит все атомы булевой алгебры, кроме, быть может, одного. Если булева алгебра B бесконечна, то мощность множества ее максимальных идеалов не меньше мощности множества B (см. [8], с. 141).

Собственный идеал J булевой алгебры B называется *простым*, если для любых a, $b \in B$ из условия $ab \in J$ следует, что $a \in J$ или $b \in J$. В булевой алгебре простыми идеалами являются максимальные идеалы, и только они. Более того, дистрибутивная решетка тогда и только тогда будет булевой, когда в ней все простые идеалы максимальны.

Каждый собственный идеал булевой алгебры содержится в некотором ее максимальном идеале и совпадает с пересечением всех содержащих его максимальных идеалов. Максимальный идеал, включающий в себя пересечение каких-то двух идеалов, включает в себя по крайней мере один из этих идеалов.

Если J — идеал булевой алгебры B и $a \notin J$, то существует максимальный идеал M в B такой, что $J \subseteq M$ и $a \notin M$. В частности, для любого ненулевого элемента $a \in B$ найдется максимальный идеал, не содержащий a.

Если M — максимальный идеал булевой алгебры B и C — любая ее подалгебра, то $N = M \cap C$ — максимальный идеал алгебры C и всякий максимальный идеал алгебры C представляется в виде такого пересечения.

Фильтром булевой алгебры B называется ее подмножество F, которое: 1) включает в себя единицу, 2) замкнуто относительно пересечения, 3) вместе с каждым своим элементом a содержит все элементы из B, содержащие a. Последнее условие часто заменяют следующим, равносильным ему: 3′) если $a \in F$ и $x \in B$, то $a + x \in F$. Например, верхний конус a^Δ любого элемента $a \in B$ является фильтром. Это — *главный фильтр*, порожденный элементом a. Все фильтры булевой алгебры B являются главными тогда и только тогда, когда B конечна. Неглавный фильтр в алгебре всех подмножеств бесконечного множества X образуют дополнения конечных подмножеств (*фильтр Фреше* на X).

Если J — идеал булевой алгебры B, то ее подмножество J', состоящее из дополнений элементов идеала J, будет фильтром в B, который называется *присоединенным к идеалу* J. Наоборот, подмножество $F' \subseteq B$, элементами которого являются дополнения элементов фильтра F, представляет собой *идеал* в B, *присоединенный к фильтру* F.

Фильтры булевой алгебры B образуют полную дистрибутивную решетку, изоморфную решетке идеалов (и, значит, решетке конгруэнций) этой булевой алгебры. Наименьшим элементом решетки фильтров является *единичный* фильтр $1^\Delta = \{1\}$, а наибольшим — сама B. При этом для фильтров $F_1, F_2 \subseteq B$ имеем:

$$F_1 + F_2 = \{x \in B \mid (\exists a \in F_1,\ b \in F_2)(x \geqslant ab)\},$$

$$F_1 F_2 = F_1 \cap F_2.$$

Фильтр $F(X)$, *порожденный подмножеством* $X \subseteq B$ (т. е. наименьший из фильтров булевой алгебры B, содержащих X), определяется формулой

$$F(X) = \{a \in B \mid (\exists a_1, a_2, \ldots, a_n \in X)(a \geqslant a_1 a_2 \ldots a_n)\} \cup \{1\}.$$

Фильтр F называется *собственным* (или *центрированным*), если он не совпадает со всей булевой алгеброй. Это условие равносильно тому, что элемент 0 не входит в F.

Собственный фильтр, не содержащийся ни в каком другом собственном фильтре, называется *максимальным фильтром* или (чаще) *ультрафильтром*. Идеал, присоединенный к ультрафильтру, максимален и, наоборот, фильтр, присоединенный к максимальному идеалу, является ультрафильтром.

Каждое предложение об идеалах имеет двойственный аналог для фильтров, и наоборот. Отметим важнейшие факты.

Фильтр F булевой алгебры B является ее ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $a \in B$ в точности один из элементов a, a' входит в F. Собственный фильтр $F \subseteq B$ в точности тогда будет ультрафильтром, когда для любых a, $b \in B$ из условия $a + b \in F$ следует, что $a \in F$ или $b \in F$.

Каждый собственный фильтр булевой алгебры содержится в некотором ее ультрафильтре и совпадает с пересечением всех содержащих его ультрафильтров. Если F — фильтр булевой алгебры B и $a \notin F$, то существует ультрафильтр U в B такой, что $F \subseteq U$ и $a \notin U$. В частности, для любого отличного от единицы элемента $a \in B$ найдется ультрафильтр, не содержащий a. Каждый ультрафильтр имеет точную нижнюю грань, которая является или нулем или атомом булевой алгебры. Поэтому в безатомных булевых алгебрах не существует полных (т. е. содержащих точные грани всех своих подмножеств) ультрафильтров.

Ультрафильтры булевой алгебры B — это полные прообразы единицы при двузначных гомоморфизмах $B \to \{0, 1\}$. Вообще, если A и B — булевы алгебры, φ: $A \to B$ — гомоморфизм и U — ультрафильтр в B, то его прообраз $\varphi^{-1}(U)$ будет ультрафильтром в A.

Гомоморфный образ полной булевой алгебры не обязательно полон. Например, если $P(X)$ — (полная) алгебра всех подмножеств некоторого бесконечного множества X и J — идеал в ней, содержащий все одноэлементные подмножества и не содержащий подмножеств, равномощных X, то факторалгебра $P(X)/J$ неполна. Пусть α — некоторое кардинальное число.

Гомоморфизм φ: $A \to B$ булевой алгебры A в булеву алгебру B называется *α-полным* (или *α-непрерывным*), если он сохраняет все имеющиеся в A точные грани подмножеств, мощность которых не превосходит α (достаточно потребовать сохранения только точных верхних или только точных нижних граней таких подмножеств). Гомоморфизм, α-полный для каждого кардинального числа α, называется *полным булевым гомоморфизмом*. Например, отображение φ_a: $B \to B$, $x \mapsto ax$, для фиксированного $a \in B$ является полным гомоморфизмом булевой алгебры B на ее интервал (главный идеал) a^{∇}.

Каждый эндоморфизм атомной (или полной) булевой алгебры B полон тогда и только тогда, когда B конечна ([18], с. 10). Пусть B — булева алгебра и для каждого $a \in B$ пусть $\varphi(a)$ обозначает множество всех атомов, содержащихся в a. Тогда φ является полным гомоморфизмом булевой алгебры B в алгебру всех подмножеств множества всех атомов из B.

Если α-полная булева алгебра A допускает α-полный гомоморфизм φ в булеву алгебру B, то образ ее $\varphi(A)$ будет α-полной подалгеброй в B и α-полной булевой алгеброй. Всякий булев изоморфизм полон, но свойство полноты не обязательно сохраняется при булевых вложениях. Пусть, например, B — подалгебра, образованная в алгебре $P(X)$ всех подмножеств множества X неотрицательных целых чисел конечными подмножествами множества положительных чисел и дополнениями таких подмножеств до X. Тогда тождественное вложение B в $P(X)$ не будет даже σ-полным, поскольку счетное объединение в B не совпадает с теоретико-множественным объединением.

Идеал α-полной булевой алгебры B называется *α-полным*, если он содержит точные верхние грани всех своих подмножеств, имеющих мощность, не превосходящую α. Идеал, α-полный для каждого кардинального числа α, по определению *полон*. Всякий полный идеал будет главным идеалом. Ядро α-полного булева гомоморфизма представляет собой α-полный идеал.

Факторалгебра α-полной булевой алгебры по α-полному идеалу является α-полной булевой алгеброй (см. [12], теорема 21.1). Впрочем, факторалгебра B/J булевой алгебры B по ее идеалу J может оказаться полной, если B и J таковыми не были. Например, если B обозначает σ-алгебру всех борелевских подмножеств некоторого топологического пространства, а J — идеал всех множеств первой категории (он является σ-идеалом), то факторалгебра B/J (алгебра борелевских подмножеств по модулю множеств первой категории) будет полной булевой алгеброй. (Подмножество A топологического пространства X называется нигде не плотным в X, если внутренность замыкания множества A пуста. Множества первой категории в X — это счетные объединения нигде не плотных в X подмножеств). Неизвестно, существует ли в алгебре всех подмножеств несчетного множества неглавный σ-идеал, факторалгебра по которому была бы полной.

Пусть $a \leqslant b$ в булевой σ-алгебре B. Тогда если алгебра B изоморфна главному идеалу a^{∇}, то она изоморфна и главному идеалу b^{∇}.

Булева алгебра называется *однородной*, если она изоморфна каждому своему главному ненулевому идеалу. Тривиальный пример — двухэлементная булева алгебра. Однородной будет и алгебра борелевских подмножеств топологического пространства по модулю множеств первой категории. Для каждого бесконечного кардинального числа α существует однородная булева алгебра мощности 2^{α} и полная однородная булева алгебра мощности $\alpha^{\aleph_0}$. Все известные примеры полных булевых алгебр изоморфны прямым произведениям полных однородных булевых алгебр. Неизвестно, всякая ли полная булева алгебра имеет такое представление (см. [12], с. 173).

4.4. Представления булевых алгебр. Алгебраическое представление булевых алгебр связано с понятием булева кольца. *Булево кольцо* — это ассоциативное кольцо с единицей, все элементы которого идемпотентны. Всякое булево кольцо коммутативно и имеет характеристику 2 (т. е. $x+x=0$ для любого элемента x такого кольца). Например, идемпотенты каждого ассоциативно-коммутативного кольца с единицей образуют булево кольцо относительно имеющегося в этом кольце умножения и нового сложения $a+b-2ab$. Если в булевой алгебре B положить $a+b=ab'+a'b$ и $a \circ b = ab$, то получается булево кольцо B^* с единицей 1 и нулем 0. Обратно, пусть R — булево кольцо с единицей 1 и нулем 0 относительно сложения $\dotplus$ и умножения $\circ$. Полагая

$$a+b=a\dotplus b\dotplus a\circ b,\quad ab=a\circ b,\quad a'=a\dotplus 1,$$

получаем булеву алгебру R^* с единицей 1 и нулем 0. При этом $B^{**}=B$ и $R^{**}=R$. Тем самым устанавливается так называемая *стоуновская двойственность между булевыми алгебрами и булевыми кольцами.*

Стоуновская двойственность индуцирует следующие соответствия. Если S — подалгебра (подкольцо) булевой алгебры (булева кольца) A, то S будет подкольцом (подалгеброй) в A^*. Если A_1 и A_2 — булевы алгебры (булевы кольца) и φ: $A_1\to A_2$ — гомоморфизм, то φ будет и гомоморфизмом из A_1^* в A_2^*. Если $\{A_i\,|\,i\in I\}$ — семейство булевых алгебр [булевых колец], то $\left(\prod\limits_{i\in I}A_i\right)^*=\prod\limits_{i\in I}A_i^*$. Если J — идеал булевой алгебры [булева кольца] A, то J — идеал булева кольца [булевой алгебры] A^*, причем свойство простоты идеала сохраняется. Конгруэнции на A — это в точности конгруэнции на A^*. Наконец, отношение частичного порядка булевой алгебры есть не что иное как отношение делимости в соответствующем булевом кольце.

Топологическое представление булевых алгебр связано с понятием булева пространства. Топологическое пространство называется *булевым*, если оно хаусдорфово, компактно и вполне несвязно (т. е. открыто-замкнутые подмножества образуют базис — о таком пространстве говорят еще, что оно нульмерно). Например, каждое конечное дискретное топологическое пространство является булевым.

Открыто-замкнутые подмножества булева пространства X образуют булеву алгебру $X^{\circledast}$ относительно теоретико-множественных операций объединения, пересечения и дополнения. Булево пространство X называется *стоуновским пространством булевой алгебры B*, если B изоморфна алгебре $X^{\circledast}$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X. Все стоуновские пространства данной булевой алгебры гомеоморфны между собой. С другой стороны, булево пространство, гомеоморфное стоуновскому пространству булевой алгебры B, само будет стоуновским пространством для B. Так что стоуновское пространство булевой алгебры определяется ею однозначно с точностью до гомеоморфизма (см. [12], § 8).

Пусть B — булева алгебра. Через $B^{\circledast}$ обозначим множество всех максимальных идеалов [множество всех ультрафильтров] булевой алгебры B, снабженное топологией, открытую [замкнутую] базу которой образуют подмножества вида $A_a = \{M \in B^{\circledast} \mid a \notin M\}$ [подмножества вида $A_a = \{U \in B^{\circledast} \mid a \in U\}$], где $a \in \in B$. Топологическое пространство $B^{\circledast}$ — булево и является стоуновским пространством для B, т. е. булевы алгебры B и $B^{\circledast\circledast}$ изоморфны (изоморфизм осуществляется соответствием $a \longmapsto A_a$). С другой стороны, стоуновское пространство $X^{\circledast\circledast}$ алгебры $X^{\circledast}$ открыто-замкнутых подмножеств булева пространства X гомеоморфно самому X — гомеоморфизм осуществляется соответствием $x \longmapsto \{A \in X^{\circledast} \mid x \in A\}$, где $x \in X$. Тем самым устанавливается так называемая *стоуновская двойственность между булевыми алгебрами и булевыми топологическими пространствами.*

Важнейшим следствием топологического представления булевых алгебр является то, что всякая булева алгебра изоморфна некоторой алгебре множеств, именно алгебре всех открыто-замкнутых подмножеств своего стоуновского пространства.

Булева алгебра B конечна тогда и только тогда, когда пространство $B^{\circledast}$ дискретно.

Подмножество топологического пространства (чаще всего булева) называется *α-открытым* [*α-замкнутым*], если оно является объединением [пересечением] не более чем α открыто-замкнутых подмножеств. Булева алгебра B будет α-полной тогда и только тогда, когда в пространстве $B^{\circledast}$ замыкание [внутренность] каждого α-открытого [α-замкнутого] подмножества открыто [замкнуто]. В счетном случае имеется особая терминология. Подмножество топологического пространства X называется *бэровским*, если оно принадлежит σ-алгебре, порожденной всеми открыто-замкнутыми подмножествами пространства X. Булево пространство называется *σ-пространством*, если замыкание всякого открытого бэровского подмножества открыто. Таким образом, булева алгебра B тогда и только тогда σ-полна, когда пространство $B^{\circledast}$ является σ-пространством.

Каждая булева σ-алгебра B изоморфна фактор-алгебре $B^{\circledast\circledast}/J$ σ-алгебры всех бэровских подмножеств пространства $B^{\circledast}$ по σ-идеалу всех множеств первой категории. Следовательно, для каждой булевой σ-алгебры B существует σ-алгебра множеств C и σ-идеал J в C такие, что B изоморфна факторалгебре C/J. Иначе говоря, каждая булева σ-алгебра является σ-полным гомоморфным образом σ-алгебры множеств (*теорема Лумиса — Сикорского*). Ни для какого несчетного кардинального числа α аналогичный результат не имеет места (см. [2], с. 335).

Полнота булевой алгебры B равносильна *экстремальной несвязности* пространства $B^{\circledast}$ (это означает, что замыкание каждого открытого подмножества открыто или, двойственно, внутренность каждого замкнутого подмножества замкнута). Булева алгебра B удовлетворяет σ-цепному условию тогда и только тогда, когда в пространстве $B^{\circledast}$ каждое нигде не плотное подмножество является бэровским.

При стоуновском представлении решетка фильтров булевой алгебры B изоморфна решетке замкнутых подмножеств топологического пространства $B^{\circledast}$ (изоморфизмом является отображение $F \mapsto \bigcap\{A_a \mid a \in F\}$). При этом главным фильтрам соответствуют открыто-замкнутые подмножества, а ультрафильтрам — точки. Решетка идеалов булевой алгебры B, в свою очередь, изоморфна решетке открытых подмножеств в $B^{\circledast}$ (изоморфизмом будет отображение $J \mapsto \bigcup \{A_a \mid a \in J\}$), причем главным идеалам соответствуют открыто-замкнутые подмножества, а максимальным идеалам — дополнения точек. Атомам булевой алгебры B стоуновское представление соотносит *изолированные точки* пространства $B^{\circledast}$ (т. е. такие точки $x \in B^{\circledast}$, что подмножество $\{x\}$ открыто-замкнуто в $B^{\circledast}$).

Пусть φ: $B_1 \to B_2$ — булев гомоморфизм. Тогда отображение $\varphi^{\circledast}$: $B_2^{\circledast} \to B_1^{\circledast}$, определенное условием

$\varphi^{\circledast}(U)=\varphi^{-1}(U)$ для каждого ультрафильтра $U\subseteq B_2$, будет непрерывным отображением, инъективным, если φ сюръективно, и сюръективным, если φ инъективно. Обратно, пусть f: $X_1\to X_2$ — непрерывное отображение булевых пространств. Тогда отображение $f^{\circledast}$: $X_2^{\circledast}\to X_1^{\circledast}$, определенное условием $f^{\circledast}(A)=f^{-1}(A)$ для любого открыто-замкнутого подмножества A из X_2, будет булевым гомоморфизмом, инъективным, если f сюръективно, и сюръективным, если f инъективно. Булева алгебра B тогда и только тогда будет гомоморфным образом булевой алгебры A, когда топологическое пространство $B^{\circledast}$ гомеоморфно замкнутому подмножеству пространства $A^{\circledast}$.

Группа автоморфизмов булевой алгебры B изоморфна группе гомеоморфизмов ее стоуновского пространства $B^{\circledast}$.

Пусть X_1 и X_2 — топологические пространства. *Прямым объединением* их называется пространство $X_1\sqcup X_2$ с носителем $(X_1\times\{1\})\cup(X_2\times\{2\})$, открытыми подмножествами которого являются в точности подмножества вида $(O_1\times\{1\})\cup(O_2\times\{2\})$, где O_i открыто в X_i, $i=1, 2$. Если B_1 и B_2 — булевы алгебры, то булевы пространства $(B_1\times B_2)^{\circledast}$ и $B_1^{\circledast}\sqcup B_2^{\circledast}$ гомеоморфны (см. [23], § IV. 4).

Топологической булевой алгеброй, или (булевой) *алгеброй с замыканием*, называется булева алгебра B, на которой задана унарная *операция замыкания* $x\longmapsto Cx$, удовлетворяющая условиям: 1) $x\leqslant Cx$, 2) $CCx\leqslant Cx$, 3) $C(x+y)=Cx+Cy$, 4) $C0=0$. Тривиальным примером операции замыкания на булевой алгебре является тождественное отображение $x\longmapsto x$. Если X — произвольное топологическое пространство и CA обозначает топологическое замыкание подмножества $A\subseteq X$, т. е. наименьшее из замкнутых в X подмножеств, содержащих A, то $(P(X), \cup, \cap, ^-, C, \varnothing, X)$ будет топологической булевой алгеброй.

Двойственной для замыкания является *операция открывания* в топологической булевой алгебре, вводимая по формуле $Ix=(Cx')'$. Очевидно, что $Cx= =(Ix')'$. Следующие соотношения выполняются во всякой топологической булевой алгебре: 1) $C1=1$,

2) $x \leqslant y \Rightarrow Cx \leqslant Cy$, 3) $I0 = 0$, 4) $I1 = 1$, 5) $I(xy) = Ix \cdot Iy$, 6) $Ix \leqslant x$, 7) $Ix \leqslant IIx$, 8) $x \leqslant y \Rightarrow Ix \leqslant Iy$.

Элемент a топологической булевой алгебры B называется *открытым* [*замкнутым*], если $Ia = a$ [$Ca = a$]. Множество $\mathrm{O}(B)$ всех открытых элементов топологической булевой алгебры B является псевдобулевой (иначе гейтинговой) решеткой. Объединение и пересечение, а также наибольший и наименьший элементы в $\mathrm{O}(B)$ — те же, что и в B, а относительным псевдодополнением $a * b$ элемента a относительно b будет элемент $I(a' + b) = [C(ab')]'$. Каждая псевдобулева решетка изоморфна решетке всех открытых элементов некоторой топологической булевой алгебры.

Пусть $a \in B$ — произвольный элемент. Главный идеал a^{∇} можно превратить в топологическую булеву алгебру, полагая $C_a x = aCx$ для любого $x \in a^{\nabla}$. Если элемент a замкнут в B, то $C_a x = Cx$ для каждого $x \in a^{\nabla}$

Булев гомоморфизм $\varphi\colon B_1 \to B_2$ называется *топологическим*, если он сохраняет операцию замыкания, т. е. если $\varphi(Cx) = C\varphi(x)$ для всех $x \in B_1$. Если a — замкнутый элемент топологической булевой алгебры B, то отображение $\varphi_a\colon B \to a^{\nabla}$, $x \mapsto ax$, будет топологическим гомоморфизмом. Топологический изоморфизм называют также *гомеоморфизмом*. Каждая топологическая булева алгебра допускает топологическое вложение в топологическую алгебру $P(X)$ всех подмножеств подходящего топологического пространства X. Если X и Y — топологические пространства и $\varphi\colon X \to Y$ их гомеоморфизм, то отображение $\varphi^{\circledast}\colon P(Y) \to P(X)$, $A \mapsto \varphi^{-1}(A)$, будет топологическим изоморфизмом между топологическими булевыми алгебрами $P(Y)$ и $P(X)$. Более того, каждый топологический изоморфизм между $P(Y)$ и $P(X)$ имеет вид $\varphi^{\circledast}$, где φ — некоторый гомеоморфизм пространства X на пространство Y.

О топологических булевых алгебрах см. [9], гл. III, [20], гл. II, § 2.

4.5. Категорные вопросы. Каждая булева алгебра B вкладывается в полную булеву алгебру, например, в алгебру $P(B^{\circledast})$ всех подмножеств своего стоуновского пространства $B^{\circledast}$. Однако стоуновский изоморфизм $B \to B^{\circledast\circledast} \subseteq P(B^{\circledast})$, вообще говоря, не сохраняет имеющиеся в B точные верхние и точные нижние грани бесконечных подмножеств. Поэтому возникает вопрос о возможности полного вложения данной булевой алгебры B в некоторую полную булеву алгебру.

Говорят, что подмножество X полной булевой алгебры B *вполне порождает подалгебру* A в B, если A — наименьшая из полных подалгебр в B, содержащих X. Элементы множества X называются *полными порождающими подалгебры* A.

Пусть A — булева алгебра. *Пополнение* ее — это пара (B, φ), где B — полная булева алгебра, а φ — полное вложение A в B такое, что подалгебра $\varphi(A)$ вполне порождает B. Если A — подалгебра полной булевой алгебры B и B вместе с тождественным вложением $\mathrm{id}\colon A \to B$ образует пополнение для A, то и сама B называется пополнением булевой алгебры A.

Пополнение (B, φ) булевой алгебры A, по определению, *минимально*, если для любого пополнения (C, χ) булевой алгебры A существует вложение $\psi\colon B \to C$ такое, что $\varphi\psi = \chi$, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\chi"'] & & B \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Пополнение (B, φ) булевой алгебры A минимально тогда и только тогда, когда подалгебра $\varphi(A)$ будет плотной в B. Если (B, φ) и (C, χ) — минимальные пополнения булевой алгебры A, то полные булевы алгебры B и C изоморфны.

Минимальным пополнением булевой алгебры B будет, например, полная булева алгебра регулярных открытых подмножеств топологического пространства $B^{\circledast}$ вместе со стоуновским изоморфизмом булевой алгебры B на алгебру всех открыто-замкнутых подмножеств пространства $B^{\circledast}$. Минимальное пополнение безатомной булевой алгебры безатомно (см. [12], с. 249).

Идеал J булевой алгебры B называется *замкнутым* (или *нормальным*), если он содержит все нижние грани множества всех своих верхних граней (т. е. если $J^{\Delta\nabla} = J$). Например, всякий главный идеал замкнут. Замкнутые идеалы булевой алгебры B, упорядоченные теоретико-множественным включением, образуют полную булеву алгебру $\mathrm{Cl}(B)$. Пара $(\mathrm{Cl}(B), \varphi)$, где φ — отображение, сопоставляющее каждому $a \in B$ главный идеал a^{∇}, также является минимальным пополнением булевой алгебры B. Оно называется *пополнением сечениями* (сечение в B — это пара (J, J^{Δ}), где J — замкнутый идеал булевой алгебры B). Пополнение сечениями называют также *макниловским пополнением* булевой алгебры.

Множество X порождающих булевой алгебры B называется *свободным*, если любое отображение $\varphi\colon X \to C$ в произвольную булеву алгебру C можно продолжить до гомоморфизма булевой алгебры B в C. В этом случае B называется *свободной над* X. *Свободная булева алгебра* — это булева алгебра, имеющая свободное множество порождающих.

Множество X порождающих булевой алгебры B тогда и только тогда будет свободным, когда для него выполняется следующее *условие независимости*: для любых попарно различных элементов $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n \in X$ и любого целого числа $m = 1, 2, \ldots, n$ пересечение $a_1 a_2 \ldots a_m a'_{m+1} \ldots a'_n$ отлично от нуля.

Для любого кардинального числа α существует булева алгебра, которая свободна над множеством порождающих мощности α. Если B_1, B_2 — булевы алгебры, свободные над множествами X_1, X_2 соответственно, и мощности множеств X_1 и X_2 равны, то B_1 и B_2 изоморфны. Таким образом, для любого кардинального числа α с точностью до изоморфизма имеется единственная свободная булева алгебра B_α над множеством порождающих мощности α.

Свободная булева алгебра над конечным числом n порождающих имеет 2^{2^n} элементов. Бесконечная свободная булева алгебра B_α изоморфна алгебре всех открыто-замкнутых подмножеств канторова дисконтинуума D_α. Она не полна, имеет 2^α автоморфизмов, безатомна и удовлетворяет σ-цепному условию. Кроме того, в ней для любого $\beta \leqslant \alpha$ содержатся собственные подалгебры, свободные над β порождающими. Мощность любой бесконечной полной булевой алгебры является точной верхней гранью мощностей ее свободных подалгебр (Кисляков С. В.//Сиб. мат. ж. — 1973. — Т. 14, № 3. — С. 565—581).

Каждая булева алгебра является гомоморфным образом подходящей свободной булевой алгебры.

Для множества любой бесконечной мощности α существует порожденная им свободная булева σ-алгебра. Булева σ-алгебра B называется *свободной булевой σ-алгеброй* над множеством X своих порождающих, если каждое отображение φ: $X \to C$ в произвольную булеву σ-алгебру C можно продолжить до σ-гомоморфизма булевой алгебры B в C. Свободная булева σ-алгебра с α порождающими изоморфна булевой σ-алгебре всех бэровских подмножеств канторова дисконтинуума D_α. Свободная булева σ-алгебра со счетным числом порождающих однородна.

Полная булева алгебра B называется *свободной полной булевой алгеброй* над множеством X своих полных порождающих, если каждое отображение φ: $X \to C$ в произвольную полную булеву алгебру C можно продолжить до полного гомоморфизма булевой алгебры B в C. Свободной полной булевой алгеброй с конечным числом порождающих n является B_n, бесконечная свободная полная булева алгебра не существует (см. [12], с. 216).

Булева алгебра B называется *ретрактом* булевой алгебры A, если существуют гомоморфизмы φ: $B \to A$ и ψ: $A \to B$ такие, что $\varphi\psi$ тождественно на B (отсюда следует, что φ — булево вложение, а ψ — булево наложение). Таким образом, ретракт B можно рассматривать одновременно и как подалгебру и как гомоморфный образ булевой алгебры A. Каждый ретракт полной булевой алгебры полон. Булева алгебра B тогда и только тогда является ретрактом булевой алгебры A, когда стоуновское пространство $B^{\circledast}$ будет ретрактом стоуновского пространства $A^{\circledast}$ (топологическое пространство Y называется *ретрактом* топологического пространства X, если существуют непрерывные отображения f: $Y \to X$ и g: $X \to Y$ такие, что fg тождественно на Y).

Булева алгебра B, по определению, *проективна*, если для любого булева наложения φ: $A \to C$ и любого гомоморфизма χ: $B \to C$ существует гомоморфизм ψ: $B \to A$ такой, что $\psi\varphi = \chi$, т. е. если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "\varphi"] & \\ B \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[rr, "\chi"'] & & C \end{tikzcd}$$

Каждый ретракт проективной булевой алгебры проективен. Булева алгебра проективна тогда и только тогда, когда она является ретрактом некоторой свободной булевой алгебры. Например, проективна каждая свободная булева алгебра и каждая счетная булева алгебра (см. [31], § 30—31).

Менее самостоятельным для булевых алгебр будет другое категорное понятие. Булева алгебра B называется *инъективной*, если для любого булева вложения φ: $C \to A$ и любого гомоморфизма χ: $C \to B$ существует гомоморфизм ψ: $A \to B$ такой, что $\varphi\psi = \chi$, т. е. если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dashed, "\psi"'] & \\ B & & C \arrow[ul, "\varphi"'] \arrow[ll, "\chi"] \end{tikzcd}$$

Полные булевы алгебры, и только они, инъективны.

В категории полных булевых алгебр (т. е. когда рассматриваются только полные булевы алгебры и полные гомоморфизмы между ними) проективность равносильна существованию атомов. Инъективных объектов в этой категории нет. Полная булева алгебра B тогда и только тогда будет полным (т. е. в категории полных булевых алгебр) ретрактом алгебры $P(B^{\circledast})$ всех подмножеств своего стоуновского пространства $B^{\circledast}$, когда она атомная. Любая булева σ-алгебра является σ-полным (т. е. в категории булевых σ-алгебр с σ-полными гомоморфизмами) ретрактом алгебры $P(B^{\circledast})$ (см. [37], с. 114, 141).

Полурешетка (т. е. коммутативная идемпотентная полугруппа) с нулем $(S, +)$ называется *левым модулем* (*левым полигоном*) над булевой алгеброй B (или *B-модулем*), если для любых $a \in B$, $x \in S$ определено произведение $a \circ x \in S$, причем 1) $a \circ (x+y) = a \circ x + a \circ y$, 2) $(a+b) \circ x = a \circ x + b \circ x$, 3) $(ab) \circ x = a \circ (b \circ x)$, 4) $0 \circ x = a \circ 0 = 0$, 5) $1 \circ x = x$ — для любых $a, b \in B$, $x, y \in S$. В частности, сама булева алгебра B и все ее идеалы будут B-модулями. Всякую полурешетку с нулем можно рассматривать как модуль над двухэлементной булевой алгеброй. Булева алгебра B конечна тогда и только тогда, когда каждый ее идеал как B-модуль инъективен в категории всех B-модулей, и полна в том и только том случае, когда все ее главные идеалы инъективны в этой категории. Модуль S над булевой алгеброй B инъективен в категории B-модулей тогда и только тогда, когда S — полная бесконечно $\bigcap$-дистрибутивная решетка (Фофанова Т. С.//Сиб. мат. ж. 1971. — Т. 12, № 5. — С. 1195—1199). Если B — полная булева алгебра, то каждый проективный B-модуль с единицей S также будет решеткой указанного вида. Всякий счетно порожденный идеал булевой алгебры B будет проективным объектом в категории B-модулей (Фофанова Т. С.//Упорядоченные множества и решетки. — Саратов, 1977. — Вып. 4. — С. 123—129).

4.6. Меры на булевых алгебрах. *Конечно аддитивная мера* на булевой алгебре B — это конечная действительнозначная функция m на B такая, что: 1) $m(x) \geqslant 0$ для любого $x \in B$, 2) $m(x+y) = m(x) + m(y)$, если $xy = 0$, 3) $m(1) \neq 0$. Отсюда следует, что $m(x) \leqslant m(y)$ при $x \leqslant y$ и что $m(0) = 0$. *Элементы меры нуль* (т. е. такие $x \in B$, что $m(x) = 0$) образуют в булевой алгебре B идеал. Если на булевой σ-алгебре B задана конечно аддитивная мера и J — идеал, состоящий из элементов меры нуль, то факторалгебра B/J полна (см. [12], с. 123, п. Д).

Мера, по определению, *строго* (или *существенно*) положительна, если единственным элементом меры нуль является наименьший элемент 0 булевой алгебры, т. е. если идеал элементов меры нуль представляет собой нулевой идеал $\{0\} = 0^{\nabla}$. Булева алгебра с заданной на ней конечно аддитивной строго положительной мерой называется *конечно аддитивной алгеброй с мерой.* Мера называется *нормированной* (или *вероятностной*), если $m(1) = 1$. Любую строго положительную меру m на булевой алгебре B можно нормировать, полагая $m^*(x) = m(x)/m(1)$ для любого $x \in B$.

Конечно аддитивную строго положительную меру допускают, например, алгебры множеств вида $P(X)$, где X — конечное или счетное множество. Именно, если $A \subseteq X$, то полагают $m(A) = \sum_{a \in A} m(a)$, где $m(a) = 1/n$ для любого $a \in X$, когда X имеет n элементов, и $m(a_k) = 1/2^k$, если X счетно и состоит из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ Любая свободная булева алгебра допускает конечно аддитивную строго положительную меру (см. [27], § 23). Напротив, на фактор-алгебре алгебры всех подмножеств счетного множества по идеалу всех его конечных множеств не существует конечно аддитивной строго положительной меры (см. [12], с. 326). Подобным образом обстоит дело и в алгебре всех борелевских и в алгебре всех измеримых по Лебегу подмножеств отрезка числовой прямой. Это вытекает, в частности, из того, что каждая конечно аддитивная алгебра с мерой обязана удовлетворять σ-цепному условию, которое нарушается в указанных случаях. Вместе с тем существуют булевы алгебры, в которых выполняется σ-цепное условие, но на которых все же нельзя ввести конечно аддитивную строго положительную меру (см. [5], с. 58).

Конечно аддитивная σ-алгебра с мерой полна.

Мера на булевой алгебре B называется *σ-аддитивной* (или *σ-мерой*), если

$$m\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(x_i)$$

для любой счетной ортогональной системы $\{x_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$. Примером может служить мера Лебега на алгебре измеримых по Лебегу подмножеств интервала $(0, 1)$. В предположении гипотезы континуума никакая σ-мера не может быть определена на алгебре всех подмножеств континуального множества таким образом, чтобы каждая точка имела меру нуль (см. [2], с. 346).

Элементы σ-меры нуль образуют σ-идеал в булевой алгебре B, на которой задана эта σ-мера. Если B является булевой σ-алгеброй, то ее факторалгебра по σ-идеалу элементов меры нуль полна, — это следует из уже отмеченного аналогичного свойства для конечно аддитивных мер.

Алгебра с мерой — это пара (B, m), где B — булева σ-алгебра, а m — некоторая строго положительная σ-мера на ней. Каждая алгебра с мерой полна.

4.7. Булевы конструкции в алгебре. Пусть B — полная булева алгебра, A — непустое множество. Под *B-значными отношениями* (или *B-отношениями*) на A понимаются отображения $\varphi\colon A\times A\to B$. В множестве $P_B(A)$ всех B-отношений на A поточечно вводятся булевы операции объединения, пересечения и дополнения. Через $\mathbf{0}$ обозначается B-отношение с постоянным значением $0\in B$, а через $\mathbf{1}$ — принимающее единственное значение $1\in B$. *Произведением* (или *суперпозицией*) *B-отношений* φ, $\psi\in P_B(A)$ называется B-отношение $\varphi\circ\psi$ такое, что

$$(\varphi\circ\psi)(a, b)=\sum_{x\in A}\varphi(a, x)\,\psi(x, b)$$

для любых a, $b\in A$. *Тождественное B-отношение* ε характеризуется условиями $\varepsilon(a, b)=1$ при $a=b$ и $\varepsilon(a, b)=0$ при $a\neq b$. *Обратное B-отношение* φ^{-1} для $\varphi\in P_B(A)$ определяется равенством $\varphi^{-1}(a, b)=\varphi(b, a)$ для всех a, $b\in A$.

Алгебра B-отношений является примером релятива в смысле следующего определения. *Релятивом* (или *алгеброй отношений*) называется алгебра $(R, +, \cdot, \circ, ', ^{-1}, 0, 1, \varepsilon)$ типа $(2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0)$, где $(R, +, \cdot, ', 0, 1)$ — булева алгебра, $(R, \circ, ^{-1}, \varepsilon)$ — моноид с инволюцией, причем умножение $\circ$ двусторонне дистрибутивно относительно объединения $+$ и тождественно выполняются равенство $(x+y)^{-1}=x^{-1}+y^{-1}$ и неравенство $x^{-1}\circ(x\circ y)'\leqslant y'$. В любом релятиве (и, следовательно, в любой алгебре B-отношений) истинны соотношения:

$$(xy)^{-1}=x^{-1}y^{-1},\quad 1\circ 0=0\circ 1=0,$$
$$(xy)\circ z\leqslant(x\circ z)(y\circ z),\quad x\neq 0\Leftrightarrow 1\circ x\circ 1=1,$$
$$(x\circ y)(u\circ v)\leqslant x\circ((x^{-1}\circ u)(y\circ v^{-1}))\circ v,$$
$$x(y\circ z)=0\Leftrightarrow y(x\circ z^{-1})=0\Leftrightarrow z(y^{-1}\circ x)=0.$$

Пусть R — произвольный релятив. Тогда $\gamma\leqslant\varepsilon$ для любого центрального γ (т. е. элемента γ, перестановочного по умножению $\circ$ со всеми элементами из R). Далее, существуют элементы ε_a, $a \in A$, такие, что: 1) $\sum_{a \in A} \varepsilon_a = \varepsilon$, 2) $\varepsilon_a \varepsilon_b = 0$ при $a \neq b$, 3) $1 \circ \varepsilon_a \circ \circ 1 = 1$ и $\varepsilon_a \circ 1 \circ \varepsilon_a = \varepsilon_a$ для каждого $a \in A$, 4) если $\alpha \leqslant \varepsilon_a$, то $\alpha = \gamma \circ \varepsilon_a$ для некоторого центрального элемента $\gamma \in R$, $a \in A$. Если при этом булева алгебра, образуемая центральными элементами из R, изоморфна булевой алгебре B, то R изоморфен алгебре $P_B(A)$ всех B-отношений на множестве A. Упоминаемым в приведенных условиях элементам γ в $P_B(A)$ соответствуют «диагональные» B-отношения с постоянным значением (т. е. $\gamma(a, b) = 0$ при $a \neq b$ и $\gamma(a, a) = \gamma(b, b)$ для всех a, $b \in A$), а элементу ε_a, $a \in A$, — B-отношение со свойствами $\varepsilon_a(a, a) = 1$, $\varepsilon_a(b, c) = 0$ при $b \neq a$ или $c \neq a$ (Скорняков Л. А.//Мат. заметки. — 1987. — Т. 41, № 2. — С. 129—137).

Если множество A конечно и имеет n элементов, то B-отношения на нем удобно записывать в виде $n \times n$-матриц с элементами из булевой алгебры B. Тогда умножение булевозначных (или булевых) отношений превращается в умножение соответствующих *булевых матриц*, а обращение — в транспонирование этих матриц.

Свойство *однозначности* для $\varphi \in P_B(A)$ определяется условием $\varphi(a, x)\varphi(a, y) = 0$ при любом $a \in A$ и различных x, $y \in A$. Для B-матриц это означает, что каждая строка является ортогональной системой в B. Совокупность $F_B(A)$ всех однозначных B-отношений на A (или *B-преобразований* множества A) замкнута относительно умножения. Моноид $(F_B(A), \circ, \varepsilon)$ регулярен в том смысле, что для любого $\varphi \in F_B(A)$ уравнение $\varphi \circ \chi \circ \varphi = \varphi$ разрешимо (см. [11], с. 110).

Назовем B-преобразование $\varphi \in F_B(A)$ *взаимно однозначным*, если обратное для него B-отношение φ^{-1} также однозначно, т. е. если $\varphi(x, a)\varphi(y, a) = 0$ при любом $a \in A$ и различных x, $y \in A$. Для B-матриц взаимная однозначность равносильна тому, что каждая строка и каждый столбец является ортогональной системой в B. Совокупность всех взаимно однозначных B-преобразований множества A образует инверсный моноид $(K_B(A), \circ, {}^{-1}, \varepsilon)$, т. е. моноид, в котором для любого φ система уравнений $\varphi\circ\chi\circ\varphi=\varphi$, $\chi\circ\varphi\circ\chi=\chi$ однозначно разрешима (решением будет φ^{-1}).

B-преобразование $\varphi\in F_B(A)$ называется *полным*, если $\sum\limits_{x\in A}\varphi(a, x)=\sum\limits_{x\in A}\varphi(x, a)=1$ для любого $a\in A$. Совокупность всех полных взаимно однозначных B-преобразований произвольного непустого множества A образует группу $(G_B(A), \circ, ^{-1}, \varepsilon)$. В случае B-матриц эта группа состоит из B-матриц, у которых каждая строка и каждый столбец является полной ортогональной системой в B. Если булево преобразование φ конечного множества A обладает свойством $\sum\limits_{x\in A}\varphi(a, x)=1$ для любого $a\in A$, то φ тогда и только тогда будет взаимно однозначным, когда оно полно.

Когда булева алгебра B двухэлементна, все рассмотренные конструкции и утверждения трансформируются в соответствующие конструкции и утверждения для обычных отношений и двоичных (т. е. над двухэлементной цепью) булевых матриц.

Пусть A — некоторая (абстрактная) алгебра, B — полная булева алгебра. Через $N_B(A)$ обозначается множество функций $\nu\colon A\to B$ таких, что $\nu(a)\nu(b)=0$ при $a\neq b$ и $\sum\limits_{x\in A}\nu(x)=1$. Если f — произвольная n-арная $(n\geqslant 1)$ операция в A, то по определению

$$f(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)(a)=\sum_{f(a_1, a_2, \ldots, a_n)=a}\nu(a_1)\nu(a_2)\ldots\nu(a_n)$$

для всякого $a\in A$ (объединение справа берется по всем таким наборам $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)=a$). Нульарной операции, фиксирующей в A элемент a_0, сопоставляется функция $\nu_{a_0}\colon A\to B$, определяемая условиями $\nu_{a_0}(a)=1$ при $a=a_0$ и $\nu_{a_0}(a)=0$ при $a\neq a_0$. С так введенными операциями множество $N_B(A)$ превращается в алгебру той же сигнатуры, что и A. Алгебра $N_B(A)$ называется *B-расширением* (или *B-степенью*) алгебры A. *Ограниченное B-расширение* (или *ограниченная B-степень*) алгебры A — это подалгебра $N_B^*(A)$ алгебры $N_B(A)$, состоящая из таких функций ν, которые имеют лишь конечное множество ненулевых значений. Строя ограниченное расширение данной алгебры A, можно не требовать полноты булевой алгебры B.

Для любой алгебры A и любой полной булевой алгебры B булевы расширения $N_B(A)$ и $N_B^*(A)$ элементарно эквивалентны, т. е. всякая формула языка 1-й ступени, истинная в одном из этих расширений, истинна и в другом. Ограниченное B-расширение $N_B^*(A)$ изоморфно подалгебре, которую образуют в прямой степени $A^{B^{\circledast}}$ непрерывные функции из стоуновского пространства $B^{\circledast}$ булевой алгебры B в множество A, наделенное дискретной топологией.

Отметим некоторые свойства булевых расширений. Во-первых, алгебра $N_B^*(A)$ является подпрямой степенью алгебры A. Далее, A вкладывается в $N_B^*(A)$ при любой булевой алгебре B, причем алгебры A и $N_{\{0,1\}}^*(A)$ изоморфны. Каковы бы ни были булевы алгебры B_1 и B_2, алгебры $N_{B_1\times B_2}^*(A)$ и $N_{B_1}^*(A)\times\times N_{B_2}^*(A)$ изоморфны. Изоморфны также алгебры $N_B^*(A_1\times A_2)$ и $N_B^*(A_1)\times N_B^*(A_2)$ для любых однотипных алгебр A_1, A_2.

Предложениями языка 1-й ступени, сохраняющимися при образовании булевых расширений, являются в точности дизъюнкции хорновских предложений. (*Хорновское предложение* — это замкнутая предваренная формула языка 1-й ступени, у которой бескванторная часть представляет собой конъюнкцию членов, каждый из которых является или атомной формулой, или дизъюнкцией одной атомной формулы и нескольких отрицаний атомных формул, или дизъюнкций отрицаний атомных формул. Таковы, например, тождества и квазитождества.) О булевых расширениях алгебр см. [47], с. 73—80, и [23].

Пусть B — полная булева алгебра. Под *B-значной алгеброй* понимается последовательность $\mathscr{A} = (A, B, f_1, f_2, \ldots)$, где A — некоторое непустое множество (носитель), а f_i — отображения степеней множества A в множество $N_B(A)$, называемые *B-значными операциями* на A. Считается, что нульарная операция в $\mathscr{A}$ фиксирует элемент вида $\nu_{a_0} \in N_B(A)$, где $\nu_{a_0}(a) = 1$ при $a = a_0$ и $\nu_{a_0}(a) = 0$ при $a \neq a_0$.

Подмножество $A^* \subseteq A$, по определению, ***замкнуто*** в $\mathscr{A}$ относительно n-арной B-операции f, если

$$\sum_{x \in A^*} f(a_1, a_2, \ldots, a_n)(x) = 1$$

для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A^*$. *Подалгебра B-алгебры* $\mathscr{A}$ — это B-алгебра, носителем которой является замкнутое относительно всех операций из $\mathscr{A}$ подмножество $A^* \subseteq A$, а B-операциями — ограничения B-операций B-алгебры $\mathscr{A}$ на степенях подмножества A^*.

Отображение $\varphi\colon A \to A^*$ называется *гомоморфизмом B-алгебры* $\mathscr{A}$ в однотипную B-алгебру $\mathscr{A}^*$, если для всякой n-арной B-операции f из $\mathscr{A}$ и соответствующей ей B-операции f^* из $\mathscr{A}^*$ будет

$$f^*(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n))(\varphi(a)) = \sum_{\varphi(x)=\varphi(a)} f(a_1, a_2, \ldots, a_n)(x)$$

для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n, a \in A$. В частности, *изоморфизм* — это такое взаимно однозначное соответствие между множествами A и A^*, что в указанных обозначениях тождественно

$$f^*(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n))(\varphi(a)) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)(a).$$

Прямым произведением семейства B алгебр $\{\mathscr{A}_i \mid i \in I\}$ сигнатуры $(f_1, f_2, \ldots)$ называется B-алгебра $\mathscr{A}$ той же сигнатуры такая, что ее носитель A является декартовым произведением $\prod_{i \in I} A_i$, а B-операции задаются формулой

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n)(a) = \prod_{i \in I} f(a_1(i), a_2(i), \ldots, a_n(i))(a(i))$$

для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n, a \in \prod_{i \in I} A_i$.

Нормальное расширение B-алгебры $\mathscr{A}$ это обычная (т. е. двузначная) алгебра $N(\mathscr{A})$ той же сигнатуры с носителем $N_B(A)$, в которой

$$f(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)(a) = \sum_{a_1, a_2, \ldots, a_n \in A} f(a_1, a_2, \ldots, a_n)(a)\,\nu_1(a_1)\,\nu_2(a_2) \ldots \nu_n(a_n) \quad (*)$$

для любых $a \in A$, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n \in N_B(A)$. Отождествляя каждый элемент $a \in A$ с элементом $\nu_a \in N_B(A)$, множество A вкладывают в $N_B(A)$.

Алгебраическая n-арная операция f на множестве $N_B(A)$ называется *главной*, если для нее выполняется соотношение (*), т. е. если ее значения на элементах множества $N_B(A)$ выражаются указанным образом через значения на элементах множества A (рассматриваемого как подмножество в $N_B(A)$).

Для построения формализованной теории булевозначных алгебр используется язык 1-й ступени соответствующей сигнатуры со следующей интерпретацией. Предметные переменные пробегают непустое множество A, а значением n-арного символа операции f считается некоторая n-арная главная операция на множестве $N_B(A)$, где B — фиксированная полная булева алгебра (Салий В. Н.//Мат. сб. — 1973. — Т. 92, № 4. — С. 550—563).

Всякая универсальная формула, истинная в алгебре $N(\mathscr{A})$, истинна в B-алгебре $\mathscr{A}$. Всякая экзистенциальная формула, истинная в B-алгебре $\mathscr{A}$, истинна в ее нормальном расширении $N(\mathscr{A})$. Булевозначная алгебра $\mathscr{A}$ эквационально эквивалентна своему нормальному расширению $N(\mathscr{A})$ (т. е. в $\mathscr{A}$ и $N(\mathscr{A})$ истинны одни и те же тождества). Пусть $\mathrm{Th}_B(\mathscr{A})$ обозначает совокупность всех замкнутых формул, истинных на B-алгебре $\mathscr{A}$. Если B — полная подалгебра полной булевой алгебры C, то $\mathrm{Th}_C(\mathscr{A}) = \mathrm{Th}_B(\mathscr{A})$. В частности, любая булева теория обычной алгебры совпадает с ее двузначной теорией.

4.8. Некоторые недистрибутивные обобщения булевых алгебр. Обобщения булевых алгебр, построенные на основе дистрибутивных решеток, рассматривались в параграфе, посвященном этим решеткам. Среди недистрибутивных решеточных обобщений можно выделить ортомодулярные решетки, решетки с единственными дополнениями и квазибулевы решетки.

Орторешеткой называется решетка с 0 и 1, на которой задана унарная операция *ортодополнения* $x \mapsto x^{\perp}$, удовлетворяющая тождествам $x + x^{\perp} = 1$, $xx^{\perp} = 0$, $(x^{\perp})^{\perp} = x$, $(x+y)^{\perp} = x^{\perp}y^{\perp}$, $(xy)^{\perp} = x^{\perp} + y^{\perp}$. Дистрибутивные орторешетки — это булевы алгебры. Примером полной недистрибутивной орторешетки является модулярная решетка подпространств конечномерного евклидова пространства, где $S^\perp$ обозначает ортогональное дополнение подпространства S. В каждой орторешетке истинно квазитождество $x \leqslant y \to x^\perp \geqslant y^\perp$ (антиизотонность ортодополнения).

Орторешетка L называется *ортомодулярной решеткой*, если в ней выполняется *ортомодулярный закон* — квазитождество $x \leqslant y \to x + x^\perp y = y$. Например, всякая модулярная орторешетка будет ортомодулярной решеткой. Полную ортомодулярную решетку образуют замкнутые подпространства гильбертова пространства H. Эта решетка модулярна тогда и только тогда, когда H конечномерно. Любая решетка вкладывается в подходящую ортомодулярную решетку и потому не существует специального решеточного тождества (т. е. тождества относительно операций объединения и пересечéния), истинного на всех ортомодулярных решетках (см. [17], с. 39).

Ортомодулярные решетки обычно рассматриваются в сигнатуре $(+, \cdot, {}^\perp, 0, 1)$ типа $(2, 2, 1, 0, 0)$. Любая ортомодулярная решетка является решеткой с относительными дополнениями: относительным дополнением элемента x, принадлежащего интервалу $[a, b]$, является, например, элемент $x^* = (a + x^\perp)b = a + x^\perp b$. При этом в сигнатуре $(+, \cdot, {}^*, a, b)$ интервал $[a, b]$ сам является ортомодулярной решеткой.

Ортомодулярный закон равносилен тождеству $x + (x + y)x^\perp = x + y$, так что класс ортомодулярных решеток оказывается многообразием. Поэтому подалгебра (т. е. подмножество, замкнутое относительно сигнатурных операций) и всякий гомоморфный (по всем операциям) образ ортомодулярной решетки будут ортомодулярными решетками так же, как и прямое произведение любого семейства ортомодулярных решеток. Булевы алгебры составляют наименьшее нетривиальное подмногообразие многообразия ортомодулярных решеток. Ортомодулярная решетка тогда и только тогда является булевой алгеброй, когда в ней каждый элемент имеет единственное дополнение.

Пусть L — орторешетка. Говорят, что элемент a *коммутирует* в ней с элементом b (и пишут aCb) если $a = ab + ab^\perp$. Например, aCb, если $a \leqslant b$. Орторешетка L тогда и только тогда ортомодулярна, когда отношение C симметрично на L.

В ортомодулярной решетке L соотношение aCb равносильно тому, что подрешетка, порожденная элементами a, $a^{\perp}$, b, $b^{\perp}$, дистрибутивна. Если подмножество A ортомодулярной решетки L таково, что из любых трех его элементов хотя бы один коммутирует с двумя другими, то A порождает в L дистрибутивную подрешетку (но не обязательно булеву подалгебру). *Блоком* ортомодулярной решетки L называется максимальное подмножество, в котором элементы попарно коммутируют. Блоки совпадают с максимальными булевыми подалгебрами в L. При этом L представляет собой теоретико-множественное объединение своих блоков. Булева подалгебра $Z(L)$, являющаяся пересечением всех блоков ортомодулярной решетки L, называется ее *центром*. Центр состоит из элементов, коммутирующих со всеми элементами из L. Каждый элемент a центра имеет в L единственное дополнение $a^{\perp}$.

Горизонтальная сумма семейства $\{L_i | i \in I\}$ *ортомодулярных решеток* — это решетка L, получаемая следующим образом: отождествляются все единицы 1_i решеток L_i и все их нули 0_i, а частичный порядок и ортодополнение в каждой компоненте остаются неизменными. Решетка L оказывается ортомодулярной решеткой.

Класс ортомодулярных решеток не замкнут относительно пополнений сечениями — в отличие от класса булевых алгебр. Полная счетная ортомодулярная решетка является атомной. Полная модулярная орторешетка $\bigcap$-непрерывна и $\bigcup$-непрерывна (*теорема Капланского*). Элементы a, b ортомодулярной решетки L называются *перспективными* (запись: $a \sim b$), если они имеют общее дополнение, т. е. если существует такой элемент $x \in L$, что $a + x = b + x = 1$ и $ax = bx = 0$. В полной модулярной орторешетке перспективность транзитивна.

Каждая группа изоморфна группе автоморфизмов некоторой ортомодулярной решетки.

Ортомодулярные решетки находят применение в основаниях квантовой механики. Этим решеткам посвящены монографии [22, 35, 36].

Решетка с 0 и 1 называется *решеткой с единственными дополнениями*, если каждый ее элемент a имеет в точности одно дополнение, обозначаемое a'.

Например, таковой будет всякая булева решетка. Класс решеток с единственными дополнениями самодвойствен: вместе с каждой входящей в него решеткой он содержит и дуально изоморфную ей решетку.

Каждое из следующих условий обеспечивает дистрибутивность решетки с единственными дополнениями, иллюстрируя близость таких решеток к булевым алгебрам: 1) конечность, 2) условие обрыва убывающих (или возрастающих) цепей, 3) атомность, 4) существование для каждого ненулевого элемента не содержащего его простого идеала, 5) модулярность, 6) ортомодулярность, 7) антиизотонность дополнения, 8) законы де Моргана (любой из них), 9) наличие относительных дополнений, 10) компактная порожденность, 11) непрерывность (в смысле Скотта).

Вместе с тем любая решетка может быть вложена в подходящую решетку с единственными дополнениями, в частности, существуют недистрибутивные решетки с единственными дополнениями.

Решетка с единственными дополнениями полна, если каждая ортогональная система в ней имеет точную верхнюю грань. В полной решетке с единственными дополнениями для любого подмножества $\{b_i \mid i \in I\}$ существует ортогональная система $\{a_i \mid i \in I\}$ такая, что: 1) $a_i \leqslant b_i$ для всякого $i \in I$, 2) $\sum\limits_{i \in I} a_i = \sum\limits_{i \in I} b_i$. Полная решетка с единственными дополнениями разлагается в прямое произведение полной атомной булевой алгебры и полной безатомной решетки с единственными дополнениями. Неизвестно, существуют ли полные недистрибутивные решетки с единственными дополнениями (см. [11]).

Полная решетка с дополнениями L называется *квазибулевой*, если каждая ее ортогональная система $\{a_i \mid i \in I\}$ *независима*, т. е. $\sum\limits_{j \in J} a_j \sum\limits_{k \in K} a_k = 0$ для любого разбиения $I = J \cup K$, $J \cap K = \varnothing$. Это условие выполняется, например, в каждой булевой алгебре. Примером недистрибутивной квазибулевой решетки может служить пятиугольник N_5. Квазибулева решетка с единственными дополнениями является булевой. Полная решетка с дополнениями L будет квазибулевой тогда и только тогда, когда она допускает гомоморфизм по пересечению на некоторую булеву решетку, который: 1) взаимно однозначен в 0 и 1 и 2) сохраняет точные верхние грани ортогональных систем.

Квазибулевы решетки замечательны тем, что среди полных решеток с дополнениями только они допускают аналоги алгебраических булевых конструкций (см. п. 4.7). Например, если L — полная решетка с дополнениями, то совокупность $F_L(A)$ всех L-преобразований произвольного множества A тогда и только тогда замкнута относительно умножения, когда L — квазибулева решетка (при этом замкнутой относительно умножения будет также совокупность $G_B(A)$ всех полных взаимно однозначных L-преобразований множества A), — Salii V. N.//Colloq. Math. Soc. János Bolyai. — 1986. — V. 43. — P. 429—454.

Если для полной решетки с дополнениями L по аналогии с булевым расширением определить L-расширение $N_L(A)$ произвольной алгебры A, то $N_L(A)$ тогда и только тогда будет замкнуто относительно всех введенных операций, когда L — квазибулева решетка.

К числу квазибулевых решеток относятся также все *решетки с полными дополнениями*. Это такие полные решетки, которые допускают взаимно однозначный в 0 и 1 полный гомоморфизм на некоторую булеву решетку. Этот класс вместе с каждой своей решеткой содержит и дуально изоморфную ей решетку. Полная решетка с дополнениями L тогда и только тогда будет решеткой с полными дополнениями, когда в ней выполняются *обобщенные законы де Моргана*: для любого подмножества $\{a_i \mid i \in I\} \subseteq L$ и любого набора дополнений $\{a'_i \mid i \in I\}$ элементов этого подмножества элемент $\prod_{i \in I} a'_i$ является дополнением для $\sum_{i \in I} a_i$ и, двойственно, элемент $\sum_{i \in I} a'_i$ является дополнением для $\prod_{i \in I} a_i$ (Пашенков В. В.// Изв. высш. учебн. заведений. Математика. — 1958. — № 4. — С. 191—201).

§ 5. Другие классы решеток

5.1. Представления полных решеток. *Оператором замыкания на* (непустом) *множестве* X называется оператор замыкания на полной решетке $P(X)$ всех подмножеств множества X, т. е. отображение φ: $P(X) \to P(X)$, $A \mapsto \bar{A}$, удовлетворяющее условиям: 1) $A \subseteq \bar{A}$ (*экстенсивность*), 2) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ (*идемпотентность*), 3) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$ (*изотонность*). Подмножество A множества X называется *замкнутым*, если $\bar{A} = A$. Совокупность $C(X)$ всех замкнутых относительно фиксированного оператора замыкания подмножеств данного множества X, частично упорядоченная теоретико-множественным включением, является полной решеткой: если подмножества семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ все замкнуты, то точной нижней гранью этого семейства в $C(X)$ будет $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$, а точной верхней гранью — подмножество $\overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$.

Изоморфизм полной решетки L на полную решетку вида $C(X)$ называется *конкретным представлением* полной решетки L. Всякая полная решетка обладает конкретным представлением. Именно, можно взять в качестве X само множество L и для $A \subseteq L$ положить $\bar{A} = (\sup A)^\nabla$, т. е. сопоставить подмножеству A главный идеал, порожденный объединением всех входящих в A элементов (оно существует в силу полноты решетки L).

Оператор замыкания $A \mapsto \bar{A}$ на множестве X называется *топологическим*, если $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ для любых подмножеств A, B множества X. Например, топологическим будет оператор замыкания, ставящий в соответствие каждому подмножеству топологического пространства X замыкание этого подмножества в смысле заданной на X топологии. Полная решетка L обладает конкретным представлением с топологическим оператором замыкания тогда и только тогда, когда она дистрибутивна и каждый ее элемент представим в виде (быть может бесконечного) объединения неразложимых элементов.

Оператор замыкания $A \mapsto \bar{A}$ на множестве X называется *геометрическим*, если для любого подмножества $A \subseteq X$ и любых точек p, $q \in X$ из условий

$q \notin A$ и $q \in \overline{A \cup \{p\}}$ следует, что $p \in \overline{A \cup \{q\}}$ (так называемое *свойство замещения*). Например, геометрическим будет оператор замыкания, ставящий в соответствие каждому подмножеству линейного пространства X его линейную оболочку. Полная решетка L обладает конкретным представлением с геометрическим оператором замыкания тогда и только тогда, когда она полумодулярна сверху и каждый ее элемент является объединением множества содержащихся в нем атомов.

Оператор замыкания $A \mapsto \bar{A}$ на множестве X называется *алгебраическим*, если для любого направленного (вверх) семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ подмножеств множества X имеет место равенство $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$. Например, алгебраическим будет оператор замыкания, ставящий в соответствие каждому подмножеству алгебры X порожденную этим подмножеством подалгебру (пустое подмножество включается в число подалгебр). Оператор замыкания уже тогда будет алгебраическим, когда равенство $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$ выполняется для любой цепи $\{A_i \mid i \in I\}$ подмножеств множества X. Полная решетка L обладает конкретным представлением с алгебраическим оператором замыкания тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке $\mathrm{Sub}\, X$ всех подалгебр некоторой алгебры X. Такие решетки называются *алгебраическими*. Каждая решетка вложима в некоторую алгебраическую решетку, например, в решетку подгрупп подходящей группы (см. [8], с. 254). О конкретных представлениях решеток см. в [15].

Полная решетка тогда и только тогда является алгебраической, когда она компактно порождена, т. е. когда каждый ее элемент представим в виде объединения компактных элементов. В булевой решетке компактными элементами являются в точности конечные объединения атомов. Все элементы полной решетки компактны тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей. В решетке $\mathrm{Sub}\, A$ всех подалгебр произвольной универсальной алгебры A компактными элементами будут в точности конечно порожденные подалгебры.

Решетка $\operatorname{Id} L$ идеалов любой решетки L тоже алгебраическая, ее компактными элементами являются, в частности, все главные идеалы. Любая алгебраическая решетка изоморфна решетке $\operatorname{Con} A$ конгруэнций подходящей универсальной алгебры A. Компактными элементами решетки $\operatorname{Con} A$ будут, в частности, все главные конгруэнции алгебры A (конгруэнция $\theta = \theta_{a,b}$ называется главной, если она является наименьшей из конгруэнций алгебры A, отождествляющих элементы a, $b \in A$). В алгебраической решетке двусторонних идеалов кольца компактные элементы — это конечно порожденные идеалы, и только они.

Множество $K(L)$ компактных элементов алгебраической решетки L замкнуто относительно объединения $+$ и содержит наименьший элемент 0 решетки L. Полная булева решетка L тогда и только тогда будет алгебраической, когда она изоморфна решетке $P(X)$ всех подмножеств некоторого множества X. В алгебраической булевой решетке L подмножество $K(L)$ является подрешеткой (компактные элементы в $P(X)$ — это в точности конечные подмножества множества X). Подрешеткой будет совокупность всех компактных элементов и в решетке $\operatorname{Id} L$ идеалов любой дистрибутивной решетки L.

Каждый неодноэлементный интервал алгебраической решетки содержит простой (т. е. двухэлементный) интервал (так называемое *свойство слабой атомности*). Если в алгебраической решетке L интервалы $[x, x+y]$ и $[xy, y]$ изоморфны для всех x, $y \in L$, то L модулярна. Алгебраическая решетка с единственными дополнениями дистрибутивна и, следовательно, является алгебраической булевой решеткой. Всякая полная подрешетка алгебраической решетки будет алгебраической решеткой, так же как и прямое произведение любого семейства алгебраических решеток. Однако класс алгебраических решеток не замкнут относительно гомоморфизмов — даже сохраняющих все точные нижние грани и точные верхние грани направленных (вверх) семейств.

Решетка, двойственная к алгебраической решетке, называется *коалгебраической*. Например, решетка многообразий решеток является дистрибутивной коалгебраической решеткой. Каждый элемент коалгебраической решетки представим в виде (быть может бесконечного) объединения вполне $\bigcup$-неразложимых элементов. Если каждый интервал коалгебраической решетки L является дуально атомной решеткой, то всякий элемент решетки L имеет несократимое представление в виде (быть может, бесконечного) объединения вполне $\bigcup$-неразложимых элементов (представление $a=\sum_{i\in I} x_i$ называется *несократимым*, если при удалении хотя бы одного из элементов x_i объединение оставшихся элементов уже не будет равно a).

Полная решетка L называется *непрерывной сверху* (или $\bigcap$-непрерывной), если в ней выполняется соотношение $x\sum_{i\in I} x_i=\sum_{i\in I} xx_i$ для любого элемента x и любого направленного (вверх) семейства $\{x_i \mid i\in I\}$. Например, $\bigcap$-непрерывной является каждая алгебраическая решетка и каждая булева решетка. Полная решетка L уже тогда будет $\bigcap$-непрерывной, когда равенство $x\sum_{i\in I} x_i=\sum_{i\in I} xx_i$ имеет место для любого $x\in L$ и любой цепи $\{x_i \mid i\in I\}\subseteq L$. В полной решетке L следующие условия равносильны: 1) L является $\bigcap$-непрерывной решеткой, 2) для любых двух идеалов J_1, J_2 решетки L выполняется равенство $\sup J_1\cdot\sup J_2=\sup(J_1J_2)$, 3) отображение φ: $J(L)\to L$, $J\mapsto\sup J$, решетки идеалов решетки L в саму решетку L представляет собой решеточный гомоморфизм (сохраняющий к тому же объединения произвольных семейств). Дистрибутивные $\bigcap$-непрерывные решетки — это в точности полные решетки с относительными псевдодополнениями.

Пусть L — полная решетка. Говорят, что элемент x *лежит явно ниже*, чем y (другая терминология: x *сильно меньше*, чем y), если для любого направленного (вверх) подмножества $\{x_i \mid i\in I\}\subseteq L$ из выполнимости неравенства $y\leqslant\sum_{i\in I} x_i$ следует существование x_i такого, что $x\leqslant x_i$. Это соотношение между x и y обозначается как $x\ll y$. Например, $0\ll x$ для любого $x\in L$. Отношение $\ll$ антисимметрично и транзитивно, однако $x\ll x$ имеет место тогда и только тогда, когда элемент x компактен в решетке L. Из простейших свойств отношения $\ll$ можно выделить следующие: если $a \leqslant x \ll y \leqslant b$, то $a \ll b$, и если $x \ll z$ и $y \ll z$, то $x + y \ll z$. В полной дистрибутивной решетке L тогда и только тогда $x \ll y$, когда для каждого простого идеала P из $y \leqslant \sup P$ следует, что $x \in P$.

Полная решетка L называется *непрерывной* (в смысле Скотта), если в ней выполняется *свойство аппроксимируемости*: $a = \sum \{x \in L \mid x \ll a\}$ для любого $a \in L$, т. е. если каждый элемент решетки L может быть представлен в виде объединения лежащих явно ниже него элементов. Решетка L непрерывна тогда и только тогда, когда существует алгебраическая решетка A и сюръективный гомоморфизм φ: $A \to L$, сохраняющий все точные нижние грани и точные верхние грани направленных (вверх) семейств. В частности, любая алгебраическая решетка непрерывна. Примером непрерывной решетки является также решетка замкнутых двусторонних идеалов C^*-алгебры (банахова алгебра A над полем комплексных чисел называется *C^*-алгеброй*, если на ней задана инволюция $x \mapsto x^*$, связанная с нормой тождественным соотношением $\|x^*x\| = \|x\|^2$). Еще один пример — решетка полунепрерывных снизу функций на полном метрическом пространстве X (числовая функция f на X называется полунепрерывной снизу, если $\varliminf\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ в каждой точке $a \in X$, где $\varliminf$ обозначает нижний предел). Решетка открытых подмножеств хаусдорфова топологического пространства X непрерывна тогда и только тогда, когда X локально компактно.

Непрерывная булева решетка является алгебраической, а в этом случае, как отмечалось, она изоморфна решетке всех подмножеств подходящего множества.

Полная решетка L непрерывна тогда и только тогда, когда отображение φ: $J(L) \to L$, $J \mapsto \sup J$, решетки идеалов решетки L в саму решетку L представляет собой полный гомоморфизм, т. е. сохраняет все точные грани. Отсюда всякая непрерывная решетка $\cap$-непрерывна. Таким образом, непрерывная решетка дистрибутивна в том и только том случае, когда она является полной решеткой с относительными псевдодополнениями.

Всякая полная подрешетка непрерывной решетки непрерывна, так же как и прямое произведение любого семейства непрерывных решеток. Отсюда, в частности, следует, что любая вполне дистрибутивная решетка непрерывна (каждая такая решетка изоморфна некоторой полной подрешетке прямого произведения полных цепей). Если φ — решеточный гомоморфизм непрерывной решетки L на полную решетку M, сохраняющий все точные нижние грани и точные верхние грани направленных (вверх) семейств, то M — непрерывная решетка.

Непрерывные решетки тесно связаны с инъективными топологическими T_0-пространствами (см. 5.2).

Об алгебраических, $\cap$-непрерывных и непрерывных в смысле Скотта решетках см. в [28, 24, 11].

Для представления полных решеток полезным является понятие P-операции. Пусть X — непустое множество и $P^*(X)$ — совокупность всех его непустых подмножеств. Отображение o: $P^*(X) \to X$ называется *P-операцией* на X. Таким образом, P-операция соотносит каждому непустому подмножеству множества X некоторый элемент из X. Например, всякая функция выбора является P-операцией на соответствующем множестве. Под *P-алгеброй* понимается непустое множество с заданным на нем набором P-операций, а под *P-оперативом* понимается P-алгебра с одной P-операцией. Если L — полная решетка, то, сопоставляя каждому непустому подмножеству $A \subseteq \subseteq L$ его точную верхнюю грань $\sup A$, получаем P-операцию на множестве L. Другая P-операция на L вводится правилом $A \mapsto \inf A$. Следовательно, с каждой полной решеткой L ассоциируется P-алгебра $(L, \sup, \inf)$. Говорят, что *P-алгебра* $(L, \sum, \prod)$ с двумя P-операциями $\sum$ и $\prod$ *ассоциирована с полной решеткой*, если на множестве L можно задать частичный порядок $\leqslant$ таким образом, чтобы $(L, \leqslant)$ было полной решеткой и чтобы при этом P-операция sup в этой полной решетке совпадала с заданной P-операцией $\sum$, а P-операция inf — с заданной P-операцией $\prod$. Оказывается, P-алгебра $(L, \sum, \prod)$ с двумя P-операциями тогда и только тогда ассоциирована с полной решеткой, когда обе P-операции *ассоциативны* в том смысле, что

$$\sum \bigcup_{i \in I} A_i = \sum \{\sum A_i \mid i \in I\} \quad \text{и}$$

$$\prod \bigcup_{i \in I} A_i = \prod \{\prod A_i \mid i \in I\}$$

для любого семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ непустых подмножеств множества L, и удовлетворяют законам поглощения:

$$\sum \{x, \prod \{x, y\}\} = x = \prod \{x, \sum \{x, y\}\}$$

для любых $x, y \in L$.

P-оператив X называется *однопорожденным*, если в X существует (порождающий) элемент a, не содержащийся ни в каком собственном (т. е. отличном от X) P-подоперативе P-оператива X. *Элементарный P-оператив* — это P-оператив, у которого все P-подоперативы являются однопорожденными. Всякая полная решетка изоморфна решетке всех P-подоперативов некоторого элементарного P-оператива. Отсюда следует, что каждая полная решетка обладает конкретным представлением с оператором замыкания, относительно которого каждое подмножество является замыканием подходящей точки (см. [11], § III. 3).

5.2. Решетки, наделенные топологической структурой. На полной решетке L можно различными способами задавать топологии, естественно связанные с решеточной структурой. Каждая такая топология имеет свои привлекательные свойства, хотя и не обязательно превращает L в *топологическую решетку*, т. е. в решетку с непрерывными в смысле данной топологии операциями объединения и пересечения.

Сетью на множестве X называется функция $f\colon I \to X$, где I — направленное (вверх) частично упорядоченное множество. Обычно сети записывают в виде $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Если $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — произвольная сеть на полной решетке L, то по определению, полагают

$$\liminf x_\alpha = \sup_\beta \{\inf_{\alpha \geqslant \beta} x_\alpha\} \quad \text{и} \quad \limsup x_\alpha = \inf_\beta \{\sup_{\alpha \geqslant \beta} x_\alpha\}.$$

Говорят, что сеть $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ *порядково сходится* к элементу $a \in L$ (и пишут $x_\alpha \to a$), если $\liminf x_\alpha = \limsup x_\alpha = a$. Подмножество $A \subseteq L$ называется *порядково замкнутым*, если при $\{x_\alpha\} \subseteq A$ и $x_\alpha \to a$ обязательно $a \in A$, т. е. если предел любой сходящейся сети элементов множества A принадлежит A. Замкнутые в указанном смысле подмножества решетки L задают на ней T_1-топологию, называемую *порядковой топологией*. В полной цепи порядковая топология совпадает с *внутренней топологией*, открытой базой которой являются открытые интервалы $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ (а предбазой замкнутых множеств — замкнутые интервалы $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$). Любая цепь относительно своей внутренней топологии является нормальным хаусдорфовым пространством, компактным тогда и только тогда, когда эта цепь полна.

Всякий полный решеточный гомоморфизм непрерывен в порядковой топологии полной решетки. Полная дистрибутивная решетка L является топологической решеткой относительно порядковой топологии тогда и только тогда, когда в L выполняются оба бесконечных дистрибутивных закона. Таким образом, в каждой полной цепи и в каждой полной булевой решетке операции объединения и пересечения непрерывны относительно порядковой сходимости: если $x_\alpha \to a$ и $y_\beta \to b$, то $x_\alpha + y_\beta \to a + b$ и $x_\alpha y_\beta \to ab$. Другое следствие — любая полная топологическая дистрибутивная решетка является псевдобулевой решеткой. Однако, например, полная псевдобулева решетка всех замкнутых подмножеств действительной прямой не будет топологической решеткой в своей порядковой топологии.

Порядковая топология на булевой решетке регулярных открытых подмножеств интервала (0, 1) числовой прямой не хаусдорфова. Полная модулярная орторешетка является топологической решеткой относительно порядковой сходимости. Компактная топологическая решетка топологически вкладывается в качестве подрешетки в степень единичного интервала числовой прямой в том и только том случае, когда она бесконечно дистрибутивна.

Пусть P — ограниченное (т. е. с 0 и 1) частично упорядоченное множество. *Интервальной топологией* на P называется топология, в которой в качестве замкнутой предбазы берутся всевозможные замкнутые интервалы $[a, b]$ (достаточно ограничиться главными идеалами a^{∇} и главными фильтрами a^{Δ}). Каждое частично упорядоченное множество является T_1-пространством в своей интервальной топологии. В любой цепи интервальная топология равносильна внутренней топологии и на полных цепях совпадает с порядковой топологией. Вообще, в полных решетках конечной $\bigcap$-ширины порядковая и интервальная топологии совпадают. (Говорят, что решетка L имеет конечную $\bigcap$-ширину, если существует натуральное число n такое, что пересечение любых $\alpha > n$ элементов решетки L равно пересечению n из них.)

Каждое подмножество полной решетки, замкнутое в интервальной топологии, замкнуто и в порядковой топологии. Главные идеалы, и только такие идеалы, одновременно замкнуты в порядковой и интервальной топологии.

В полной атомной булевой решетке со счетным множеством атомов порядковая и интервальная топологии совпадают и приводят к канторову дисконтинууму. Решетка компактна в интервальной топологии тогда и только тогда, когда она полна. Булева решетка в том и только том случае является хаусдорфовым пространством в интервальной топологии, когда она атомная. О порядковой и интервальной топологиях в решетках см. [2], гл. X.

Если булева решетка L является компактной топологической решеткой, то L алгебраически изоморфна и топологически гомеоморфна булевой решетке $P(X)$ для подходящего множества X, наделенной интервальной топологией. Любая компактная нульмерная дистрибутивная топологическая решетка топологически вкладывается в качестве $(0, 1)$-подрешетки в компактную булеву решетку. Идеал J булевой решетки L тогда и только тогда замкнут, когда он топологически замкнут в любой предкомпактной топологии на L (см. Пашенков В. В.//Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, № 5. — С. 79—99).

Пусть L — полная решетка. Подмножество $A \subseteq L$ называется *открытым*, когда для него выполняются следующие условия: 1) из соотношений $a \in A$ и $a \leqslant x$ следует $x \in A$ (т. е. A является *возрастающим подмножеством*), 2) для любого направленного (вверх) подмножества $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq L$, если $\sum\limits_{i \in I} x_i \in A$, то найдется $x_i \in A$. Заметим, что второе условие очевидным образом выполняется во всякой конечной решетке. Так определенные открытые подмножества задают на решетке L *топологию Скотта*, которая является T_0-топологией. Двухэлементная решетка $\{0, 1\}$, наделенная топологией Скотта, есть не что иное, как *связное двоеточие* (или *пространство Серпинского*) $\mathcal{O}$. Если возрастающее подмножество A полной решетки L открыто в порядковой топологии, то A будет открытым и в топологии Скотта. Решетка L непрерывна в смысле Скотта в точности тогда, когда ее открытые подмножества образуют вполне дистрибутивную решетку. Полная решетка L тогда, и только тогда, будет алгебраической, когда базой ее топологии Скотта служит совокупность всех главных фильтров, порожденных компактными элементами.

Если решетка L непрерывна, то в топологии Скотта она является локально компактным уравновешенным пространством (топологическое пространство X называется *уравновешенным*, если каждый неразложимый в объединение элемент решетки его замкнутых подмножеств представляет собой замыкание точки).

Топологическое T_0-пространство Z называется *инъективным*, если для любого пространства Y и любого его подпространства X каждая непрерывная функция $f\colon X \to Z$ может быть продолжена до непрерывной функции $\bar{f}\colon Y \to Z$. Например, инъективным будет связное двоеточие $\mathcal{O}$. Прямые произведения, а также ретракты инъективных пространств инъективны. Каждое инъективное пространство является ретрактом некоторой декартовой степени связного двоеточия $\mathcal{O}$. Если решетка L непрерывна, то топологическое T_0-пространство $L^{\circledast}$, в которое ее превращает топология Скотта, инъективно. С другой стороны, пусть X — инъективное T_0-пространство. Положим $x \leqslant y$ в X в том и только том случае, когда $x \in \overline{\{y\}}$. Тогда частично упорядоченное множество $X^{\circledast} = (X, \leqslant)$ оказывается непрерывной решеткой. При этом $X^{\circledast\circledast} \simeq X$ и $L^{\circledast\circledast} \simeq L$ для каждого инъективного пространства X и каждой непрерывной решетки L (знаком $\simeq$ обозначены гомеоморфизм топологических пространств и изоморфизм решеток).

Пусть L — полная решетка, для которой решетка открытых подмножеств непрерывна. Такая решетка L тогда и только тогда будет топологической решеткой в топологии Скотта, когда она $\bigcap$-непрерывна.

Топология Лоусона на полной решетке L задается открытой предбазой, которую составляют всевозможные открытые (в топологии Скотта) подмножества вместе с дополнениями главных фильтров. Топология Лоусона всегда является компактной T_1-топологией. Она содержит в себе интервальную топологию и сама содержится в порядковой топологии. Если в полной решетке L интервальная топология хаусдорфова, то она совпадает с топологией Лоусона на L. Далее, $\bigcap$-непрерывная решетка непрерывна тогда и только тогда, когда ее топология Лоусона хаусдорфова, и при этом она будет алгебраической в том и только том случае, когда эта топология нульмерна. Непрерывная дистрибутивная решетка тогда и только тогда является топологической решеткой относительно топологии Лоусона, когда она бесконечно $\bigcup$-дистрибутивна $\left(\text{т. е. когда в ней выполняется бесконечный дистрибутивный закон } x + \prod_i x_i = \prod_i (x + x_i)\right)$.

Топологии Скотта и Лоусона на полных решетках подробно изучаются в [28].

5.3. Многообразия решеток. Решетка определяется как универсальная алгебра $\langle L, +, \cdot\rangle$ с двумя бинарными операциями, удовлетворяющими законам идемпотентности, коммутативности, ассоциативности и поглощения. Каждый из этих восьми законов выражается соответствующим тождеством. Следовательно, класс всех решеток эквационально определим или, иначе говоря, является многообразием универсальных алгебр — в сигнатуре $(+, \cdot)$ типа $(2, 2)$. Пусть $\mathscr{L}$ обозначает многообразие всех решеток. Система тождеств, задающая это многообразие, избыточна: законы поглощения обеспечивают идемпотентность обеих операций решетки ($x + x = x + x(x + x) = x$ и двойственно). Шесть остальных законов образуют независимую самодвойственную систему тождеств для многообразия $\mathscr{L}$.

Теоретико-множественное пересечение любого семейства многообразий является многообразием, поэтому всевозможные подмногообразия многообразия $\mathscr{L}$ образуют полную решетку — это *решетка* Λ *всех многообразий решеток*. Решетка Λ континуальна. Она является дистрибутивной и коалгебраической. Наименьший ее элемент — *тривиальное многообразие* $\mathscr{E}$, состоящее из всех одноэлементных решеток.

Пусть K — произвольный класс решеток. Через $\mathfrak{S}(K)$ обозначается класс, состоящий из всевозможных подрешеток K-решеток (т. е. решеток из класса K), через $\mathfrak{H}(K)$ — совокупность всех гомоморфных образов K-решеток, через $\mathfrak{P}(K)$ — класс, составленный из прямых произведений различных семейств K-решеток. Класс K тогда и только тогда является многообразием, когда он содержит все три класса $\mathfrak{S}(K)$, $\mathfrak{H}(K)$, $\mathfrak{P}(K)$, иначе говоря, когда он замкнут относительно подрешеток, гомоморфных образов и прямых произведений. В этом случае он будет замкнут и относительно образования подпрямых произведений (класс решеток, изоморфных всевозможным подпрямым произведениям семейства K-решеток, обозначается через $\mathfrak{P}_S(K)$).

Для произвольного класса решеток K существует наименьшее из решеточных многообразий, содержащих класс K. Это *многообразие* $\mathfrak{Eq}(K)$, *порожденное классом* K. Например, если Φ — класс всех конечных решеток, то $\mathfrak{Eq}(\Phi) = \mathscr{L}$ (многообразие всех решеток). Как и вообще для универсальных алгебр, $\mathfrak{Eq}(K) = \mathfrak{H}\mathfrak{S}\mathfrak{P}(K)$, т. е. многообразие $\mathfrak{Eq}(K)$ состоит из гомоморфных образов подрешеток прямых произведений K-решеток. Более экономное представление $\mathfrak{Eq}(K) = \mathfrak{H}\mathfrak{P}_S(K)$ (гомоморфные образы подпрямых произведений) также имеет место для произвольных универсальных алгебр. Таким образом, класс K уже тогда будет многообразием, когда он замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Отсюда следует также, что два решеточных многообразия, имеющих одинаковые подпрямо неразложимых решетки, совпадают. Если K — конечное множество конечных решеток, то $\mathfrak{Eq}(K) = \mathfrak{P}_S\mathfrak{H}\mathfrak{S}(K)$. В частности, каждая подпрямо неразложимая решетка многообразия $\mathfrak{Eq}(K)$ принадлежит классу $\mathfrak{H}\mathfrak{S}(K)$. Каждая подпрямо неразложимая решетка из объединения двух решеточных многообразий $V_1 + V_2$ содержится в V_1 или в V_2. Эти свойства тесно связаны с $\bigcup$-неразложимостью элементов решетки Λ всех многообразий решеток. Если многообразие порождается конечной подпрямо неразложимой решеткой, то оно является вполне $\bigcup$-неразложимым в Λ элементом. С другой стороны, всякий вполне $\bigcup$-неразложимый в Λ элемент порождается подпрямо неразложимой решеткой. Наконец, многообразие, порожденное подпрямо неразложимой решеткой, $\bigcup$-неразложимо в Λ. Многообразие $\mathcal{L}$ всех решеток является $\bigcup$-неразложимым элементом решетки Λ, но не будет ее вполне $\bigcup$-неразложимым элементом, так как $\mathcal{L}$ представляет собой, например, объединение всевозможных многообразий, порожденных каждое одной конечной решеткой.

Пусть V — некоторое многообразие решеток. О решетке $F \in V$ говорят, что она *V-свободно порождается* своим *подмножеством* X, если всякое отображение φ_0: $X \to L$, где L — произвольная решетка из V, можно продолжить до гомоморфизма φ: $F \to L$. Для любого кардинального числа α в V существует решетка, V-свободно порожденная подмножеством мощности α. Решетка F называется *V-свободной*, если она V-свободно порождается некоторым подмножеством $X \subseteq F$. Две V-свободные решетки F_1 и F_2 с равномощными порождающими множествами соответственно X_1 и X_2 изоморфны. Таким образом, в каждом многообразии V существует единственная с точностью до изоморфизма *V-свободная решетка ранга* α, т. е. с порождающим множеством мощности α. Она обозначается $FV(\alpha)$. Свободная дистрибутивная решетка $FD(n)$ конечного ранга n конечна. Например, $FD(3)$ содержит 18 элементов, а $FD(7)$ имеет 2 414 682 040 996 элементов. В свободной модулярной решетке $FM(3)$ 28 элементов, а $FM(4)$ уже бесконечна, причем имеет алгоритмически неразрешимую проблему равенства слов (Herrmann Ch.// Math. Ann. — 1983. — V. 265, № 4. — P. 513—527). Всякое многообразие решеток V порождается одной из своих решеток, например, V-свободной решеткой счетного ранга. Многообразие дистрибутивных решеток $\mathcal{D}$ порождается уже двухэлементной цепью.

Многообразие решеток, которое можно задать конечным набором тождеств, называется *конечно базируемым* (о таком многообразии говорят также, что оно имеет *конечный базис тождеств*). Всякая конечная решетка порождает конечно базируемое многообразие, однако существуют многообразия решеток, не имеющие конечного базиса тождеств. Более того, объединение двух конечно базируемых многообразий решеток не обязательно имеет конечный базис тождеств. Каждое конечно базируемое многообразие решеток может быть задано двумя тождествами. Только два многообразия решеток определимы одним тождеством: тривиальное $\mathscr{E}$ (тождеством $x = y$) и многообразие всех решеток $\mathscr{L}$ (тождеством от семи переменных) (см. [16], с. 42; [17], с. 58; [18], с. 153). Конечно базируемые многообразия, и только они, являются компактными элементами решетки, двойственной для решетки всех многообразий решеток.

Рассмотрим некоторые конкретные многообразия решеток. Многообразие $\mathscr{D}$ дистрибутивных решеток является единственным атомом решетки Λ и содержится в любом решеточном многообразии, отличном от многообразия $\mathscr{E}$ одноэлементных решеток. Как уже отмечалось, $\mathscr{D} = \mathfrak{Eq}(C_2)$, где C_2 — двухэлементная цепь. Говорят, что многообразие V_2 является *покрытием* многообразия V_1 в решетке Λ, если $V_1 \subset V_2$ и из $V_1 \subseteq V \subseteq V_2$ следует, что $V = V_1$ или $V = V_2$ для любого многообразия $V \in \Lambda$. Каждый элемент решетки Λ всех многообразий решеток (кроме многообразия $\mathscr{L}$ всех решеток) имеет покрытие. Многообразие $\mathscr{L}$ не является покрытием ни для какого элемента решетки Λ (т. е. в Λ нет дуальных атомов). Многообразие $\mathscr{D}$ имеет в Λ два покрытия — это многообразия $\mathscr{M}_3 = \mathfrak{Eq}(M_3)$ и $\mathscr{N}_5 = \mathfrak{Eq}(N_5)$, порожденные соответственно ромбом M_3 и пятиугольником N_5. Каждое многообразие решеток, собственно содержащее многообразие $\mathscr{D}$, содержит $\mathscr{M}_3$ или $\mathscr{N}_5$. Дистрибутивным решеткам посвящен § 3.

Многообразие $\mathscr{M}$ всех модулярных решеток выделяется в $\mathscr{L}$ тождеством $xy + xz = x(y + xz)$. Многообразие $\mathscr{M}$ имеет континуум подмногообразий и не порождается своими конечными членами (т. е. конечными модулярными решетками). Единственным покрытием для $\mathscr{M}$ в решетке Λ является многообразие $\mathscr{M} + \mathscr{N}_5$. В этом последнем (и, значит, во всех его подмногообразиях) каждая решетка с единственными дополнениями дистрибутивна, т. е. является булевой (см. [8], с. 390). Элемент $\mathcal{M}$ решетки Λ $\bigcup$-неразложим, но неизвестно, будет ли он вполне $\bigcup$-неразложимым. Модулярным решеткам посвящен § 2.

Подмногообразие $\mathcal{M}_3 = \mathfrak{Eq}(M_3)$ в многообразии $\mathcal{M}$ всех модулярных решеток определяется тождеством

$$x(y+z)(y+u)(z+u) \leqslant xy + xz + xu$$

(длинное решеточное тождество, имеющее вид $t_1 t_2 = t_1$, обычно записывают в форме равносильного тождественного неравенства $t_1 \leqslant t_2$). В решетке Λ элемент $\mathcal{M}_3$ имеет три покрытия.

Шестнадцать покрытий у многообразия $\mathcal{N}_5 = \mathfrak{Eq}(N_5)$, порожденного пятиугольником N_5. Эквациональный базис для $\mathcal{N}_5$ получается присоединением к системе тождеств, определяющей класс решеток, еще двух тождеств (см. [24], с. 183):

$$x(y+z)(y+u) \leqslant x(y+zu) + xz + xu,$$
$$x(y+z(x+u)) = x(y+xz) + x(xy+zu).$$

Многообразие $\mathcal{N}_5$ порождается также всевозможными решетками ширины 2 (ширина решетки — это максимальное число ее попарно несравнимых элементов).

Компьютерные вычисления позволили установить количество элементов в свободных решетках небольших рангов для многообразий $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{N}_5$ и $\mathcal{V} = \mathcal{M}_3 + \mathcal{N}_5$. Именно, $F\mathcal{M}_3(3) = 28$, $F\mathcal{N}_5(3) = 99$, $F\mathcal{V}(3) = 379$, $F\mathcal{M}_3(4) = 19\,982$, $F\mathcal{N}_5(4) = 540\,792\,672$, $F\mathcal{V}(4) = 842\,356\,943\,788$ (Berman I., Wolk B.//Algebra Universalis. — 1980. — V. 10, № 3. — P. 269—289).

Решетка L называется *аргезиевой* (от «Аргезий» — латинизированная форма фамилии Дезарг), если в ней имеет место тождество

$$(x+y)(z+u)(v+w) \leqslant x(t+z) + y(t+u),$$

где $t = (x+z)(y+u)((x+v)(y+w) + (z+v)(u+w))$.

Многообразие $\mathcal{A}$ аргезиевых решеток содержится в многообразии всех модулярных решеток $\mathcal{M}$: если в решетке $L \in \mathcal{A}$ даны три элемента a, b, c и $a \geqslant b$, то при $x = u = c$, $y = z = v = b$, $w = a$ из аргезиева тождества вытекает неравенство $a(b+c) \leqslant b + ac$, и, следовательно, в L выполняется модулярный закон. Аргезиево тождество истинно, например, в решетке всех подгрупп любой абелевой группы. Вообще, если решетки конгруэнций всех алгебр некоторого многообразия модулярны, то эти решетки — аргезиевы. Конечная аргезиева решетка изоморфна двойственной ей решетке (см. [24], с. 124 и 132). Решетка подпространств проективного геометрического пространства тогда и только тогда будет аргезиевой, когда в этом пространстве верна теорема Дезарга. Аргезиевы решетки называют также *дезарговыми или арговыми решетками* (о них см. также в п. 2.2).

Решетка L, по определению, *n-дистрибутивна* ($n \geqslant 1$), если в ней выполняется *тождество n-дистрибутивности*

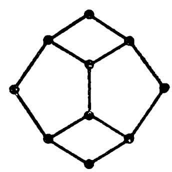
$$x \sum_{i=0}^{n} y_i = \sum_{j=0}^{n} \left(x \sum_{i=0,\, i \neq j}^{n} y_i \right).$$

При $n = 1$ получаются дистрибутивные решетки. Многообразие модулярных n-дистрибутивных решеток обозначается через $\mathscr{D}_n$. Для модулярных решеток тождество n-дистрибутивности равносильно двойственному ему тождеству. Модулярная решетка L будет n-дистрибутивной тогда и только тогда, когда ее решетка идеалов $\operatorname{Id} L$ не содержит подрешеток, изоморфных решетке подпространств n-мерного проективного пространства. Решетка всех подгрупп абелевой группы n-дистрибутивна в том и только том случае, когда конечный специальный ранг этой группы не превосходит n (группа G, по определению, имеет конечный специальный ранг r, если r является наименьшим числом с тем свойством, что всякая конечно порожденная подгруппа группы G обладает системой порождающих, содержащей не более чем r элементов). В частности, при $n = 1$ (т. е. в случае дистрибутивности) получаются локально циклические группы. Если $n \geqslant 2$, то многообразие $\mathscr{D}_n$ имеет в решетке Λ счетное множество покрытий (Huhn A. P.// Acta Sci. Math. — 1983. — V. 46. — P. 85—98).

Решетка L называется *p-модулярной*, если она удовлетворяет *тождеству p-модулярности*

$$(x + yz)(z + xy) = z(x + yz) + x(z + xy).$$

Решетка L тогда и только тогда будет р-модулярной, когда она не содержит подрешеток с диаграммой



Решетка аффинных подпространств n-мерного векторного пространства над полем, имеющим характеристику, отличную от 2, является немодулярной p-модулярной решеткой. В многообразии p-модулярных решеток каждая решетка вложима в решетку с единственными дополнениями, принадлежащую этому многообразию (см. [11]). О многообразиях решеток см. в [8], гл. V и [24].

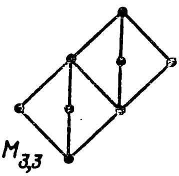
Квазимногообразие решеток — это такой класс решеток, который может быть задан некоторой системой *квазитождеств*, т. е. импликаций вида

$$p_1 = q_1 \; \& \; p_2 = q_2 \; \& \; \ldots \; \& \; p_{n-1} = q_{n-1} \to p_n = q_n,$$

где p_i, q_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — некоторые решеточные многочлены. В частности, в число квазимногообразий входят и все многообразия. Аксиоматизируемый класс K решеток будет квазимногообразием тогда и только тогда, когда он содержит одноэлементную решетку (т. е. $\mathscr{E} \subseteq K$), замкнут относительно взятия подрешеток (т. е. $\mathfrak{S}(K) \subseteq K$) и образования прямых произведений (т. е. $\mathfrak{P}(K) \subseteq K$).

Теоретико-множественное пересечение любого семейства квазимногообразий является квазимногообразием. Всевозможные квазимногообразия решеток образуют полную решетку Λ^* с наибольшим элементом $\mathscr{L}$ — (квази)многообразие всех решеток и наименьшим элементом $\mathscr{E}$ — тривиальное (квази)многообразие, состоящее из одноэлементных решеток. Решетка Λ^* немодулярна, но в ней (как и во всякой решетке квазимногообразий универсальных алгебр) выполняется *квазитождество полудистрибутивности* $x + y = x + z \to x + y = x + yz$. Многообразие всех решеток является $\bigcup$-неразложимым элементом и в решетке Λ^* (Игошин В. И.//Упорядоченные множества и решетки. — Вып. 5. — Саратов, 1978. — С. 44—55). Класс Φ всех конечных решеток не содержится ни в каком отличном от $\mathscr{L}$ квазимногообразии решеток (Будкин А. И., Горбунов В. А.//Алгебра и логика. — 1975. — Т. 14, № 2. — С. 123—142).

Пусть $\mathscr{M}_{3,3}$ обозначает многообразие, порожденное модулярной решеткой



Это многообразие является одним из покрытий многообразия $\mathscr{M}_3$ в решетке Λ всех многообразий решеток и, следовательно, содержит всего четыре подмногообразия. Они образуют цепь: $\mathscr{E} \subset \mathscr{D} \subset \mathscr{M}_3 \subset \subset \mathscr{M}_{3,3}$. Однако решетка квазимногообразий, содержащихся в $\mathscr{M}_{3,3}$, континуальна и немодулярна (Grätzer G., Lakser H.//Algebra Universalis. — 1979. — V. 9. — P. 102—115). Будучи порожденным конечной решеткой, многообразие $\mathscr{M}_{3,3}$ конечно базируемо. В то же время $\mathscr{M}_{3,3}$ не имеет конечного базиса квазитождеств (Белкин В. П.//Алгебра и логика. — 1978. — Т. 17, № 3. — С. 247—259). Собственные нетривиальные подмногообразия многообразия $\mathscr{M}_{3,3}$ (т. е. $\mathscr{D}$ и $\mathscr{M}_3$) не имеют подквазимногообразий, не являющихся многообразиями (Игошин В. И.// Мат. заметки. — 1974. — Т. 16, № 1. — С. 49—56). Отсюда следует, что единственным атомом решетки квазимногообразий решеток Λ^* является многообразие $\mathscr{D}$ дистрибутивных решеток и что в решетке Λ^* элемент $\mathscr{D}$ имеет своим покрытием элемент $\mathscr{M}_3$.

5.4. Некоторые обобщения решеток. Существует много обобщений понятия решетки. Самыми известными из них являются, по-видимому, слабо ассоциативная решетка и косая решетка. Теория слабо ассоциативных решеток в достаточной мере развита в алгебраическом аспекте, косые решетки привлекают внимание возможностями приложений в квантовой физике.

Пусть на множестве A задано рефлексивное и антисимметричное отношение $\trianglelefteq$. Элемент s называется точной верхней гранью элементов $a, b \in A$, если 1) $a \trianglelefteq s$ и $b \trianglelefteq s$, 2) для любого $x \in A$ из $a \trianglelefteq x$ и $b \trianglelefteq x$ следует, что $s \trianglelefteq x$. Если точная верхняя грань для a и b существует, то она определена однозначно. Аналогично вводится понятие точной нижней грани для элементов $a, b \in A$ как такого элемента i, что: 1) $i \trianglelefteq a$ и $i \trianglelefteq b$, 2) для любого $x \in A$ из $x \trianglelefteq a$ и $x \trianglelefteq b$ следует, что $x \trianglelefteq i$. Любые два элемента множества A имеют не более чем одну точную нижнюю грань. Пусть в $(A, \trianglelefteq)$ любые два элемента a, b имеют точную верхнюю грань $a+b$ и точную нижнюю грань ab. Тогда A можно рассматривать как алгебру с двумя бинарными операциями. Эти операции идемпотентны, коммутативны, удовлетворяют законам поглощения $x+xy=x$, $x(x+y)=x$ и *законам слабой ассоциативности*: $(xz+yz)+z=z$ и $((x+z)(y+z))z=z$ (запись в виде $(xz+yz)+z=$ $=xz+(yz+z)$ и $((x+z)(y+z))z=(x+z)((y+$ $+z)z)$ объясняет название). Алгебра $(A, +, \cdot)$ типа $(2, 2)$, в которой операции обладают указанными свойствами, называется *слабо ассоциативной решеткой*. Если в слабо ассоциативной решетке A положить $x \trianglelefteq y$ тогда и только тогда, когда $xy=x$ (или, что равносильно, $x+y=y$), то отношение $\trianglelefteq$ будет рефлексивным и антисимметричным и при этом любые два элемента $a, b \in A$ имеют точную верхнюю грань (ею оказывается элемент $a+b$) и точную нижнюю грань (совпадающую с ab) в смысле отношения $\trianglelefteq$. Таким образом, получается полная аналогия с той связью, которая имеет место между частично упорядоченными множествами и решетками. Слабо ассоциативная решетка тогда и только тогда будет решеткой, когда ее отношение $\trianglelefteq$ транзитивно, т. е. является частичным порядком.

Примером слабо ассоциативной решетки может служить турнир — ориентированный граф без петель, в котором любые две различные вершины соединены дугой. Здесь $v_1 \trianglelefteq v_2$ означает наличие (ориентированного) пути из вершины v_1 в вершину v_2 (по соглашению $v \trianglelefteq v$ для любой вершины v). О слабо ассоциативных решетках см. Skala H.//Trellis Theory. Mem. Amer. math. Soc. — 1972. — № 121.

Косой решеткой называется алгебра $(A, +, \cdot)$ типа $(2, 2)$, операции которой идемпотентны, ассоциативны и удовлетворяют законам поглощения. Косая решетка, по определению, *слабо коммутативна*, если в ней имеют место *законы слабой коммутативности* $(x+y+z)(y+x)=x+y$ и $xyz+yx=xy$. Примеры слабо коммутативных решеток получаются по следующей общей схеме. Пусть A — произвольное непустое множество, $\trianglelefteq$ — квазипорядок на нем и $\varepsilon = \{(x, y) \in A \times A \mid x \trianglelefteq y \,\&\, y \trianglelefteq x\}$. В фактормножестве A/ε индуцируется частичный порядок: $[a] \leqslant [b]$ тогда и только тогда, когда $a \trianglelefteq b$ в A. Предположим, что частично упорядоченное множество $(A/\varepsilon, \leqslant)$ оказалось решеткой. Выделим в составе квазипорядка $\trianglelefteq$ какой-нибудь частичный порядок $\leqslant$, который удовлетворял бы следующим условиям: если $(a, b) \in \varepsilon$, то $a^{\Delta} \cap b^{\Delta} = \varnothing = a^{\nabla} \cap b^{\nabla}$ для любых различных элементов $a, b \in A$ (одним из таких частичных порядков будет, например, тождественное отношение Δ на A). Тогда элемент $s \in A$ называется точной верхней гранью (или объединением) элементов a, b, если: 1) $a \leqslant s$ и $b \trianglelefteq s$, 2) $[s] = [a] + [b]$ в решетке A/ε. Аналогично вводится понятие точной нижней грани (или пересечения) элементов a, b как такого элемента $i \in A$, что: 1) $i \leqslant a$ и $i \trianglelefteq b$, 2) $[i] = [a][b]$ в решетке A/ε. Так введенные операции идемпотентны, ассоциативны, удовлетворяют законам поглощения и законам слабой коммутативности, т. е. полученная алгебра оказывается слабо коммутативной решеткой.

Любая слабо коммутативная решетка $(A, +, \cdot)$ может быть получена по указанной схеме. Полагая $x \trianglelefteq y$ и $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда соответственно $xy = x$ и $yx = x$ (или, что равносильно, когда $y + x = y$ и $x + y = y$), получают на множестве A квазипорядок $\trianglelefteq$ и содержащийся в нем частичный порядок $\leqslant$. Далее (в вышеуказанных обозначениях), частично упорядоченное множество $(A/\varepsilon, \leqslant)$ будет решеткой и $a^{\Delta} \cap b^{\Delta} = \varnothing = a^{\nabla} \cap b^{\nabla}$ для любых различных элементов $a, b \in A$ таких, что $(a, b) \in \varepsilon$. При этом элемент $a + b$ оказывается точной верхней гранью элементов $a, b \in A$, а элемент ab — их точной нижней гранью в смысле приведенных выше определений (Gerhardts M. D.//Mathematikunterricht. — 1975. — V. 21, № 4. — P. 5—20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Теория структур. — М.: ИЛ, 1952.
2. Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984.
3. Бурбаки Н. Теория множеств. — М.: Мир, 1965.
4. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. — М.: ИЛ, 1955.
5. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. — М.: Наука, 1969.
6. Гливенко В. И. Основы общей теории структур. — Уч. зап. МГПИ им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. — 1937. — № 1. — С. 3—33.
7. Глухов М. М., Стеллецкий И. В., Фофанова Т. С. Теория структур//Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. — М.: ВИНИТИ, 1970. - С. 101—154.
8. Гретцер Г. Общая теория решеток. — М.: Наука, 1982.
9. Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. — М.: Наука, 1972.
10. Салий В. Н. Лекции по теории решеток. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1970.
11. Салий В. Н. Решетки с единственными дополнениями. — М.: Наука, 1984.
12. Сикорский Р. Булевы алгебры. — М.: Мир, 1969.
13. Скорняков Л. А. Теория структур//Итоги науки. Алгебра. — М.: ВИНИТИ, 1966. — С. 237—274.
14. Скорняков Л. А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. — М.: Физматгиз, 1961.
15. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. — М.: Наука, 1982.
16. Упорядоченные множества и решетки. Вып. 3. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975.
17. Упорядоченные множества и решетки. Вып. 7. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983.
18. Упорядоченные множества и решетки. — Братислава: Univerzita Komenského, 1985.
19. Упорядоченные множества и решетки. — Братислава: Univerzita Komenského, 1988.
20. Эсакиа Л. Л. Алгебры Гейтинга I. Теория двойственности. — Тбилиси: Мецниереба, 1985.
21. Balbes R., Dwinger Ph. Distributive lattices. — Columbia, Mo.: Univ. Mo. Press, 1974.
22. Beran L. Orthomodular lattices. Algebraic approach. — Praha: Academia, 1984.
23. Burris S., Sankappanavar. A course in universal algebra. — Berlin: Springer, 1981.
24. Crawley P., Dilworth R. P. Algebraic theory of lattices. — Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1973.
25. Donnellan Th. Lattice theory. — Oxford: Pergamon Press, 1968.
26. Dubreil-Jacotin M.-L., Lesieur L., Croisot R. Leçons sur la théorie des treillis. — Paris: Gauthier-Villars, 1953.
27. Dwinger Ph. Introduction to Boolean algebras. — Würzburg: Physica, 1971.
28. Gierz G., Hofmann K. H., Keimel K. e. a. A compendium of continuous lattices. — Berlin: Springer, 1980.

29. Grätzer G. Lattice theory. First concepts and distributive lattices. — San Francisco: Freeman and Co., 1971.
30. Grätzer G. Universal algebra. — New York e. a.: Springer, 1979.
31. Halmos P. Lectures on Boolean algebras. — New York: Van Nostrand, 1963.
32. Handbook of Boolean Algebras/Ed. Monk J. D. — Amsterdam e. a.: North-Holland, 1987.
33. Hermes H. Einführung in die Verbandstheorie. — Berlin: Springer, 1955.
34. Jónsson B. Topics in universal algebra. — Springer, 1972.— (Lect. Notes Math. V. 250).
35. Kalmbach G. Orthomodular lattices. — London e. a.: Acad. Press, 1983.
36. Kalmbach G. Measures and Hilbert lattices. — Singapore: World Scientific Publishing Co., 1986.
37. Lattice theory//Proc. Symp. Pure Math. II. — Providence: Amer. Math. Soc., 1961.
38. Maeda F. Kontinuierliche Geometrien. — Berlin e. a.: Springer, 1958.
39. Maeda F., Maeda S. Theory of symmetric lattices. — Berlin e. a.: Springer, 1970.
40. McKenzie R. M., McNulty G., Taylor R. Algebras, lattices, varieties. I. — Monterey, Calif.: Wordsworth-Brooks/Co., 1987.
41. Neumann J. von. Continuous Geometry. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1960.
42. Rasiowa H. An algebraic approach to non-classical logics. — Amsterdam: North-Holland, 1974.
43. Rutherford D. E. Introduction to lattice theory. — Edinburgh: Oliver and Boyd, 1965.
44. Schmidt E. T. A Survey on Congruence Lattice Representations. — Leipzig: Teubner, 1982.
45. Szàsz G. Einführung in die Verbandstheorie. — Leipzig: Teubner, 1962.
46. Trends in lattice theory. — New York: Van Nostrand, 1970.
47. Universal Algebra and Lattice Theory. — Berlin e. a.: Springer, 1983.

ГЛАВА VI

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

В настоящей главе отражены основные понятия и наиболее фундаментальные результаты теории универсальных алгебр. Затронуты некоторые моменты теории моделей. Систематическое изложение теории универсальных алгебр можно найти в монографиях [13, 14, 18, 19, 21—23, 30, 41, 42, 54, 59, 62, 68]. Теории моделей посвящены монографии [16, 17, 23, 24, 33]. Новейшие исследования по универсальным алгебрам отражены в [1—4, 24, 27—29, 32, 34—36, 38—40, 43—48, 50, 52, 53, 55—58, 65, 66, 69] и др.

§ 1. Основные понятия теории универсальных алгебр и алгебраических систем

1.1. Алгебры и подалгебры. Для произвольного множества A и целого неотрицательного числа n обозначим n-ю декартову степень множества A через A^n. В частности, если $n=0$, то под A^0 будем понимать одноэлементное множество. Отображение из A^n в A называется *n-арной алгебраической операцией на A*. Таким образом, нульарная алгебраическая операция t отображает одноэлементное множество A^0 в элемент $t(A^0)$ из A, т. е. нульарную операцию t можно отождествить с элементом $t(A^0)$.

Сигнатурой или *системой операций* называется набор множеств $T=\{T_n|n\geqslant 0\}$. *Универсальной алгеброй (A,T) сигнатуры T*, или *T-алгеброй*, называется множество A (его называют *носителем алгебры (A,T)*), в котором при любом $n\geqslant 0$ каждому $t\in T_n$ сопоставлена n-арная алгебраическая операция на A. Для простоты обозначения операцию на A, соответствующую $t\in T_n$, также обозначают через t.

Если $a_1, \ldots, a_n \in A$, то результат применения операции t к строке $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ будем обозначать через $t(a_1, \ldots, a_n)$. Часто используется также обозначение $a_1 \ldots a_n t$. Кроме того, при рассмотрении алгебр фиксированной сигнатуры T алгебру (A, T) отождествляют с ее носителем и обозначают через A.

Если сигнатура состоит из одной бинарной операции t, то (A, T) — это множество с одной бинарной операцией. Обычно при записи символ t опускают и вместо $t(x, y)$ пишут xy. При этом саму бинарную операцию часто называют умножением. Получающаяся таким образом универсальная алгебра называется *группоидом*.

Полугруппа — группоид, в котором операция умножения ассоциативна (см. гл. IV). Сигнатура моноида состоит из одной бинарной ассоциативной операции умножения и одной нульарной операции, фиксирующей элемент, который будем обозначать через 1, причем $x1 = 1x = x$ для всех x (см. гл. IV). Группу (см. гл. II) можно рассматривать как алгебру $(A, xy, x^{-1}, 1)$, где xy — бинарная, x^{-1} — унарная, а 1 — нульарная операции, причем $(xy)z = x(yz)$, $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$, $x1 = 1x = x$ для любых $x, y, z \in A$. Другие примеры универсальных алгебр приведены в § 4. Отметим, что решетки, кольца, линейные алгебры и т. д. также являются примерами универсальных алгебр.

Несколько иной подход к определению универсальной алгебры связан с заменой понятия сигнатуры на понятие типа (см. [49], § 7). Назовем *типом* τ последовательность целых неотрицательных чисел $(n_0, n_1, \ldots, n_\gamma, \ldots)$, $\gamma < o(\tau)$, где $o(\tau)$ — некоторый кардинал. *Алгеброй типа* τ называется множество A с системой алгебраических операций $T = \{f_\gamma \mid \gamma < o(\tau)\}$, причем каждая операция f_γ является n_γ-арной. Ясно, что это определение универсальной алгебры эквивалентно приведенному выше. Существуют другие подходы к определению понятия универсальной алгебры, связанные с клонами и категориями (см. пп. 1.8, 3.6).

Подмножество B в алгебре A называется *подалгеброй*, если для любого целого числа $n \geqslant 0$ и любых $t \in T_n$, $b_1, \ldots, b_n \in B$ справедливо включение $t(b_1, \ldots, b_n) \in B$. В этом случае B само является T-алгеброй. Любая подалгебра в A содержит все элементы $t(A^0)$, где $t \in T_0$. Таким образом, если T_0 непусто, то любая подалгебра в A непуста. Если же T_0 пусто, то обычно в качестве подалгебры допускается и пустое подмножество.

Обозначим через $\mathrm{Sub}(A)$ множество всех подалгебр алгебры A. Множество $\mathrm{Sub}(A)$ можно частично упорядочить по включению. Легко видеть, что если B_i, $i \in I$, — подалгебры в A, то их пересечение $\bigcap\limits_i B_i$ также является подалгеброй в A. Следовательно, частично упорядоченное множество $\mathrm{Sub}(A)$ оказывается полной решеткой. Это позволяет говорить о *системах порождающих* в алгебрах. Действительно, пусть X — подмножество в T-алгебре A. Подалгеброй $\langle X\rangle$, порожденной множеством X, называется пересечение всех подалгебр в A, содержащих X. Таким образом, $\langle X\rangle$ — это наименьшая подалгебра в A, содержащая X. В силу полноты решетки $\mathrm{Sub}(A)$ эта конструкция корректна. В частном случае, когда $\langle X\rangle = A$, множество X называется *системой порождающих* (или *образующих*) алгебры A. Говорят также, что в этом случае *множество X порождает алгебру A*. Алгебра A называется *конечно порожденной*, если в ней существует конечная система порождающих элементов.

Конечно порожденные подалгебры в алгебре A, и только они, являются *компактными элементами* решетки подалгебр $\mathrm{Sub}(A)$. Другими словами, конечно порожденные подалгебры B в A, и только они, обладают следующим свойством: если B содержится в подалгебре, порожденной семейством подалгебр B_i, $i \in I$, то существует такое конечное подмножество J в I, что B содержится в подалгебре, порожденной подалгебрами B_j, $j \in J$. Каждая подалгебра в A является объединением своих конечно порожденных подалгебр. Таким образом, решетка $\mathrm{Sub}(A)$ *алгебраична*, т. е. она полна и порождена своими компактными элементами. По теореме Биркгофа — Фринка (см. [49], § 9) верно и обратное утверждение — любая алгебраическая решетка изоморфна решетке подалгебр некоторой универсальной алгебры.

Для любой сигнатуры T и любого множества X существует T-алгебра $F(X)$, порождаемая множеством X. Элементы $F(X)$ будем называть *словами* или *термами.* Построение слов осуществляется индуктивно:

1) словами являются элементы x из множества X;
2) символы $t \in T_0$ являются словами;
3) если n — натуральное число, $w_1, \ldots, w_n$ — слова и $t \in T_n$, то символ $t(w_1, \ldots, w_n)$ также назовем словом.

В соответствии с 2) и 3) в множестве слов вводится действие операций из T. Построенная таким образом T-алгебра $F(X)$ называется *алгеброй слов в алфавите* X, или *абсолютно свободной* T*-алгеброй с базой* X. Роль алгебры слов будет отмечена ниже в связи с рассмотрением факторалгебр и предмногообразий (см. пп. 1.4, 2.1).

Пусть A — некоторая универсальная алгебра сигнатуры T и $P(A)$ — множество всех подмножеств в A. Тогда $P(A)$ естественным образом превращается в T-алгебру. Действительно, пусть n — целое неотрицательное число, $t \in T_n$. Тогда для $X_1, \ldots, X_n \in P(A)$ через $t(X_1, \ldots, X_n)$ обозначим множество всех значений $t(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i$. Получающаяся алгебра $P(A)$ называется *алгеброй подмножеств.*

1.2. Гомоморфизмы алгебр. Отображение f из T-алгебры A в T-алгебру B называется *гомоморфизмом,* если для любого целого неотрицательного числа n, любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ и любого $t \in T_n$ справедливо соотношение

$$f(t(a_1, \ldots, a_n)) = t(f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$

Взаимно однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом.* Образ любого гомоморфизма является подалгеброй. Произведением или композицией гомоморфизмов называется результат их последовательного применения. Произведение конечного числа гомоморфизмов (изоморфизмов) оказывается гомоморфизмом (изоморфизмом). Каждый гомоморфизм $f\colon A \to B$ разлагается в произведение $f = h \circ g$, где $g\colon A \to \operatorname{Im} f$ — сюръективный гомоморфизм, а $h\colon \operatorname{Im} f \to B$ — инъективный гомоморфизм (по поводу обозначения $h \circ g$ см. п. I. 1.4). Гомоморфизм алгебры A в себя называется *эндоморфизмом* алгебры A. Изоморфизм алгебры A на себя называется ее *автоморфизмом.* В каждой алгебре имеется тождественный автоморфизм. Таким образом, все эндоморфизмы алгебры A образуют моноид $\mathrm{End}(A)$, группой обратимых элементов (она обозначается через $\mathrm{Aut}(A)$) которого являются все автоморфизмы этой алгебры. Все алгебры сигнатуры T и их гомоморфизмы образуют категорию $K(T)$ (см. гл. VII).

Гомоморфизм T-алгебр $f\colon A \to B$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он обратим, т. е. существует такой гомоморфизм $g\colon B \to A$, что $g \circ f$ тождествен на A и $f \circ g$ тождествен на B. Если существует изоморфизм T-алгебр $f\colon A \to B$, то пишут $A \simeq B$.

Пусть A — произвольная алгебра сигнатуры T, X — некоторое множество и f — отображение множества X в A. Тогда существует, и притом единственный, гомоморфизм T-алгебр $f\colon F(X) \to A$, продолжающий отображение f. Обратно, если B — некоторая T-алгебра и X — подмножество в B, обладающее указанным свойством, то $B \simeq F(X)$. Отсюда вытекает, что если X — подмножество в произвольной универсальной алгебре A, $f\colon X \to A$ — естественное вложение и $f\colon F(X) \to A$ — гомоморфизм алгебр, продолжающий вложение X в A, то $\mathrm{Im}\, f$ — подалгебра в A, порожденная X. Этот результат позволяет рассматривать каждое слово $w \in F(X)$ как алгебраическую операцию в A. Действительно, пусть в запись слова w входят элементы $x_1, \ldots, x_n \in X$. Если $a_1, \ldots, a_n \in A$, то рассмотрим отображение $f\colon X \to A$, при котором $f(x_i) = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Положим $w(a_1, \ldots, a_n) = f(w)$. Нетрудно видеть, что это определение корректно. Построенная операция w называется *главной производной операцией* (в терминологии [16, 17]) или *термальной операцией* (в терминологии [41, 49]). Если в слове w произвольным m аргументам $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ придать фиксированные значения $a_1, \ldots, a_m \in A$, то получающаяся $(n-m)$-арная алгебраическая операция на A называется (в терминологии [21, 22]) *производной* или (в терминологии [49]) *алгебраической*. Главные производные операции в [41, 49] называются также полиномиальными операциями. В книге [58] принята противоположная терминология — главные производные операции в ней называются алгебраическими, а производные операции — полиномиальными. Естественная интерпретация понятий производных и главных производных операций возникает в связи с рассмотрением клонов (см. п. 1.6) и алгебр полиномов (см. п. 2.1).

1.3. Прямое произведение алгебр. Пусть задана система T-алгебр A_i, $i \in I$, и

$$A = \prod_{i \in I} A_i.$$

На множестве A зададим действие операций из T покоординатно, т. е. если n — целое неотрицательное число, $t \in T_n$, $a_j = (\ldots, a_{ji}, \ldots) \in A$, то положим

$$t(a_1, \ldots, a_n) = (\ldots, t(a_{1i}, \ldots, a_{ni}), \ldots).$$

Построенная T-алгебра A называется *прямым произведением алгебр* A_i, $i \in I$. Если $I = \{1, \ldots, m\}$, то вместо $\prod_{i \in I} A_i$ обычно пишут $A_1 \times \ldots \times A_m$ (ср. п. VII. 1.7). Для каждого $i \in I$ через p_i: $A \to A_i$ обозначим естественную проекцию, при которой $p_i(\ldots, a_i, \ldots) = a_i \in A_i$. Каждая проекция p_i является сюръективным гомоморфизмом T-алгебр.

Если заданы T-алгебры B и A_i, $i \in I$, а также гомоморфизмы T-алгебр f_i: $B \to A_i$, $i \in I$, то отображение

$$f\colon B \to A = \prod_{i \in I} A_i,$$

при котором $f(b) = (\ldots, f_i(b), \ldots)$, является, и притом единственным, гомоморфизмом T-алгебр со свойством $p_i \circ f = f_i$ для всех $i \in I$. Обратно, если T-алгебра G обладает системой сюръективных гомоморфизмов p'_i: $G \to A_i$, причем для любого набора гомоморфизмов g_i из произвольной T-алгебры B в A_i, $i \in I$, то существует, и притом единственный, гомоморфизм g: $B \to G$, для которого $p'_i \circ g = g_i$, то $G \simeq A$. Этот результат показывает, что прямое произведение однозначно с точностью до изоморфизма определяется в категории $K(T)$ своими категорными свойствами.

Элементы прямого произведения A алгебр A_i, $i \in I$, можно интерпретировать и другим способом.

Действительно, каждую строку

$$a = (\ldots, a_i, \ldots) \in A = \prod_{i \in I} A_i$$

можно рассматривать как функцию a на I, значение которой в точке $i \in I$ равно $a_i \in A_i$. При такой интерпретации элементов прямого произведения действие операций из T выглядит следующим образом: если n — целое неотрицательное число, $a_1, \ldots, a_n \in A_i$, то для $t \in T_n$ и $i \in I$

$$(t(a_1, \ldots, a_n))(i) = t(a_1(i), \ldots, a_n(i)) \in A_i.$$

В случае когда $A_i \simeq B$ для всех $i \in I$, прямое произведение алгебр A_i, $i \in I$, часто обозначается через B^I и называется *декартовой* или *прямой степенью* алгебры B.

1.4. Конгруэнции и факторалгебры. *Конгруэнцией* θ алгебры A называется отношение эквивалентности θ на A, являющееся подалгеброй в A^2. Два элемента a и b из A назовем θ-эквивалентными, если пара (a, b) принадлежит θ. Отношение эквивалентности θ задает разбиение множества A на непересекающиеся классы *θ-эквивалентных элементов*. Для элемента $a \in A$ через $\theta(a)$ обозначим класс θ-эквивалентных элементов в A, содержащий a. Пусть A/θ — множество классов θ-эквивалентных элементов в A. Превратим A/θ в T-алгебру, полагая для любого целого неотрицательного числа n, любых $a_1, \ldots, a_n \in A$ и любого $t \in T_n$

$$t(\theta(a_1), \ldots, \theta(a_n)) = \theta(t(a_1, \ldots, a_n)).$$

Несложная проверка показывает, что это определение корректно. Построенная T-алгебра A/θ называется *факторалгеброй* T-алгебры A по конгруэнции θ.

Естественное отображение $p\colon A \to A/\theta$, переводящее элемент $a \in A$ в класс $\theta(a)$, является сюръективным гомоморфизмом T-алгебр и называется *естественным гомоморфизмом*. При этом $p(a) = p(b)$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in \theta$.

Ядром гомоморфизма T-алгебр $f\colon A \to B$ называется подмножество

$$\operatorname{Ker} f = \{(a, b) \mid (a, b) \in A^2,\ f(a) = f(b)\}$$

в A^2. Ядро естественного гомоморфизма $p\colon A \to A/\theta$ совпадает с θ. Ядро любого гомоморфизма является конгруэнцией и любая конгруэнция является ядром некоторого гомоморфизма. Важную роль играет *теорема о гомоморфизмах*: если задан гомоморфизм T-алгебр $f\colon A \to B$, то существует такой изоморфизм T-алгебр $h\colon \operatorname{Im} f \to A/\operatorname{Ker} f$, что $h \circ f = p$, где $p\colon A \to A/\operatorname{Ker} f$ — естественный гомоморфизм. Из этой теоремы вытекает, что произвольная T-алгебра изоморфна факторалгебре алгебры слов $F(X)$ для некоторого алфавита X. *Первая теорема об изоморфизме*: если θ — конгруэнция в алгебре A и B — подалгебра в A, то $\theta \cap B^2$ — конгруэнция алгебры B, причем образ B при естественном гомоморфизме A на A/θ изоморфен $B/(\theta \cap B^2)$. *Вторая теорема об изоморфизме*: предположим, что θ, θ' — две конгруэнции алгебры A, причем $\theta \supseteq \theta'$; если

$$\theta/\theta' = \{(\theta'(a), \theta'(b)) \mid (a, b) \in \theta\},$$

то θ/θ' является конгруэнцией алгебры A/θ' и

$$(A/\theta')/(\theta/\theta') \simeq A/\theta'.$$

Для произвольной алгебры множество всех ее конгруэнций $\operatorname{Con}(A)$ является полной подрешеткой в решетке подалгебр $\operatorname{Sub}(A^2)$. Таким образом, можно говорить о *конгруэнциях, порожденных некоторым множеством пар* X в A^2, и, в частности, о конечно порожденных конгруэнциях. Компактными элементами решетки $\operatorname{Con}(A)$ являются конечно порожденные конгруэнции, и только они. Наименьшим элементом в $\operatorname{Con}(A)$ является диагональ $\Delta(A)$, а наибольшим элементом — конгруэнция A^2. При этом $A/\Delta(A) \simeq A$, а A/A^2 — одноэлементная алгебра.

Пересечение конгруэнций в решетке $\operatorname{Con}(A)$ совпадает с их теоретико-множественным пересечением. Объединение устроено значительно сложнее. Для его описания напомним, что произведение отношений θ и θ' на произвольном множестве X определяется равенством

$$\theta \circ \theta' = \{(x, y) \mid (\exists z)\,[(x, z) \in \theta,\ (z, y) \in \theta']\}.$$

Если $\theta, \theta' \in \operatorname{Con}(A)$, то объединение $\theta \vee \theta'$ в решетке $\operatorname{Con}(A)$ совпадает с теоретико-множественным объединением

$$\theta \vee \theta' = \bigcup_{n \geqslant 1} (\theta \circ \theta')^n.$$

Если конгруэнции θ и θ' перестановочны, т. е. $\theta \circ \theta' = \theta' \circ \theta$, то $\theta \vee \theta' = \theta \circ \theta'$.

Пусть алгебра A разлагается в прямое произведение алгебр $A = A_1 \times A_2$ и θ_i — ядро проекции алгебры A на A_i, $i = 1, 2$. Тогда $\theta_1 \wedge \theta_2 = \Delta(A)$, $\theta_1 \vee \theta_2 = A^2$ и $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$. Обратно, если θ_1, θ_2 — перестановочные конгруэнции на произвольной алгебре A с указанными свойствами для пересечения и объединения, то $A \simeq A/\theta_1 \times A/\theta_2$ (см. [28], с. 6).

Если в алгебре A все конгруэнции перестановочны, то решетка $\mathrm{Con}(A)$ модулярна (см. [19], гл. II, § 6). В T-алгебре A все конгруэнции перестановочны, если существует такое слово $p(x, y, z)$ сигнатуры T, что для произвольных элементов a, b, c из A выполнены соотношения $a = p(a, b, b) = p(b, b, a)$ (см. [24], с. 26—27). Для предмногообразий алгебр справедливо и обратное утверждение (см. п. 2.1.). Из этого результата вытекает, что в группах, кольцах, модулях (и даже мультиоператорных группах), примитивных квазигруппах (см. п. 6.4) конгруэнции перестановочны. Действительно, в группах можно положить $p(x, y, z) = xy^{-1}z$, в кольцах, модулях и мультиоператорных группах — $p(x, y, z) = x - y + z$, в примитивных квазигруппах — $p(x, y, z) = (x/(y\backslash y))(y\backslash z)$. Если в алгебре A конгруэнции перестановочны, то решетка $\mathrm{Con}(A)$ удовлетворяет *дезаргову тождеству*

$$(x_0 \vee y_0) \wedge (x_1 \vee y_1) \wedge (x_2 \vee y_2) \leqslant (x_1 \wedge (z_0' \vee x_2)) \vee x_1,$$

где

$$z_0' = z_0 \wedge (z_1 \vee z_2)$$

и

$$z_i = (x_j \vee x_k) \wedge (y_j \vee y_k), \quad 1 \leqslant i \neq j \neq k \neq i \leqslant 3.$$

Дезаргово тождество не вытекает из модулярности (см. [49], с. 349).

Решетка конгруэнций $\mathrm{Con}(A)$ алгебраична. Обратно, если C — алгебраическая решетка, то существует такая универсальная алгебра A, что $C \simeq \mathrm{Con}(A)$ (см. [22], § 18; [49], с. 112—113). С другой стороны, для любой сигнатуры T существует модулярная алгебраическая решетка, неизоморфная решеткам конгруэнций T-алгебр (см. [49], с. 348). Вопрос о представлении конечной решетки в виде решетки конгруэнций конечной универсальной алгебры эквивалентен вопросу о представлении любой конечной решетки в виде интервала решетки подгрупп конечной группы (см. [53]). Существуют конечные простые решетки, не изоморфные решеткам конгруэнций группоидов (см. [53]).

Пусть заданы элементы c, d в T-алгебре A и подмножество H в A^2. Тогда следующие условия эквивалентны: (1) пара (c, d) принадлежит конгруэнции, порожденной множеством H; (2) существует конечная последовательность элементов $c=z_0$, z_1, ..., $z_n=d$ из A, причем для любого $i=0, 1, \ldots, n-1$ найдется такое слово $p_i(x)$ от одной переменной x, что $z_i=p_i(h_i)$, $z_{i+1}=p_i(h_i')$, и либо $(h_i, h_i')\in H$, либо $(h_i', h_i)\in H$ (см. [19], гл. II, § 6; [24], с. 28).

Конгруэнция, порожденная одной парой элементов (a, b), называется *главной конгруэнцией*, порожденной (a, b). Она обычно обозначается как $\theta_{a,b}$ или как $\theta(a, b)$. Обзор результатов по конгруэнциям алгебр можно найти в [1—4, 24, 34, 35, 49]; см. также п. 3.2.

Если T-алгебра A порождается множеством X, то, как отмечалось выше, $A\simeq F(X)/\theta$, где θ — некоторая конгруэнция в $F(X)$. Если θ порождается множеством пар R, то говорят, что A порождается множеством X и задается определяющими соотношениями R. При этом пишут $A=\langle X|R\rangle$.

Примеры. 1) Пусть A — группа и $\theta\in \mathrm{Con}(A)$. Тогда класс $\theta(1)$ является нормальной подгруппой в A, причем θ совпадает с разбиением A на смежные классы по нормальной подгруппе $\theta(1)$. Обратно, если N нормальная подгруппа в группе A, то разбиение на смежные классы по N является конгруэнцией в A.

2) Пусть A — кольцо [модуль над кольцом K] и $\theta\in \mathrm{Con}(A)$. Тогда $\theta(0)$ является идеалом [подмодулем] в A, причем θ совпадает с разбиением A на смежные классы по $\theta(0)$. Обратно, если N идеал [подмодуль] в A, то разбиение A на смежные классы по N является конгруэнцией кольца [модуля] A.

1.5. Подпрямые произведения и другие конструкции. Пусть задана система гомоморфизмов f_i из T-алгебры B в T-алгебры A_i, $i\in I$. Предположим, что

f — гомоморфизм из B в прямое произведение A алгебр A_i, $i \in I$, построенный в соответствии с п. 1.3. Тогда

$$\operatorname{Ker} f = \bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} f_i. \tag{$*$}$$

Назовем T-алгебру B *подпрямым произведением* T-алгебр A_i, $i \in I$, если в B существует такая система конгруэнций θ_i, $i \in I$, что $B/\theta_i \simeq A_i$ для любого $i \in I$ и $\bigcap_{i \in I} \theta_i = \Delta(B)$. В силу $(*)$ алгебра B является подпрямым произведением алгебр A_i, $i \in I$, в том и только том случае, если существует гомоморфное вложение

$$f\colon B \to \prod_{i \in I} A_i,$$

причем если p_i — естественные проекции из прямого произведения на A_i, $i \in I$, то $p_i \circ f$ сюръективно для любого $i \in I$ (см. [21], гл. IV, § 5; [30], гл. II, § 1). Если алгебра A является подпрямым произведением алгебр A_i, $i \in I$, то говорят также, что алгебра B *аппроксимируется* алгебрами A_i, $i \in I$. Алгебра B называется *финитно аппроксимируемой*, если B является подпрямым произведением конечных алгебр.

Алгебра A называется *подпрямо неразложимой* (или *монолитичной*), если в ней существует наименьшая конгруэнция, отличная от диагонали. Для произвольной алгебры A следующие условия эквивалентны: (1) алгебра A подпрямо неразложима; (2) если алгебра A является подпрямым произведением алгебр A_i, $i \in I$, с вложением

$$f\colon A \to \prod_{i \in I} A_i$$

и проекциями

$$p_j\colon \prod_{i \in I} A_i \to A_j,$$

то $p_j \circ f\colon A \to A_j$ является изоморфизмом для некоторого $j \in I$ (см. [21], гл. IV, § 5). Каждая алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр (см. [21], гл. IV, § 5).

Примеры. 1) Если $\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел и p — простое число, то кольца вычетов $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}p^k$, $k > 0$, являются подпрямо неразложимыми. Кольцо $\mathbf{Z}$ является подпрямым произведением колец $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}p^k$, $k>0$.

2) Единственной подпрямо неразложимой дистрибутивной решеткой является двухэлементная цепь. Аналогичное утверждение верно и для булевых алгебр.

Категория, объектами которой являются элементы некоторого множества, называется *диаграммой*. Предположим, что задано предмногообразие K алгебр сигнатуры T (см. п. 2.1). *Диаграммой T-алгебр* называется функтор A из диаграммы I в категорию K. Другими словами, для каждого $i \in I$ задана алгебра A_i из K, причем каждой стрелке (морфизму) $f\colon i \to j$ в диаграмме I сопоставлен гомоморфизм T-алгебр $A(f)\colon A(i) \to A(j)$. Кроме того, $A(fg) = A(f) \circ A(g)$ и $A(1) = 1$. *Копределом* (*обратным* или *проективным пределом*) в K функтора A называется такая алгебра B из K, что для любого $i \in I$ задан гомоморфизм алгебр $d_i\colon B \to A_i$, причем $A(f) \circ d_i = d_j$ для любого морфизма $f\colon i \to j$ в I. Кроме того, если какая-нибудь алгебра B' из K обладает указанным свойством относительно семейства гомоморфизмов $d'_i\colon B' \to A_i$, $i \in I$, то существует, и притом единственный, гомоморфизм $d'\colon B' \to B$ такой, что $d_i \circ d' = d'_i$ для всех $i \in I$. Двойственным образом определяется понятие *предела* (*прямого* или *индуктивного предела*) функтора $A\colon I \to K$. Если диаграмма I является подкатегорией в K, то под [ко]пределом диаграммы I понимают [ко]предел функтора вложения I в K.

В любом предмногообразии K существуют и единственны предел и копредел любой диаграммы K-алгебр. Действительно, если задана диаграмма K-алгебр A_i, то рассмотрим подалгебру B в $\prod\limits_{i \in I} A_i$, состоящую из всех таких элементов a, что

$$A(f)(a(i)) = a(j),$$

если в диаграмме I имеется морфизм $f\colon i \to j$. Тогда алгебра B из K является копределом диаграммы I в K. Для любого $i \in I$ гомоморфизм d_i совпадает с ограничением на B естественной проекции

$$\prod_{j \in I} A_j \to A_i.$$

Конструкция предела диаграмм в K связана с понятием реплики (см. п. 2.1).

Примеры. 1) Пусть в диаграмме I имеются только тождественные морфизмы для каждого $i \in I$. Тогда копредел диаграммы A: $I \to K$ совпадает с прямым произведением алгебр A_i, $i \in I$. Предел этой же диаграммы в K называется K-свободным произведением алгебр A_i, $i \in I$. Более подробно о свойствах свободных произведений см. п. 2.1.

2) Пусть задана некоторая T-алгебра B и I — множество всех ее конечно порожденных подалгебр. Тогда I является частично упорядоченным множеством и верхней полурешеткой. Следовательно, I можно понимать как категорию и как диаграмму T-алгебр. Алгебра B является пределом этой диаграммы. Это позволяет доказывать ряд утверждений для алгебры B, пользуясь их справедливостью для конечно порожденных подалгебр. Эти соображения используются, например, в локальных теоремах Мальцева (см. [23], гл. IV, § 8).

Понятие подпрямого произведения и предела диаграмм тесно связано с понятием *пучка алгебр*. Предположим, что заданы предмногообразие K алгебр сигнатуры T (см. п. 2.1) и топологическое пространство X. Пусть каждому открытому подмножеству U в X сопоставлена алгебра $F(U)$ из K, причем если $U \subseteq V$, то задан гомоморфизм алгебр

$$F_{U,V}\colon F(V) \to F(U).$$

Предположим, что если некоторое открытое подмножество U содержится в объединении открытых подмножеств V_i, $i \in I$, то для произвольных элементов $a_i \in F(V_i)$, $i \in I$, следующие условия эквивалентны: (1) существует такой элемент a из $F(U)$, что

$$F_{V_i \cap U, U}(a) = F_{V_i \cap U, V_i}(a_i)$$

для всех $i \in I$; (2) для любых $i, j \in I$ выполнено равенство

$$F_{V_i \cap V_j \cap U, V_i}(a_i) = F_{V_i \cap V_j \cap U, V_j}(a_j).$$

Если все эти условия выполняются, то говорят, что в X задан пучок K-алгебр F.

С каждым элементом x топологического пространства X связывается диаграмма K-алгебр $F(U)$, где U — окрестность точки x. Предел этой диаграммы называется *слоем F_x пучка F в точке x*. *Алгеброй глобальных сечений* пучка F называется K-алгебра $\Gamma(F) = F(X)$.

Пусть A — алгебра сигнатуры T и X — множество неразложимых в пересечении конгруэнций на A. Если (a, b) — пара различных элементов из X, то через

$D_{a,b}$ обозначим множество всех конгруэнций из X, не содержащих пару (a, b). Предположим, что в X задана топология, в которой все множества $D_{a,b}$, где $a \neq b$, открыты. Пусть K — произвольное предмногообразие T-алгебр, содержащее A/θ, $\theta \in X$. Тогда существует пучок T-алгебр F, слой которого в точке $\theta \in X$ равен A/θ. Имеется естественный гомоморфизм алгебр $A \to \Gamma(F)$ с ядром $\bigcap\limits_{\theta \in X} \theta$. Если это ядро равно $\Delta(A)$, то каждая подалгебра в $\Gamma(F)$, содержащая образ A, является подпрямым произведением алгебр A/θ, $\theta \in X$. Подробно со свойствами пучков можно познакомиться по [15], гл. 3, и [69].

Частным случаем конструкции пучка алгебр является булево произведение (см. [40]; [41], гл. IV, § 8). Пусть X — *булево пространство*, т. е. хаусдорфово компактное топологическое пространство с базой из открыто-замкнутых подмножеств. Подпрямое произведение A алгебр A_x, $x \in X$, называется *булевым произведением*, если: 1) A является подалгеброй в прямом произведении алгебр A_x, $x \in X$; 2) для любых $a, b \in A$ множество всех таких элементов $x \in X$, что $a(x) = b(x)$, открыто-замкнуто в X; 3) для любых элементов $a, b \in A$ и любого открыто-замкнутого подмножества Y в X найдется такой элемент c в A, что $c(x) = a(x)$, если $x \in Y$, и $c(x) = b(x)$, если $x \in X \setminus Y$.

В ряде важных случаев булево произведение характеризуется как алгебра глобальных сечений некоторого пучка. Пусть A — алгебра с дистрибутивными и перестановочными конгруэнциями, причем если $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathrm{Con}(A)$ и $\theta_1 \subseteq \theta_2 \subseteq \theta_3$, то существует такая конгруэнция θ на A, что $\theta_1 = \theta_2 \cap \theta$ и $\theta_3 = \theta_2 \cup \theta$. Обозначим через X множество всех максимальных конгруэнций в A. Тогда X является булевым пространством с базой открытых множеств $D_{a,b} = \{\theta \in X \mid (a, b) \notin \theta\}$, где (a, b) — произвольная пара различных элементов из A. Если F — пучок на X, то $\Gamma(F)$ является булевым произведением алгебр A/θ, $\theta \in X$. Если

$$\bigcap_{\theta \in X} \theta = \Delta(A),$$

то алгебра A вкладывается в алгебру глобальных сечений $\Gamma(F)$ (см. [41], гл. IV, § 8).

К понятию булева произведения тесно примыкает понятие булевой степени (или булева расширения). Пусть A — некоторая T-алгебра и B — булева алгебра, причем B полна, если алгебра A бесконечна. Рассмотрим все отображения α из A в B со следующими свойствами: 1) если a и b различные элементы из A, то $\alpha(a) \wedge \alpha(b) = 0$; 2) $\bigcup\limits_{a \in A} \alpha(a) = 1$. Превратим множество $A[B]$ всех таких отображений в T-алгебру. Если n — целое неотрицательное число, $t \in T_n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A[B]$, то через $t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ обозначим отображение из A в B, при котором для любого $a \in A$

$$t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \vee [\alpha_1(x_1) \wedge \ldots \wedge \alpha_n(x_n)],$$

где объединение берется по всем таким наборам $x_1, \ldots, x_n$ элементов $x_i \in A$, что $a = t(x_1, \ldots, x_n)$. Построенная алгебра $A[B]$ называется *булевой степенью* или *булевым расширением* алгебры A.

Алгебру $A[B]$ можно построить с помощью конструкции булева произведения. Пусть X — пространство максимальных конгруэнций (идеалов, ультрафильтров) в булевой алгебре B. Зададим в X топологию, взяв в качестве базы открытых множеств $D_{a, b}$, где (a, b) пробегает множество пар различных элементов из A. Тогда $A[B] \subseteq A^X$ является булевым произведением алгебр $A_x = A$, причем $A[B]$ содержит алгебру всех постоянных отображений X в A. Эта алгебра изоморфна A (см. [28], с. 7; [41], гл. IV, § 5).

Пусть I — некоторое множество. Система подмножеств D в I называется *фильтром*, если: 1) пустое подмножество не принадлежит D; 2) пересечение любых двух подмножеств из D принадлежит D; 3) если $X \in D$ и $Y \supseteq X$, то Y принадлежит D. Максимальный фильтр на I называется *ультрафильтром*. Фильтр D на множестве I является ультрафильтром в том и только том случае, если для любого подмножества X в I либо X, либо $I \setminus X$ принадлежит D.

Предположим, что задана система T-алгебр A_i, $i \in I$, и D — фильтр на I. Обозначим через c_D множество всех таких пар (a, b) элементов прямого произведения алгебр A_i, $i \in I$, что множество тех $i \in I$, для которых $a(i) = b(i)$, принадлежит D. Тогда

c_D является конгруэнцией в прямом произведении алгебр A_i, $i \in I$. Факторалгебра $\left(\prod_{i \in I} A_i\right)/c_D$ называется *фильтрованным произведением* алгебр A_i, $i \in I$. Если D — ультрафильтр, то соответствующее произведение называется *ультрапроизведением*. Подробнее со свойствами этих конструкций можно познакомиться по книге [23]. О связях между фильтрованными произведениями см. [49], § 22. Роль ультрапроизведений особенно заметна при изучении алгебраических систем (см. следующий пункт).

1.6. Алгебраические системы. *Сигнатурой алгебраической системы* называется набор (T, P), где T — система операций, а P — система конечноместных отношений. Предполагается, что каждому отношению r из P сопоставлена его арность $n(r)$ — натуральное число, отличное от единицы. *Алгебраической системой сигнатуры* (T, P) называется тройка (A, T, P), где (A, T) — универсальная алгебра сигнатуры T, а P реализуется предикатами (или конечноместными отношениями) на A с сохранением арности. Таким образом, каждая универсальная алгебра является частным случаем алгебраической системы. Более того, в рамках теории алгебраических систем естественно изучать частичные алгебры. Действительно, каждую частичную n-арную операцию t на множестве A можно рассматривать как $(n+1)$-арное отношение на A, состоящее из всех строк

$$(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in A^{n+1}, \tag{$*$}$$

для которых $t(a_1, \ldots, a_n)$ определено и равно a_{n+1}. Теория алгебраических систем включает в себя изучение алгебр с многозначными операциями, поскольку каждую многозначную алгебраическую операцию t арности n можно отождествить с $(n+1)$-арным отношением, состоящим из всех строк $(*)$, для которых $t(a_1, \ldots, a_n)$ содержит a_{n+1}.

Подмножество B в алгебраической системе (A, T, P) называется *подсистемой*, если B является подалгеброй в T-алгебре A. Как и в случае универсальных алгебр, получаем алгебраическую решетку $\mathrm{Sub}(A, T, P)$ подсистем в (A, T, P), которая совпадает с решеткой $\mathrm{Sub}(A)$ подалгебр в T-алгебре A. Следовательно, можно говорить о системах порождающих в алгебраических системах, о конечно порожденных системах. Отображение $f\colon (A, T, P)\to\to(C, T, P)$ систем одной и той же сигнатуры (T, P) называется *гомоморфизмом*, если f является гомоморфизмом T-алгебр и для любого натурального числа $n\geqslant 2$ и любого n-арного отношения $r\in P$ из того, что $(a_1, \ldots, a_n)\in r$ в A, следует, что в C

$$(f(a_1), \ldots, f(a_n))\in r. \qquad (**)$$

Гомоморфизм f называется *сильным* (или *строгим*), если из условия $(**)$ вытекает существование таких элементов $b_1, \ldots, b_n\in A$, что $f(b_i)=f(a_i)$, $1\leqslant i\leqslant\leqslant n$, и $(b_1, \ldots, b_n)\in r$ в A. Биективный сильный гомоморфизм называется *изоморфизмом алгебраических систем*. Каждый гомоморфизм универсальных алгебр (случай $P=\varnothing$) является сильным гомоморфизмом.

Конгруэнцией на алгебраической системе (A, T, P) называется конгруэнция универсальной алгебры (A, T). Факторалгебра A/θ по конгруэнции θ превращается в алгебраическую систему сигнатуры (T, P) следующим образом: если $r\in P$ — отношение арности n, то оно задает отношение в A/θ, являющееся образом отношения $r\subseteq A^n$. Как и в случае универсальных алгебр, определяется понятие ядра гомоморфизма алгебраических систем, причем ядрами гомоморфизмов являются конгруэнции, и только они. Для сильных гомоморфизмов алгебраических систем справедлива теорема о гомоморфизме. Для конгруэнций алгебраических систем справедливы теоремы об изоморфизме, о прямых и подпрямых произведениях, прямых и обратных пределах и т. д. (см. [23], гл. I, § 2).

Изучение алгебраических систем позволяет плодотворным образом сочетать алгебраические и логические понятия и методы. Зафиксируем сигнатуру (T, P) алгебраических систем и рассмотрим язык $L(T, P)$ *первой ступени*, алфавит которого содержит счетное число переменных x_1, x_2, ..., символы операций из T, символы предикатов из P, символ равенства, логические связки $\vee$, &, $\neg$, $\to$, кванторы $\forall$, $\exists$, скобки, запятые. Пусть $F(X)$ — алгебра слов сигнатуры T в алфавите $X=\{x_1, x_2, \ldots\}$. Формулой языка $L(T, P)$ называются выражения вида:

1) $f = g$, где $f, g \in F(X)$;

2) $r(f_1, \ldots, f_n)$, где $f_1, \ldots, f_n \in F(X)$ и $r \in P$, причем арность r равна n;

3) если Φ — формула, то $\neg\Phi$, $(\forall x_m)\Phi$, $(\exists x_m)\Phi$ — формулы;

4) если Φ_1 и Φ_2 — формулы, то $\Phi_1 \& \Phi_2$, $\Phi_1 \vee \Phi_2$, $\Phi_1 \to \Phi_2$ — формулы.

Формулы вида 1) и 2) называются *атомарными*.

Будем говорить, что переменная x *входит в запись слова* x. Если n — натуральное число, $f_1, \ldots, f_n \in F(X)$ и $t \in T_n$, то скажем, что переменная x *входит в запись слова* $t(f_1, \ldots, f_n)$, если x входит в запись одного из слов $f_1, \ldots, f_n$. Если Φ — атомарная формула вида 1) [вида 2)], то скажем, что x — *свободная переменная* в Φ, если она входит в запись одного из слов f, g [одного из слов $f_1, \ldots, f_n$]. Если x_i — свободная переменная в формуле Φ [и $i \neq m$], то x_i является *свободной переменной* в формуле $\neg\Phi$ [в формулах $(\forall x_m)\Phi$, $(\exists x_m)\Phi$]. Переменные, свободные хотя бы в одной из формул Φ_1, Φ_2, свободны и в формулах $\Phi_1 \& \Phi_2$, $\Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_1 \to \Phi_2$.

Формула Φ языка $L(T, P)$ называется *истинной* в классе K алгебраических систем сигнатуры (T, P), если для любой системы A из K при любых значениях свободных неизвестных формулы Φ в системе A формула Φ принимает значение *И* при естественной интерпретации логических связок и кванторов (см. [23], гл. III, § 6). Формула Φ называется *истинной*, если она истинна в классе всех алгебраических систем сигнатуры T. Две формулы Φ_1 и Φ_2 языка $L(T, P)$ *эквивалентны*, если формула $(\Phi_1 \to \Phi_2) \& (\Phi_2 \to \Phi_1)$ истинна.

Каждая формула языка $L(T, P)$ эквивалентна формуле *пренексного вида*

$$\Psi = (Q_1 x_{i_1}) \ldots (Q_n x_{i_n}) \Phi, \qquad (***)$$

где Q_i — либо квантор $\forall$, либо квантор $\exists$, и Φ — формула без кванторов (бескванторная часть Ψ) — см. [23], с. 164. Формула Ψ из $(***)$ называется *замкнутой* (или *предложением*), если $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — все свободные переменные формулы Φ. Другими словами, в формуле Ψ нет свободных переменных. Предложение Ψ из $(***)$ называется *универсальным*, если $Q_1 = \ldots = Q_n = \forall$. Бескванторная часть Φ называется *хорновской*, если $\Phi = \Phi_1 \& \ldots \& \Phi_m$, причем каждое Φ_i имеет вид $\Gamma_1 \vee \ldots \Gamma_{m_i}$, где каждая формула Γ_j является либо атомарной формулой, либо отрицанием атомарной формулы. При этом среди $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{m_i}$ атомарная формула может встречаться не более одного раза. Универсальное предложение называется *хорновским*, если его бескванторная часть является хорновской. *Квазитождеством* называется универсальное предложение, бескванторная часть которого имеет вид $(\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_m) \to \Phi_{m+1}$, где все формулы Φ_i атомарны. Наконец, *тождеством* называется универсальное предложение, бескванторная часть которого имеет вид $f = g$, где f и g — слова.

Предположим, что задано семейство A_i, $i \in I$, алгебраических систем сигнатуры (T, P). Если D — ультрафильтр на множестве I, то предложение Ψ языка $L(T, P)$ истинно в ультрапроизведении $\left(\prod\limits_{i \in I} A_i\right)/c_D$ в том и только том случае, когда множество всех $i \in I$, для которых предложение Ψ истинно в A_i, принадлежит D (см. [23], с. 205).

Как отмечалось выше, с каждой n-арной алгебраической операцией t на множестве A можно связать $(n+1)$-арное отношение $r(t)$, состоящее из всех наборов вида $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in A^{n+1}$, где $t(a_1, \ldots, a_n) = a_{n+1}$. Пусть A — алгебраическая система сигнатуры (T, P) и $R(T)$ — множество всех отношений $r(t)$, $t \in T$. Тогда A можно рассматривать как алгебраическую систему сигнатуры $(\varnothing, P \cup R(T))$. *Обеднением системы* A называется любая подсистема в A относительно сигнатуры $(\varnothing, R)$, где R — подмножество в $P \cup R(T)$. Любое подмножество в A является обеднением системы A. Предположим, что каждое конечное обеднение A_i алгебраической системы A сигнатуры (T, P) вложимо в систему M_i сигнатуры (T, P). Тогда A вложимо в ультрапроизведение систем M_i (см. [23], с. 208). О дальнейших обобщениях последнего результата и о локальных теоремах Мальцева см. [24], с. 77—99.

Если хорновское предложение истинно в каждой алгебраической системе A_i, $i \in I$, то оно истинно и в их фильтрованном произведении (см. [23], с. 214).

Многие вопросы, лежащие на границе алгебры и логики, освещены в [17, 33].

1.7. Многоосновные алгебры. Пусть $T = \{T_n \mid n \geqslant 0\}$ — система операций и I — частичная T-алгебра. Семейство множеств $A = \{A_i \mid i \in I\}$ называется *многоосновной* (или *гетерогенной*) *T-алгеброй со схемой I*, если выполнено следующее условие. Предположим, что n — целое неотрицательное число, $t \in T_n$ и $i_1, \ldots, i_n \in I$, причем определен элемент $i = t(i_1, \ldots, i_n) \in I$. Тогда для любых $a_1 \in A_{i_1}, \ldots, a_n \in A_{i_n}$ определен элемент $t(a_1, \ldots, a_n) \in A_i$. Если $h\colon I \to J$ — гомоморфизм частичных T-алгебр, то *h-гомоморфизмом* T-алгебры A со схемой I в T-алгебру B со схемой J называется такой набор отображений

$$g_i\colon A_i \to B_{h(i)}, \quad i \in I,$$

что если $n \geqslant 0$, $t \in T_n$, $i = t(i_1, \ldots, i_n)$ в I, то для любых элементов $a_1 \in A_{i_1}, \ldots, a_n \in A_{i_n}$ выполнено равенство

$$g_i(t(a_1, \ldots, a_n)) = t\left(g_{i_1}(a_1), \ldots, g_{i_n}(a_n)\right).$$

Основы теории алгебр со схемой операций изложены в [59], с. 137—170. С некоторыми приложениями алгебр со схемой операций можно познакомиться по монографии [51].

К понятиям многоосновных алгебр, предела диаграмм примыкает понятие агассиз-суммы алгебр. Предположим, что задана сигнатура T и диаграмма, объектами которой являются элементы T-алгебры B. Пусть для любого целого неотрицательного числа n, любых $t \in T_n$ и $b_1, \ldots, b_n \in B$ задан морфизм

$$h_i = h_i(t, b_1, \ldots, b_n)\colon b_i \to t(b_1, \ldots, b_n). \qquad (*)$$

Функтор A из этой диаграммы в категорию T-алгебр называется *агассиз-системой*. По агассиз-системе A построим множество Y, являющееся объединением носителей алгебр A_b, $b \in B$. Превратим Y в T-алгебру, полагая для любого целого неотрицательного числа n, любого $t \in T_n$ и любых элементов $a_1 \in A_{b_1}, \ldots, a_n \in A_{b_n}$

$$t(a_1, \ldots, a_n) = t(A(h_1)(a_1), \ldots, A(h_n)(a_n)) \in A_{t(b_1, \ldots, b_n)},$$

где h_i из (*). Построенная T-алгебра называется *агассиз-суммой* алгебр A_b, $b \in B$.

Предположим, что сигнатура T не содержит нульарных операций и B является полурешеткой, причем для любого $t \in T_n$ и любых $b_1, \ldots, b_n \in B$ выполнено равенство $t(b_1, \ldots, b_n) = b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$. В этом случае агассиз-сумма называется *суммой Плонки.*

К агассиз-суммам близка конструкция ортогонально полных алгебр, введенная в [6]. Пусть B — булево кольцо, причем для любого подмножества X в B множество всех таких элементов $b \in B$, что $Xb = \{0\}$, является главным идеалом в B. Множество A называется *ортогонально полным над* B, если для каждого ненулевого элемента e из B определено множество eA, причем: 1) $1A = A$; 2) если $a, a' \in A$, $u, v \in B$ и $v \leqslant u$, то из $ua = ua'$ вытекает $va = va'$; 3) если Y — ортогональное семейство элементов из $B \setminus \{0\}$ и

$$u = \sum_{y \in Y}^{\perp} y,$$

то набор отображений $ua \to ya$, где $a \in A$, $y \in Y$, индуцирует биекцию

$$uA \to \prod_{y \in Y} yA.$$

Отображение

$$f\colon \bigcup_{y \in B \setminus \{0\}} (yA)^n \to \bigcup_{y \in B \setminus \{0\}} (yA)$$

называется *B-допустимым*; если: 1) для любого ненулевого элемента $y \in B$ справедливо включение $f(yA, \ldots, yA) \subseteq yA$; 2) если $u, v, y \in B \setminus \{0\}$ и $a, a_1, \ldots, a_n \in A$, причем $u \leqslant y$ и $f(ya_1, \ldots, ya_n) = va$, то $(uv)a = f(ua_1, \ldots, ua_n)$. Аналогичным образом вводится понятие *B-допустимого булева предиката. Ортогонально полной над B булевой алгебраической системой* сигнатуры (T, P) называется тройка (A, T, P), где A — ортогонально полное над B множество, каждая операция из T реализуется как B-допустимая операция, а каждое отношение из P реализуется как B-допустимый предикат в A. Каждый ультрафильтр D в B задает в алгебраической системе (A, T, P) конгруэнцию c_D, состоящую из всех таких пар $(a, a') \in A^2$, что $ya = ya'$ для некоторого $y \in D$. Пусть Φ — хорновская формула языка

$L(T, P)$, истинная в A/c_D. Тогда найдется такой элемент $y \in D$, что формула Φ истинна в yA. Предположим, что существует такой элемент $u \in D$, что формула Φ истинна в vA для всех $v \leqslant u$. Тогда формула Φ истинна в A/c_D.

При изучении произвольных многоосновных алгебр со схемой операций наибольший интерес представляет изучение категории K_I всех алгебр сигнатуры T со схемой I и 1_I-гомоморфизмов между этими алгебрами, если 1_I — тождественный автоморфизм схемы I. В категории K_I можно говорить о подалгебрах, конгруэнциях, факторалгебрах. В K_I справедливы теоремы о гомоморфизме, изоморфизме и т. д. Важным примером многоосновных алгебр являются клоны (см. следующий пункт).

1.8. Клоны операций. Пусть N' — множество всех целых неотрицательных чисел. Если $n \dot\in N'$, то через $O_n(X)$ обозначается множество всех n-арных алгебраических операций на произвольном множестве X. Если множество X фиксировано, то часто пишут O_n вместо $O_n(X)$. Заметим, что $O_0(X) = X$. Положим $O(X) = \{O_n(X) \mid n \in N'\}$.

Пусть T — сигнатура $(*, \xi, \tau, \Delta, e)$ типа $(2, 1, 1, 1, 0)$. Превратим N' в T-алгебру, полагая

$$n * m = \max(n + m - 1,\ 0), \quad n = \xi(n) = \tau(n) = \Delta(n)$$

и считая, что нульарная операция e выделяет элемент $2 \in N'$. Тогда $O(X) = \{O_n(X) \mid n' \in N'\}$ является многоосновной T-алгеброй со схемой N', если для $f \in O_n(X)$, $g \in O_m(X)$ и $x_i \in X$ положить

$$(f * g)(x_1, \ldots, x_{n*m}) =$$
$$= f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{n*m});$$

$$(\xi f)(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_2, \ldots, x_n, x_1), & \text{если } n > 1, \\ f(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } n \leqslant 1; \end{cases}$$

$$(\tau f)(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n), & \text{если } n > 1, \\ f(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } n \leqslant 1; \end{cases}$$

$$(\Delta f)(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_n), & \text{если } n > 1, \\ f(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } n \leqslant 1; \end{cases}$$

$$e(x_1, x_2) = x_1.$$

Отметим, что $g \in X$ при $m = 0$, и потому в этом случае $(f * g)(x_1, \ldots, x_n) = f(g, x_1, \ldots, x_{n-1})$. *Клоном операций* (*алгеброй Поста*, или *итеративной алгеброй*, см. [24], с. 316—330) называется произвольная T-подалгебра многоосновной T-алгебры $O(X)$ со схемой операций N' (см. п. 1.7.). Клоны можно определить и другим способом. Введем в $O(X)$ операцию суперпозиции $f(g_1, \ldots, g_n)$ следующим образом: если $f \in O_n(X)$ и $g_1, \ldots, g_n \in O_m(X)$, то для $x \in X^m$ полагаем

$$f(g_1, \ldots, g_n)(x) = f(g_1(x), \ldots, g_n(x)).$$

Из этого определения видно, что $f(g_1, \ldots, g_n) \in O_m(X)$. Клоны операций можно определить как систему конечноместных операций на множестве X, замкнутую относительно суперпозиции и содержащую проекции $p_{in}(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Операция суперпозиции удовлетворяет тождеству *суперассоциативности*

$$f(g_1(h_1, \ldots, h_m), \ldots, g_n(h_1, \ldots, h_m)) = (f(g_1, \ldots, g_n))(h_1, \ldots, h_m), \quad (*)$$

где $f \in O_n(X)$, $g_1, \ldots, g_n \in O_m(X)$, $h_1, \ldots, h_m \in O_r(X)$. Кроме того, если $f \in O_n(X)$ и $g_1, \ldots, g_n \in O_m(X)$, то

$$f = f(p_{1n}, \ldots, p_{nn}), \quad p_{in}(g_1, \ldots, g_n) = g_i. \quad (**)$$

Эти тождества позволяют определить абстрактный клон как алгебру со схемой операций. Пусть $Q = \{Q_n \mid n \geqslant 0\}$, где Q_n при $n \geqslant 1$ одноэлементно, а Q_0 состоит из счетного множества операций p_{in}, $1 \leqslant i \leqslant n$. Превратим множество целых неотрицательных чисел N' в частичную Q-алгебру считая, что каждое p_{in} выделяет элемент n, а $q \in Q_n$, $n \geqslant 1$, определено только на наборах

$$(n, \underbrace{m, \ldots, m}_{n}),$$

причем $q(n, m, \ldots, m) = m$. Рассмотрим многоосновную Q-алгебру $A = \{A_n \mid n \in N'\}$ со схемой N', причем для $q \in Q_n$, $n \geqslant 1$, результат применения q к элементам $f \in A_n$, $g_1, \ldots, g_n \in A_m$ обозначим через $f(g_1, \ldots, g_n) \in A_m$. Если при этом выполняются тождества $(*)$, $(**)$, то многоосновную алгебру A со схемой N' назовем *абстрактным клоном*. Каждый абстрактный клон изоморфен клону операций на некотором множестве.

Пусть A — универсальная алгебра сигнатуры T и $T(A)$ — подклон в $O(A)$, порожденный операциями из T. Тогда $T(A)$ состоит из всех главных производных (термальных) операций на A. Подклон $T'(A)$ в $O(A)$, порожденный T и $O_0(A) = A$, состоит из всех производных операций в A.

Скажем, что алгебра (A, Q) является *редуктом* алгебры (A, T), если основные операции алгебры (A, Q) принадлежат клону $T(A)$ главных производных операций T-алгебры A. Другими словами, $Q(A) \subseteq T(A)$. Рассмотрение клонов позволяет отождествить действие двух сигнатур T и Q, если операции из T являются главными производными операциями относительно Q и наоборот. В терминах клонов это означает, что $T(A) = Q(A)$. Например, булевы алгебры можно задавать как ассоциативные кольца с условием $x^2 = x$ для любого x. Если $T(A) = Q(A)$, то говорят, что алгебры (A, Q) и (A, T) *рационально эквивалентны* (в смысле А. И. Мальцева). Таким образом, описание различных структур универсальных алгебр на множестве A с точностью до рациональной эквивалентности сводится к описанию клонов операций на A.

Предположим, что X — конечное множество. Тогда каждый собственный подклон в $O(X)$ содержится в максимальном подклоне. Число максимальных подклонов в $O(X)$ конечно (см. [66], с. 27—28).

Рассмотрим n-арное отношение R на множестве X. Скажем, что m-арная операция f на X *сохраняет отношение* R, если для любых наборов $(x_{1i}, \ldots, x_{ni}) \in R$, где $1 \leqslant i \leqslant m$, справедливо включение

$$(f(x_{11}, \ldots, x_{1m}), \ldots, f(x_{n1}, \ldots, x_{nm})) \in R.$$

Если множество X конечно, то максимальными подклонами в $O(X)$ являются в точности клоны всех операций на X, сохраняющих отношение R на X одного из следующих типов:

1) отношение R частичного порядка на X с наибольшим и наименьшим элементами;

2) отношение R, состоящее из всех пар элементов $(x, p(x))$, где $x \in X$ и p — подстановка на X,

имеющая простой порядок и не имеющая неподвижных точек;

3) отношение $R \subseteq X^4$, состоящее из всех четверок (x, y, z, t), где x, y, z, $t \in X$, причем на X задана структура элементарной абелевой p-группы для некоторого простого числа p и $x+z=y+t$;

4) отношение R эквивалентности на X;

5) отношение $R \subseteq X^m$, $1 \leqslant m \leqslant \operatorname{card} X$, обладающее следующими свойствами:

а) если $(x_1, \ldots, x_m) \in R$ и $s \in S_m$ — подстановка, то $(x_{s1}, \ldots, x_{sm}) \in R$;

б) в R содержатся все наборы $(x_1, \ldots, x_m) \in X^m$, у которых $x_1 = x_2$;

в) существует такое непустое собственное подмножество Y в X, что $Y \times X^{m-1} \subseteq R$;

6) отношение $R \subseteq X^m$, где $3 \leqslant m \leqslant \operatorname{card} X$, причем существуют такие эквивалентности $R_1, \ldots, R_m$ на X, что выполняются следующие условия:

а) каждая эквивалентность R_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, разбивает X на m классов эквивалентных элементов:

б) если $H_1, \ldots, H_m$ — произвольные классы эквивалентных элементов отношений $R_1, \ldots, R_m$, то пересечение $H_1 \cap \ldots \cap H_m$ непусто;

в) отношение R состоит из всех таких наборов $(x_1, \ldots, x_m) \in X^m$, что для каждого $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$ найдутся такие индексы $1 \leqslant p \neq q \leqslant m$, что $(a_p, a_q) \in R_i$;

см. [66], с. 30.

Если X — конечное множество, то любой подклон в $\mathrm{O}(X)$ содержит минимальный подклон (см. [66], с. 26). Полное описание решетки подклонов в $\mathrm{O}(X)$ для двухэлементного множества X приведено в [66], с. 36—39.

§ 2. Многообразия, квазимногообразия и другие классы универсальных алгебр

Под *классом* универсальных алгебр [алгебраических систем] понимается класс алгебр [систем] фиксированной сигнатуры. Класс алгебр [систем] K называется *абстрактным*, если с каждой алгеброй [системой] в K лежат все алгебры [системы], ей изоморфные. Если K — класс алгебр [систем], то полагаем

$\mathrm{S}K$ — класс всех алгебр [систем], изоморфных подалгебрам [подсистемам] алгебр [систем] из K;

$\mathrm{H}K$ — класс всех алгебр [систем], изоморфных факторалгебрам [факторсистемам] алгебр [систем] из K;

ΠK — класс всех алгебр [систем], изоморфных прямым произведениям алгебр [систем] из K;

$\Pi_f K$ — класс всех алгебр [систем], изоморфных фильтрованным произведениям алгебр [систем] из K;

$\Pi_u K$ — класс всех алгебр [систем], изоморфных ультрапроизведениям алгебр [систем] из K.

Каждый из классов $\mathrm{S}K$, $\mathrm{H}K$, ΠK, $\Pi_f K$, $\Pi_u K$ абстрактен и содержит K. Абстрактный класс K, по определению, замкнут относительно подалгебр [факторалгебр, прямых, фильтрованных произведений, ультрапроизведений] тогда и только тогда, когда $\mathrm{S}K = K$ [$\mathrm{H}K = K$, $\Pi K = K$, $\Pi_f K = K$, $\Pi_u K = K$]. Аналогичным образом замкнутость вводится и для классов систем. Для любого класса справедливы включения

$$\mathrm{SH}K \subseteq \mathrm{HS}K, \quad \Pi\mathrm{H}K \subseteq \mathrm{H}\Pi K, \quad \Pi\mathrm{S}K \subseteq \mathrm{S}\Pi K,$$

$$\Pi_u\mathrm{H}K \subseteq \mathrm{H}\Pi_u K, \quad \mathrm{S}^2K = \mathrm{S}K, \quad \mathrm{H}^2K = \mathrm{H}K,$$

$$\Pi^2K = \Pi K, \quad \Pi_f^2K = \Pi_f K, \quad \Pi_f\Pi K = \Pi\Pi_f K = \Pi_f K.$$

2.1. Предмногообразия алгебр. Абстрактный класс K называется *предмногообразием* (или *реплично полным классом*), если он содержит одноэлементную алгебру E и замкнут относительно подалгебр и прямых произведений. Смысл двух названий для предмногообразий объясняется эквивалентностью свойств абстрактного класса K сигнатуры T: (1) K является предмногообразием T-алгебр; (2) для любой T-алгебры A существует такая алгебра RA из K и сюръективный гомоморфизм $f\colon A \to RA$, что для произвольного гомоморфизма g из T-алгебры A в любую алгебру B из класса K существует, и притом единственный, такой гомоморфизм $h\colon RA \to B$, что $g = h \circ f$ (см. [23], с. 292—293).

Если положим $K(A) = \mathrm{Ker}\, f$, то условие (2) можно сформулировать следующим образом: в каждой T-алгебре A существует такая конгруэнция $K(A)$, что $A/K(A) \in K$ и ядро любого гомоморфизма из A в любую алгебру из класса K содержит $K(A)$. Алгебра $RA = A/K(A)$ называется *репликой* алгебры A в классе K. Конгруэнция $K(A)$ называется *вербальной конгруэнцией, соответствующей предмногообразию* K. В любой T-алгебре A конгруэнция $K(A)$ *вполне инвариантна*, т. е. если $(a, b) \in K(A)$ и h — эндоморфизм алгебры A, то $(h(a), h(b)) \in K(A)$. Если $K \subseteq \subseteq L$ — два предмногообразия, то $K(A) \supseteq L(A)$ для любой T-алгебры A.

Каждое предмногообразие замкнуто относительно подпрямых произведений, булевых произведений, булевых степеней, обратных пределов.

Алгебра F из предмногообразия K называется *K-свободной алгеброй с базой* X (множество X называется также *системой свободных образующих* или *порождающих*), если X содержится в F и порождает F, а любое отображение X в любую алгебру A из класса K продолжается до гомоморфизма алгебры F в алгебру A. K-свободные алгебры с одной базой X определены однозначно с точностью до изоморфизма. Если в предмногообразии K содержится неодноэлементная алгебра и $F(X)$ — алгебра слов в алфавите X, то $F(X)/K(F(X))$ является K-свободной алгеброй с базой X. Таким образом, алгебра слов $F(X)$ является свободной алгеброй с базой X в предмногообразии $K(T)$ всех T-алгебр. Кроме того, любая алгебра из предмногообразия K изоморфна факторалгебре K-свободной алгебры с некоторой базой.

Как и в п. 1.2 при рассмотрении алгебры слов, каждый элемент K-свободной алгебры F с базой X можно интерпретировать как главную производную операцию в любой алгебре из предмногообразия K. Например, каждый элемент свободной группы [свободного кольца] задает главную производную операцию в любой группе [любом кольце]. Каждый целочисленный полином задает главную производную операцию в любом коммутативном, ассоциативном кольце с единицей.

Если A — алгебра из предмногообразия K, то можно расширить понятие представления алгебры через образующие и соотношения. Именно, если множество X порождает алгебру A, то $A \simeq F/\theta$, где F является K-свободной алгеброй с базой X. Предположим, что конгруэнция θ порождается множеством пар $R \subseteq F^2$. Тогда говорят о задании A в предмногообразии K *множеством образующих* X и *множеством определяющих соотношений* R и пишут $A = \langle X | R \rangle_K$.

Нетрудно видеть, что

$$A = \langle X \mid R \rangle_K = \langle X \mid R' \cup K(F(X)) \rangle,$$

где R' — некоторый прообраз R в $F(X)^2$, $F(X)$ — алгебра слов в алфавите X. Одна из важнейших проблем в алгебре — *проблема равенства слов*. Она состоит в нахождении алгоритма, позволяющего по представлению $A = \langle X | R \rangle_K$, где X и R конечны, и по произвольным словам u, v из K-свободной алгебры F с базой X определить, задают ли u и v один элемент в алгебре A. Обзоры результатов по различным алгоритмическим проблемам можно найти в [16, 17]; [28], гл. 10; [41], с. 251—253.

Предположим, что K — предмногообразие алгебр сигнатуры T и M — класс T-алгебр, содержащийся в K. Пара (u, v) элементов из K-свободной алгебры F с базой $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ называется *тождеством* $u = v$ в классе M, если для любой алгебры A из M элементы u и v задают в A одну и ту же главную производную операцию, т. е. $u(a_1, \ldots, a_n) = v(a_1, \ldots \ldots, a_n)$ для всех $a_1, \ldots, a_n \in A$. Это определение совпадает с определением тождества в п. 1.6 в случае, когда $K = K(T)$ — класс всех T-алгебр. Предположим, что K и L — предмногообразия алгебр сигнатуры T, причем $K \subseteq L$. Пусть M — подкласс в K и F — свободная алгебра в L с базой $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Если $K(F)$ — вербальная конгруэнция в F, соответствующая K, то $F/K(F)$ — свободная алгебра в K с той же базой X. Отсюда вытекает, что пара (u, v) элементов алгебры F является тождеством в M тогда и только тогда, когда образы этих элементов в $F/K(F)$ являются тождеством в M. Если $K = M$, то $K(F)$ совпадает с множеством всех тождеств, выполненных в K.

Рангом K-свободной алгебры с базой X, где K — предмногообразие алгебр, называется мощность множества X. Имеет место *теорема Фудзивары*: если F_1 и F_2 — свободные алгебры в предмногообразии K, содержащем неодноэлементные алгебры, и $F_1 \simeq F_2$, то их ранги либо совпадают, либо конечны (см. [30], с. 49). Подчеркнем, что в случае конечности рангов они могут оказаться различными.

Пусть F_1 и F_2 — свободные алгебры в предмногообразии K, причем ранги этих алгебр равны n и m

соответственно. Алгебры F_1 и F_2 изоморфны в том и только том случае, когда существуют такие слова $g_i = g_i(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и $f_j = f_j(x_1, \ldots, x_m)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, что в K выполнены тождества

$$f_j(g_1, \ldots, g_n) = x_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$
$$g_i(f_1, \ldots, f_m) = x_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

(см. [23], с. 318). Если предмногообразие содержит конечную неодноэлементную алгебру, а F_1 и F_2 — изоморфные свободные алгебры этого предмногообразия, то ранги алгебр F_1 и F_2 совпадают.

Заметим, что существует достаточно много различных предмногообразий алгебр, у которых свободные алгебры (а следовательно, и тождества) совпадают. Пусть Y — некоторое множество простых чисел и $V(Y)$ — класс всех групп, у которых нет элементов, порядок которых делится на простое число из множества Y. Тогда $V(Y)$ является предмногообразием групп, причем $V(Y)$-свободные группы — это в точности свободные группы в классе всех групп. Таким образом, имеется континуум различных предмногообразий групп, в которых все тождества одинаковы.

Рассмотрим диаграмму алгебр I в предмногообразии K. Как отмечено в п. 1.5, копредел диаграммы I существует и принадлежит K. В частности, копредел не зависит от того, внутри какого предмногообразия он вычисляется. Предел диаграммы существенно зависит от того, внутри какого предмногообразия он находится. Предположим, что L — предмногообразие алгебр, содержащее K, и I — диаграмма алгебр в K. Если B и C — пределы диаграммы I в K и L, то $B = C/K(C)$, где $K(C)$ — вербальная конгруэнция в C, соответствующая K.

Рассмотрим два важных частных случая предела диаграмм. Пусть D и A_i, $i \in I$, — алгебры из предмногообразия K. Предположим, что диаграмма состоит из этих алгебр, тождественных автоморфизмов в них, а также из гомоморфных вложений h_i: $D \to A_i$, $i \in I$. Предел этой диаграммы в K называется *свободным произведением алгебр A_i, $i \in I$, с объединенной подалгеброй D*. Он обозначается через $*_D A_i$ и часто называется *амальгамированным произведением* алгебр A_i, $i \in I$. Для многих предмногообразий (все группы, все решетки, все дистрибутивные решетки и т. д.) естественные гомоморфизмы

$$d_i\colon A_i \to *_D A_i$$

являются вложениями (см. [4]; [19], гл. III, § 6; [21], гл. III, § 8; [23], гл. V; [49], § 12, 71).

Предположим, что в предмногообразии K задана диаграмма, состоящая из алгебр A_i, $i \in I$, и тождественных автоморфизмов в них. Предел этой диаграммы в K называется *K-свободным произведением* алгебр A_i, $i \in I$, и обозначается через $*A_i$ (или $(*_K A_i)$. Если $A_i = \langle X_i | R_i \rangle_K$, $i \in I$, то

$$* A_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} X_i \,\middle|\, \bigcup_{i \in I} R_i \right\rangle_K.$$

Если сигнатура T содержит нульарную операцию t_0, выделяющую в каждой алгебре из K одноэлементную подалгебру, то естественные гомоморфизмы d_i: $A_i \to * A_i$ являются вложениями.

Предположим, что A — алгебра из предмногообразия K и F — свободная алгебра в K с базой X. Обозначим K-свободное произведение A и F через $A[X]$. Элементы $A[X]$ часто называют *полиномами с коэффициентами из A*. В силу определения K-свободного произведения имеется естественный гомоморфизм d: $A \to A[X]$, причем для любой алгебры B из K, любого гомоморфизма f: $A \to B$ и любого отображения g: $X \to B$ существует, и притом единственный, гомоморфизм алгебр h: $A[X] \to B$, продолжающий f и g. Таким образом, при любом фиксированном гомоморфизме f: $A \to B$ каждый элемент из $A[X]$ превращается в производную операцию на B. В частности, при тождественном автоморфизме A на A каждый элемент из $A[X]$ можно интерпретировать как производную операцию на A. Это позволяет говорить об *уравнениях* $p = q$ на A, где p, $q \in A[X]$, об их *разрешимости* в некоторых расширениях алгебры A, об *алгебраических замыканиях* алгебры A, *алгебраически замкнутых алгебрах*. Эти вопросы рассматриваются в [49], § 84; [58].

Приведем полезный пример, поясняющий эту конструкцию. Пусть K — предмногообразие всех ассоциативных и коммутативных колец с единицей. Тогда $A[X]$ — это в точности «обычное» кольцо многочленов от множества переменных X с коэффициентами из кольца A.

С понятием алгебры полиномов $A[X]$ в предмногообразии K тесно связано понятие эквациальной компактности. Алгебра A из K называется *эквациально компактной* в K, если любая система уравнений $p_i = q_i$, $i \in I$, где p_i, $q_i \in A[X]$, имеет решение в A всякий раз, когда каждая ее конечная подсистема имеет решение в A. Класс эквациально компактных алгебр в предмногообразии K замкнут относительно прямых произведений, ретрактов и содержит все топологические компактные алгебры из K. В предмногообразии всех абелевых групп справедливо и обратное утверждение: каждая эквациально компактная абелева группа является ретрактом топологической компактной абелевой группы. Напомним, что подалгебра B алгебры A называется *ретрактом* A, если существует такой гомоморфизм ρ: $A \to B$, что $\rho(b) = b$ для всех $b \in B$. Для произвольных предмногообразий алгебр приведенное выше утверждение о связях эквациальной и топологической компактностей неверно. Подробный обзор результатов по эквациальной компактности алгебр изложен в [49], с. 417—447.

Пусть N — некоторый класс алгебр сигнатуры T и E — одноэлементная T-алгебра. Тогда $E \cup (\mathrm{S\Pi}N)$ — наименьшее предмногообразие, содержащее N, т. е. $E \cup (\mathrm{S\Pi}N)$ — *предмногообразие, порожденное* N. Отметим, что каждое предмногообразие порождается своими подпрямо неразложимыми алгебрами.

Предположим, что класс N состоит из одной алгебры A, содержащей не менее двух элементов. Приведем построение свободной алгебры F с базой X в предмногообразии $E \cup (\mathrm{S\Pi}A)$. Для каждого $x \in X$ в $A^{(A^X)}$ определим функцию m_x: $A^X \to A$, полагая $m_x(u) = u(x)$ для любого $x \in A^X$. Это определение корректно, поскольку каждый элемент из A^I является отображением множества I в алгебру A. Подалгебра F в $A^{(A^X)}$, порожденная множеством $X' = \{m_x | x \in X\}$, свободна в $E \cup (\mathrm{S\Pi}A)$, причем базой алгебры F является множество X', равномощное X при биекции $x \mapsto m_x$ (см. [19], с. 191—192).

Предмногообразие K называется *локально конечным*, если все конечно порожденные алгебры из K конечны. Для того чтобы предмногообразие K было локально конечным, необходимо и достаточно, чтобы были конечными все K-свободные алгебры конечного ранга. Таким образом, если A — конечная алгебра, то предмногообразие $E\bigcup(\mathrm{S\Pi}A)$, порожденное A, локально конечно. Обратное утверждение неверно. Существуют локально конечные предмногообразия, не порождаемые никакой своей конечной алгеброй.

Алгебра A сигнатуры T называется *относительно свободной*, если она свободна в некотором предмногообразии T-алгебр. Алгебра A относительно свободна в том и только том случае, если она порождается таким множеством X, что любое отображение из X в A продолжается до эндоморфизма алгебры A. Относительно свободная алгебра A свободна в предмногообразии $E\bigcup(\mathrm{S\Pi}A)$. Если A — относительно свободная алгебра, θ — конгруэнция на A, то факторалгебра A/θ является относительно свободной алгеброй в том и только том случае, если конгруэнция θ вполне инвариантна. Для такой конгруэнции θ справедливо равенство $\theta = K(A)$, где K — предмногообразие, порожденное A/θ. Таким образом, в относительно свободных алгебрах вербальными являются вполне инвариантные конгруэнции, и только они.

Предмногообразие K называется *шрейеровым*, если любая подалгебра K-свободной алгебры является K-свободной алгеброй. Примерами шрейеровых многообразий являются 1) класс всех групп; 2) класс всех абелевых групп; 3) класс всех абелевых групп простой экспоненты; 4) класс всех алгебр Ли над полем; 5) класс всех (анти)коммутативных неассоциативных алгебр над полем; 6) класс всех неассоциативных алгебр над полем; 7) класс всех полугрупп, в которых $xy = x$; 8) класс всех полугрупп, в которых $xy = y$; 9) класс всех полугрупп, в которых $xy = zt$ (см. [1], § 2.2; [4], § 2.3).

Первый важный и принципиальный результат о конгруэнциях алгебр в предмногообразиях принадлежит А. И. Мальцеву (см. п. 1.4). Он определил характер тех результатов, которые излагаются ниже. Они носят одинаковую логическую структуру — выполнимость некоторого свойства для конгруэнций всех алгебр предмногообразия эквивалентна выполнимости этого свойства для свободных алгебр некоторого конечного ранга, что в свою очередь эквивалентно существованию некоторого набора слов, задающих в предмногообразии определенный тип тождеств. Последнее свойство принято называть мальцевскими условиями. *Теорема Мальцева* из п. 1.4 может быть сформулирована следующим образом: для предмногообразия K следующие условия эквивалентны: (1) во всех алгебрах из K конгруэнции перестановочны; (2) в K-свободной алгебре ранга 3 конгруэнции перестановочны; (3) существует такое слово $p(x, y, z)$, что в K выполнены тождества $p(x, x, y) = p(y, x, x) = y$.

Предмногообразия с приведенными эквивалентными свойствами (1)—(3) называются *перестановочными* (или *конгруэнц-перестановочными*). Более подробно со свойствами перестановочных предмногообразий можно познакомиться в [65].

Строгим мальцевским условием называется выражение вида

$$(\exists p_0) \ldots (\exists p_n) (\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_m),$$

где Φ_i — атомарные формулы языка $L(T)$, в запись которых кроме переменных и символа равенства входят только символы операций $p_0, \ldots, p_n$. *Мальцевским условием* называется счетная дизъюнкция строгих мальцевских условий S_i, $i \geqslant 1$, причем если $i \geqslant j$, то $S_i \Rightarrow S_j$. *Слабым мальцевским условием* называется конъюнкция мальцевских условий. Таким образом, теорема Мальцева характеризует перестановочные многообразия в терминах строгих мальцевских условий. Аналогичным образом можно охарактеризовать *дистрибутивные* (или *конгруэнц-дистрибутивные*) предмногообразия алгебр, т. е. предмногообразия, во всех алгебрах которых решетки конгруэнций дистрибутивны. Для предмногообразия K следующие условия эквивалентны: (1) K дистрибутивно; (2) в K-свободной алгебре ранга 3 решетка конгруэнций дистрибутивна; (3) существуют такие натуральное число n и слова $t_0, \ldots, t_n$ от трех переменных, что при $i = 0, 1, \ldots, n-1$ в K выполнены тождества

$$t_0(x, y, z) = x, \quad t_n(x, y, z) = z, \quad t_i(x, y, x) = x,$$
$$t_i(x, x, z) = t_{i+1}(x, x, z), \text{ если } i \text{ четно},$$
$$t_i(x, z, z) = t_{i+1}(x, z, z), \text{ если } i \text{ нечетно},$$

(см. [28], с. 6; [29]). Примером дистрибутивного предмногообразия является предмногообразие решеток. Действительно, в этом случае достаточно положить $n=2$ и $t_1(x, y, z)=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)$.

Предмногообразие называется *модулярным* (или *конгруэнц-модулярным*), если во всех алгебрах этого предмногообразия решетки конгруэнций модулярны. Для предмногообразия K следующие условия эквивалентны: (1) предмногообразие K модулярно́; (2) в K-свободной алгебре ранга 4 решетка конгруэнций модулярна; (3) существуют такие натуральные числа n и слова $t_0, \ldots, t_n$ от четырех переменных, что в K выполнены тождества

$$t_0(x, y, z, u)=x, \quad t_n(x, y, z, u)=u, \quad t_i(x, y, y, x)=x,$$

$$t_i(x, y, y, u)=t_{i+1}(x, y, y, u), \quad \text{если } i \text{ нечетно},$$

$$t_i(x, x, u, u)=t_{i+1}(x, x, u, u), \quad \text{если } i \text{ четно};$$

(4) в K-свободной алгебре ранга 3 решетка конгруэнций модулярна; (5) существуют такие натуральное число m и слова $w_0, \ldots, w_m, p$ от трех переменных, что в K выполнены тождества

$$w_0(x, y, z)=x, \quad w_m(x, y, y)=p(x, y, y),$$

$$p(x, x, y)=y, \quad w_i(x, y, x)=x,$$

$$w_i(x, y, y)=w_{i+1}(x, y, y), \quad \text{если } i \text{ четно},$$

$$w_i(x, x, y)=w_{i+1}(x, x, y), \quad \text{если } i \text{ нечетно}$$

(см. [28], с. 9; [34]).

Предмногообразие *арифметично*, если оно перестановочно и дистрибутивно. Для предмногообразия K следующие условия эквивалентны: (1) K арифметично; (2) в K-свободной алгебре ранга 3 решетка конгруэнций дистрибутивна и конгруэнции перестановочны; (3) существует такое слово $p(x, y, z)$ от трех переменных, что в K выполнены тождества $x=p(x, y, x)=p(x, y, y)=p(y, y, x)$ (см. [28], с. 12).

2.2. Многообразия алгебр. Абстрактный класс универсальных алгебр называется *многообразием*, если он замкнут относительно подалгебр, прямых произведений и факторалгебр. У любой алгебры имеется одноэлементная факторалгебра. Поэтому каждое многообразие содержит одноэлементную алгебру и потому является предмногообразием. Таким образом, многообразие — это предмногообразие, замкнутое относительно факторалгебр.

Теорема Биркгофа: абстрактный класс K является многообразием тогда и только тогда, когда K состоит из всех алгебр, в которых выполнен заданный набор тождеств.

В силу этой теоремы два многообразия совпадают, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий: (1) свободные алгебры счетного ранга этих многообразий изоморфны; (2) в обоих многообразиях выполнены одни и те же тождества.

Каждое многообразие является наибольшим предмногообразием, в котором выполнен заданный набор тождеств. Если K — предмногообразие, то $\mathrm{H}K$ — наименьшее многообразие, содержащее K. Свободные алгебры из K являются свободными алгебрами в многообразии $\mathrm{H}K$. Если предмногообразие K локально конечно, то этим свойством обладает и $\mathrm{H}K$. Таким образом, если N — произвольный класс универсальных алгебр, то $\mathrm{HS\Pi}N$ — наименьшее многообразие, содержащее класс N, т. е. $\mathrm{HS\Pi}N$ — *многообразие, порожденное* N. Если класс N состоит из одной алгебры A, содержащей не менее двух элементов, то, как и в п. 2.1, получаем способ построения свободной алгебры в многообразии $\mathrm{HS\Pi}A$.

Поскольку каждое многообразие K однозначно определяется своими тождествами, то существует взаимно однозначное соответствие между подмногообразиями в K и вполне инвариантными конгруэнциями θ в K-свободной алгебре F счетного ранга. При этом соответствии вполне инвариантной конгруэнции θ в F сопоставляется многообразие $\mathrm{HS\Pi}(F/\theta)$. Заметим, что $\theta \leqslant \theta'$ в том и только том случае, если

$$\mathrm{HS\Pi}(F/\theta') \subseteq \mathrm{HS\Pi}(F/\theta).$$

Таким образом, соответствие $\theta \to \mathrm{HS\Pi}(F/\theta)$ является антиизоморфизмом полной решетки вполне инвариантных конгруэнций в F и полной решетки подмногообразий многообразия K. Следовательно, полная решетка подмногообразий многообразия K дуальна алгебраической решетке. Обзор результатов по решеткам многообразий алгебр можно найти в [2–4, 34, 35, 41]; [49] с. 378—400.

Если многообразие содержит неодноэлементную алгебру, то в нем содержится *минимальное* или *эквационально полное подмногообразие*, которое, по определению, порождается любой своей неодноэлементной алгеброй. Если в минимальном многообразии K содержится конечная неодноэлементная алгебра, то K локально конечно. Локально конечное минимальное многообразие порождается своей конечной алгеброй A наименьшего неединичного порядка. Эта алгебра A проста и все ее собственные подалгебры одноэлементны.

Если сигнатура T состоит только из унарных операций, то существует не менее $2^{\operatorname{card} T}$ минимальных многообразий T-алгебр. Если T содержит не только унарные операции, то существует

$$2^{(\operatorname{card} T+\aleph_0)}$$

минимальных многообразий T-алгебр (см. [23], с. 378).

Многообразие полугрупп минимально тогда и только тогда, когда оно задается одним из следующих наборов тождеств: 1) $xy = yx$; $x^2 = x$; 2) $xy = x$; 3) $xy = y$; 4) $xy = zt$; 5) $xy = yx$, $x^py = y$, где p — простое число. Многообразие групп минимально тогда и только тогда, когда оно задается тождествами $xy = yx$, $x^p = 1$, где p — фиксированное простое число. Дистрибутивные решетки являются единственным минимальным многообразием решеток. Многообразие колец с ассоциативными степенями минимально в том и только в том случае, когда оно задается одним из следующих наборов тождеств: 1) $xy = px = 0$, где p — фиксированное простое число; 2) $x(yz) = (xy)z$, $x^p = x$, где p — фиксированное простое число. Единственным минимальным многообразием линейных алгебр над бесконечным полем является многообразие, задаваемое тождеством $xy = 0$ (см. [49], § 71).

Многообразие алгебр называется *конечно базируемым*, если оно задается конечным набором тождеств. Алгебра A называется *конечно базируемой*, если многообразие $\mathrm{HS\Pi}A$, порожденное алгеброй A, является конечно базируемым. Свойство конечной базируемости многообразия K [алгебры A] существенно при алгоритмическом решении вопроса о принадлежности данной алгебры многообразию K [многообразию, порожденному алгеброй A], поскольку этот вопрос сводится к проверке выполнимости конечного набора тождеств. Отметим, что конечно базируемые многообразия групп, колец и модулей задаются одним тождеством. Действительно, если, например, многообразие групп задается двумя тождествами $w_1 = w_2$ и $u_1 = u_2$, то можно считать, что в записи этих тождеств входят непересекающиеся множества переменных. Поэтому эти тождества эквивалентны одному тождеству

$$w_1 w_2^{-1} u_1 u_2^{-1} = 1.$$

Одним из наиболее важных вопросов в теории конечно базируемых многообразий является вопрос об описании конечно базируемых конечных алгебр. Конечно базируемы: 1) двухэлементные алгебры; 2) конечные группы; 3) конечные ассоциативные кольца; 4) конечные алгебры, порождающие дистрибутивное многообразие; 5) конечные простые универсальные алгебры A, порождающие перестановочное многообразие, причем все собственные подалгебры в A одноэлементны; 6) полугруппы, содержащие не более четырех элементов (см. [49], с. 385). Более подробно с этими вопросами можно познакомиться в [28], гл. 9; [41], гл. V, § 4 и с. 256; [49], § 67.

Почти все конечные универсальные алгебры являются конечно базируемыми. Более точно, пусть $f(n)$ — число всех неизоморфных алгебр порядка n, $l(n)$ — число всех неизоморфных конечно базируемых алгебр порядка n. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} l(n)/f(n) = 1$$

(см. [49], с. 386). С другой стороны, существует трехэлементный бесконечно базируемый группоид, шестиэлементная бесконечно базируемая полугруппа, 64-элементное бесконечно базируемое неассоциативное кольцо (см. [49], с. 386—387).

Пусть многообразие T-алгебр K конечно базируемо. Тогда существует такое многообразие T-алгебр V, содержащее K и отличное от K, что если $V \supseteq U \supseteq K$ для некоторого многообразия T-алгебр U, то либо $V = U$, либо $U = K$. Многообразие V с этими свойствами называется *покрытием* многообразия K. Не всякое многообразие обладает покрытием. Число покрытий конечно базируемого многообразия может быть континуальным.

Алгебра A называется *критической*, если она не принадлежит многообразию, порожденному всеми ее подалгебрами, отличными от A, и всеми ее фактор-алгебрами A/θ, где $\theta \neq \Delta(A)$. Критическая алгебра всегда подпрямо неразложима. Каждое локально конечное многообразие универсальных алгебр порождается своими конечными критическими алгебрами.

Многообразие алгебр называется *резидуально малым*, если мощности подпрямо неразложимых алгебр ограничены. Примерами резидуально малых многообразий являются многообразия абелевых групп, всех полурешеток, дистрибутивных решеток, булевых алгебр. Если дистрибутивное многообразие порождается конечной алгеброй, то оно резидуально мало (см. [28], гл. 4). Многообразие K резидуально мало тогда и только тогда, когда в K любая алгебра вложима в эквациально компактную алгебру (см. [28], гл. 4). Обзор результатов по резидуально малым многообразиям приведен в [28], гл. 4; [49], с. 396—397.

Многообразие универсальных алгебр *прямо представимо*, если оно порождается конечной алгеброй и с точностью до изоморфизма содержит лишь конечное число конечных алгебр, не разложимых в прямое произведение. В прямо представимом многообразии конгруэнции перестановочны. В любой конечной алгебре A из прямо представимого многообразия для любой конгруэнции $\theta \in \mathrm{Con}(A)$ все классы θ-эквивалентных элементов имеют одинаковый порядок (см. [28], гл. 5; [41], гл. IV, § 13). Многообразие K прямо представимо, если K порождается конечной алгеброй, перестановочно и подпрямо неразложимые алгебры в K просты (см. [28], с. 55). Дистрибутивное многообразие K, порожденное конечной алгеброй, прямо представимо тогда и только тогда, когда K арифметично и в K подпрямо неразложимые алгебры просты (см. [28], с. 55).

Предмногообразие алгебр K обладает *свойством расширения конгруэнций* (CEP), если для любой подалгебры B в любой алгебре A из K и произвольной конгруэнции θ в B существует такая конгруэнция θ' в A, что $\theta = \theta' \cap B^2$. Другими словами, отображение ограничения $\mathrm{Con}(A) \to \mathrm{Con}(B)$ сюръективно. Алгебра C из предмногообразия K *инъективна* в K, если для любой подалгебры B в любой алгебре A из K каждый гомоморфизм алгебры B в C продолжается до гомоморфизма из A в C. Для многообразия K

следующие условия эквивалентны: (1) любая алгебра из K вложима в инъективную алгебру из K; (2) K обладает свойством CEP, резидуально мало и для любых алгебр A, B, C из K, $C = A \cap B$, естественные гомоморфизмы алгебр A и B в $A *_C B$ являются вложениями (см. [49], с. 397, 414).

2.3. Примальные алгебры и их обобщения. Конечная неодноэлементная алгебра A называется *примальной*, если клон главных производных операций на A совпадает с $O(A)$. Примером примальных алгебр являются кольца вычетов $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}p$, p — простое число. Если A — примальная алгебра, то многообразие, порожденное A, состоит из всех булевых степеней алгебры A. Поэтому это многообразие как категория изоморфна многообразию всех булевых алгебр. Справедливо и обратное утверждение (см. [41], гл. IV, § 7; 49, § 74). Многообразие, порождаемое примальной алгеброй, задается одним тождеством. Если $p(n)$ — число всех неизоморфных примальных группоидов порядка n, а $f(n)$ — число всех неизоморфных группоидов порядка n, то

$$\lim_{n\to\infty} p(n)/f(n) = 1/e$$

(см. [28], гл. 6). Конечная алгебра примальна тогда и только тогда когда она проста, арифметична и не имеет собственных подалгебр и автоморфизмов (см. [66], с. 89—90).

Более слабым понятием является понятие квазипримальной алгебры. Конечная неодноэлементная алгебра A называется *квазипримальной*, если *тернарный дискриминатор*, т. е. функция $t(x, y, z)$, для которой

$$t(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{если } a = b, \\ a, & \text{если } a \neq b, \end{cases}$$

является главной производной операцией. Это условие эквивалентно тому, что любая алгебраическая операция на A, сохраняющая подалгебры и изоморфизмы между подалгебрами алгебры A, является главной производной операцией. Конечная неодноэлементная алгебра A квазипримальна тогда и только тогда, когда любая ее подалгебра проста (конгруэнц-проста), и многообразие, порожденное алгеброй A, арифметично (см. [41], с. 173). Если $q(n)$ — число неизоморфных квазипримальных группоидов порядка n, $f(n)$ — число всех неизоморфных группоидов порядка n, то

$$\lim_{n\to\infty} q(n)/f(n) = 1$$

(см. [28], с. 62).

Многообразие K называется *дискриминаторным*, если K порождается классом алгебр M, причем существует слово $t(x, y, z)$, задающее в каждой алгебре из класса M тернарный дискриминатор. Многообразие K алгебр сигнатуры T дискриминаторно в том и только том случае, когда существует такое слово $p(x, y, z)$ сигнатуры T, что в K выполнены тождества

$$p(x, z, z) = p(x, z, x) = x, \quad p(x, x, z) = z,$$
$$p(x, p(x, y, z), y) = y,$$
$$p(x, y, t(z_1, \ldots, z_n)) = \\ = p(x, y, t(p(x, y, z_1), \ldots, p(x, y, z_n))),$$

где t — любая операция из T (см. [28], с. 59; [41], гл. IV, § 9).

Универсальная алгебра сигнатуры T называется *идемпотентной*, если T_0 пусто и для любого натурального числа n, любого $t \in T_n$ в алгебре выполнено тождество $t(x, \ldots, x) = x$. Идемпотентность алгебры A эквивалентна тому, что каждый элемент в A является одноэлементной подалгеброй. Универсальная алгебра A называется *аффинной*, если в A существует такая структура модуля над ассоциативным кольцом R, что произвольная главная производная операция $t(x_1, \ldots, x_n)$ в A имеет вид

$$t(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n, \qquad (*)$$

где $c_0 \in A$ и $c_i \in R$ при $i \geqslant 1$. Кроме того, тернарная операция $t(x, y, z) = x - y + z$ является главной производной операцией в A. Условие $(*)$ эквивалентно тому, что

$$t(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) + t(0, \ldots, 0) = \\ = t(x_1, \ldots, x_n) + t(y_1, \ldots, y_n)$$

для всех $x_i, y_i \in A$.

Конечная идемпотентная универсальная алгебра A квазипримальна в том и только том случае, когда в A любая подалгебра проста (конгруэнц-проста), в A нет неодноэлементных аффинных подалгебр, и в A^2 нет подалгебр вида $(A_1 \times B_2) \cup (B_1 \times A_2)$, где $A \supseteq A_i \supseteq B_i \neq \varnothing$ (см. [66], с. 99). Свойство квазипримальности можно также выразить в терминах подалгебр прямых степеней алгебры A. Пусть B — подалгебра в A^I. Введем на I отношение $\underset{B}{\sim}$, положив $i \underset{B}{\sim} j$, если существует такой изоморфизм T-алгебр f: $p_i(B) \to p_j(B)$, что $f(p_i(b)) = p_j(b)$ для всех $b \in B$, где p_i, p_j — естественные проекции A^I на i-й и j-й множитель A в A^I. Подмножество J в I называется *B-неприводимым*, если никакие два элемента из J не являются эквивалентными относительно $\underset{B}{\sim}$. Конечная неодноэлементная алгебра A квазипримальна в том и только том случае, когда для любой подалгебры B в любой декартовой степени A^I и любого B-неприводимого подмножества J в I образ проекции B в A^J совпадает с

$$\prod_{j \in J} p_j(B)$$

(см. [49], § 75).

Существует довольно много типов алгебр, промежуточных между примальными и квазипримальными алгебрами. Квазипримальная алгебра A называется:

а) ds-*примальной*, если любой изоморфизм между подалгебрами в A продолжается до автоморфизма алгебры A;

б) d-*примальной*, если в A нет собственных подалгебр;

в) s-*примальной*, если единственным изоморфизмом между подалгебрами алгебры A является тождественный автоморфизм;

г) *инфрапримальной*, если каждый изоморфизм подалгебр в A является автоморфизмом.

Таким образом, ds-примальные и s-примальные алгебры являются инфрапримальными. Конечная неодноэлементная алгебра A называется h-*примальной*, если для любого натурального числа n любая n-арная алгебраическая операция на A, сохраняющая конгруэнции, является главной производной операцией.

Для конечной неодноэлементной алгебры A, порождающей арифметическое многообразие, следующие условия эквивалентны: (1) A является h-примальной алгеброй; (2) если θ, $\theta' \in \mathrm{Con}(A)$ и $A/\theta \simeq A/\theta'$, то $\theta = \theta'$.

Пусть A — квазипримальная алгебра. Если A не является ds-примальной алгеброй, то в многообразии, порожденном A, нет инъективных алгебр. Если алгебра A является ds-примальной, то единственными инъективными алгебрами в многообразии, порожденном A, являются булевы расширения $A[B]$, где B — полная булева алгебра (см. [49], § 82). Если A — арифметическая h-примальная алгебра и $A_1, \ldots, A_n$ — подпрямо неразложимые гомоморфные образы алгебры A, то прямые произведения алгебр $A_i[C_i]$, где C_i — полные булевы алгебры, являются инъективными алгебрами в $\mathrm{HS\Pi}(A)$ (см. [49], § 82).

Двойственным к понятию инъективности является проективность. Алгебра P из абстрактного класса K называется *проективной*, если для любого сюръективного гомоморфизма f: $A \to B$ и любого гомоморфизма g: $P \to B$, где A, B, $P \in K$, существует такой гомоморфизм h: $P \to A$, что $g = f \circ h$. Легко видеть, что в предмногообразиях проективными алгебрами являются ретракты свободных алгебр, и только они. Существует достаточно широкий класс предмногообразий, в которых имеются проективные несвободные алгебры.

Пусть A — квазипримальная алгебра и P — конечная алгебра из многообразия K, порожденного A. Алгебра P проективна в K в том и только том случае, если каждая d-примальная подалгебра в A является прямым сомножителем в P (см. [48], § 82).

К понятию примальности примыкает понятие предпримальности. Конечная универсальная алгебра сигнатуры T называется *предпримальной*, если она не является примальной, и клон ее главных производных операций $T(A)$ максимален в клоне всех операций $O(A)$. Описание предпримальных алгебр связано с описанием максимальных клонов операций, приведенным в п. 1.8. Если предпримальная алгебра A содержит не менее трех элементов, то она либо квазипримальна, либо задается *постоянными операциями*, т. е. алгебраическими операциями t: $A^n \to A$, область значений которых одноэлементна. Группа автоморфизмов предпримальной алгебры является циклической группой простого или единичного порядка. Если B — подалгебра или фактор алгебра предпримальной алгебры A и B неизоморфно A, то алгебра B примальна. В предпримальной алгебре любое независимое по Марчевскому подмножество (см. п. 3.5) содержит не более одного элемента. Эти и другие результаты о предпримальных алгебрах изложены в [44].

Другим близким к примальности понятием является свойство парапримальности. Пусть A — конечная неодноэлементная алгебра и B — подалгебра прямой степени A^I, I — некоторое множество. Подмножество J в I называется *B-минимальным*, если оно B-неприводимо и естественная проекция B в алгебру

$$B' = \prod_{j \in J} p_j(B)$$

(см. [57]) является вложением, но никакое собственное подмножество J' в J этим свойством уже не обладает. Алгебра A называется *парапримальной*, если для любого конечного множества I, любой подалгебры B в A^I и любого B-минимального подмножества J в I образ B в A^J совпадает с алгеброй B'. Конечная неодноэлементная алгебра A парапримальна тогда и только тогда, когда любая подалгебра алгебры A проста и A порождает перестановочное многообразие (см. [49], § 77).

Пусть парапримальная алгебра A порождает многообразие K. Тогда в K имеется лишь конечное число неизоморфных парапримальных алгебр. Каждая конечная алгебра из K разлагается в прямое произведение парапримальных алгебр. Если каждая подалгебра алгебры A содержит одноэлементную подалгебру, то $K = \mathrm{S\Pi}A$. Если алгебра A проста и все ее подалгебры одноэлементны, то следующие условия эквивалентны: (1) $K = E \cup \mathrm{S\Pi}A$; (2) алгебра A либо квазипримальна, либо в A есть одноэлементные подалгебры; (3) многообразие K минимально (см. [57]). Отметим, что если конечная алгебра A порождает дистрибутивное многообразие K и все подалгебры в A просты, то $K = E \cup \mathrm{S\Pi}A$ (см. [49], § 80).

Парапримальная алгебра A квазипримальна в том и только том случае, когда в A нет неодноэлементных аффинных подалгебр (см. [66], с. 106). Конечная идемпотентная алгебра A парапримальна в том и только том случае, когда любая подалгебра в алгебре A проста и в A^2 нет подалгебр вида $(A_1 \times B_2) \cup \cup (B_1 \times A_2)$, где $A \supseteq A_i \supseteq B_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2$ (см. [66]).

Неодноэлементная алгебра A сигнатуры T называется *функционально полной*, если клон $T'(A)$ всех производных операций на A совпадает с клоном $O(A)$ всех операций на A. Конечная алгебра A, содержащая не менее трех элементов, функционально полна тогда и только тогда, когда тернарный дискриминатор $t(x, y, z)$ является производной операцией на A. Это эквивалентно тому, что производной операцией на A является *дуальный дискриминатор*, т. е. функция $d(x, y, z)$, определяемая условием

$$d(a, b, c) = \begin{cases} a, & \text{если } a = b, \\ c, & \text{если } a \neq b. \end{cases}$$

Примером функционально полных алгебр являются конечные поля, если их рассматривать как кольца с единицей.

Пусть A — простая, не обязательно конечная алгебра сигнатуры T, порождающая перестановочное многообразие. Тогда либо на каждом подмножестве в A дуальный дискриминатор $d(x, y, z)$ совпадает с ограничением некоторой производной операции, либо A является аффинной алгеброй, причем аддитивная группа A не имеет элементов составного порядка (см. [49], с. 407). Таким образом, если алгебра A конечна, то она либо функционально полна, либо аффинна. Кроме того, аффинная алгебра проста в том и только том случае, если она парапримальна. Конечная группа функционально полна в том и только том случае, если она проста.

Конечная алгебра называется *минимальной*, если каждая унарная производная операция в этой алгебре либо постоянна, либо является перестановкой. Две алгебры (A, T) и (A, Q), заданные на множестве A, называются *полиномиально эквивалентными*, если совпадают клоны производных операций, т. е. $T'(A) = Q'(A)$. Универсальная алгебра A минимальна в том и только том случае, когда она полиномиально эквивалентна одной из следующих алгебр: (1) полигону над группой; (2) векторному пространству над полем; (3) двухэлементной булевой алгебре; (4) двухэлементной решетке; (5) двухэлементной полурешетке (см. [52], § 4).

В произвольной конечной алгебре A рассмотрим пару конгруэнций (c, c'), где c' покрывает c в решетке $\mathrm{Con}(A)$. Рассмотрим такую унарную производную операцию p, что $p(c') \nsubseteq c$ и при этом $p(A)$ минимально. Обозначим через C клон всех таких производных операций из $T'(A)$, для которых $p(A)$ является подалгеброй в C-алгебре A. Тогда C-алгебра $p(A)$ минимальна и при различных выборах полинома p получаются изоморфные алгебры. *Типом конечной алгебры* A называется набор номеров из приведенной выше классификации минимальных алгебр, которым соответствуют алгебры $p(A)$ при всевозможных выборах пар конгруэнций (c, c'), где c' покрывает c в решетке $\mathrm{Con}(A)$. Таким образом, тип алгебры A — это подмножество $\mathrm{typ}(A) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Если K — класс алгебр, то $\mathrm{typ}(K)$ — это набор типов конечных алгебр из K. Если K — локально конечное многообразие, причем $\mathrm{typ}(K)$ не содержит 2 и 3, то многообразие K является n-перестановочным (см. [52]). Если $\mathrm{typ}(K)$ не содержит 1 и 5, то из резидуальной малости локально конечного многообразия K вытекает модулярность многообразия K. Предположим, что многообразие K порождается конечной алгеброй B. Тогда в K имеется лишь конечное число простых конечных алгебр A, у которых $\mathrm{typ}(K)$ не содержит 5. Пусть алгебра B проста и K порождается также простой конечной алгеброй A. Тогда типы B и A совпадают. Более того, если $\mathrm{typ}(A) \subseteq (3, 4)$, то алгебры A и B изоморфны, см. [52].

Пусть задана группа G автоморфизмов универсальной алгебры A. Если n — натуральное число, то скажем, что группа G действует *n-транзитивно* в A, если для любых n различных элементов $x_1, \ldots, x_n$ из A и произвольных различных элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ существует такой автоморфизм $g \in G$, что $g(x_1) = a_1, \ldots, g(x_n) = a_n$. Предположим, что A — конечная универсальная алгебра, содержащая не менее трех элементов. Если группа автоморфизмов действует в A трижды транзитивно, то либо алгебра A функционально полна, либо алгебра A рационально эквивалентна аффинному пространству над полем из двух элементов (см. [66], с. 139). Предположим, что алгебра A содержит не менее трех элементов и группа автоморфизмов действует в A дважды транзитивно. Тогда алгебра A либо функционально полна, либо рационально эквивалентна аффинной алгебре над конечным полем (см. [66], с. 141). В этих результатах под аффинной алгеброй над полем A понимается универсальная алгебра, заданная на векторном пространстве над полем F системой идемпотентных операций вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n, \quad c_i \in F,$$
$$c_1 + \ldots + c_n = 1.$$

Отметим, что полностью описаны конечные алгебры с транзитивной (или 1-транзитивной) группой автоморфизмов (см. [66], с. 112—128).

Предположим, что конечная алгебра A содержит не менее двух элементов и порождает перестановочное многообразие. Алгебра A функционально полна в том и только том случае, если решетка конгруэнций в A^2 четырехэлементна (см. [41], с. 180).

Подробные обзоры по примальным алгебрам и их обобщениям можно найти в [1], § 1.2; [3]; [28], гл. 6; [41], гл. IV; [49], приложение 5.

2.4. Независимость и эквивалентность многообразий. Многообразия $K_1, \ldots, K_n$ алгебр одной сигнатуры называются *независимыми*, если существует такое слово $p(x_1, \ldots, x_n)$, что $p(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ является тождеством в K_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Если $n = 2$ и многообразие $K_1 \cup K_2$ модулярно, то любая алгебра из $K_1 \cup K_2$ разлагается, и притом единственным способом, в прямое произведение $A_1 \times A_2$, где $A_i \in K_i$. Если $K_1 \cup K_2 = K_1 \times K_2$, $K_1 \cap K_2 = E$ и в классе $K_1 \cup K_2$ конгруэнции во всех алгебрах перестановочны, то верно и обратное утверждение (см [1], с. 203; [41], с. 31—33). Дальнейшие результаты в этой области отражены в [1], с. 203; [3].

При рассмотрении (пред)многообразий алгебр предполагалось, что сигнатура всех алгебр фиксирована. Рассмотрим теперь связи между многообразиями алгебр разной сигнатуры. Если V и W — многообразия алгебр сигнатур T и S, то скажем, что

$V \leqslant W$, если существует функтор H: $W \to V$, сохраняющий носители всех алгебр из W. Это эквивалентно тому, что каждому $t \in T_n$, $n \geqslant 0$, сопоставлено слово $f_t(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры S, причем если $(A, S) \in W$, то $(A | f_t, t \in T) \in V$.

Примером описанной ситуации являются переход от многообразия ассоциативных алгебр Ass к многообразию йордановых колец с помощью операции $x \circ y = xy + yx$ и от Ass к многообразию лиевых колец с помощью операции $[x, y] = xy - yx$.

Обозначим через C и D клоны главных производных операций свободных алгебр счетного ранга многообразий V и W. Тогда условие $V \leqslant W$ эквивалентно существованию гомоморфизма клонов $C \to D$. Скажем, что многообразие V *интерпретируется* в многообразии W, если $V \leqslant W$. Свойство интерпретируемости связано с заданием мальцевских условий. Пусть, например, M — многообразие алгебр с одной тернарной операцией $p(x, y, z)$, задаваемое тождествами $p(x, y, y) = p(y, y, x) = x$. *Теорему Мальцева* (см. п. 1.3 и 2.1) можно сформулировать следующим образом: многообразие V перестановочно тогда и только тогда, когда M интерпретируется в V. Аналогично, выполнимость в многообразии строгих мальцевских условий эквивалентна интерпретируемости в V некоторого специального конечно базируемого многообразия конечной сигнатуры. Подробнее с этими вопросами можно познакомиться в [52], § 9, см. также [3] и [46].

Скажем, что многообразия V и W *эквивалентны*, если $V \leqslant W$ и $W \leqslant V$. Обозначим через $[V]$ класс эквивалентных многообразий, содержащий V. Положим $[V] \leqslant [W]$, если $V \leqslant W$. Множество классов эквивалентности многообразий относительно отношения $\leqslant$ образует решетку. Она называется *решеткой типов представимости многообразий*. Ее строение подробно рассматривается в [46]. Отметим, что введенная эквивалентность многообразий достаточно груба — так, в одном классе, например, лежат многообразие всех полугрупп и многообразие всех множеств (см. (46), с. 18). Более естественна введенная А. И. Мальцевым (см. [24], с. 67) *рациональная эквивалентность многообразий*. Она равносильна изоморфизму клонов главных производных операций свободных алгебр счетного ранга этих многообразий.

Многообразия V и W рационально эквивалентны в том и только том случае, если существует изоморфизм многообразий как категорий, причем этот изоморфизм сохраняет носители алгебр.

2.5. Квазимногообразия и другие аксиоматизируемые классы алгебр. *Квазимногообразием* универсальных алгебр называется абстрактный класс алгебр, задаваемый *квазитождествами*, т. е. предложениями вида

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(f_1 = g_1 \,\&\, \ldots \,\&\, f_m = g_m \rightarrow f_{m+1} = g_{m+1}),$$

где f_i, g_i — слова, в запись которых входят неизвестные $x_1, \ldots, x_n$ (см. п. 1.6). Каждое многообразие является квазимногообразием, поскольку тождество является частным случаем квазитождества. Существуют квазимногообразия, не являющиеся многообразиями, например, класс всех групп без кручения. Для абстрактного класса алгебр K следующие условия эквивалентны: (1) K является квазимногообразием; (2) K является предмногообразием и $\Pi_u K = K$; (3) K содержит одноэлементную алгебру E и $K = \Pi_f K = \mathrm{S}K$ (см. [23], с. 271).

В частности, если N — класс алгебр, то $K = E \cup \cup \mathrm{S}\Pi_f N$ — наименьшее квазимногообразие, содержащее N, т. е. *квазимногообразие, порожденное классом* N. Если K — предмногообразие, то $\Pi_f K$ — квазимногообразие, причем свободные алгебры предмногообразия K являются свободными алгебрами квазимногообразия $\Pi_f K$. Предположим, что предмногообразие K порождается одной алгеброй A. В этом случае в п. 2.1 указан способ построения свободных алгебр квазимногообразия $E \cup \mathrm{S}\Pi_f K$, порожденного алгеброй A. Более подробно со свойствами квазимногообразий можно познакомиться по монографиям и обзорам [1—3, 16, 17]; [19], гл. IV; [23], гл. V; [26], т. I, с. 183—185; [49], гл. 7.

Класс алгебр сигнатуры T называется *аксиоматизируемым*, если он состоит из всех T-алгебр, в которых истинен заданный набор H предложений языка $L(T)$. В этом случае также говорят, что аксиоматизируемый класс *задается* (или *определяется*) *предложениями* из множества H. Каждый аксиоматизируемый класс является абстрактным и замкнутым относительно ультрапроизведений. Аксиоматизируемый класс называется *универсальным*, если он задается универсальными предложениями. Пусть K — аксиоматизируемый класс алгебр. Тогда $\mathrm{S}K$ — универсальный класс алгебр, задаваемый всеми универсальными предложениями, истинными в K. Класс $\mathrm{HS}K$ также универсален и задается всеми позитивными универсальными предложениями, истинными в K, где под *позитивным предложением* понимается предложение, в запись бескванторной части которого не входит отрицание (см. [49], с. 274).

Если K и K' — замкнутые относительно ультрапроизведений абстрактные классы алгебр сигнатур T и T' соответственно, причем $T \subseteq T'$, то класс N всех алгебр из K, вложимых в алгебры из K', является универсальным. Алгебра A называется *локально вложимой* в алгебры из аксиоматизируемого класса N, если любое ее конечное обеднение вложимо в некоторую алгебру из N. Из локальных теорем Мальцева (см. п. 1.6) следует, что если какая-то алгебра локально вложима в алгебры из аксиоматизируемого класса K, то она принадлежит универсальному классу $\mathrm{S}K$.

Хорновским классом называется аксиоматизируемый класс, определяемый хорновскими предложениями. Как отмечено в п. 1.6, каждый хорновский класс замкнут относительно фильтрованных произведений.

Аксиоматизируемый класс алгебр является квазимногообразием тогда и только тогда, когда он является предмногообразием. Более подробно со свойствами различных типов аксиоматизируемых классов можно познакомиться в [19], гл. VI; [23], гл. IV; [24], с. 234—274; [41], гл. V; [49], гл. 6, 7.

Абстрактный класс алгебр K называется *формацией*, если $\mathrm{H}K = K$ и K замкнут относительно конечных подпрямых произведений. Последнее означает, что если алгебра A является подпрямым произведением алгебр $A_1, \ldots, A_n$ из K, то $A \in K$. Примерами формаций являются классы всех алгебр из некоторого многообразия, в которых решетка конгруэнций удовлетворяет условию минимальности (максимальности). Теория формаций алгебраических систем излагается в [36].

Пусть U, V, K — абстрактные классы алгебр одной сигнатуры, причем U и V содержатся в K.

Произведением $U \circ_K V$ *классов* U и V в классе K в смысле Мальцева называется класс всех таких алгебр A из K, что существует такая конгруэнция θ в A, для которой $A/\theta \in V$ и любой класс $\theta(a)$, где $a \in A$, являющийся алгеброй из K, принадлежит U. Предположим, что R — один из операторов S, Π, Π_u, причем классы U, V, K замкнуты относительно оператора R. Предположим также, что если $\mathrm{R} = \Pi_u$, то сигнатура рассматриваемых алгебр класса K конечна, а V содержит одноэлементную алгебру E. Тогда класс $U \circ_K V$ замкнут относительно оператора R. В частности, если E — предмногообразие, то все его подпредмногообразия образуют группоид относительно умножения. Если K — квазимногообразие алгебр конечной сигнатуры, то все его подквазимногообразия образуют группоид относительно умножения (см. [24], с. 358).

Предположим, что K — многообразие алгебр сигнатуры T с унарной главной производной операцией $f(x)$, причем для всех $t \in T$ в K выполнены тождества

$$f(x) = f(y), \quad t(f(x), \ldots, f(x)) = f(x).$$

Если K перестановочно, то все подмногообразия в многообразии K образуют группоид относительно умножения. Для многообразий всех групп и всех алгебр Ли операция умножения подмногообразий ассоциативна, и соответствующие полугруппы являются свободными полугруппами с нулем (см. [23]; [24], с. 368).

§ 3. Сопутствующие структуры универсальной алгебры

3.1. Эндоморфизмы алгебры и смежные вопросы. С каждой универсальной алгеброй A связаны решетка подалгебр $\mathrm{Sub}(A)$, решетка конгруэнций $\mathrm{Con}(A)$, моноид эндоморфизмов $\mathrm{End}(A)$ и группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(A)$. Решетками $\mathrm{Sub}(A)$, $\mathrm{Con}(A)$ могут быть алгебраические решетки, и только они. Группа $\mathrm{Aut}(A)$ является группой обратимых элементов моноида $\mathrm{End}(A)$. Любой моноид изоморфен моноиду эндоморфизмов некоторой универсальной алгебры (см. [22], § 3). Любая группа изоморфна группе автоморфизмов некоторой алгебры (см. [22], § 2).

Моноид S изоморфен моноиду эндоморфизмов некоторой (конгруэнц-)простой универсальной алгебры в том и только том случае, когда каждый элемент в S либо обратим, либо является правым нулем (см. [1], с. 209). Отметим, что любое многообразие алгебр содержит простую алгебру (см. [28], с. 6). Если G — группа и L_1, L_2 — алгебраические решетки, то существует такая алгебра A, что $\mathrm{Aut}(A) \simeq G$, $\mathrm{Con}(A) \simeq L_1$, $\mathrm{Sub}(A) \simeq L_2$ (см. [49], § 93). Если S — моноид и L — алгебраическая решетка, то найдется такая универсальная алгебра A, что $\mathrm{End}(A) \simeq S$, $\mathrm{Sub}(A) \simeq L$ (см. [1], с. 208). Более подробно с подобными результатами можно познакомиться по [34], с. 74—83, 85—96.

Пусть (A, T), (B, Q) — две алгебры, $T(A)$ и $Q(B)$ — их клоны главных производных операций. Отображение p: $A \to B$ называется *слабым гомоморфизмом*, если для каждого целого неотрицательного числа заданы отображения $T_n \to Q_n(B)$, $Q_n \to T_n(A)$, причем если $f \in T_n(A)$, $g \in Q_n(B)$ соответствуют друг другу при одном из этих отображений, то $g(p^n(x)) = p(f(x))$ для всех $x \in A^n$. Биективный слабый гомоморфизм алгебры A на себя называется *слабым автоморфизмом* алгебры A. Изучение слабых автоморфизмов свободных алгебр счетного ранга многообразий связано с описанием рационально эквивалентных многообразий. Обзор результатов по слабым гомоморфизмам приведен в [48].

3.2. Конгруэнции алгебр. С каждым многообразием универсальных алгебр K можно связать многообразие решеток $\mathrm{Con}(K)$, порождаемое решетками конгруэнций алгебр из K. Если многообразие K модулярно, то $\mathrm{Con}(K)$ — дезаргово многообразие решеток (см. [49], § 61). В частности, это верно для перестановочных многообразий алгебр (см. п. 1.4).

Пусть в $\mathrm{Con}(K)$ выполнено решеточное тождество $p \leqslant q$. Если p и q являются либо объединениями пересечений объединений переменных, либо пересечениями объединений пересечений переменных, то $\mathrm{Con}(K)$ — многообразие модулярных решеток. Если p и q являются либо объединениями пересечений переменных, либо пересечениями объединений переменных, то $\mathrm{Con}(K)$ — многообразие дистрибутивных решеток (см. [49], § 61). Существуют многообразия универсальных алгебр K, для которых $\mathrm{Con}(K)$ — собственное многообразие решеток, состоящее не только из модулярных решеток (см. [1], с. 202; [2, 3]). Если K — многообразие полугрупп или унарных алгебр и $\mathrm{Con}(K)$ — собственное многообразие решеток, то $\mathrm{Con}(K)$ состоит из модулярных решеток (см. [49], § 61).

Пусть θ, τ — две конгруэнции на алгебре A из модулярного многообразия K. *Коммутатор* $[\theta, \tau]$ состоит из всех таких пар элементов $(x, y) \in A^2$, что $((x, x), (y, y))$ принадлежит конгруэнции в θ, порожденной всеми такими $((a, a), (b, b)) \in A^4$, что $(a, b) \in \tau$. Тогда $[\theta, \tau] \in \mathrm{Con}(A)$, причем

$$[\theta, \tau] = [\tau, \theta] \subseteq \tau \cap \theta. \qquad (*)$$

Если $\tau_i \in \mathrm{Con}(A)$, $i \in I$, то в $\mathrm{Con}(A)$

$$\Big[\theta, \bigvee_i \tau_i\Big] = \bigvee_i [\theta, \tau_i]. \qquad (**)$$

Если задан гомоморфизм алгебр $f\colon B \to A$ в многообразии K, то в $\mathrm{Con}(B)$

$$[f^{-1}\theta, f^{-1}\tau] = f^{-1}[\theta, \tau] \qquad (***)$$

(см. [28], гл. 3; [45], гл. IV). Здесь через $f^{-1}\delta$, где $\delta \in \mathrm{Con}(A)$, обозначается конгруэнция в $\mathrm{Con}(B)$, состоящая из всех таких пар $(x, y) \in B^2$, что $(f(x), f(y)) \in \delta$.

Предположим, что K — модулярное многообразие универсальных алгебр и в решетке конгруэнций $\mathrm{Con}(K)$ каждой алгебры A из K задана бинарная операция (θ, τ), выделяющая конгруэнцию в $\mathrm{Con}(A)$ со свойствами $(*)$ — $(***)$, где $[\theta, \tau]$ заменено на (θ, τ). Тогда $(\theta, \tau) \subseteq [\theta, \tau]$ (см. [28], с. 24; [45]). В группах и кольцах коммутант конгруэнций превращается в коммутант нормальных подгрупп и произведение идеалов соответственно.

Алгебра A из модулярного многообразия K называется *нейтральной*, если $[\theta, \tau] = \theta \wedge \tau$ для всех конгруэнций θ, τ на алгебре A. Многообразие K состоит из нейтральных алгебр тогда и только тогда, когда K дистрибутивно (см. [28], с. 30). Конгруэнция θ на алгебре A из модулярного многообразия называется *центральной*, если $[\theta, A^2] = \Delta(A)$. Алгебра A называется *нильпотентной*, если в A существует такой ряд конгруэнций $\Delta(A)=\theta_0 \subset \theta_1 \subset \ldots \subset \theta_n = A^2$, что θ_i/θ_{i-1} — центральная конгруэнция в A/θ_{i-1} для любого $i=1, \ldots, n-1$. В нильпотентной алгебре для любой конгруэнции θ классы θ-эквивалентных элементов равномощны (см. [45], с. 70). В нильпотентной алгебре каждая конгруэнция определяется любым своим классом эквивалентных элементов (см. (45], с. 70). В конечной нильпотентной алгебре порядок любой подалгебры делит порядок алгебры (см. [45], с. 74). Если конечная нильпотентная алгебра является прямым произведением алгебр примарных порядков, то она конечно базируема (см. [45], с. 175). Многие другие свойства нильпотентных групп и колец переносятся на нильпотентные универсальные алгебры (см. [45]; [65], § 2.3).

Пусть A — произвольная универсальная алгебра сигнатуры T. *Центром* алгебры A называется множество $Z(A)$ всех таких пар $(a, b) \in A^2$, что для любого целого неотрицательного числа n, любой n-арной главной производной операции t и любых элементов $x, y \in A^{n-1}$ равенства $t(a, x)=t(a, y)$ и $t(b, x)= t(b, y)$ эквивалентны. Центр $Z(A)$ является конгруэнцией в A (см. [41], с. 83; [45], с. 45; [52], § 3). Алгебра A называется *абелевой в смысле Маккензи*, если $Z(A)=A^2$. Алгебра A из модулярного многообразия является абелевой в том и только том случае, если $[A^2, A^2]=\Delta(A)$ (см. [52], с. 42). Все абелевы алгебры из модулярного многообразия K образуют подмногообразие $\mathrm{Ab}(K)$ в K. Многообразие $\mathrm{Ab}(K)$ рационально эквивалентно многообразию модулей над некоторым кольцом (см. [45], гл. 9). Отметим, что если решетки конгруэнций всех алгебр из модулярного многообразия K являются решетками с дополнениями, то многообразие K рационально эквивалентно многообразию модулей над классически полупростым кольцом (см. [28], с. 34). Если V — дистрибутивное подмногообразие в модулярном многообразии K, то $\mathrm{Ab}(K)$ и V — независимые многообразия (см. [28], с. 33; [45], с. 140).

Если алгебра A принадлежит модулярному многообразию, то центр $Z(A)$ является наибольшей центральной конгруэнцией в A. Если алгебра A принадлежит перестановочному многообразию, то следующие условия эквивалентны: (1) алгебра A абелева;

(2) алгебра A полиномиально эквивалентна модулю над некоторым кольцом; (3) диагональ $\Delta(A)$ является классом некоторой конгруэнции в A (см. [41], с. 85). Конечная минимальная алгебра A является абелевой тогда и только тогда, когда $\mathrm{typ}(A) \subseteq (1, 2)$ (см. п. 2.3), — [52], § 4. В локально конечном многообразии каждая (конгруэнц-)простая абелева алгебра конечна. Предположим, что модулярное многообразие K порождается конечной алгеброй A. Тогда каждая простая алгебра в K конечна и ее порядок не превосходит порядка алгебры A (см. [45], с. 135). Если $\mathrm{typ}(K)$ не содержит 5, то любая простая неабелева алгебра из K изоморфна факторалгебре некоторой подалгебры алгебры A (см. [52]).

3.3. Спектры многообразий. *Спектр* $\mathrm{Spec}\, K$ многообразия K — это множество порядков всех конечных алгебр из K. Спектр является подмоноидом в мультипликативном моноиде натуральных чисел. Это следует из того, что многообразие K содержит одноэлементную алгебру и замкнуто относительно прямых произведений. Любой мультипликативный моноид натуральных чисел является спектром некоторого многообразия (см. [49], § 71). Рассмотрение спектров наиболее содержательно при изучении многообразий, порождаемых своими конечными алгебрами.

Пусть A — конечная неодноэлементная алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны: (1) спектр многообразия, порожденного A, является циклическим мультипликативным моноидом, порожденным $\mathrm{card}\, A$; (2) алгебра A (конгруэнц-)проста, в A нет собственных неодноэлементных подалгебр и многообразие, порожденное A, перестановочно.

Понятие спектра можно распространить на класс всех кардиналов. Это приводит к рассмотрению *скелета* $[K]$ многообразия K, который состоит из классов изоморфных алгебр многообразия K. Если α — некоторый кардинал, то через $[K]_\alpha$ обозначим множество классов изоморфных алгебр мощности α в многообразии K. На классе $[K]$ можно ввести операцию умножения $\times$ и отношений квазипорядка $\ll$, $\leqslant$, которые индуцированы соответственно операцией прямого произведения и отношениями «быть изоморфным факторалгебре», «быть изоморфным подалгебре». Если K — дистрибутивное многообразие, содержащее неодноэлементные алгебры, то: (1) мультипликативная полугруппа $([K], \times)$ содержит любую счетную коммутативную полугруппу; (2) любое счетное квазиупорядоченное множество вложимо в квазиупорядоченное множество $([K]_{\aleph_1}, \ll)$; (3) если K обладает свойством CEP, то любое конечное квазиупорядоченное множество вложимо в $([K]_{\aleph_\omega}, \leqslant)$; (4) если справедлива континуум-гипотеза, то любое конечное множество с двумя отношениями квазипорядка вложимо в

$$\left(\bigcup_{n<\omega} [K]_n, \ll, \leqslant\right)$$

(см. [28], гл. 7).

Важной характеристикой произвольного абстрактного класса K является его *тонкий спектр*. Это функция на классе кардиналов, причем ее значение $f_K(\alpha)$ — это мощность множества неизоморфных алгебр мощности α в классе K. Если K неабелево модулярное многообразие, α — бесконечный кардинал, то $f_K(\alpha) = 2^\alpha$ (см. [28], с. 64).

Предположим, что A — конечная (конгруэнц-)простая алгебра порядка k, порождающая перестановочное многообразие, причем в A нет нетривиальных подалгебр. Тогда ограничение тонкого спектра многообразия HSПA на множество натуральных чисел совпадает с одной из следующих функций:

$$f_1(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k^m, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$f_2(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 2, & \text{если } n = k^m, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(см. [28], с. 69).

Абстрактный класс K называется *категоричным*, если $f_K(\alpha) = 1$ для любого бесконечного кардинала α. Абстрактный класс K называется *категоричным в бесконечной мощности* α, если все алгебры из K мощности α изоморфны. Если аксиоматизируемый класс алгебр счетной сигнатуры категоричен в некоторой несчетной мощности, то этот класс категоричен в любой несчетной мощности (см. [33]). Описание категоричных квазимногообразий можно найти в [17] и

[28], с. 71. Если для многообразия K функция f_K принимает постоянное значение 1, то K рационально эквивалентно либо многообразию множеств, либо многообразию множеств с выделенной точкой (см. [28], с. 71).

Предположим, что A — конечная (конгруэнц-)простая неодноэлементная алгебра, причем в A нет нетривиальных подалгебр. Если алгебра A порождает перестановочное многообразие, то либо A квазипримальна, либо A порождает категоричное квазимногообразие (см. [28], с. 71). Полное описание двухэлементных алгебр с этим свойством приведено в [28], с. 71—72.

Важной характеристикой локально конечного предмногообразия K является его *свободный спектр*, т. е. функция $s(n)$, равная порядку K-свободной алгебры ранга n. Если (пред-, квази-)многообразие K порождается конечной алгеброй A, то

$$s(n) \leqslant (\operatorname{card} A)^{((\operatorname{card} A)^n)}.$$

Для многообразия булевых алгебр $s(n) = 2^{(2^n)}$, для полурешеток $s(n) = 2^n - 1$, для модулярных решеток $s(3) = 28$. Существует четыре неэквивалентных многообразия алгебр, для которых $s(n) = 2^{n-1}n$ (см. [49], § 71). Пусть многообразие K порождается конечной алгеброй. Тогда либо $s(n) \leqslant cn^t$ для некоторых натуральных чисел c, t, либо $s(n) \geqslant 2^{n-m}$ для некоторого натурального числа m (см. [52], с. 164). Предположим, что K — нетривиальное локально конечное многообразие, причем $\operatorname{typ}(K)$ не содержит 3 и 4. Тогда для любого числа c, где $0 < c < 1$, имеем

$$s(n) \geqslant 2^{(2^{cn})}. \qquad (*)$$

Если же K — локально конечное многообразие, причем $\operatorname{typ}(K)$ не содержит 1, 5 и не выполняется условие (*) для некоторого c, где $0 < c < 1$, то многообразие K перестановочно, и каждая конечно порожденная алгебра из K нильпотентна (см. [52], § 12).

3.4. Логические конструкции в универсальных алгебрах. Многообразие K алгебр сигнатуры T имеет *определимые главные конгруэнции*, если существует такая формула $\Phi(x, y, z, t)$ языка $L(T)$, что для любой алгебры A из K и любых элементов a, b, c, $d \in A$

пара (a, b) принадлежит главной конгруэнции $\theta(c, d)$ в том и только том случае, если в A истинно $\Phi(a, b, c, d)$. Многообразие K имеет определимые главные конгруэнции, если выполнено одно из следующих условий:

1) K порождается конечной алгеброй и в K имеется лишь конечное число подпрямо неразложимых алгебр (см. [28], с. 81);

2) K порождается парапримальной алгеброй (см. [28], с. 81);

3) K является прямо представимым многообразием (см. [41], с. 223);

4) K — локально конечное многообразие со свойством CEP (см. [28], с. 82).

Для локально конечного многообразия K следующие условия эквивалентны: (1) K дистрибутивно и обладает свойством CEP; (2) формула $\Phi(x, y, z, t)$, задающая определимые главные конгруэнции, имеет вид

$$\Phi(x, y, z, t) = \underset{i=1}{\overset{n}{\&}} (t_i(x, y, z, t) = q_i(x, y, z, t)), \qquad (*)$$

где t_i, q_i — слова (см. [28], с. 84).

Если в алгебре A дуальный дискриминатор $d(x, y, z)$ задается главной производной операцией, то многообразие, порождаемое алгеброй A, имеет определимые главные конгруэнции, задаваемые формулой (*).

Если K — класс алгебр сигнатуры T, то множество всех предложений языка $L(T)$, истинных во всех алгебрах из K, называется *элементарной теорией* $\mathrm{Th}(K)$ класса K. Две T-алгебры A и B называются *элементарно эквивалентными*, если $\mathrm{Th}(A) = \mathrm{Th}(B)$. Из результатов п. 1.6 вытекает, что любая алгебра элементарно эквивалентна любой своей ультрастепени. Если A — конечная алгебра и B — алгебра, элементарно эквивалентная A, то алгебры A и B изоморфны (см. [23], с. 236).

Пусть A и B — две алгебры сигнатуры T. Тогда следующие условия эквивалентны: (1) алгебры A и B элементарно эквивалентны; (2) существует такое гомоморфное вложение f алгебры A в некоторую ультрастепень C алгебры B, что для любой формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ языка $L(T)$ и любых $a_1, \ldots, a_n \in A$

справедлива эквивалентность

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n) = И \Leftrightarrow \Phi(f(a_1), \ldots, f(a_n)) = И$$

(см. [23], с. 240). Гомоморфизм f из условия (2) называется *элементарным вложением* A в C. Легко видеть, что вложение f является элементарным в том и только том случае, если оно является сильным инъективным гомоморфизмом алгебраических систем сигнатуры $(T, \mathrm{Th}(A))$. Для любой бесконечной T-алгебры A можно построить элементарное вложение A в алгебру C, где мощность C равна любой наперед заданной мощности, большей $\mathrm{card}\, T + \mathrm{card}\, A$ (см. [23], с. 246).

Пусть S — совокупность предложений языка $L(T)$. Алгебра A сигнатуры T называется *моделью* S, если все предложения из S истинны в A, т. е. $S \subseteq \mathrm{Th}(A)$. Совокупность S в $L(T)$ *совместна*, если S обладает хотя бы одной моделью. Совместная совокупность S в $L(T)$ называется *полной*, если любые ее модели элементарно эквивалентны. Другими словами, для любого предложения Φ из $L(T)$ и любой модели A совокупности S либо Φ, либо $\neg\Phi$ истинно в A. Каждая совместная совокупность предложений может быть дополнена до полной (см. [23], с. 250).

Совокупность предложений S языка $L(T)$ называется *модельно полной*, если для любых ее моделей A и B из того, что A является подалгеброй в B, следует, что вложение A в B элементарно. Модельно полная теория имеет такую модель, которая вкладывается во всякую модель этой теории (см. [23], гл. IV, § 10). Для того чтобы совместная совокупность S предложений языка $L(T)$ была бы модельно полной, необходимо и достаточно, чтобы в классе всех моделей для S каждое предложение из S было бы эквивалентно предложению, у которого в пренексной форме все кванторы равны $\exists$ (см. [23], с. 264). Модельно полная совокупность предложений S является полной в том и только том случае, когда для каждого универсального предложения Φ языка $L(T)$ либо Φ, либо $\neg\Phi$ истинно в любой модели для S (см. [23], с. 266). Для произвольной T-алгебры A обозначим через T' пополнение T множеством нульарных операций t_a, $a \in A$, причем t_a фиксирует в A элемент a. Совместная совокупность S предложений языка $L(T)$ является модельно полной в том и только том случае, когда для любой ее модели A полна совокупность предложений $S \cup D_A$, где D_A — множество всех атомарных предложений языка $L(T')$ и их отрицаний, истинных в A (см. [23], гл. IV, § 10).

Элементарная теория $\mathrm{Th}(K)$ класса K называется *разрешимой*, если существует алгоритм, позволяющий по любому предложению языка $L(T)$ узнать, принадлежит ли оно $\mathrm{Th}(K)$. Результаты по полным и разрешимым элементарным теориям изложены в [16, 17]; [23], гл. IV; [26], т. 5, с. 972—973; [28], гл. 10; [29, 33].

Если T — некоторая сигнатура, то вместе с языком первой ступени $L(T)$ рассматривается также *язык второй ступени* $L_2(T)$. Он является расширением языка $L(T)$ с помощью формул второй ступени, к которым относятся все формулы языка $L(T)$, а также выражения вида $(\forall t)\Phi$, $(\exists t)\Phi$, $(\forall x)\Phi$, $(\exists x)\Phi$, $\neg\Phi$, $\Phi_1 \& \Phi_2$, $\Phi_1 \vee \Phi_2$, $\Phi_1 \to \Phi_2$, где $t \in T$, x — переменная, а Φ, Φ_1, Φ_2 — уже формулы. На языке $L_2(T)$ естественно формулируются мальцевские условия (см. п. 2.1).

Сверхтождеством называется универсальное предложение языка $L_2(T)$, т. е. формула вида

$$(\forall t_1) \ldots (\forall t_n)(\forall x_1) \ldots (\forall x_m)(u = v),$$

где $t_1, \ldots, t_n$ и $x_1, \ldots, x_m$ — все символы операций и переменных соответственно, входящие в запись слов u и v сигнатуры T. *Котождеством* называется формула языка $L_2(T)$, имеющая вид

$$(\forall t_1) \ldots (\forall t_n)(u = v),$$

где $t_1, \ldots, t_n$ — все символы операций из T, входящие в запись слов u и v сигнатуры T. Подробно со свойствами сверхтождеств и котождеств можно познакомиться по монографии [27].

3.5. Независимость в алгебрах. Пусть A — некоторое множество и F — система подмножеств в A, замкнутая относительно пересечения и объединения направленных семейств подмножеств. Подмножество X в A называется *F-независимым*, если для любого элемента x из X найдется такое подмножество Y, принадлежащее F, что x не содержится в Y, но $Y \supseteq X \setminus x$. Если F — система подалгебр в алгебре A, то получающаяся независимость называется *S-независимостью* (см. [49], гл. 5). Подмножество X в алгебре A называется *M-независимым* (или *независимым в смысле Марчевского*), если подалгебра R, порожденная множеством X, свободна в предмногообразии SПA и X является базой алгебры R. Другими словами, любое отображение множества X в алгебру A продолжается до гомоморфизма подалгебры R в A. Любое M-независимое множество является S-независимым. Пусть A — алгебра из абстрактного класса K и X — подмножество в A. Предположим, что f — отображение множества X в произвольную алгебру B из K, причем для любых слов p и q от одной переменной и любого элемента $x \in X$ из равенства $p(x) = q(x)$ вытекает $p(f(x)) = q(f(x))$. Если в этом случае отображение f можно продолжить до гомоморфизма подалгебры, порожденной X в B, то множество X называется *слабо независимым* или *независимым в смысле Грецера*. Подмножество X в универсальной алгебре A называется *локально независимым*, если X является M-независимым в подалгебре, порожденной множеством X. Из M-независимости вытекает слабая независимость (с $K = $ HSПA) и локальная независимость. Множество X является слабо независимым в том и только том случае, когда этим свойством обладает любое его конечное подмножество. Обзор результатов по независимостям в алгебрах можно найти в [1], § 2.3; [4], § 5; [47]; [49], гл. 5.

3.6. Алгебраические теории. Вернемся к определению универсальной алгебры и свяжем его с рядом категорных понятий. Пусть T — категория с конечными прямыми произведениями, объектами которой являются целые неотрицательные числа. Предполагается, что если числа n и m — объекты из T, то число $n+m$ как объект из T является прямым произведением объектов n и m. Кроме того, предполагается, что прямое произведение в категории T когерентно. Пусть категория T порождается морфизмами из объектов n в объект 1 для всех целых неотрицательных чисел n. Тогда *T-алгеброй* называется функтор A из категории T в категорию множеств

SET, сохраняющий прямые произведения. В этом случае морфизму $f\colon n \to 1$ в категории T соответствует n-арная алгебраическая операция

$$A(f)\colon\ A(n) = A(1)^n \to A(1)$$

на множестве $A(1)$. Таким образом, T-алгебра A в категорном смысле является алгеброй сигнатуры $\{\mathrm{Hom}(n, 1) \mid n \geqslant 0\}$, заданной на множестве $A(1)$. Ясно, что любая универсальная алгебра может быть реализована указанным способом. Коммутативным диаграммам в категории T соответствуют тождества в T-алгебрах. Гомоморфизмами T-алгебр являются естественные преобразования функторов. Таким образом, все построенные T-алгебры образуют многообразие, по которому категория T восстанавливается однозначно. Действительно, пусть $C = \{C_n \mid n \geqslant 0\}$ — клон главных производных операций свободной алгебры счетного ранга этого многообразия. Тогда в категории T множество морфизмов из объекта n в объект m состоит из всех наборов $(w_1, \ldots, w_m)$, где $w_i \in C_n$ — слова от n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$. Таким образом, категорный подход к универсальным алгебрам эквивалентен изучению многообразий и клонов главных производных операций. Категорный подход к универсальным алгебрам интересен тем, что позволяет рассматривать универсальные алгебры над произвольной категорией с прямыми произведениями. Более подробно с этим направлением можно познакомиться по [15] и [60].

§ 4. Специальные классы универсальных алгебр

В этом параграфе излагаются сведения о специальных классах универсальных алгебр, занимающих промежуточное место между общими универсальными алгебрами и такими классическими алгебраическими образованиями, как группы, кольца, полугруппы и т. д.

4.1. Мультиоператорные группы и кольца. Пусть T — сигнатура, не содержащая нульарных символов. *Мультиоператорной T-группой* (или *T-группой*) называется универсальная алгебра сигнатуры T, в которой имеется структура аддитивной, не обязательно коммутативной группы. При этом нулевой элемент группы является подалгеброй относительно сигнатуры T, т. е. $t(0, \ldots, 0)=0$ для всех $t \in T$. Мультиоператорные T-группы образуют многообразие универсальных алгебр сигнатуры $\{T, +, -, 0\}$. Частными случаями мультиоператорных групп являются группы, модули, кольца.

Нормальная подгруппа N аддитивной группы мультиоператорной T-группы A называется *идеалом* в A, если для любого натурального числа n, любого $t \in T_n$, любого $i=1, \ldots, n$ и для произвольных элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $x \in N$ справедливо включение

$$t(a_1, \ldots, a_n) - t(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in N.$$

Как и в случае групп, колец и модулей каждая конгруэнция в T-группе задается некоторым идеалом и каждый идеал задает в T-группе конгруэнцию. В T-группах конгруэнции перестановочны. Если N_1 и N_2 — два идеала в T-группе, то $N_1 \wedge N_2$ и $N_1 + N_2$ — идеалы, являющиеся, соответственно, пересечением и объединением N_1 и N_2 в решетке идеалов (конгруэнций). Коммутант $[N_1, N_2]$ (см. п. 3.2) совпадает с идеалом в A, порожденным всеми элементами вида $a+b-a-b$, где $a \in N_1$, $b \in N_2$, и всеми элементами вида

$$t(a_1, \ldots, a_n) + t(b_1, \ldots, b_n) - t(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$

где $n \geqslant 1$, $t \in T_n$, $a_1, \ldots, a_n \in N_1$, $b_1, \ldots, b_n \in N_2$. Таким образом, мультиоператорная T-группа является абелевой (в смысле Маккензи) тогда и только тогда, когда ее аддитивная группа абелева и для любого натурального числа n и любого $t \in T_n$ выполнено тождество $t(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) = t(x_1, \ldots, x_n) + t(y_1, \ldots, y_n)$. Более подробно с мультиоператорными группами можно познакомиться в [5]; [21], гл. III; [22], с. 83; [26], т. 3, с. 839—840.

Мультиоператорная T-группа называется *почтикольцом*, если T состоит из одной бинарной ассоциативной операции умножения, причем выполняется тождество $(x+y)z = xz + yz$. Приведем основные примеры почтиколец. Пусть G — аддитивная, не обязательно коммутативная группа, S — полугруппа ее эндоморфизмов. Множество всех отображений G в себя образует почтикольцо $M(G)$, в котором сложение $f+g$ и умножение fg вводятся по следующему правилу: если $x \in G$, то $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(g(x))$. В почтикольце $M(G)$ множество всех отображений, перестановочных с эндоморфизмами из S и переводящих нулевой элемент в себя, образует подпочтикольцо $M_S(G)$. Почтикольца $M(G)$ и $M_S(G)$ являются аналогами колец матриц. Для почтиколец вводятся аналоги модулей и радикалов. Строится теория полупростых почтиколец с условиями минимальности, основными моделями которых являются $M(G)$ и $M_S(G)$ (см. [37, 63]).

Почтикольцо A называется *почтиполем*, если все ненулевые элементы в A образуют группу относительно умножения. Аддитивная группа почтиполя абелева. Полное описание конечных почтиполей и их связи с конечными проективными плоскостями изложены в [61, 63].

Мультиоператорная T-группа называется *мультиоператорным T-кольцом*, если аддитивная группа в A коммутативна и все операции из T дистрибутивны относительно сложения, т. е. для любого натурального числа n, любых $t \in T_n$, $i = 1, \ldots, n$ и произвольных элементов $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n \in$ выполняется тождество

$$t(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ = t(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) + t(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n).$$

Мультиоператорная T-алгебра — это мультиоператорное T-кольцо, в котором T_1 является полем, причем T-кольцо является векторным пространством над T_1 и для всех $\lambda \in T_1$, $n \geqslant 2$, $t \in T_n$ и любых элементов $x_1, \ldots, x_n \in A$ имеют место равенства

$$\lambda t(x_1, \ldots, x_n) = t(\lambda x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ldots \\ \ldots = t(x_1, \ldots, x_{n-1}, \lambda x_n).$$

В случае мультиоператорных колец и алгебр идеалами являются такие аддитивные подгруппы (подпространства) N, что для любого натурального числа n, любого $t \in T_n$ и для произвольных элементов $x_1, \ldots, x_n$ из кольца (алгебры) элемент $t(x_1, \ldots, x_n)$ лежит в идеале N, как только один из элементов $x_1, \ldots, x_n$ принадлежит N. Обзоры результатов по мультиоператорным кольцам и алгебрам содержатся в [2, 5, 20].

4.2. Обобщенные полугруппы, группы и кольца. Пусть n — натуральное число, $n \neq 2$. *Ассоциативом* или *n-полугруппой* называется универсальная алгебра с одной n-арной ассоциативной операцией $x_1 \ldots x_n$. Ассоциативность операции означает, что выполняются тождества

$$(x_1 \ldots x_n) x_{n+1} \ldots x_{2n-1} = \\ = x_1 \ldots x_{i-1} (x_i \ldots x_{i+n-1}) x_{i+n} \ldots x_{2n-1}$$

для $i = 1, \ldots, n$. Ассоциатив A называется *n-группой*, если для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ и любого $i = 1, \ldots, n$ существует, и притом единственный, такой элемент $g_i = g_i(a_1, \ldots, a_n) \in A$, что

$$a_1 \ldots a_{i-1} g_i a_{i+1} \ldots a_n = a_i. \qquad (*)$$

Каждую n-группу можно рассматривать как универсальную алгебру с системой операций $(f, g_1, \ldots, g_n)$ арности n, где f — операция умножения, а g_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, дает решение уравнения $(*)$. Таким образом, все n-группы образуют многообразие. Для каждой n-группы A найдется такая группа A^*, что: 1) $A \subset A^*$ и для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ результат применения n-арного умножения f в A совпадает с произведением элементов $a_1, \ldots, a_n$ в группе A^*; 2) A порождает группу A^*; 3) существует такой нормальный делитель N в A^*, что A^*/N является циклической группой порядка $n-1$ и A является смежным классом по N, порождающим циклическую группу A^*/N (см. [1], с. 213; [22], § 8). При $n = 2$ определение n-группы превращается в определение обычной группы. Обзор результатов по n-группам можно найти в [1], § 4.1; [22], § 8.

Если $m, n \geqslant 2$, то *(m, n)-кольцом* называется алгебра A с двумя операциями f и g арностей m и n, причем: 1) A является m-группой относительно операции f и $f(x_1, \ldots, x_m) = f(x_{s1}, \ldots, x_{sm})$ для любой подстановки $s \in S_m$; 2) A является n-полугруппой относительно операции g; 3) если $i = 1, \ldots, n$, то в A справедливы тождества

$$g(x_1, \ldots, x_{i-1}, f(y_1, \ldots, y_m), x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ = f(g(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, x_{i+1}, \ldots, x_n), \ldots \\ \ldots, g(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_n, x_{i+1}, \ldots, x_n)).$$

Для любого (m, n)-кольца A существует такое ассоциативное кольцо R, содержащее A, что для произвольных элементов $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in A \subset R$ справедливы равенства

$$g(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n, \quad f(y_1, \ldots, y_m) = y_1 + \ldots + y_m$$

(см. [1], § 4.1).

4.3. Полугруды, груды, кольцоиды. *Полугрудой* называется множество с одной тернарной операцией $[xyz]$, удовлетворяющей тождествам $[[xyz]uv] = [x[uzy]v] = [xy[zuv]]$. Полугруда называется *обобщенной грудой*, если в ней выполнены тождества $[xxx] = x$, $[[xyy]zz] = [[xzz]yy]$, $[[xxy]yz] = [[yyx]xz]$. Полугруда называется *грудой*, если в ней выполняются тождества

$$[xyy] = [yyx] = x. \tag{$*$}$$

Каждая груда является обобщенной грудой.

Предположим, что S — полугруппа, в которой задана унарная операция a^{-1}, удовлетворяющая тождествам

$$(a^{-1})^{-1} = a, \quad (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}. \tag{$**$}$$

Тогда S относительно операции

$$[abc] = ab^{-1}c \tag{$***$}$$

является полугрудой. Если S является инверсной полугруппой, причем a^{-1} — обратный элемент к $a \in S$, то S относительно операции ($***$) является обобщенной грудой. Если же S — группа, то S относительно операции ($***$) является грудой. Обратно, пусть в полугруде A имеется такой элемент y, что для любого элемента x из A выполнены равенства ($*$). Положим $a^{-1} = [yay]$. Тогда справедливы равенства ($**$), причем A относительно умножения

$$ab = [ayb] \tag{$****$}$$

является полугруппой. При этом исходная тернарная операция $[abc]$ выражается через операцию умножения ($****$) с помощью равенства ($***$). Если A является грудой [обобщенной грудой], то A относительно умножения ($****$) и унарной операции a^{-1} является группой [инверсной полугруппой].

Пусть M — многообразие универсальных алгебр сигнатуры T. *M-кольцоидом* называется алгебра сигнатуры T из многообразия M, в которой задана ассоциативная операция умножения xy, причем для любого целого неотрицательного числа n, любого $t \in T_n$ выполняются тождества $t(y_1, \ldots, y_n)x = t(y_1x, \ldots, y_nx)$. Примерами M-кольцоидов являются полугруппы $S(A)$ всех отображений T-алгебры A из многообразия M в себя. Эта полугруппа превращается в T-алгебру следующим образом: если n — целое неотрицательное число, $t \in T_n$, $x \in A$ и $h_1, \ldots, h_n \in S(A)$, то

$$(t(h_1, \ldots, h_n))(x) = t(h_1(x), \ldots, h_n(x)).$$

Произвольный M-кольцоид вкладывается в M-кольцоид $S(A)$ для некоторой алгебры A из многообразия M (см. [22], § 15).

Кольцоиды над многообразием (аддитивных) полугрупп называются *полукольцами*. Почтикольцо можно понимать как кольцоид над многообразием (аддитивных) групп. Со свойствами кольцоидов можно познакомиться по монографии [22], § 15.

4.4. Унарные и другие алгебры. Универсальная алгебра, все операции которой унарны или нульарны, называется *уноидом*. Каждый уноид является полигоном над свободным моноидом, порожденным множеством унарных операций. В этом полигоне нульарные операции выделяют некоторые элементы. Уноид, имеющий лишь одну унарную операцию, называется *унаром* или *моноунарной алгеброй*.

Универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из бинарных операций $\alpha(x, y)$, где α пробегает единичный отрезок действительной оси, называется *конвексором* или *барицентрической алгеброй*, если выполняются тождества

$$1(a, b) = \alpha(a, a) = a,$$

$$\alpha[\beta(a, b), c] = (1 - \alpha\beta)\left[\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\right)(c, b), a\right],$$

где под $\frac{0}{0}$ понимается 0. Примерами конвексоров служат распределения на множестве X, где

$$\alpha(\Phi, \Psi)(x) = \alpha\Phi(x) + (1 - \alpha)\Psi(x);$$

выпуклые подмножества аффинного пространства над полем вещественных чисел, где $\alpha(x, y) = \alpha x + (1 - \alpha) y$; верхние полурешетки, где $\alpha(x, y) = \sup(x, y)$ для всех $\alpha \neq 1$.

4.5. Квазигруппы и лупы *). Группоид (см. п. 1.1) называется *квазигруппой*, если в нем любые уравнения вида $ax = b$, $ya = b$ имеют, и притом единственное, решение. Элемент e квазигруппы Q называется *единицей*, если $ex = xe = x$ для любого $x \in Q$. Квазигруппа с единицей называется *лупой*. Квазигруппу можно рассматривать как универсальную алгебру с тремя бинарными операциями xy, $x \backslash y$, x / y, причем выполняются тождества $x(x \backslash y) = x \backslash (xy) = (y/x)x = (yx)/x = x$. В этом случае квазигруппа называется *примитивной*. Примитивная квазигруппа является примитивной лупой, если в ней выполнено тождество $x/x = y \backslash y$. В примитивной лупе элемент $e = x/x$ является единицей. Все примитивные квазигруппы (лупы) образуют перестановочное многообразие.

В произвольной примитивной лупе положим $a^{-1} = a \backslash e$, ${}^{-1}a = a/e$. Эти элементы называются, соответственно, *правым* и *левым обратным* элементом к a. Вообще говоря, $a^{-1} \neq {}^{-1}a$. В любой квазигруппе Q отображения R_a: $x \to xa$, L_a: $x \to ax$ являются подстановками на Q. Они называются, соответственно, *правой* и *левой трансляцией* (*сдвигом*) квазигруппы Q. Группа G, порожденная всеми трансляциями R_a, L_a, называется *ассоциированной группой для квазигруппы* Q. *Левая* [*правая*] *ассоциированная группа* G_l [G_r] — это группа, порожденная всеми левыми [правыми] трансляциями. Если Q — лупа, то группа I всех *внутренних подстановок* лупы Q состоит из всех элементов группы G, оставляющих единицу e инвариантной. Группа I порождается элементами

$$R_{a,\,b} = R_{ab}^{-1} R_b R_a, \quad L_{a,\,b} = L_{ab}^{-1} L_a L_b, \quad T_a = L_a^{-1} R_a.$$

Подлупа H лупы Q называется *нормальной*, если H инвариантно относительно действия группы I. Подлупа H нормальна в лупе Q в том и только том случае, если существует такой гомоморфизм примитивных луп f: $Q \to Q'$, что $H = f^{-1}(e)$.

---

*) Автор выражает благодарность В. Д. Белоусову и Г. Б. Белявской за помощь при написании этого пункта.

Пусть на множестве Q заданы две структуры квазигрупп с умножением xy и $x*y$. Изотопией квазигруппы (Q, xy) в квазигруппу $(Q, x*y)$ называется тройка (p, r, s) подстановок множества Q, причем $x*y = s^{-1}(p(x)r(y))$ для всех $x, y \in Q$. Квазигруппы (Q, xy) и $(Q, x*y)$ в этом случае называются *изотопными*. Если $p = r = s$, то изотопия является изоморфизмом. Каждая квазигруппа изотопна лупе, причем изотопия имеет вид $(R_a^{-1}, L_b^{-1}, 1_Q)$. В этом случае единицей изотопной лупы будет элемент ba (см. [11], гл. I; [21], гл. II; § 6; [22], § 6). Если лупа Q изотопна группе G, то Q является группой, изоморфной G.

Лупа, в которой выполнено одно из следующих эквивалентных тождеств:

$$x(y(xz)) = ((xy)x)z, \quad z(x(yx)) = ((zx)y)x,$$

$$(xy)(zx) = x((yz)x),$$

называется *лупой Муфанг*. В лупе Муфанг выполняются тождества

$$({}^{-1}x)(xy) = (yx)x^{-1} = y \tag{$*$}$$

и равенство $x^{-1} = {}^{-1}x$. Лупа, в которой выполнены тождества $(*)$, называются IP-*лупами*. У луп Муфанг, и только у них, все лупы, им изотопные, являются IP-лупами. В лупе Муфанг любая подлупа, порожденная двумя элементами, ассоциативна и потому является группой. Следовательно, в лупах Муфанг выполняются тождества $x(xy) = x^2y$, $(yx)x = yx^2$. В коммутативных лупах Муфанг группа внутренних подстановок I является группой автоморфизмов. Коммутативные лупы Муфанг задаются одним тождеством $x^2(yz) = (xy)(xz)$. *Ассоциатором* (x, y, z) в квазигруппе называется такой элемент t, что $(xy)z = (x(yz))t$. Предположим, что коммутативная лупа Муфанг Q порождается n элементами, $n \geqslant 3$. Тогда Q обладает конечным рядом подлуп $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset \ldots \supset Q_m = e$ длины m не больше $n - 1$, причем Q_{i+1} порождается ассоциаторами (x, y, z), где $x \in Q_i$, $y, z \in Q$, $i \geqslant 1$ (см. [26], т. 3, с. 460).

Дистрибутивные квазигруппы определяются тождествами $x(yz) = (xy)(xz)$, $(yz)x = (yx)(zx)$. Всякая дистрибутивная квазигруппа изотопна коммутативной лупе Муфанг (см. [11]).

Коммутативная квазигруппа с тождеством $x(xy) = y$ называется TS-*квазигруппой.* TS-квазигруппа называется *абелевой*, если любой ее изотоп вида $x * y = a(xy)$, где a — произвольный элемент квазигруппы, является абелевой группой. CH-*квазигруппой* называется TS-квазигруппа, в которой любые три элемента порождают абелеву TS-квазигруппу. Всякая CH-квазигруппа является изотопом некоторой лупы Муфанг (см. [25], с. 31).

Лупа с тождеством $(x(yx))z = x(y(xz))$ называется (*левой*) *лупой Бола.* В лупах Бола каждый элемент порождает ассоциативную подлупу. Класс луп Бола инвариантен относительно изотопий.

Отношение $S \subseteq Q^3$ на множестве Q называется *системой троек Штейна*, если: 1) в каждой тройке (a, b, c) из S элементы a, b, c различны; 2) любая пара различных элементов a, b из S принадлежит ровно одной тройке из S. По системе S можно построить квазигруппу, полагая $a^2 = a$ и $ab = c$, если $a \neq b$ и $(a, b, c) \in S$. Эта квазигруппа является идемпотентной TS квазигруппой. Идемпотентные TS-квазигруппы называются также *квазигруппами Штейна.*

Пусть задано конечное множество Q элементов $a_1, \ldots, a_n$. *Латинским квадратом порядка* n называется квадратная $n \times n$-матрица, составленная из элементов множества Q, причем в каждой строке и каждом столбце любой элемент из Q встречается ровно один раз. Каждый латинский квадрат определяет структуру квазигруппы на множестве Q. Для этого произведением $a_i a_j$ назовем элемент квадрата, стоящий на месте (i, j). Указанным способом получаются все конечные квазигруппы. Подробнее с этой темой можно познакомиться в [41], гл. III.

Пусть на множестве Q задана конечная система S квазигрупповых умножений, причем для любых t, $t' \in S$ существуют такие s, $s' \in S$, что

$$t(x, t'(x, y)) = s(x, y), \quad t(t'(x, y), y) = s'(x, y)$$

для любых x, $y \in Q$. Предположим, что S содержит проекции $p_{12}(x, y) = x$, $p_{22}(x, y) = y$ и для любых элементов a, b, c из Q найдется такая операция

$s \in S$, что $s(a, b) = c$. Тогда на Q можно ввести такую структуру почтиполя (см. п. 4.1), что для любого $t \in S$ найдется такой элемент $a = a(t) \in Q$, что $t(x, y) = x - a(x - y)$ (см. [7], с. 68).

Универсальная алгебра A с одной n-арной операцией умножения $x_1 \ldots x_n$ называется *n-квазигруппой*, если для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ и любого числа $i = 1, \ldots, n$ существует, и притом единственный, такой элемент $g_i = g_i(a_1, \ldots, a_n) \in A$, что $a_i = a_1 \ldots a_{i-1} g_i a_{i+1} \ldots a_n$. Таким образом, n-группы являются ассоциативными n-квазигруппами. Элемент e называется *единицей* n-квазигруппы Q, если для любого элемента x из A и любого числа $i = 1, \ldots, n$ выполняется равенство

$$e \ldots e\underset{i}{x}e \ldots e = x.$$

n-квазигруппа называется *n-лупой*, если в ней есть единица. При $n > 2$ единичный элемент в n-лупе не обязательно единственный. На n-арный случай естественным образом переносятся понятия TS-квазигруппы, IP-лупы и т. д.

Алгебраической сетью называется набор (S, L) объектов, называемых точками (множество S) и гиперплоскостями (множество L). Предположим, что S и L связаны отношениями инцидентности — «точка принадлежит гиперплоскости». Пусть L разбито на $n + 1$ непересекающийся класс $L_1, \ldots, L_{n+1}$, причем: 1) любые n гиперплоскостей из различных классов инцидентны одной и только одной точке из S; 2) каждая точка из S инцидентна одной и только одной гиперплоскости каждого класса. Тогда все классы $L_1, \ldots, L_{n+1}$ равномощны. Пусть G — множество, равномощное L_1. Зафиксируем биекции f_i: $G \to L_i$, $i = 1, \ldots, n + 1$. Если $g_1, \ldots, g_n \in G$, то через g обозначим такой элемент из G, что $f_{n+1}(g)$ содержит общую точку гиперплоскостей $f_1(g_1), \ldots, f_n(g_n)$. Тогда G относительно n-арной операции $g_1 \ldots g_n = g$ является n-квазигруппой. Любая n-квазигруппа возникает указанным способом.

Подробнее с теорией квазигрупп и смежными вопросами можно познакомиться по монографиям и обзорам [7—12, 26, 38].

ЛИТЕРАТУРА

1. Артамонов В. А. Универсальные алгебры//Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. — Т. 14. — М.: ВИНИТИ, 1976. — С. 191—248.
2. Артамонов В. А. Решетки многообразий линейных алгебр//Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, № 2. — С. 135—167.
3. Артамонов В. А. Универсальные алгебры//Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. — Т. 27. — М.: ВИНИТИ, 1989. — С. 115—124.
4. Баранович Т. М. Универсальные алгебры//Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. 1966. — М.: ВИНИТИ, 1968. — С. 109—136.
5. Баранович Т. М., Бургин М. С. Линейные Ω-алгебры// Успехи мат. наук. — 1975.— Т. 30, № 4. — С. 61—106.
6. Бейдар К. И., Михалёв А. В. Ортогональная полнота и алгебраические системы//Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, № 6. — С. 79—115.
7. Белоусов В. Д. Неассоциативные бинарные системы// Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965. — М.: ВИНИТИ, 1967. — С. 63—81.
8. Белоусов В. Д. Алгебраические сети и квазигруппы. — Кишинёв: Штиинца, 1971.
9. Белоусов В. Д. n-арные квазигруппы. — Кишинёв: Штиинца, 1972.
10. Белоусов В. Д., Рыжков В. В. Геометрия тканей// Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. — Т. 10. — М.: ВИНИТИ, 1972. — С. 159—188.
11. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967.
12. Белоусов В. Д. Системы квазигрупп с обобщенными тождествами//Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20, № 1. — С. 75—146.
13. Валуцэ И. И. Основы теории универсальных алгебр. — Кишинев: Изд-во Кишинев. политехн. ин-та, 1982.
14. Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984.
15. Джонстон П. Т. Теория топосов. — М.: Мир, 1986.
16. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980.
17. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. — М.: Наука, 1987.
18. Житомирский Г. И. Основные понятия универсальной алгебры. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1981.
19. Кон П. М. Универсальная алгебра. — М.: 1968.
20. Курош А. Г. Мульоператорные кольца и тела//Успехи мат. наук. — 1969. — Т. 24, № 1. — С. 3—15.
21. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973.
22. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года. — М.: Наука, 1974.
23. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
24. Мальцев А. И. Избранные труды т. 2. Математическая логика и общая теория алгебраических систем. — М.: Наука, 1976.
25. Манин Ю. И. Кубические формы. — М.: Наука, 1972.

26. Математическая энциклопедия. Т. 1—5. — М.: Сов. энциклопедия, 1977 1985.
27 Мовсисян Ю. М. Введение в теорию алгебр со сверхтождествами.' Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1986.
'8 Пинус А. Г. Конгруэнц-модулярные многообразия. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1986.
29 Пинус А. Г. Конгруэнц-дистрибутивные многообразия алгебр//Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 26. М.: ВИНИТИ, 1988. — С. 45—83.
30 Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
31. Скорняков Л. А. Унары//Colloq. Math. Soc. J. Bolayi. — 1981. — N 29.- P. 735- 743.
32. Скорняков Л. А. Стохастическая алгебра//Изв. вузов. Математика. — 1985. — № 7. — С. 1—11.
33. Справочная книга по математической логике/под ред. Барвайса Дж. Т. 1—4. М.: Наука, 1982- 1983.
34. Упорядоченные множества и решетки. Вып. 7. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983.
35. Упорядоченные множества и решетки. Братислава: Изд-во Братислав. ун-та им. Коменского, 1985.
36. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. — М.: Наука, 1989.
37. Betsch G. Near-rings anf near-fields. — Amsterdam: North-Holland, 1987.
38. Bruck R. A. A survey of binary systems. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1971.
39. Burris S. Boolean constructions//Lect. Notes Math. — 1983. — V. 1004. — P. 67—90.
40. Burris S., McKenzie R. Decidability and boolean representations//Mem. Amer. Math. Soc. 1981. — V. 246.
41. Burris S., Sankappanavar H. P. A course in universal algebra. — Berlin: Springer, 1981.
42. Conn P. M. Universal algebra. — Dordrecht e. a.: Reidel publ. Co., 1981.
43. Cunninhame-Green R. A. Minimax algebra. — Berlin: Springer, 1979. — (Lect. Notes in econom. and Math. syst. V. 165.)
44. Denecke K. Preprimal algebras. — Berlin, 1982. — (Math. Res. V. 11).
45. Freese R., McKenzie R. Commutator theory for congruence modular varieties. — London,' 1987. — (Lect. Notes Ser. V. 125).
46. Garcia O. G., Taylor W. The lattice of interpretability types of varieties//Mem. Amer. Math. Soc. — 1984. — V. 50, N 305.
47. Glazek K. Some old and new problems in the independence theory//Colloq. Math. — 1979. — V. 42. — P. 127—189.
48. Glazek K. Weak homomorphisms of general algebras and related topics//Math. Semin. Notes Kobe Univ. — 1980. — V. 8, N 1. — P. 1—36.
49. Gratzer G. Universal algebra. — Berlin: Springer, 1979.
50. Gumm P. Geometrical methods in congruence modular algebras//Mem. Amer. Math. Soc. — 1983. — N 286.

51. Higgins P. J. Groupoids and categories. – Amsterdam: North-Holland, 1973.
52. Hobby D., McKenzie R. The structure of finite algebras. — Amer. Math. Soc., 1988. — (Contem. Math. V. 76).
53. Ihringer T. Congruence lattices of finite algebras: the characterization problem and the role of binary operations. Munchen: R. Fisher, 1986.
54. Jónsson B. Topics in universal algebra. - Springer, 1972. - (Lect. Notes Math. V. 250).
55. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V., Skornjakov L. A. Acts over monoids. — Oldenburg: Oldenburg univ., 1982.
56. Knoebel A. The equational classes generated by single funtionally complete algebra//Mem. Amer. Math. Soc. — 1985. — N 332.
57. Krauss P. H., Clark D. M. Global subdirect products// Mem. Amer. Math. Soc. — 1979. — N 210.
58. Lausch H., Nobauer W. Algebras of polynomials. — Amsterdam: North-Holland, 1972.
59. Lugowski H. Grudzuge der universallen Algebra. — Leipzig: Teubner-Verlagsgesellschaft, 1976.
60. Manes E. G. Algebraic theoris. — Berlin: Springer, 1976.
61. Meldrum J. D. P. Near-rings and their links with groups.— Boston; London; Melburne: Pitman Publ., 1986.
62. Pierce R. S. Introduction to the theory of abstract algebras. — New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.
63. Pilz G. Near-rings. — Amsterdam: North-Holland, 1983.
64. Romanowska A. B., Smith J. D. H. Modal theory. An algebraic approach to order geometry and convexity. — Berlin: Helderman, 1985.
65. Smith J. D. H. Mal'cev varieties. — Springer, 1976. — (Lect. Notes Math. V. 554).
66. Szendrei A. Clones in universal algebra. — Montreal: Les presses de l'universite de Montreal, 1986.
67. Wahling H. Theorie der Fastkorper. — Essen: Thales, 1987.
68. Wehler W. Universal algebra for computer sceintists. — Leipzig: Teubbner, 1988.
69. Werner H. Sheaf constructions in universal algebra and model theory//Universal algebra and appl. Pap. Stefan Banach Inst. Math. Cent. Semestr. Febr. 15 — June 9, 1978. — Warsawa, 1982. — P. 133—179.

ГЛАВА VII

КАТЕГОРИИ

Категорная математика возникла в начале 40-х годов XX века на базе развития алгебраической топологии. Почти сразу идеи и конструкции категорий нашли широкие применения в других разделах математики и, в частности, в общей алгебре. Так возник раздел общей алгебры — категорная алгебра. Настоящая глава справочника посвящена основным понятиям и результатам категорной алгебры, а также некоторым специальным классам категорий, наиболее часто встречающихся в литературе *).

Систематическое изложение основ теории категорий можно найти в монографиях [3, 6, 12, 18, 20, 23, 26, 30, 34]; специальным разделам теории аддитивных категорий и аддитивных функторов посвящены монографии [27, 28]; с топосами подробно можно познакомиться по монографиям [5, 7, 14, 15, 32, 33]. Из-за ограниченности объема в главу не вошли вопросы, связанные с внутренними категориями, а также с понятиями объекта категории, наделенного некоторой дополнительной структурой, например, групповым объектом. В главу не вошли вопросы, связанные с категорной гомологической алгеброй (см. монографии [4, 6, 8, 9]), а также вопросы, связанные с категорной логикой (см. монографии [5, 7, 17, 22, 24, 29, 33]).

В теории категорий, в частности при определении категории, наряду с множествами элементов приходится иметь дело с классами элементов. В аксиоматической системе теории множеств Геделя — Бернсайда *класс* элементов отличается от множества тем,

---

*) Автор благодарит Е. Б. Кацова за ряд ценных советов и замечаний.

что класс не может быть элементом никакого другого класса и, в частности, множества. Класс, не являющийся множеством, часто называют *собственным классом.* С собственными классами следует обращаться осторожно, чтобы избежать различных некорректностей. Например, отображение f из собственного класса G_1 в собственный класс G_2 представляет собой собственный класс пар $(x, f(x))$, $x \in G_1$, так что говорить о множестве или классе отображений из собственного класса G_1 в собственный класс G_2 некорректно.

§ 1. Основные понятия теории категорий

1.1. Определения категории и примеры. *Категория* $\mathfrak{K}$ состоит из *класса объектов* $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и *класса морфизмов* $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$. Каждой упорядоченной паре объектов A, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ сопоставлено некоторое, быть может и пустое, множество $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ морфизмов категории $\mathfrak{K}$. При этом выполняются следующие условия.

Для каждого морфизма $\alpha \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ существует одна и только одна такая упорядоченная пара объектов A, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$, что $\alpha \in H_{\mathfrak{K}}(A, B)$. Объект A называется *началом* или *областью определения морфизма* α, а объект B называется *концом* или *областью значений морфизма* α. Говорят также, что α есть морфизм из объекта A в объект B. Вместо $\alpha \in H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ часто пишут α: $A \to B$ или $A \xrightarrow{\alpha} B$.

Вместо $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ используются также обозначения: $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{K}}(A, B)$, $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{K}}(A, B)$, $\mathfrak{K}(A, B)$, а если это не может вызвать недоразумение, то и $H(A, B)$, $\mathrm{Hom}(A, B)$, $\mathrm{Mor}(A, B)$. Вместо «объект $A \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$» и «морфизм $\alpha \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$» часто пишут соответственно «объект $A \in \mathfrak{K}$» и «морфизм $\alpha \in \mathfrak{K}$».

В классе $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ определена частичная бинарная операция *произведение морфизмов*: произведение морфизмов α: $A \to B$ и β: $C \to D$ определено тогда и только тогда, когда $B = C$, т. е. конец морфизма α совпадает с началом морфизма β. В этом случае произведение $\alpha\beta$ есть морфизм из объекта A в объект D. Другими словами, для любых трех объектов A, B, $C \in \mathfrak{K}$ определено отображение

$$H_{\mathfrak{K}}(A, B) \times H_{\mathfrak{K}}(B, C) \to H_{\mathfrak{K}}(A, C).$$

Отметим, что произведение морфизмов $\alpha: A \to B$ и $\beta: B \to C$ часто записывается в виде $\beta\alpha$, а не $\alpha\beta$, как это делаем мы (ср. I. 1.3).

Произведение морфизмов ассоциативно, т. е.

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \qquad (*)$$

всякий раз, когда по крайней мере одна из частей равенства $(*)$ имеет смысл. Другими словами, равенство $(*)$ справедливо всякий раз, когда $\alpha: A \to B$, $\beta: B \to C$, $\gamma: C \to D$.

Для каждого объекта $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ существует такой морфизм $1_A: A \to A$, называемый *единичным* или *тождественным* морфизмом объекта A, что

$$\alpha 1_A = \alpha \quad \text{и} \quad 1_A\beta = \beta$$

для любых морфизмов $\alpha: U \to A$ и $\beta: A \to V$.

Морфизмы категории $\mathfrak{K}$, принадлежащие одному и тому же множеству $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$, называются *параллельными*. Упорядоченная пара (α, β), состоящая из морфизмов $\alpha: A \to B$ и $\beta: B \to C$ категории $\mathfrak{K}$, называется парой *последовательных морфизмов*. Из определения категории следует, что для морфизмов $\alpha, \beta \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ определено произведение $\alpha\beta$ тогда и только тогда, когда (α, β) — пара последовательных морфизмов категории $\mathfrak{K}$. Морфизмы вида $\alpha: A \to A$ часто называют *эндоморфизмами* объекта A.

Если в определении категории допустить, что подкласс морфизмов $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ может быть классом, а не обязательно множеством, то приходим к определению *бо́льшой категории*. Иногда под термином категория понимают большую категорию. Тогда категория в смысле обычного определения называется локально малой. В настоящем справочнике термин локально малая категория используется в другом смысле (см. ниже).

Категорию можно определить и как класс элементов $\mathfrak{K}$, называемых *морфизмами*, на котором определена частичная бинарная операция произведение, подчиненная следующим условиям:

1) произведение ассоциативно, т. е. для любых морфизмов $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{K}$ выполняется равенство $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ всякий раз, когда определены произведения $\alpha\beta$ и $\beta\gamma$;

2) для любого морфизма $\alpha \in \mathfrak{K}$ существуют такие единичные морфизмы ε и ε', что произведения $\varepsilon\alpha$ и $\alpha\varepsilon'$ определены (морфизм $\varepsilon \in \mathfrak{K}$ называется *единичным* или *тождественным*, если произведение $\varepsilon\varepsilon$ определено и $\alpha\varepsilon = \alpha$ и $\varepsilon\beta = \beta$ для любых морфизмов $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$, для которых произведения $\alpha\varepsilon$ и $\varepsilon\beta$ определены); единичные морфизмы ε и ε' называются соответственно *левым* и *правым единичными морфизмами морфизма* α;

3) для любых двух единичных морфизмов ε и ε' категории $\mathfrak{K}$ в категории $\mathfrak{K}$ существует лишь множество, возможно и пустое, морфизмов α, для которых ε — левый единичный морфизм, а ε' — правый единичный морфизм.

Из условия 1) вытекает, что для каждого морфизма α категории $\mathfrak{K}$ существуют лишь один левый единичный морфизм и лишь один правый единичный морфизм и что произведение $\alpha\beta$ морфизмов α и β категории $\mathfrak{K}$ определено тогда и только тогда, когда правый единичный морфизм морфизма α совпадает с левым единичным морфизмом морфизма β.

Примеры категорий. 1) Категория множеств SET. Объектами служат все множества, включая пустое множество $\varnothing$; $H_{\mathrm{SET}}(A, B)$ для любых непустых множеств A и B определяется как множество всех отображений множества A в множество B; $H_{\mathrm{SET}}(A, \varnothing) = \varnothing$ для любого непустого множества A; $H_{\mathrm{SET}}(\varnothing, A) = \{\omega_A\}$ — одноэлементное множество (в случае когда A — непустое множество, морфизм $\omega_A\colon \varnothing \to A$ можно представлять как отображение пустого множества в пустое подмножество множества A, а в случае когда $A = \varnothing$, морфизм $\omega_\varnothing\colon \varnothing \to \varnothing$ представляет собой тождественное отображение пустого множества). В случае когда A — непустое множество, произведением отображений $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ является их суперпозиция, т. е. $fg = g \circ f$ (см. I.1.3), и, значит, $(fg)(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$ для любого элемента $a \in A$; $\omega_A f = \omega_B$ для любого отображения $f\colon A \to B$. Единичным морфизмом любого непустого множества A является тождественное отображение множества A, т. е. такое отображение $1_A\colon A \to A$, что $1_A(a) = a$ для любого элемента $a \in A$; $1_\varnothing = \omega_\varnothing$.

2) Категория топологических пространств $\mathfrak{T}$. В этом случае $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{T}$ есть класс всех топологических пространств, включая пустое пространство $\varnothing$, а $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{T}$ класс всех непрерывных отображений топологических пространств. Множество $H_{\mathfrak{T}}(A, B)$ для любых двух топологических пространств A и B, а также произведение морфизмов и единичные морфизмы в категории $\mathfrak{T}$ определяются точно так же, как и в примере 1).

3) Категория Alg — многообразие однотипных универсальных алгебр, для которой Ob Alg есть класс всех алгебр из

многообразия Alg, включая пустую алгебру $\varnothing$, если Alg — многообразие универсальных алгебр без нульарных операций, а Mor Alg — класс всех гомоморфизмов универсальных алгебр. Множество $H_{\mathrm{Alg}}(A, B)$, а также произведение морфизмов и единичные морфизмы в категории Alg определяются точно так же, как и в примере 1).

Частными случаями категории Alg являются: категория групп $\mathfrak{G}$, категория абелевых групп $\mathfrak{Ab}$, категория ассоциативных колец $\mathfrak{R}$, категория левых R-модулей R-Mod над некоторым ассоциативным кольцом R и т. д.

4) Категория частично упорядоченных множеств $\mathfrak{P}$. Ob $\mathfrak{P}$ — есть класс всех частично упорядоченных множеств, а Mor $\mathfrak{P}$ — класс монотонных отображений из одного частично упорядоченного множества в другое.

Категории 1)—4) являются примерами категорий, объектами которых служат множества, наделенные некоторой структурой, а морфизмами — отображения множеств, согласованные с заданной структурой. Произведение морфизмов в этих категориях определяется как суперпозиция отображений, а единичный морфизм — как тождественное отображение множества на себя. Такого рода категория называется *категорией структуризованных множеств.*

5) Пусть G — произвольный граф (допускается, что совокупность вершин графа G образует класс). По графу G построим категорию $\mathfrak{K}(G)$, для которой Ob $\mathfrak{K}(G)$ есть класс вершин графа G, а Mor $\mathfrak{K}(G)$ — класс путей в графе G, включая и пустые пути. Произведение морфизмов в категории $\mathfrak{K}(G)$ определяется как добавление к одному пути другого, начало которого совпадает с концом первого пути; единичными морфизмами являются пустые пути из любой вершины в себя. Категория $\mathfrak{K}(G)$ называется *свободной категорией над графом G.*

6) Любой моноид M можно рассматривать как однообъектную категорию $\mathfrak{M}$, в которой $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{M} = H_{\mathfrak{M}}(M, M)$ есть множество элементов моноида M; произведение морфизмов в категории $\mathfrak{M}$, по определению, совпадает с их произведением как элементов моноида M.

7) Пусть $\mathfrak{A}$ — класс элементов, между которыми определено отношение квазипорядка $\leqslant$ (если $\mathfrak{A}$ — множество, то сказанное означает, что $\mathfrak{A}$ — квазиупорядоченное множество, — см. I. 2.1). Класс $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как категорию $\mathfrak{A}$, в которой Ob $\mathfrak{A}$ — класс элементов класса $\mathfrak{A}$, и для любой пары объектов $a, b \in \mathfrak{A}$ множество $H_{\mathfrak{A}}(a, b)$ состоит из одного морфизма, если $a \leqslant b$, и пусто, если $a \nleqslant b$ (напомним, что $a \nleqslant b$ не означает, что $b < a$). Если α — единственный морфизм из $H_{\mathfrak{A}}(a, b)$ и β — единственный морфизм из $H_{\mathfrak{A}}(b, c)$, то $\alpha\beta$ — единственный морфизм из $H_{\mathfrak{A}}(a, c)$, существующий, поскольку из $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$ следует $a \leqslant c$.

Категория $\mathfrak{C}$, в которой для каждой упорядоченной пары объектов $A, B \in \mathfrak{C}$ множество $H_{\mathfrak{C}}(A, B)$ состоит не более чем из одного морфизма, называется *тонкой.* Очевидно, что каждая тонкая категория представляет собой не что иное, как класс элементов с отношением квазипорядка.

Частично упорядоченное множество $\mathfrak{A}$, рассматриваемое как тонкая категория, обозначается качум $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ — направленное частично упорядоченное множество [решетка], то качум $\mathfrak{A}$ называется *направленным* [*решеточным*].

8) Любой класс элементов $\mathfrak{D}$ можно рассматривать как категорию $\mathfrak{D}$, в которой $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$ — класс элементов класса $\mathfrak{D}$, $H_{\mathfrak{D}}(A, A) = \{1_A\}$ для любого объекта $A \in \mathfrak{D}$ и $H_{\mathfrak{D}}(A, B) = \varnothing$, если $A \neq B$.

Категория $\mathfrak{K}$, в которой класс $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ состоит только из единичных морфизмов, называется *дискретной*. Очевидно, что каждая дискретная категория представляет собой не что иное, как категорию рассматриваемого в настоящем примере вида.

Категория $\mathfrak{K}$, в которой класс $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ является множеством, называется *малой категорией*. Очевидно, что в малой категории $\mathfrak{K}$ класс $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ также является множеством.

Категория $\mathfrak{K}$, в которой $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ — конечное множество, называется *конечной категорией*.

По любому множеству категорий $\mathfrak{K}_i$, $i \in I$, можно построить категорию $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{K}_i$ (в случае когда множество индексов I конечно, пишем $\mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_n$), полагая $\mathrm{Ob}\left(\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{K}_i\right) = \prod\limits_{i \in I} \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}_i$ и $\mathrm{Mor}\left(\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{K}_i\right) = \prod\limits_{i \in I} \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}_i$. Произведение морфизмов в категории $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{K}_i$ определяется покомпонентно. Категория $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{K}_i$ называется *произведением* категорий $\mathfrak{K}_i$, $i \in I$.

По тому же множеству категорий $\mathfrak{K}_i$, $i \in I$, можно построить еще одну категорию $\coprod\limits_{i \in I} \mathfrak{K}_i$ (в случае когда множество индексов I конечно, пишем $\mathfrak{K}_1 \amalg \ldots \amalg \mathfrak{K}_n$), определяя $\mathrm{Ob}\left(\coprod\limits_{i \in I} \mathfrak{K}_i\right)$ как дизъюнктное объединение классов $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}_i$, $i \in I$, и полагая $H_{\coprod\limits_{i \in I} \mathfrak{K}_i}(A, B) = H_{\mathfrak{K}_i}(A, B)$, если объекты A и B принадлежат одной категории $\mathfrak{K}_i$, и $H_{\coprod\limits_{i \in I} \mathfrak{K}_i}(A, B) = \varnothing$, если $A \in \mathfrak{K}_i$, $B \in \mathfrak{K}_j$ и $i \neq j$. Категория $\coprod\limits_{i \in I} \mathfrak{K}_i$ называется *объединением* или *копроизведением* категорий $\mathfrak{K}_i$, $i \in I$.

Категория $\mathfrak{K}$ называется *связанной*, если для любой упорядоченной пары объектов A, $B \in \mathfrak{K}$ можно подобрать такую конечную последовательность объектов $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{K}$, причем $A_1 = A$ и $A_n = B$, что $H_{\mathfrak{K}}(A_i, A_{i+1}) \cup H_{\mathfrak{K}}(A_{i+1}, A_i) \neq \varnothing$ для любого $i = 1, \ldots \ldots, n-1$.

Каждая малая категория $\mathfrak{K}$ представима в виде копроизведения $\mathfrak{K} = \coprod\limits_{i \in I} \mathfrak{K}_i$ некоторых связанных категорий $\mathfrak{K}_i$, $i \in I$, называемых *связанными компонентами категории* $\mathfrak{K}$.

1.2. Двойственная категория и принцип двойственности. По категории $\mathfrak{K}$ можно построить категорию $\mathfrak{K}^{op}$, полагая $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}^{op} = \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}^{op} = \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ (объекты $A, B, \ldots$ и морфизмы $\alpha, \beta, \ldots$ категории $\mathfrak{K}$, рассматриваемые как соответственно объекты и морфизмы категории $\mathfrak{K}^{op}$, будем обозначать $A^*, B^*, \ldots$ и $\alpha^*, \beta^*, \ldots$). Для любой упорядоченной пары объектов $A^*, B^* \in \mathfrak{K}^{op}$ полагаем $H_{\mathfrak{K}^{op}}(A^*, B^*) = H_{\mathfrak{K}}(B, A)$. Произведение морфизмов в категории $\mathfrak{K}^{op}$ определяется по формуле

$$\alpha^*\beta^* = (\beta\alpha)^*,$$

где $\beta\alpha$ — произведение морфизмов β и α в категории $\mathfrak{K}$. Легко проверить, что $\mathfrak{K}^{op}$ является категорией. Категория $\mathfrak{K}^{op}$ называется категорией, *двойственной* категории $\mathfrak{K}$.

Примеры. 1) $\mathfrak{K}^{op} = \mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}$ — дискретная категория. 2) Если $\mathfrak{K}$ — тонкая категория, представляемая квазиупорядоченным классом элементов $\mathfrak{K}$, то $\mathfrak{K}^{op}$ — также тонкая категория, представляемая тем же классом элементов $\mathfrak{K}^{op} = \mathfrak{K}$, но отношение квазипорядка $\sqsubseteq$ в классе $\mathfrak{K}^{op}$ противоположно отношению квазипорядка $\leqslant$ в классе $\mathfrak{K}$, т. е. в классе $\mathfrak{K}^{op}$ имеет место отношение $a \sqsubseteq b$ тогда и только тогда, когда в классе $\mathfrak{K}$ имеет место отношение $b \leqslant a$. 3) Если $\mathfrak{M}$ — однообъектная категория, представляемая моноидом M, то $\mathfrak{M}^{op}$ — однообъектная категория, представляемая моноидом M^*, инверсным моноиду M.

Из существования для каждой категории $\mathfrak{K}$ двойственной категории $\mathfrak{K}^{op}$ вытекает, что в теории категорий имеет место *принцип двойственности*, согласно которому для каждого высказывания исчисления предикатов относительно категорий существует двойственное высказывание. Высказывание P^{op}, двойственное высказыванию P, сформулированному на языке теории категорий, получается при интерпретации в категории $\mathfrak{K}$ высказывания P, рассматриваемого в двойственной категории $\mathfrak{K}^{op}$. Практически двойственное высказывание получается из исходного сохранением логической структуры высказывания и заменой в его формулировке всех стрелок на противоположные, а всех произведений морфизмов на произведения морфизмов, записанные в обратном порядке.

1.3. Подкатегории, идеалы и диаграммы категории. Категория $\mathfrak{C}$ называется *подкатегорией* категории $\mathfrak{K}$, если: 1) $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C} \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$; 2) $H_{\mathfrak{C}}(A, B) \subseteq H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ для каждой упорядоченной пары объектов A, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$; 3) произведение морфизмов в категории $\mathfrak{C}$ совпадает с произведением тех же морфизмов в категории $\mathfrak{K}$; 4) единичный морфизм любого объекта $A \in \mathfrak{C}$ совпадает с единичным морфизмом того же объекта A в категории $\mathfrak{K}$. Подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$ называется *полной*, если в условии 2) имеет место равенство $H_{\mathfrak{C}}(A, B) = H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ для любых объектов A, $B \in \mathfrak{C}$. Полная подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$ вполне определяется заданием класса объектов $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ подкатегории $\mathfrak{C}$.

Подкасс $\mathfrak{M}$ класса морфизмов $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ категории $\mathfrak{K}$ называется *левым* [*правым*, *двусторонним*] *идеалом* категории $\mathfrak{K}$, если $\alpha\mu \in \mathfrak{M}$ [$\mu\alpha \in \mathfrak{M}$, $\alpha\mu\beta \in \mathfrak{M}$] для любых морфизмов $\mu \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ [α, $\beta \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$] всякий раз, когда указанные произведения определены. Пересечение любого класса левых [правых, двусторонних] идеалов является левым [правым, двусторонним] идеалом категории $\mathfrak{K}$, так что можно говорить о левом [правом, двустороннем] идеале, порожденном некоторым подклассом морфизмов категории $\mathfrak{K}$. Левый [правый, двусторонний] идеал категории $\mathfrak{K}$, порожденный одним морфизмом $\mu \in \mathfrak{K}$, называется *главным* левым [правым, двусторонним] идеалом и обозначается $\mathfrak{K}\mu$ [$\mu\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}\mu\mathfrak{K}$]. Категория $\mathfrak{K}$, не содержащая ни одного собственного двустороннего идеала, называется *простой*.

Классы $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ любой категории $\mathfrak{K}$ естественно образуют «большой» граф $\overline{\mathfrak{K}}$ (большой в том смысле, что все его вершины и все его стрелки образуют, быть может, классы). Любой «малый» подграф $\mathfrak{D}$ графа $\overline{\mathfrak{K}}$ называется *диаграммой*, если в нем вместе с некоторым объектом (вершиной) $A \in \mathfrak{D}$ содержится единичный морфизм 1_A. Путь из вершины A

в вершину B, составленный из стрелок $A \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ $\ldots A_n \xrightarrow{\alpha_n} B$ диаграммы $\mathfrak{D}$, будем обозначать $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Диаграмма $\mathfrak{D}$ называется *коммутативной*, если для любых двух вершин A, $B \in \mathfrak{D}$ и для любых путей $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из вершины A в вершину B, принадлежащих диаграмме $\mathfrak{D}$, в категории $\mathfrak{K}$ имеет место равенство произведений $\alpha_1 \ldots \alpha_m = \beta_1 \ldots \beta_n$.

Наиболее часто используемыми диаграммами являются: 1) последовательность

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A_n,$$

которая может быть и бесконечной слева, справа или с обеих сторон; 2) треугольник

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

который коммутативен, если $\alpha\beta = \gamma$; 3) четырехугольник

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "\delta"'] & D \end{tikzcd}$$

который коммутативен, если $\alpha\beta = \gamma\delta$; 4) диаграмма, составленная из конечного или бесконечного множества последовательностей, треугольников и четырехугольников. Диаграмма последнего вида коммутативна, если коммутативны все входящие в нее треугольники и четырехугольники.

1.4. Мономорфизмы, эпиморфизмы, биморфизмы и изоморфизмы. Морфизм μ категории $\mathfrak{K}$ называется *мономорфизмом*, если в категории $\mathfrak{K}$ всякий раз из равенства $\alpha\mu = \beta\mu$ следует $\alpha = \beta$, т. е. на μ можно сокращать справа. Каждый единичный морфизм является мономорфизмом. В любой категории структуризованных множеств каждое вложение является мономорфизмом. В таких категориях структуризованных множеств, как, например, категории множеств, топологических пространств, однотипных универсальных алгебр, в частности групп, колец, мономорфизмы совпадают с вложениями. В любой категории $\mathfrak{K}$ справедливы утверждения: если в равенстве $\sigma\lambda = \mu$ морфизмы σ и λ — мономорфизмы, то и μ — мономорфизм, и если μ — мономорфизм, то и σ — мономорфизм. Из первого утверждения следует, что класс всех объектов $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и класс всех мономорфизмов $\mathrm{Mon}\,\mathfrak{K}$ категории $\mathfrak{K}$ образуют подкатегорию, которую мы также будем обозначать $\mathrm{Mon}\,\mathfrak{K}$.

Мономорфизм $\mu\colon U \to A$ категории $\mathfrak{K}$, для которого существует по крайней мере один такой морфизм $\theta\colon A \to U$, что $\mu\theta = 1_U$, называется *обратимым справа* или *ретракцией*. В категории множеств SET каждый мономорфизм является ретракцией.

Морфизм θ категории $\mathfrak{K}$ называется *эпиморфизмом*, если в категории $\mathfrak{K}$ всякий раз из равенства $\theta\alpha = \theta\beta$ следует $\alpha = \beta$, т. е. на θ можно сокращать слева. Понятие эпиморфизма двойственно понятию мономорфизма. Подчеркнем, что, как следует из построения двойственного понятия (см. п. 1.2), при другой записи произведения морфизмов (см. п. 1.1) определение мономорфизма превращается в определение эпиморфизма и наоборот.

Каждый единичный морфизм категории $\mathfrak{K}$ является эпиморфизмом. В любой категории структуризованных множеств каждое наложение является эпиморфизмом. Обратное имеет место не всегда, например, в категории ассоциативных колец $\mathfrak{R}$ вложение $\sigma\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ кольца целых чисел $\mathbf{Z}$ в поле рациональных чисел $\mathbf{R}$ является эпиморфизмом, хотя и не является наложением. В категориях множеств, частично упорядоченных множеств, топологических пространств, групп, абелевых групп эпиморфизмы совпадают с наложениями. В любой категории $\mathfrak{K}$ произведение $\delta\rho = \theta$ эпиморфизмов δ и ρ является эпиморфизмом, и если θ — эпиморфизм, то и ρ — эпиморфизм. Класс $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и класс всех эпиморфизмов $\mathrm{Epi}\,\mathfrak{K}$ категории $\mathfrak{K}$ образуют подкатегорию, которую мы также будем обозначать $\mathrm{Epi}\,\mathfrak{K}$.

Эпиморфизм $\theta\colon A \to V$ категории $\mathfrak{K}$, для которого существует по крайней мере один такой морфизм

λ: $V \to A$, что $\lambda\theta = 1_V$, называется *обратимым слева* или *коретракцией*. Если в категории $\mathfrak{K}$ каждый эпиморфизм является коретракцией, то говорят, что $\mathfrak{K}$ является *категорией с аксиомой выбора*. Примером категории с аксиомой выбора является категория множеств SET.

Морфизм категории $\mathfrak{K}$, являющийся одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом, называется *биморфизмом*. Понятие биморфизма самодвойственно. Класс $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и класс всех биморфизмов $\mathrm{Bim}\,\mathfrak{K}$ категории $\mathfrak{K}$ образуют подкатегорию $\mathrm{Bim}\,\mathfrak{K}$.

Морфизм ξ: $A \to B$ категории $\mathfrak{K}$ называется *изоморфизмом*, если в категории $\mathfrak{K}$ существует такой морфизм η: $B \to A$, что $\xi\eta = 1_A$ и $\eta\xi = 1_B$. Морфизм η указанными двумя равенствами определяется однозначно, является изоморфизмом, называемым *изоморфизмом, обратным к изоморфизму* ξ, и обозначается ξ^{-1}. Понятие изоморфизма самодвойственно. Каждый изоморфизм является биморфизмом. Приведенный выше пример биморфизма σ: $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ в категории ассоциативных колец $\mathfrak{R}$ показывает, что существуют биморфизмы, не являющиеся изоморфизмами. В любой категории $\mathfrak{K}$ из того, что в равенстве $\lambda\gamma = \xi$ какие-либо два из морфизмов λ, γ и ξ являются изоморфизмами, следует, что и третий также является изоморфизмом. Класс $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и класс всех изоморфизмов $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{K}$ категории $\mathfrak{K}$ образуют подкатегорию $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{K}$. Категория $\mathfrak{K}$ называется *сбалансированной*, если $\mathrm{Bim}\,\mathfrak{K} = \mathrm{Iso}\,\mathfrak{K}$. Категория $\mathfrak{K}$, в которой все морфизмы являются изоморфизмами (т. е. $\mathfrak{K} = \mathrm{Iso}\,\mathfrak{K}$), называется *группоидом Брандта* или просто *группоидом*.

Объекты A и B категории $\mathfrak{K}$ называются *изоморфными*, и часто пишут $A \approx B$, если в категории $\mathfrak{K}$ существует по крайней мере один изоморфизм ξ: $A \to B$. Отношение изоморфности объектов категории $\mathfrak{K}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно. Полная подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$ называется *скелетом* категории $\mathfrak{K}$, если для каждого объекта $A \in \mathfrak{K}$ в подкатегории $\mathfrak{C}$ найдется один и только один объект A', изоморфный объекту A.

Для объекта A категории $\mathfrak{K}$ через $M(A)$ обозначим класс всех пар (U, μ), где μ: $U \to A$ — мономорфизм с фиксированным концом A. В классе $M(A)$ можно ввести отношение квазипорядка $\subseteq$, полагая

$(U, \mu) \subseteq (V, \sigma)$, если $\mu = \gamma\sigma$ для некоторого морфизма γ. Если $(U, \mu) \subseteq (V, \sigma)$ и $(V, \sigma) \subseteq (U, \mu)$, то в соотношении $\mu = \gamma\sigma$ морфизм γ является изоморфизмом и пары (U, μ) и (V, σ) называются *эквивалентными*. Подкласс эквивалентных пар класса $M(A)$ называется *подобъектом* объекта A. Подобъект объекта A, содержащий пару $(U, \mu) \in M(A)$, обозначается $(U, \mu]$ или $(\mu]$, а иногда просто U; мономорфизм μ: $U \to A$ иногда называют *представителем* подобъекта $(\mu]$; говорят также, что мономорфизм μ *определяет* или *задает* подобъект $(\mu]$ объекта A. Подобъект $(U, \mu]$ объекта A, задаваемый ретракцией μ: $U \to A$, называется *ретрактом* объекта A; определение ретракта корректно, так как если два мономорфизма μ: $U \to A$ и σ: $V \to A$ определяют один и тот же подобъект объекта A, т. е. $(\mu] = (\sigma]$, и μ — ретракция, то и σ — ретракция.

В категории множеств SET подобъект некоторого множества M представляет собой совокупность всех вложений f: $K \to M$, образами которых является фиксированное подмножество N множества M. Среди этих вложений имеется единственное естественное вложение $N \subset M$ подмножества N в множество M; оно как раз и выбирается в качестве представителя подобъекта и, таким образом, понятие подобъекта множества M превращается в обычное понятие подмножества множества M. Такой же смысл понятия подобъекта имеет в категориях однотипных универсальных алгебр, топологических пространств, частично упорядоченных множеств и т. д.

Класс всех подобъектов объекта A произвольной категории $\mathfrak{K}$ обозначим $\mathrm{Sub}(A)$. В классе $\mathrm{Sub}(A)$ вводится отношение частичного упорядочения $\leqslant$, при котором $(U, \mu] \leqslant (V, \sigma]$, если $(U, \mu) \subseteq (V, \sigma)$ в классе $M(A)$. Категория $\mathfrak{K}$ называется *локально малой слева*, если $\mathrm{Sub}(A)$ — множество для каждого объекта $A \in \mathfrak{K}$.

Двойственно, через $E(A)$ обозначается класс всех пар (θ, B), где θ: $A \to B$ — эпиморфизм с фиксированным началом A. В классе $E(A)$ вводится отношение квазипорядка $\subseteq$, при котором $(\rho, C) \subseteq (\theta, B)$, если $\rho = \theta\gamma$ для некоторого морфизма γ. Если при этом γ — изоморфизм, то пары (ρ, C) и (θ, B) называются *эквивалентными*. Подкласс эквивалентных пар класса $E(A)$ называется *факторобъектом* объекта A. Факторобъект объекта A, содержащий пару (θ, B), обозначается $[\theta, B)$ или $[\theta)$, а иногда просто B; эпиморфизм $\theta\colon A \twoheadrightarrow B$ иногда называют *представителем* факторобъекта $[\theta, B)$; говорят также, что эпиморфизм θ *определяет* или *задает* факторобъект $[\theta)$ объекта A. Факторобъект $[\theta, B)$ объекта A, определяемый коретракцией $\theta\colon A \twoheadrightarrow B$, называется *коретрактом* объекта A. Частично упорядоченный класс всех факторобъектов объекта A обозначается $\mathrm{Quo}(A)$. Категория $\mathfrak{K}$ называется *локально малой справа*, если $\mathrm{Quo}(A)$ — множество для каждого объекта $A \in \mathfrak{K}$.

Категория, являющаяся одновременно локально малой слева и локально малой справа, называется *локально малой.*

1.5. Специальные классы мономорфизмов и эпиморфизмов. Пара морфизмов $\alpha\colon A \twoheadrightarrow B$ и $\delta\colon C \twoheadrightarrow D$ категории $\mathfrak{K}$ называется *диагонализируемой* (обозначается $\alpha \downarrow \delta$), если для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \\ C \arrow[r, "\delta"'] & D \end{tikzcd}$$

в категории $\mathfrak{K}$ существует единственный морфизм $\varphi\colon B \to C$, разбивающий этот коммутативный квадрат на два коммутативных треугольника, т. е. удовлетворяющий равенствам $\gamma = \alpha\varphi$, $\beta = \varphi\delta$. В этом случае α будем называть морфизмом, *диагонализируемым* с морфизмом δ, а δ будем называть морфизмом, *кодиагонализируемым* с морфизмом α.

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс морфизмов категории $\mathfrak{K}$, то через $\mathfrak{M}^{\uparrow}$ обозначим класс всех морфизмов категории $\mathfrak{K}$, диагонализируемых с каждым морфизмом из класса $\mathfrak{M}$, а через $\mathfrak{M}^{\downarrow}$ обозначим класс морфизмов категории $\mathfrak{K}$, кодиагонализируемых с каждым морфизмом из класса $\mathfrak{M}$. Классы $\mathfrak{M}^{\uparrow}$ и $\mathfrak{M}^{\downarrow}$ замкнуты относительно произведения и содержат все изоморфизмы категории $\mathfrak{K}$.

Мономорфизм μ называется *строгим*, если он кодиагонализируем с каждым эпиморфизмом, т. е. $\mu \in \mathrm{Mon}\,\mathfrak{K} \cap (\mathrm{Epi}\,\mathfrak{K})^{\downarrow}$. Класс $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и класс $\mathrm{Mon}_s\,\mathfrak{K}$ всех строгих мономорфизмов категории $\mathfrak{K}$ образуют подкатегорию $\mathrm{Mon}_s \mathfrak{K}$, содержащую подкатегорию $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{K}$. При этом $\mathrm{Mon}_s \mathfrak{K} \cap \mathrm{Bim}\,\mathfrak{K} = \mathrm{Iso}\,\mathfrak{K}$, и если произведение $\sigma\lambda$ является строгим мономорфизмом, то σ — строгий мономорфизм. Подобъект $(\mu]$ объекта $A \in \mathfrak{K}$, в котором μ — строгий мономорфизм, называется *строгим подобъектом.*

Двойственно определяются *строгий эпиморфизм* категории $\mathfrak{K}$, подкатегория $\mathrm{Epi}_s \mathfrak{K}$ всех строгих эпиморфизмов категории $\mathfrak{K}$ и *строгий факторобъект* произвольного объекта $A \in \mathfrak{K}$.

Морфизм $\gamma\colon U \to A$ категории $\mathfrak{K}$ называется *уравнителем* пары морфизмов $\alpha, \beta\colon A \to B$, если $\gamma\alpha = \gamma\beta$. Мономорфизм $\mu\colon V \to A$, являющийся уравнителем пары морфизмов $\alpha, \beta\colon A \to B$, называется *ядром* пары (α, β) и обозначается $\ker(\alpha, \beta)$, если морфизм $\gamma\colon U \to A$ является уравнителем пары (α, β) тогда и только тогда, когда $\gamma \in \mathfrak{K}\mu$, т. е. $\gamma = \gamma'\mu$ для некоторого морфизма γ'. Класс ядер пары морфизмов $\alpha, \beta\colon A \to B$ образует подобъект $\mathrm{Ker}(\alpha, \beta)$ объекта A. Если $\alpha, \beta\colon A \to B$ — пара параллельных морфизмов и $\lambda\colon B \to C$ — мономорфизм, то ядро $\mathrm{Ker}(\alpha, \beta)$ пары (α, β) существует тогда и только тогда, когда существует ядро $\mathrm{Ker}(\alpha\lambda, \beta\lambda)$ пары $(\alpha\lambda, \beta\lambda)$; при этом имеет место равенство $\mathrm{Ker}(\alpha, \beta) = \mathrm{Ker}(\alpha\lambda, \beta\lambda)$. Любой ретракт $(U, \mu]$ объекта A является ядром $(U, \mu] = \mathrm{Ker}(1_A, \theta\mu)$ пары морфизмов $(1_A, \theta\mu)$, где $\theta\colon A \to U$ — такой морфизм, что $\mu\theta = 1_U$.

Если для диаграммы

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, shift left, "\mu"] & A \arrow[l, shift left, dotted, "\theta"] \arrow[r, shift left=2, "\alpha"] \arrow[r, shift right=2, "\beta"'] & B \arrow[l, dotted, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

существуют такие морфизмы θ и γ, что $\mu\theta = 1_K$, $\alpha\gamma = 1_A$ и $\theta\mu = \beta\gamma$, то μ называется *расщепляющимся ядром* пары морфизмов (α, β). Если μ — расщепляющееся ядро пары морфизмов (α, β), то $\mu = \ker(\alpha, \beta)$.

В категории множеств SET ядро пары отображений $f, g\colon M \to N$ определяется как подмножество K множества M, состоящее из всех элементов $m \in M$, для которых $f(m) = g(m)$; подмножество K может быть и пустым. Аналогично определяется ядро пары морфизмов в любой категории структуризованных множеств.

В категории $\mathfrak{K}$ морфизм $\gamma\colon B \to C$ называется *коуравнителем* пары морфизмов $\alpha, \beta\colon A \to B$, если

$\alpha\gamma = \gamma$. Эпиморфизм $\theta\colon B \to V$ категории $\mathfrak{K}$ называется *коядром* пары морфизмов $\alpha, \beta\colon A \to B$, если θ — коуравнитель пары (α, β) и любой коуравнитель $\delta\colon B \to C$ пары (α, β) представим в виде $\delta = \theta\delta'$ для некоторого морфизма $\delta'\colon V \to C$. Коядро пары морфизмов $\alpha, \beta\colon A \to B$ обозначается $\operatorname{coker}(\alpha, \beta)$. Все коядра пары морфизмов $\alpha, \beta\colon A \to B$ образуют факторобъект $\operatorname{Coker}(\alpha, \beta)$ объекта B. Если $\pi\colon W \to A$ — эпиморфизм категории $\mathfrak{K}$, то для любой пары морфизмов $\alpha, \beta\colon A \to B$ коядро $\operatorname{Coker}(\alpha, \beta)$ пары (α, β) существует тогда и только тогда, когда существует коядро $\operatorname{Coker}(\pi\alpha, \pi\beta)$ пары $(\pi\alpha, \pi\beta)$; при этом имеет место равенство $\operatorname{Coker}(\alpha, \beta) = \operatorname{Coker}(\pi\alpha, \pi\beta)$. Любой коретракт $[\rho, V)$ объекта A является коядром $[\rho, V) = \operatorname{Coker}(1_A, \rho\lambda)$ пары морфизмов $(1_A, \rho\lambda)$, где $\lambda\colon V \to A$ — такой морфизм, что $\lambda\rho = 1_V$. Понятия коуравнителя и коядра пары морфизмов двойственны соответственно понятиям уравнителя и ядра пары морфизмов.

Если для диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left=2, "\alpha"] \arrow[r, shift right=2, "\beta"'] & B \arrow[l, dotted, "\gamma"] \arrow[r, shift left, "\theta"] & U \arrow[l, dotted, shift left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

существуют такие морфизмы γ и μ, что $\mu\theta = 1_U$, $\gamma\alpha = 1_B$ и $\gamma\beta = \theta\mu$, то θ называется *расщепляющимся коядром* пары морфизмов (α, β). Если θ — расщепляющееся коядро пары морфизмов (α, β), то $\theta = \operatorname{coker}(\alpha, \beta)$. Понятие расщепляющегося коядра двойственно понятию расщепляющегося ядра.

В категории множеств SET коядро пары отображений $f, g\colon M \to N$ определяется наложением $q\colon N \to P$, «склеивающим» на множестве N лишь пары элементов вида $f(m)$, $g(m)$ для каждого $m \in M$. В категории групп $\mathfrak{G}$ коядром пары гомоморфизмов $f, g\colon G \to H$ является факторгруппа группы H по ее нормальной подгруппе, порожденной элементами вида $f(a)g(a)^{-1}$ для каждого $a \in G$.

Говорят, что $\mathfrak{K}$ — *категория с ядрами* [*коядрами*] пар морфизмов, если в ней каждая пара параллельных морфизмов обладает ядром [коядром].

Каждое многообразие однотипных универсальных алгебр, в частности, категория множеств SET, является категорией с ядрами и коядрами пар морфизмов. Категория SET_n непустых множеств, являющаяся полной подкатегорией категории SET, является категорией с коядрами пар морфизмов и не является категорией с ядрами пар морфизмов: пара отображений f, g: $2 \to 2$, где $2 = \{0, 1\}$, для которых $f(0) = f(1) = 0$ и $g(0) = g(1) = 1$, не обладает ядром в категории SET_n.

Мономорфизм μ: $U \to A$ называется *регулярным*, если левый идеал $\mathfrak{K}\mu$ состоит из тех и только тех морфизмов $\gamma \in \mathfrak{K}$, для которых $\gamma\alpha = \gamma\beta$ всякий раз, когда $\mu\alpha = \mu\beta$. Каждый мономорфизм $\ker(\alpha, \beta)$ для некоторой пары морфизмов (α, β) регулярен. Каждый регулярный мономорфизм является строгим мономорфизмом. Класс $\mathrm{Mon}_r\,\mathfrak{K}$ всех регулярных мономорфизмов категории $\mathfrak{K}$ в общем случае не замкнут относительно произведений. Однако произведение изоморфизма (слева или справа) и регулярного мономорфизма всегда является регулярным мономорфизмом, так что имеет смысл понятие *регулярного подобъекта*. Если произведение $\sigma\lambda$ — регулярный мономорфизм и λ — мономорфизм, то σ — регулярный мономорфизм.

Двойственно определяются *регулярный эпиморфизм*, *регулярный факторобъект* и класс $\mathrm{Epi}_r\,\mathfrak{K}$ всех регулярных эпиморфизмов категории $\mathfrak{K}$.

Категория $\mathfrak{K}$ называется *категорией с разложением* или *с факторизацией* или *бикатегорий*, если в категории $\mathfrak{K}$ существуют такие подкатегории $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{M}$, что: 1) $\mathfrak{E} \subseteq \mathrm{Epi}\,\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{Mon}\,\mathfrak{K}$; 2) $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{E} \cap \mathfrak{M}$; 3) для любого морфизма $\varphi \in \mathfrak{K}$ существует разложение

$$\varphi = \theta\mu, \tag{$*$}$$

где $\theta \in \mathfrak{E}$ и $\mu \in \mathfrak{M}$; 4) если $\varphi = \theta'\mu'$ — любое другое разложение вида $(*)$, то $\theta' = \theta\xi$ и $\mu' = \xi^{-1}\mu$ для некоторого изоморфизма ξ. Если выполняются условия 1) — 4), то будем писать $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$. В разложении $(*)$ эпиморфизм θ называют *кообразом* морфизма φ и обозначают $\mathrm{coim}\,\varphi$, а мономорфизм μ называют *образом* морфизма φ и обозначают $\mathrm{im}\,\varphi$. Кообразы и образы морфизма φ образуют факторобъект $\mathrm{Coim}\,\varphi$ и подобъект $\mathrm{Im}\,\varphi$ соответственно начала и конца морфизма φ. Эпиморфизмы подкатегории $\mathfrak{E}$ называются *допустимыми эпиморфизмами* в категории с разложением $(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$, а определяемые ими факторобъекты — *допустимыми факторобъектами*. Подкатегория $\mathfrak{M}$ определяет *допустимые мономорфизмы* и *допустимые подобъекты* в категории с разложением $(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$. В категории с разложением $(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$ подкатегории $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{M}$ взаимно однозначно определяют друг друга по формулам $\mathfrak{E} = \mathrm{Epi}\,\mathfrak{K} \cap \mathfrak{M}^{\uparrow}$ и $\mathfrak{M} = \mathrm{Mon}\,\mathfrak{K} \cap \mathfrak{E}^{\downarrow}$. Отсюда $\mathrm{Epi}_s \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{E}$, т. е. каждый строгий эпиморфизм является допустимым, и, двойственно, $\mathrm{Mon}_s \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{M}$.

Примеры. Любое многообразие универсальных алгебр Alg, в частности, категория множеств SET, категория групп $\mathfrak{G}$ и т. д., является категорией с разложением (Alg, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$), где $\mathfrak{E}$ — класс всех гомоморфных наложений, а $\mathfrak{M}$ — класс всех гомоморфных вложений категории Alg.

Категория $\mathfrak{K}$ = качум **2** двухэлементной цепи **2** состоит из двух объектов A и B, единичных морфизмов 1_A и 1_B и морфизма $\alpha\colon A \to B$, являющегося биморфизмом. На категории $\mathfrak{K}$ можно определить две различные структуры категории с разложением: $(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{M}_1)$ и $(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{M}_2)$, где $\mathfrak{E}_1 = \{1_A, 1_B\}$, $\mathfrak{M}_1 = \{1_A, \alpha, 1_B\}$ и $\mathfrak{E}_2 = \{1_A, \alpha, 1_B\}$, $\mathfrak{M}_2 = \{1_A, 1_B\}$.

Если в категории $\mathfrak{K}$ формула (*) верна при $\theta \in \mathrm{Epi}_s \mathfrak{K}$ и $\mu \in \mathrm{Mon}\,\mathfrak{K}$, то $(\mathfrak{K}, \mathrm{Epi}_s \mathfrak{K}, \mathrm{Mon}\,\mathfrak{K})$ — категория с разложением, называемая *категорией со строгими кообразами*. Если в категории $\mathfrak{K}$ формула (*) верна при $\theta \in \mathrm{Epi}_r \mathfrak{K}$ и $\mu \in \mathrm{Mon}\,\mathfrak{K}$, то $(\mathfrak{K}, \mathrm{Epi}_r \mathfrak{K}, \mathrm{Mon}\,\mathfrak{K})$ — категория с разложением, называемая *категорией с регулярными кообразами*. В этом случае классы $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и $\mathrm{Epi}_r \mathfrak{K}$ образуют подкатегорию $\mathrm{Epi}_r \mathfrak{K}$, совпадающую с подкатегорией $\mathrm{Epi}_s \mathfrak{K}$.

Двойственно определяются *категория со строгими образами* и *категория с регулярными образами*.

1.6. Терминальные и инициальные объекты категории; категории с нулевыми морфизмами. Морфизм φ категории $\mathfrak{K}$ называется *константным* [*коконстантным*], если $\alpha\varphi = \beta\varphi$ [$\varphi\alpha = \varphi\beta$] для любой пары параллельных морфизмов α, β, для которых произведения $\alpha\varphi$, $\beta\varphi$ [$\varphi\alpha$, $\varphi\beta$] определены. Понятие коконстантного морфизма двойственно понятию константного морфизма.

Говорят, что $\mathfrak{K}$ — *категория с нулевыми морфизмами*, если для любой пары объектов $A, B \in \mathfrak{K}$ в множестве $H(A, B)$ существует такой морфизм $0_{A,B}$, называемый *нулевым морфизмом*, что $\alpha 0_{A,B} = 0_{U,B}$ и $0_{A,B}\beta = 0_{A,C}$ для любых морфизмов $\alpha\colon U \to A$ и $\beta\colon B \to C$. Система нулевых морфизмов $0_{A,B}$, $A, B \in \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$, если она в категории $\mathfrak{K}$ существует, определяется однозначно. Часто в записи нулевого морфизма вместо $0_{A,B}$ пишется просто 0. Каждый нулевой морфизм одновременно является константным и коконстантным. Понятие системы нулевых морфизмов самодвойственно.

Объект $\top$ категории $\mathfrak{K}$ называется *терминальным* (или *финальным*, *точечным*, *правым нулем*), если $H(A, \top) = \{\omega_A\}$ — одноэлементное множество для каждого объекта $A \in \mathfrak{K}$. Каждый морфизм ω_A, $A \in \operatorname{Ob} \mathfrak{K}$, является константным. Все терминальные объекты категории $\mathfrak{K}$ между собой изоморфны. Терминальный объект $\top$ называется *строго терминальным*, если каждый морфизм категории $\mathfrak{K}$ с началом $\top$ является изоморфизмом.

Объект $\perp$ категории $\mathfrak{K}$ называется *инициальным* (или *левым нулем*), если $H(\perp, A) = \{\omega_A\}$ — одноэлементное множество для каждого объекта $A \in \mathfrak{K}$. Каждый морфизм ω_A, $A \in \operatorname{Ob} \mathfrak{K}$, является коконстантным. Все инициальные объекты категории $\mathfrak{K}$ между собой изоморфны. Инициальный объект $\perp$ называется *строго инициальным*, если каждый морфизм категории $\mathfrak{K}$ с концом $\perp$ является изоморфизмом. Понятия инициального объекта и строго инициального объекта двойственны понятиям терминального объекта и строго терминального объекта.

Объект 0 категории $\mathfrak{K}$ называется *нулевым* или *нулем*, если $H(A, 0)$ и $H(0, A)$ — одноэлементные множества для каждого объекта $A \in \mathfrak{K}$, т. е. 0 является одновременно терминальным и инициальным объектом категории $\mathfrak{K}$. Понятие нулевого объекта самодвойственно. В категории $\mathfrak{K}$ с нулевым объектом всегда существует система нулевых морфизмов.

Примеры. В категории множеств SET каждое одноточечное множество является терминальным, но не строго терминальным объектом, пустое множество $\varnothing$ — строго инициальный объект. Категория SET системой нулевых морфизмов не обладает.

Обозначим через SET_0 категорию, объектами которой служат непустые множества A с выделенной точкой 0_A, т. е. объектами категории SET_0 являются алгебры с одной нульарной операцией. Морфизмом в категории SET_0 является любое отображение $f: A \to B$, удовлетворяющее условию $f(0_A) = 0_B$. Каждое одноточечное множество является нулевым объектом категории SET_0. В категории групп $\mathfrak{G}$ нулевым объектом является единичная группа.

Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с системой нулевых морфизмов. Если $\alpha\beta = 0$, то α называется *левым аннулято-*

ром морфизма β, а β — *правым аннулятором морфизма* α. Мономорфизм μ называется *ядром морфизма* α (обозначается: $\mu = \ker \alpha$), если морфизм γ оказывается левым аннулятором морфизма α тогда и только тогда, когда γ принадлежит левому идеалу $\mathfrak{K}\mu$, т. е. $\gamma = \gamma'\mu$ для некоторого морфизма γ'. Класс ядер $\ker \alpha$ морфизма α: $A \to B$ образует подобъект $\operatorname{Ker} \alpha$ объекта A. Для морфизма α: $A \to B$ и мономорфизма λ: $B \to C$ ядро $\operatorname{Ker} \alpha$ существует тогда и только тогда, когда существует ядро $\operatorname{Ker} \alpha\lambda$; при этом имеет место равенство $\operatorname{Ker} \alpha = \operatorname{Ker} \alpha\lambda$. Подобъект $(\mu]$ объекта A, являющийся ядром некоторого морфизма α: $A \to B$, называется *идеалом объекта* A. Частично упорядоченный подкласс частично упорядоченного класса $\operatorname{Sub}(A)$ подобъектов объекта A, образованный идеалами объекта A, обозначим $I(A)$.

Эпиморфизм θ называется *коядром морфизма* α (обозначается $\theta = \operatorname{coker} \alpha$), если морфизм δ оказывается правым аннулятором морфизма α тогда и только тогда, когда δ принадлежит правому идеалу $\theta\mathfrak{K}$ категории $\mathfrak{K}$, т. е. $\delta = \theta\delta'$ для некоторого морфизма δ'. Класс коядер $\operatorname{coker} \alpha$ морфизма α: $A \to B$ образует факторобъект $\operatorname{Coker} \alpha$ объекта B. Для эпиморфизма π: $A \to B$ и морфизма α: $B \to C$ коядро $\operatorname{Coker} \alpha$ существует тогда и только тогда, когда существует коядро $\operatorname{Coker} \pi\alpha$; при этом имеет место равенство $\operatorname{Coker} \alpha = \operatorname{Coker} \pi\alpha$. Факторобъект $[\theta)$ объекта B, являющийся коядром некоторого морфизма α: $A \to B$, называется *коидеалом объекта* B. Частично упорядоченный подкласс частично упорядоченного класса $\operatorname{Quo}(B)$ факторобъектов объекта B, образованный коидеалами объекта B, обозначим $CI(B)$. Понятия коядра морфизма и коидеала объекта двойственны понятиям ядра морфизма и идеала объекта.

Последовательность $U \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\theta} B$ объектов и морфизмов категории $\mathfrak{K}$ называется *точной* или 0-*точной*, если $\mu = \ker \theta$ и $\theta = \operatorname{coker} \mu$. В этом случае $(\mu]$ называется *идеалом, сопряженным коидеалу* $[\theta)$, а $[\theta)$ — *коидеалом, сопряженным идеалу* $(\mu]$.

Говорят, что $\mathfrak{K}$ — *категория с ядрами* [*коядрами*] *морфизмов*, если каждый морфизм категории $\mathfrak{K}$ обладает ядром [коядром]. Если $\mathfrak{K}$ — категория с ядрами или коядрами морфизмов, то она обладает нулевым объектом. Нулевым объектом обладает также любая категория с разложением $(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$, обладающая системой нулевых морфизмов. В категории $\mathfrak{K}$ с ядрами и коядрами морфизмов сопоставление каждому идеалу любого объекта $A \in \mathfrak{K}$ сопряженного ему коидеала определяет антиизоморфизм между частично упорядоченными классами $I(A)$ и $CI(A)$ идеалов и коидеалов объекта A.

Примеры. Категория SET_0 является категорией с ядрами и коядрами морфизмов. Для любого отображения $f\colon M \to N$ из категории SET_0 ядро $\mathrm{Ker}\, f$ есть подмножество элементов m множества M, для которых $f(m) = 0_N$, а коядро $\mathrm{coker}\, f$ есть наложение $q\colon N \to P$, «склеивающее» в одну точку 0_P все элементы вида $f(m)$ для каждого $m \in M$; на остальных элементах множества N отображение q взаимно однозначно. В категории групп $\mathfrak{G}$ ядро $\mathrm{Ker}\, f$ любого гомоморфизма $f\colon G \to H$ определяется так же, как и в категории SET_0, а коядром $\mathrm{Coker}\, f$ является факторгруппа группы H по нормальной подгруппе, порожденной всеми элементами вида $f(a)$ для каждого $a \in G$.

Мономорфизм μ категории $\mathfrak{K}$ называется *нормальным*, если морфизм γ принадлежит левому идеалу $\mathfrak{K}\mu$ категории $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда $\gamma\alpha = 0$ всякий раз, когда $\mu\alpha = 0$. Класс всех нормальных мономорфизмов категории $\mathfrak{K}$ обозначим $\mathrm{Mon}_n\, \mathfrak{K}$. Нормальные мономорфизмы обладают свойствами, аналогичными свойствам регулярных мономорфизмов. Таким образом, можно говорить о *нормальном подобъекте* $(\mu]$ конца морфизма μ. Каждый идеал объекта $A \in \mathfrak{K}$ является нормальным подобъектом объекта A. Если $(\mu]$ — нормальный подобъект объекта A и в категории $\mathfrak{K}$ существует $\mathrm{coker}\, \mu$, то $(\mu]$ — идеал объекта A.

Двойственно в категории $\mathfrak{K}$ определяются *нормальный эпиморфизм* и *нормальный факторобъект*; класс всех нормальных эпиморфизмов категории $\mathfrak{K}$ обозначается $\mathrm{Epi}_n\, \mathfrak{K}$.

Если в категории $\mathfrak{K}$ формула (*) п. 1.5 верна при $\theta \in \mathrm{Epi}_n\, \mathfrak{K}$ и $\mu \in \mathrm{Mon}\, \mathfrak{K}$, то $(\mathfrak{K}, \mathrm{Epi}_n\, \mathfrak{K}, \mathrm{Mon}\, \mathfrak{K})$ — категория с разложением, называемая *категорией с нормальными кообразами*. В этом случае $\mathrm{Epi}_n\, \mathfrak{K}$ является подкатегорией категории $\mathfrak{K}$.

Категория с нормальными образами определяется двойственно.

1.7. Произведения и копроизведения. Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная категория. Система морфизмов $(\alpha_i\colon A \to$

$\to A_i$; $i \in I$) категории $\mathfrak{K}$ называется *конусом с вершиной* A. Конус $(\alpha_i)_{i \in I}$ называется *моноконусом* или *разделяющим конусом*, если из равенств $\varphi\alpha_i = \psi\alpha_i$ для всех $i \in I$ следует $\varphi = \psi$. Конус $(\alpha_i)_{i \in I}$ разлагается в произведение морфизма ξ: $A \to B$ и конуса (β_i: $B \to A_i$; $i \in I$), если $\alpha_i = \xi\beta_i$ для каждого $i \in I$.

Двойственно определяется понятие *коконуса* (α_i: $A_i \to A$; $i \in I$) *с вершиной* A. Коконус (α_i: $A_i \to A$; $i \in I$) называется *эпикоконусом* или *плотным коконусом*, если из равенств $\alpha_i\varphi = \alpha_i\psi$ для всех $i \in I$ следует $\varphi = \psi$. Коконус (α_i: $A_i \to A$; $i \in I$) разлагается в произведение коконуса (β_i: $A_i \to B$; $i \in I$) и морфизма γ: $B \to A$, если $\alpha_i = \beta_i\gamma$ для каждого $i \in I$.

Конус (π_i: $A \to A_i$: $i \in I$) называется *произведением* объектов A_i *с проекциями* π_i, $i \in I$ $\Big($обозначается $A = \prod\limits_{i \in I} A_i(\pi_i)$ или $A = A_1 \times \ldots \times A_n(\pi_1, \ldots, \pi_n)$, если множество индексов I конечно, а также просто $\prod\limits_{i \in I} A_i\Big)$, если для любого конуса (α_i: $B \to A_i$; $i \in I$) существует такой единственный морфизм α: $B \to A$, что $\alpha_i = \alpha\pi_i$, $i \in I$; морфизм α обозначается $\alpha = \bigotimes\limits_{i \in I} \alpha_i$ или $\alpha = \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_n$, если множество индексов I конечно. Произведение $\prod\limits_{i \in I} A_i$ объектов A_i, $i \in I$, если оно в категории $\mathfrak{K}$ существует, определяется однозначно с точностью до изоморфизмов, и конус проекций $(\pi_i)_{i \in I}$ является моноконусом. Если объект A разлагается в произведение $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$ с проекциями π_i: $A \to A_i$, $i \in I$, и каждый объект A_i, $i \in I$, разлагается в произведение $A_i = \prod\limits_{j \in J_i} A_{ij}$ с проекциями π_{ij}: $A_i \to A_{ij}$, $j \in J_i$, то объект A разлагается в произведение $A = \prod\limits_{j \in J_i,\, i \in I} A_{ij}$ с проекциями $\pi_i\pi_{ij}$: $A \to A_{ij}$, $j \in J_i$, $i \in I$. Если $A = \prod\limits_{i \in I} A_i(\pi_i)$ и если множество индексов I представимо в виде дизъюнктного объединения таких подмножеств I_k, $k \in K$, что в категории $\mathfrak{K}$ существуют произведения $A_k = \prod\limits_{i \in I_k} A_i(\delta_i)$ для всех $k \in K$ и существует произведение $A' = \prod_{k \in K} A_k(\tau_k)$, то $A' = A$ и $\pi_i = \tau_k \delta_i$, если $i \in I_k$. Если в категории $\mathfrak{K}$ для объекта $A \in \mathfrak{K}$ существует произведение $\prod_{i \in I} A_i$, $A_i = A$, $i \in I$, некоторого множества экземпляров объекта A, то существует морфизм $\Delta_A^I = \underset{i \in I}{(\times)} 1_{A_i}\colon A \to \prod_{i \in I} A_i$, $A_i = A$, $i \in I$, называемый *I-й диагональю* объекта A. В случае когда I — конечное множество из n элементов, I-я диагональ объекта A обозначается Δ_A^n и называется *n-й диагональю*; 2-я диагональ объекта A называется просто *диагональю* объекта A и обозначается $\Delta_A\colon A \to A \times A$.

Если $\underset{i \in I}{(\times)} \alpha_i\colon B \to \prod_{i \in I} A_i$, то для любого морфизма $\beta\colon C \to B$ справедлива формула $\beta \underset{i \in I}{(\times)} \alpha_i = \underset{i \in I}{(\times)} \beta\alpha_i$. Если $\prod_{i \in I} A_i(\pi_i)$ и $\prod_{i \in I} B_i(\rho_i)$ — два произведения с одним и тем же множеством индексов I, то для любого семейства морфизмов $\alpha_i\colon A_i \to B_i$, $i \in I$, морфизм $\underset{i \in I}{(\times)} \pi_i\alpha_i\colon \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} B_i$ обозначается $\prod_{i \in I} \alpha_i$ или $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$, если множество индексов I конечно. Для любых морфизмов $\underset{i \in I}{(\times)} \varphi_i\colon C \to \prod_{i \in I} A_i$ и $\prod_{i \in I} \alpha_i\colon \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} B_i$ справедлива формула $\left(\underset{i \in I}{(\times)} \varphi_i\right)\left(\prod_{i \in I} \alpha_i\right) = \underset{i \in I}{(\times)} \varphi_i\alpha_i$. Если все α_i — [строгие, регулярные, нормальные] мономорфизмы, то $\prod_{i \in I} \alpha_i$ — [строгий, регулярный, нормальный] мономорфизм. Соответствующее утверждение для эпиморфизмов в общем случае неверно.

Скажем, что $\mathfrak{K}$ — *категория с* [*конечными*] *произведениями*, если в категории $\mathfrak{K}$ для любого [конечного] множества объектов существует их произведение.

Примеры. Любое многообразие универсальных алгебр Alg, в частности категория множеств SET, категория групп $\mathfrak{G}$ и т. д., является категорией с произведениями. Для произвольного множества алгебр $A_i \in$ Alg, $i \in I$, произведением алгебр A_i, $i \in I$, является алгебра $A = \prod_{i \in I} A_i(\pi_i)$, элементами которой являются всевозможные строки вида $(\ldots, a_i, \ldots)$, на i-м месте которых стоит произвольный элемент $a_i \in A_i$, $i \in I$; алгебраические операции в алгебре A определяются покомпонентно. Проекция произведения π_i: $A \to A_i$, $i \in I$, каждой строке $(\ldots, a_i, \ldots)$ сопоставляет ее i-ю компоненту $a_i \in A_i$. В категории множеств SET произведение часто называют декартовым произведением, а, например, в категории групп $\mathfrak{G}$, категории колец $\mathfrak{R}$ и т. д. произведение часто называют *прямым произведением*, а также *полным прямым произведением* в случае, когда множество индексов I бесконечно.

Полная подкатегория Alg_f категории Alg, состоящая из конечных алгебр, в частности категория SET_f конечных множеств, категория $\mathfrak{G}_f$ конечных групп и т. д., является категорией с конечными произведениями.

В частично упорядоченном классе $\mathfrak{A}$, рассматриваемом как категория (см. п. 1.1, пример 7)), для множества объектов $a_i \in \mathfrak{A}$, $i \in I$, произведением является пересечение $\bigwedge_{i \in I} a_i$ (если оно существует) элементов a_i, $i \in I$, в частично упорядоченном классе $\mathfrak{A}$. Таким образом, качум $\mathfrak{A}$ является категорией с [конечными] произведениями тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ — полная [обычная] полурешетка относительно пересечений. Из этого примера, в частности, видно, что подкатегория категории с [конечными] произведениями может не быть категорией с [конечными] произведениями и что произведение $\prod_{i \in I} A_i$ некоторого множества объектов A_i, $i \in I$, подкатегории $\mathfrak{L}$ категории $\mathfrak{K}$ может быть отлично от произведения тех же объектов A_i, $i \in I$, во всей категории $\mathfrak{K}$; даже существование произведения множества объектов A_i, $i \in I$, подкатегории $\mathfrak{L}$ не зависит от существования или несуществования произведения того же множества объектов во всей категории $\mathfrak{K}$.

В категории $(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$ с разложением и с [конечными] произведениями в частично упорядоченном классе $\mathrm{Quo}_p(A)$ допустимых факторобъектов любого объекта $A \in \mathfrak{K}$ для любого [конечного] множества факторобъектов $[\delta_i)$, $i \in I$, существует объединение, определяемое по формуле $\bigcup_{i \in I} [\delta_i) = [\mathrm{coim}((\bigtimes_{i \in I}) \delta_i))$.

Если $\mathfrak{K}$ — категория с нулевыми морфизмами, то для всякого существующего в категории произведения $\prod_{i \in I} A_i (\pi_i)$ определены морфизмы $\sigma_i = (\bigtimes_{j \in I}) \delta_j^i$: $A_i \to \prod_{j \in I} A_j$, где $\delta_i^i = 1_{A_i}$ и $\delta_j^i = 0$ при $i \neq j$, т. е. $\sigma_i \pi_i = 1_{A_i}$ и $\sigma_i \pi_j = 0$ при $i \neq j$. В этом случае σ_i, $i \in I$, — нормальные мономорфизмы, называемые *вложениями произведения* $\prod_{i \in I} A_i$, а π_i, $i \in I$, — регулярные эпиморфизмы. Произведение $\prod_{i \in I} A_i (\pi_i)$, для которого существуют вложения σ_i, $i \in I$, часто записывается в виде $\prod\limits_{i \in I} A_i(\pi_i;\ \sigma_i)$.

В случае когда все проекции произведения $\prod\limits_{i \in I} A_i(\pi_i)$ являются эпиморфизмами, объект $B \in \mathfrak{K}$ называется *подпрямым произведением* объектов A_i, $i \in I$, если существует такой мономорфизм $\sigma\colon B \to \prod\limits_{i \in I} A_i$, что $\sigma\pi_i$ — эпиморфизм для каждого $i \in I$.

Двойственно определяется *копроизведение* $\coprod\limits_{i \in I} A_i(\tau_i)$ объектов A_i с эпикоконусом *вложений* $\left(\tau_i\colon\ A_i \to \coprod\limits_{i \in I} A_i;\ i \in I\right)$ (вместо $\coprod\limits_{i \in I} A_i(\tau_i)$ иногда будем писать просто $\coprod\limits_{i \in I} A_i$; копроизведение конечного множества объектов $A_1, \ldots, A_n$ будем обозначать $A_1 * \ldots * A_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ или $A_1 * \ldots * A_n$). Для любого коконуса $(\alpha_i\colon\ A_i \to B;\ i \in I)$ единственный морфизм $\alpha\colon \coprod\limits_{i \in I} A_i \to B$, для которого $\tau_i\alpha = \alpha_i$, $i \in I$, обозначим $\mathop{(*)}\limits_{i \in I} \alpha_i$ или $\alpha_1 (*) \ldots (*) \alpha_n$, если множество индексов I конечно. Если $\coprod\limits_{i \in I} A_i(\tau_i)$ и $\coprod\limits_{i \in I} B_i(\sigma_i)$ — два копроизведения с одним и тем же множеством индексов I, то для любого семейства морфизмов $\alpha_i\colon A_i \to B_i$, $i \in I$, морфизм $\mathop{(*)}\limits_{i \in I} \alpha_i\sigma_i\colon\ \coprod\limits_{i \in I} A_i \to \coprod\limits_{i \in I} B_i$ обозначается $\coprod\limits_{i \in I} \alpha_i$ или $\alpha_1 * \ldots * \alpha_n$, если множество индексов I конечно. Если все α_i — [строгие, регулярные, нормальные] эпиморфизмы, то $\coprod\limits_{i \in I} \alpha_i$ — [строгий, регулярный, нормальный] эпиморфизм. Соответствующее утверждение для мономорфизмов неверно.

Если объект A разлагается в копроизведение $A = \coprod\limits_{i \in I} A_i$ с вложениями $\sigma_i\colon A_i \to A$, $i \in I$, и каждый объект A_i, $i \in I$, разлагается в копроизведение $A_i = \coprod\limits_{j \in J_i} A_{ij}$ с вложениями $\sigma_{ij}\colon\ A_{ij} \to A_i$, $j \in J_i$, то объект A разлагается в копроизведение $A = \coprod\limits_{j \in J_i,\, i \in I} A_{ij}$ с вложениями $\sigma_{ij}\sigma_i\colon\ A_{ij} \to A$, $j \in J_i$,

$i \in I$. Если $A = \coprod_{i \in I} A_i (\sigma_i)$ и множество индексов I представимо в виде дизъюнктного объединения таких подмножеств I_k, $k \in K$, что в категории $\mathfrak{K}$ существуют как копроизведения $A_k = \coprod_{i \in I_k} A_i (\tau_i)$ для всех $k \in K$, так и копроизведение $A' = \coprod_{k \in K} A_k (\rho'_k)$, то $A' = A$ и $\sigma_i = \tau_i \rho_k$, если $i \in I_k$. Двойственно I-й диагонали объекта $A \in \mathfrak{K}$ определяется I-я *кодиагональ* $\nabla_A^I = \underset{i \in I}{(*)} 1_{A_i}\colon \coprod_{i \in I} A_i \to A$, $A_i = A$, $i \in I$, а также n-я *кодиагональ* ∇_A^n и *кодиагональ* ∇_A: $A * A \to A$ объекта A.

Если в категории $\mathfrak{K}$ существуют произведение $\prod_{i \in I} A_i (\pi_i)$ и копроизведение $\coprod_{j \in J} B_j (\tau_j)$, то для любого семейства морфизмов α_{ij}: $B_j \to A_i$, $i \in I$, $j \in J$, справедливо равенство

$$\underset{j \in J}{(*)}\Big(\underset{i \in I}{(\times)} \alpha_{ij}\Big) = \underset{i \in I}{(\times)}\Big(\underset{j \in J}{(*)} \alpha_{ij}\Big)\colon \coprod_{j \in J} B_j \to \prod_{i \in I} A_i .$$

Скажем, что $\mathfrak{K}$ — *категория с* [*конечными*] *копроизведениями*, если в категории $\mathfrak{K}$ для любого [конечного] семейства объектов существует их копроизведение.

Примеры. Любое многообразие универсальных алгебр является категорией с копроизведениями. В категории множеств SET копроизведением множеств A_i, $i \in I$, является их дизъюнктное объединение; в частности, категория SET_f конечных множеств является категорией с конечными копроизведениями. В категории SET_0 множеств с отмеченной точкой копроизведением семейства множеств A_i с отмеченной точкой 0_{A_i}, $i \in I$, является их дизъюнктное объединение, в котором «склеены» в одну точку все точки вида 0_{A_i}, $i \in I$. В категории групп $\mathfrak{G}$ копроизведением семейства групп G_i, $i \in I$, является их свободное произведение. Заметим, что свободное произведение двух конечных групп является бесконечной группой. В категории абелевых групп $\mathfrak{Ab}$, являющейся полной подкатегорией категории групп $\mathfrak{G}$, копроизведением семейства абелевых групп является их дискретное прямое произведение.

В частично упорядоченном классе $\mathfrak{A}$, рассматриваемом как категория (см. п. 1.1, пример 7)), для семейства объектов $a_i \in \mathfrak{A}$, $i \in I$, копроизведением является объединение $\bigvee_{i \in I} a_i$ (если оно существует) элементов a_i, $i \in I$, в частично упорядоченном классе $\mathfrak{A}$. Таким образом, качум $\mathfrak{A}$ является категорией с [конечными] копроизведениями тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ — полная [обычная] полурешетка относительно объединений.

Если $\mathfrak{K}$ — категория с нулевыми морфизмами, то для всякого определенного в категории $\mathfrak{K}$ копроизведения $\coprod_{i \in I} A_i(\tau_i)$ наряду с коконусом вложений $(\tau_i)_{i \in I}$ существует конус *проекций* $\left(\delta_i\colon \coprod_{j \in I} A_j \to A_i;\ i \in I\right)$, удовлетворяющих условиям $\tau_i\delta_i = 1_{A_i}$ и $\tau_i\delta_j = 0$ при $i \neq j$. Копроизведение $\coprod_{i \in I} A_i(\tau_i)$, для которого существуют проекции δ_i, $i \in I$, часто записывается в виде $\coprod_{i \in I} A_i(\tau_i;\ \delta_i)$. Если в категории $\mathfrak{K}$ с нулевыми морфизмами определены копроизведение $\coprod_{i \in I} A_i(\tau_i;\ \delta_i)$ и произведение $\prod_{i \in I} A_i(\pi_i;\ \sigma_i)$ одного и того же семейства объектов A_i, $i \in I$, то определен морфизм $\gamma = \bigotimes_{i \in I} \delta_i = \underset{i \in I}{(*)}\, \sigma_i\colon \coprod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} A_i$, называемый *каноническим морфизмом копроизведения в произведение.*

В категории $(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$ с разложением и с [конечными] копроизведениями в частично упорядоченном классе $\mathrm{Sub}_p(A)$ допустимых подобъектов любого объекта $A \in \mathfrak{K}$ для любого [конечного] множества допустимых подобъектов $(\mu_i]$, $i \in I$, существует объединение, определяемое по формуле $\bigcup_{i \in I} (\mu_i] = \left(\mathrm{im}\left(\underset{i \in I}{(*)}\, \mu_i\right)\right]$.

1.8. Системы образующих и инъективные объекты. Множество $\mathcal{S} = \{Q_i\}_{i \in I}$ объектов категории $\mathfrak{K}$ называется *множеством образующих* категории $\mathfrak{K}$, если для любой пары различных параллельных морфизмов α, β: $A \to B$ существует такой морфизм γ: $Q_i \to A$ с началом $Q_i \in \mathcal{S}$, что $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$. В случае когда множество образующих $\mathcal{S}$ категории $\mathfrak{K}$ состоит из одного объекта $\mathcal{S} = \{Q\}$, объект Q называется *образующим объектом* категории $\mathfrak{K}$. Если $\mathcal{S} = \{Q_i\}_{i \in I}$ — множество образующих категории $\mathfrak{K}$ и в категории $\mathfrak{K}$ существует копроизведение $\coprod_{i \in I} Q_i$, то $\coprod_{i \in I} Q_i$ — образующий объект категории $\mathfrak{K}$. Если в категории $\mathfrak{K}$ для любого множества экземпляров объекта Q существует копроизведение $\coprod_{i\in I} Q_i$, $Q_i = Q$, $i \in I$, то Q — образующий объект тогда и только тогда, когда для любого объекта A, являющегося началом по крайней мере двух различных параллельных морфизмов, существует эпиморфизм $\varepsilon\colon \coprod_{i\in I} Q_i \to A$ для некоторого зависящего от A копроизведения $\coprod_{i\in I} Q_i$, $Q_i = Q$, $i \in I$. Более точно, эпиморфизмом должен быть морфизм

$$(*)\qquad \underset{\alpha\in H(Q,\,A)}{\alpha}\colon \coprod_{\alpha\in H(Q,\,A)} Q_\alpha \to A,\ Q_\alpha = Q.$$

В категории множеств SET [топологических пространств $\mathfrak{T}$] образующим объектом является любое непустое множество [непустое дискретное пространство]. В любом многообразии Alg универсальных алгебр образующим объектом является каждая свободная в этом многообразии алгебра. В качестве примера категории, не обладающей множеством образующих, рассмотрим категорию $\mathfrak{K}$, являющуюся подкатегорией категории множеств SET, объектами которой служат все множества, $H_{\mathfrak{K}}(M, M)$ — множество всех отображений множества M в себя и $H_{\mathfrak{K}}(M, N) = \varnothing$, если $M \neq N$.

Двойственно множеству образующих и образующему объекту определяются *множество кообразующих* и *кообразующий объект* категории $\mathfrak{K}$. Для множества кообразующих и кообразующего объекта категории $\mathfrak{K}$ справедливы двойственные утверждения.

В категории множеств SET кообразующим объектом является любое множество, содержащее по крайней мере два элемента.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс морфизмов категории $\mathfrak{K}$. Объект $I \in \mathfrak{K}$ называется *$\mathfrak{M}$-инъективным* или *инъективным относительно* $\mathfrak{M}$, если для любого морфизма $\gamma\colon A \to B$ из $\mathfrak{M}$ и любого морфизма $\varphi\colon A \to I$ существует такой морфизм $\varphi'\colon B \to I$, что $\varphi = \gamma\varphi'$, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & B \arrow[dl, dashed, "\varphi'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

морфизмом φ' дополняется до коммутативного треугольника. Произведение $I = \prod_{j\in J} I_j$ $\mathfrak{M}$-инъективных объектов I_j, $j \in J$, является $\mathfrak{M}$-инъективным объектом всякий раз, когда это произведение в категории $\mathfrak{K}$ существует. Если $(U, \lambda]$ — ретракт $\mathfrak{M}$-инъективного объекта A, то U является $\mathfrak{M}$-инъективным объектом. Объект, инъективный относительно всех мономорфизмов, называется просто *инъективным*. Таким образом, объект $Q \in \mathfrak{K}$ инъективен тогда и только тогда, когда для любой диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & B \arrow[dl, dashed, "\varphi'"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

в которой σ — мономорфизм, в категории $\mathfrak{K}$ существует морфизм $\varphi'\colon B \to Q$, дополняющий эту диаграмму до коммутативного треугольника. Поскольку объект, изоморфный инъективному объекту, является инъективным объектом, подобъект $(U, \mu]$ некоторого объекта $A \in \mathfrak{K}$, в котором U — инъективный объект, корректно называть *инъективным подобъектом* объекта A. Всякий инъективный подобъект объекта A является ретрактом объекта A.

В категории множеств SET каждое непустое множество является инъективным объектом. В категории абелевых групп $\mathfrak{Ab}$ инъективным объектом является любая делимая абелева группа. В любой категории $\mathfrak{K}$ с нулевым объектом 0 объект 0 инъективен. В категории групп $\mathfrak{G}$ единичная группа $\{e\}$, являющаяся нулевым объектом категории $\mathfrak{G}$, является единственным инъективным объектом категории $\mathfrak{G}$.

Говорят, что категория $\mathfrak{K}$ *инъективно богата* или что в ней *достаточно инъективных объектов*, если для любого объекта $A \in \mathfrak{K}$ существует мономорфизм $\lambda\colon A \to Q$ в некоторый инъективный объект Q.

Категория множеств SET и категория абелевых групп $\mathfrak{Ab}$ инъективно богаты. Категория групп $\mathfrak{G}$ является примером не инъективно богатой категории.

Мономорфизм $\lambda\colon U \to A$ категории $\mathfrak{K}$ называется *существенным*, если из того, что $\lambda\gamma$ — мономорфизм, следует, что γ — мономорфизм. Если $\lambda\colon U \to A$ — существенный мономорфизм, то объект A называется *существенным расширением объекта* U.

В категории множеств SET мономорфизм $f\colon M \to N$ существен тогда и только тогда, когда f — биективное отображение, т. е. изоморфизм. К категории групп $\mathfrak{G}$ группа G с единицей e является существенным расширением своей подгруппы H, если из того, что $H \cap N = \{e\}$ для некоторой нормальной подгруппы N группы G, следует $N = \{e\}$.

Если для объекта A категории $\mathfrak{K}$ существует существенный мономорфизм λ: $A \to Q$ в инъективный объект Q, то объект Q называется *инъективной оболочкой* объекта A. Инъективная оболочка объекта A, если она существует, определяется однозначно с точностью до изоморфизмов.

Категория множеств SET и категория абелевых групп $\mathfrak{Ab}$ являются примерами категорий, в которых каждый объект обладает инъективной оболочкой.

Двойственным к понятию инъективного объекта является понятие проективного объекта. Для класса $\mathfrak{E}$ морфизмов категории $\mathfrak{K}$ объект $P \in \mathfrak{K}$ называется *$\mathfrak{E}$-проективным* или *проективным относительно класса* $\mathfrak{E}$, если для любого морфизма γ: $A \to B$ из $\mathfrak{E}$ и любого морфизма φ: $P \to B$ в категории $\mathfrak{K}$ существует такой морфизм φ': $P \to A$, что $\varphi = \varphi'\gamma$, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\varphi'"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ A \arrow[rr, "\gamma"'] & & B \end{tikzcd}$$

морфизмом φ' дополняется до коммутативного треугольника. Копроизведение $\coprod_{i \in I} P_i$ $\mathfrak{E}$-проективных объектов P_i, $i \in I$, является $\mathfrak{E}$-проективным объектом всякий раз, когда оно в категории $\mathfrak{K}$ существует. Если $(U, \sigma]$ — ретракт $\mathfrak{E}$-проективного объекта P, то объект U является $\mathfrak{E}$-проективным. Объект, проективный относительно всех эпиморфизмов, называется просто *проективным*. Таким образом, объект $P \in \mathfrak{K}$ проективен тогда и только тогда, когда всякая диаграмма вида

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\varphi'"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ A \arrow[rr, "\theta"'] & & B \end{tikzcd}$$

в которой θ — эпиморфизм, некоторым морфизмом φ' дополняется до коммутативного треугольника.

В категории множеств SET любое множество является проективным объектом. В любом многообразии универсальных алгебр Alg проективным объектом оказывается каждая свободная алгебра.

§ 2. Функторы, категории диаграмм и монады

2.1. Функторы и их естественные преобразования. Пусть $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{K}$ — две категории. Пара отображений F: $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и F: $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ образует *функтор*, точнее *ковариантный функтор*, F: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ из категории $\mathfrak{C}$ в категорию $\mathfrak{K}$, если выполняются следующие *условия функториальности*: $F(1_A) = 1_{F(A)}$ для любого объекта $A \in \mathfrak{C}$ и $F(\alpha\beta) = F(\alpha)F(\beta)$ для любых морфизмов α, $\beta \in \mathfrak{C}$, для которых произведение $\alpha\beta$ определено. Отображения F: $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и F: $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{C} \to \to \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ образуют *контравариантный функтор* F: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ из категории $\mathfrak{C}$ в категорию $\mathfrak{K}$, если выполняются следующие условия: $F(1_A) = 1_{F(A)}$ для любого объекта $A \in \mathfrak{C}$ и $F(\alpha\beta) = F(\beta)F(\alpha)$ для любых морфизмов α, $\beta \in \mathfrak{C}$, для которых произведение $\alpha\beta$ определено.

Из определения следует, что любой морфизм α: $A \to B$ категории $\mathfrak{C}$ переводится ковариантным функтором F: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ в морфизм $F(\alpha)$: $F(A) \to F(B)$, а контравариантным функтором F: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ — в морфизм $F(\alpha)$: $F(B) \to F(A)$ категории $\mathfrak{K}$.

Контравариантный функтор F: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ из категории $\mathfrak{C}$ в категорию $\mathfrak{K}$ можно рассматривать как функтор F: $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{K}$ из категории $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}$, двойственной категории $\mathfrak{C}$, в категорию $\mathfrak{K}$, так что изучение контравариантного функтора сводится к изучению функтора. Наряду с ковариантными или контравариантными функторами от одного аргумента часто приходится рассматривать функторы от нескольких аргументов, т. е. заданные на некоторой упорядоченной конечной системе категорий $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$ и принимающие значения в некоторой категории $\mathfrak{K}$, при этом такой функтор по одним аргументам может быть ковариантным, а по остальным — контравариантным. Воспользовавшись понятием произведения категорий, можно функтор от нескольких аргументов представить как функтор от одного аргумента, заменяя систему категорий $\mathfrak{C}_1, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{C}_n$ их произведением $\mathfrak{C}_1 \times \ldots \times \mathfrak{C}_n$, подставляя в это произведение вместо категории $\mathfrak{C}_i$ двойственную категорию $\mathfrak{C}_i^{\mathrm{op}}$ в тех случаях, когда по аргументу $1 \leqslant i \leqslant n$ функтор контравариантен. Таким образом, все возможные случаи сводятся к случаю функтора от одного аргумента.

Для любой категории $\mathfrak{C}$ определен *тождественный функтор* $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}\colon \mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$, для которого $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}(A)=A$ для любого объекта $A\in\mathfrak{C}$ и $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}(\alpha)=\alpha$ для любого морфизма $\alpha\in\mathfrak{C}$.

Пусть $\mathfrak{C}$ — любая категория, A — любой объект категории $\mathfrak{C}$ и SET — категория множеств. Построим *основной ковариантный функтор* $H^A\colon \mathfrak{C}\to \mathrm{SET}$, *определяемый объектом* A, положив $H^A(B)=H_{\mathfrak{C}}(A, B)$ для любого объекта $B\in\mathfrak{C}$. Каждый морфизм $\varphi\colon B\to C$ категории $\mathfrak{C}$ определяет отображение множеств $H^A(\varphi)=H(A, \varphi)\colon\ H_{\mathfrak{C}}(A, B)\to H_{\mathfrak{C}}(A, C)$, при котором любому морфизму $\alpha\in H_{\mathfrak{C}}(A, B)$ сопоставляется морфизм $H^A(\varphi)(\alpha)=\alpha\varphi\in H_{\mathfrak{C}}(A, C)$. Очевидно, что при этом $H^A(1_B)$ — тождественное отображение множества $H_{\mathfrak{C}}(A, B)$ на себя и что $H^A(\varphi\psi)=H^A(\varphi)H^A(\psi)$ для любых двух морфизмов $\varphi\colon\ B\to C$ и $\psi\colon\ C\to D$.

При тех же предположениях, что и выше, построим *основной контравариантный функтор* $H_A\colon\ \mathfrak{C}\to\mathrm{SET}$, *определяемый объектом* $A\in\mathfrak{C}$, сопоставляя каждому объекту $B\in\mathfrak{C}$ множество $H_A(B)=H_{\mathfrak{C}}(B, A)$ и каждому морфизму $\varphi\colon\ B\to C$ — отображение $H_A(\varphi)=H(\varphi, A)\colon\ H_{\mathfrak{C}}(C, A)\to H_{\mathfrak{C}}(B, A)$, при котором $H_A(\varphi)(\alpha)=\varphi\alpha\in H_{\mathfrak{C}}(B, A)$ для любого $\alpha\in H_{\mathfrak{C}}(C, A)$. Очевидно, что $H_A(1_B)$ — тождественное отображение и что $H_A(\varphi\psi)=H_A(\psi)H_A(\varphi)$ для любых последовательных морфизмов $\varphi\colon\ B\to C$ и $\psi\colon\ C\to D$. Ясно, что H_A можно рассматривать как ковариантный функтор $H_A\colon\ \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\to\mathrm{SET}$.

Основной функтор $H_{\mathfrak{C}}(-, -)\colon\ \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\times\mathfrak{C}\to\mathrm{SET}$ сопоставляет каждой паре объектов $A, B\in\mathfrak{C}$ множество $H_{\mathfrak{C}}(A, B)$ и каждой паре морфизмов $\alpha\colon\ A'\to A$ и $\beta\colon\ B\to B'$ — отображение $H_{\mathfrak{C}}(\alpha, \beta)\colon\ H_{\mathfrak{C}}(A, B)\to H_{\mathfrak{C}}(A', B')$, при котором $H_{\mathfrak{C}}(\alpha, \beta)(\gamma)=\alpha\gamma\beta$ для любого $\gamma\in H_{\mathfrak{C}}(A, B)$. Свойства функториальности проверяются непосредственно. Очевидно, $H_{\mathfrak{C}}(-, -)$ можно рассматривать как функтор от двух аргументов, контравариантный по первому и ковариантный по второму.

Для любого объекта A категории $\mathfrak{C}$ с конечными произведениями построим функтор $A\times -\colon\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{C}$ в себя, полагая $(A\times -)(B)=A\times B$ для каждого объекта $B\in\mathfrak{C}$ и $(A\times -)(\alpha)=A\times\alpha=1_A\times\alpha\colon\ A\times B\to A\times C$ для любого морфизма α:

$B \to C$. Свойства функториальности легко следуют из соотношений $1_A \times 1_B = 1_{A \times B}$ и $(1_A \times \alpha)(1_A \times \beta) = 1_A \times \times \alpha\beta$ для любых морфизмов α: $B \to C$ и β: $C \to D$. Аналогично строится функтор $-\times A$: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$. Функтор из категории $\mathfrak{C}$ в себя часто называют *эндофунктором* категории $\mathfrak{C}$.

При тех же предположениях, что и в предыдущем абзаце, можно построить функтор $-\times-$: $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, сопоставляя каждой паре объектов A, $B \in \mathfrak{C}$ объект $A \times B$ и каждой паре морфизмов α: $A \to A'$, β: $B \to \to B'$ морфизм $\alpha \times \beta$: $A \times B \to A' \times B'$. Свойства функториальности проверяются непосредственно. Аналогично двухместному функтору $-\times-$ строится n-местный функтор $-\times- \ldots -\times-$: $\mathfrak{C} \times \ldots \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ для любого натурального числа n.

Примеры. 1) Функтор F: SET $\to \mathfrak{G}$ из категории множеств SET в категорию групп $\mathfrak{G}$, сопоставляющий множеству M свободную группу $F(M)$ с множеством M свободных образующих (пустому множеству $\varnothing$ сопоставляется единичная группа $\{e\}$). Из свойств свободных групп следует, что каждое отображение множеств f: $M \to N$ однозначно продолжается до гомоморфизма групп $F(f)$: $F(M) \to F(N)$ и при этом выполняются свойства функториальности.

2) Определим функтор T: $\mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Ab}$ категории абелевых групп $\mathfrak{Ab}$ в себя, сопоставляя каждой абелевой группе A ее периодическую часть $T(A)$. Так как при любом гомоморфизме f: $A \to B$ абелевых групп элементы конечного порядка группы A переходят в элементы конечного порядка группы B, то ограничение гомоморфизма f на подгруппе $T(A)$ определяет гомоморфизм $T(f)$: $T(A) \to T(B)$ и при этом выполняются свойства функториальности.

3) Определим еще один функтор Q: $\mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Ab}$ категории абелевых групп $\mathfrak{Ab}$ в себя, сопоставляя каждой абелевой группе A ее факторгруппу $Q(A) = A/T(A)$ по периодической части $T(A)$. Так как, как показано в примере 2), сопоставление абелевой группе A ее периодической части $T(A)$ является функтором, то каждый гомоморфизм f: $A \to B$ абелевых групп индуцирует гомоморфизм $Q(f)$: $Q(A) \to Q(B)$ и при этом выполняются свойства функториальности.

4) Любой гомоморфизм [антигомоморфизм] моноидов g: $M_1 \to M_2$ является ковариантным [контравариантным] функтором между однообъектными категориями.

Функтор F: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ называется *унивалентным*, если для любой пары объектов $A, B \in \mathfrak{C}$ отображение $F_{A,B}$: $H_{\mathfrak{C}}(A, B) \to H_{\mathfrak{K}}(F(A), F(B))$, при котором $\alpha \mapsto F(\alpha)$ для любого $\alpha \in H_{\mathfrak{C}}(A, B)$, является вложением. Функтор F: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ называется *полным*, если для любой пары объектов A, $B \in \mathfrak{C}$ отображение $F_{A,B}$:

$H_{\mathfrak{C}}(A, B) \to H_{\mathfrak{K}}(F(A), F(B))$ является наложением. Унивалентный функтор $F: \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$, удовлетворяющий условию $F(A) \neq F(B)$ для любых двух различных объектов A, $B \in \mathfrak{C}$, называется *функтором вложения.* Полный функтор вложения называется *функтором полного вложения.*

Унивалентным функтором является рассмотренный выше функтор $A \times —: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$. Этот функтор в общем случае не является полным. Если, например, в категории $\mathfrak{C}$ существует морфизм $\varphi: A \to A$, отличный от 1_A, то для любого морфизма $\alpha: B \to C$ морфизм $\varphi \times \alpha: A \times B \to A \times C$ не представим в виде $1_A \times \psi$. Функтор F: SET $\to \mathfrak{G}$ (см. пример 1)) является полным и унивалентным. Пусть $\mathfrak{L}$ — [полная] подкатегория категории $\mathfrak{K}$. Естественное вложение $\mathrm{Id}_{\mathfrak{L}, \mathfrak{K}}: \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ подкатегории $\mathfrak{L}$ в категорию $\mathfrak{K}$ является функтором, и этот функтор является функтором [полного] вложения.

Произведением двух последовательных функторов $F: \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ и $G: \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ является функтор $FG: \mathfrak{C} \to \mathfrak{L}$, представляющий собой суперпозицию функторов F и G, т. е. $FG = G \circ F$ (см. I. 1.3), и, значит, $(FG)(A) = (G \circ F)(A) = G(F(A))$ для каждого объекта $A \in \mathfrak{C}$ и $(FG)(\alpha) = (G \circ F)(\alpha) = G(F(\alpha))$ для каждого морфизма $\alpha \in \mathfrak{C}$. Произведение функторов ассоциативно, а $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}} F = F$ и $F \,\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} = F$, где $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ — тождественный функтор категории $\mathfrak{C}$.

Пусть F, $G: \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ — два функтора из категории $\mathfrak{C}$ в категорию $\mathfrak{K}$; такие функторы будем называть *параллельными. Естественным преобразованием* $\alpha: F \to G$ функтора F в функтор G называется такая функция α: $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ (значение функции α на объекте $A \in \mathfrak{C}$ обозначается α_A), что $\alpha_A: F(A) \to G(A)$, и при этом для любого морфизма $\varphi: A \to B \in \mathfrak{C}$ в категории $\mathfrak{K}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & G(A) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Морфизмы α_A, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$, называются *компонентами* естественного преобразования α.

Пусть H^A, H^B: $\mathfrak{C} \to$ SET — два основных ковариантных функтора, определяемых соответственно объектами A и B. Любой морфизм $\varphi: A \to B$ категории $\mathfrak{C}$ определяет естественное преобразование $\bar{\varphi}$: $H^B \to H^A$ функтора H^B в функтор H^A, компонента которого $\bar{\varphi}_C = H(\varphi, C)$: $H^B(C) \to H^A(C)$ для каждого объекта $C \in \mathfrak{C}$. Это следует из того, что для любого морфизма α: $C \to D$ категории $\mathfrak{C}$ имеет место равенство $H(\varphi, C)H(A, \alpha) = H(B, \alpha)H(\varphi, D) = H(\varphi, \alpha)$.

Пусть T, Q: $\mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Ab}$ — функторы категории абелевых групп $\mathfrak{Ab}$ в себя (см. примеры 2) и 3)) и $\mathrm{Id}_{\mathfrak{Ab}}$: $\mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Ab}$ — тождественный функтор категории $\mathfrak{Ab}$. Сопоставление каждой абелевой группе A естественного гомоморфного вложения σ_A: $T(A) \to A$ подгруппы периодических элементов $T(A)$ в группу A и естественного гомоморфного наложения θ_A: $A \to A/T(A) = Q(A)$ группы A на факторгруппу $A/T(A)$ определяет естественное преобразование σ: $T \to \mathrm{Id}_{\mathfrak{Ab}}$ функтора T в функтор $\mathrm{Id}_{\mathfrak{Ab}}$ и естественное преобразование θ: $\mathrm{Id}_{\mathfrak{Ab}} \to Q$ функтора $\mathrm{Id}_{\mathfrak{Ab}}$ в функтор Q.

Пусть F, G: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ — два функтора из категории $\mathfrak{C}$ в категорию $\mathfrak{K}$, и пусть φ: $F \to G$ — естественное преобразование функторов. Если каждая компонента φ_A, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$, естественного преобразования φ является мономорфизмом категории $\mathfrak{K}$, то пара (F, φ) называется *подфунктором* функтора G. Двойственно, если каждая компонента φ_A, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$, естественного преобразования φ является эпиморфизмом категории $\mathfrak{K}$, то пара (φ, G) называется *факторфунктором* функтора F. В приведенных примерах (T, σ) — подфунктор, а (θ, Q) — факторфунктор функтора $\mathrm{Id}_{\mathfrak{Ab}}$.

Для двух естественных преобразований α: $F \to G$ и β: $G \to H$ по формуле $(\alpha\beta)_A = \alpha_A\beta_A$ для каждого объекта $A \in \mathfrak{C}$ определено естественное преобразование $\alpha\beta$: $F \to H$, называемое *произведением естественных преобразований* α и β. Произведение естественных преобразований ассоциативно и $\mathrm{id}_F\alpha = \alpha = \alpha\,\mathrm{id}_G$ для любого естественного преобразования α: $F \to G$, где id_F: $F \to F$ — *тождественное естественное преобразование* функтора F, определяемое формулой $(\mathrm{id}_F)_A = 1_{F(A)}$ для каждого объекта $A \in \mathfrak{C}$.

Если α: $F \to G$ — естественное преобразование функторов F, G: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$, то для любого функтора T: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ по формуле $(\alpha_T)_A = \alpha_{T(A)}$: $F(T(A)) \to G(T(A))$ для любого объекта $A \in \mathfrak{A}$ определяется естественное преобразование α_T: $TF \to TG$, и для любого функтора U: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ по формуле $U(\alpha)_C = U(\alpha_C)$: $U(F(C)) \to U(G(C))$ для любого объекта $C \in \mathfrak{C}$ определяется естественное преобразование $U(\alpha)$: $FU \to GU$.

Естественное преобразование ε: $F \to G$ функторов F, G: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ называется *естественным изоморфизмом*, если ε_A — изоморфизм категории $\mathfrak{K}$ для любого объекта $A \in \mathfrak{C}$. В этом случае по формуле $(\varepsilon^{-1})_A = \varepsilon_A^{-1}$ для любого объекта $A \in \mathfrak{C}$ определяется естественный изоморфизм ε^{-1}: $G \to F$, *обратный* естественному изоморфизму ε. Функторы F, G: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$, для которых существует по крайней мере один естественный изоморфизм ε: $F \to G$, называются *естественно изоморфными*. Категории $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{K}$ называются *изоморфными*, если существуют такие функторы F: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ и G: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$, что $FG = \mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}$ и $GF = \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}$. Категории $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{K}$ называются *эквивалентными*, если существуют такие функторы F: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ и G: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$, что функторы FG и GF естественно изоморфны тождественным функторам $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}$ и $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}$ соответственно. Для того чтобы категории $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{K}$ были эквивалентны, необходимо и достаточно существование такого полного унивалентного функтора F: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$, что в категории $\mathfrak{K}$ любой объект B изоморфен некоторому объекту вида $F(A)$, где $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$. Таким образом, любая категория $\mathfrak{C}$ эквивалентна своему скелету.

Пусть M_1 и M_2 — изоморфные моноиды. Тогда, во-первых, M_1 и M_2 изоморфны как однообъектные категории (см. п. 1.1, пример 6)) и, во-вторых, изоморфны категории M_1-SET и M_2-SET всех левых полигонов над моноидами M_1 и M_2 соответственно.

Сопоставим каждому кардинальному числу $\mathfrak{m}$ множество $A_{\mathfrak{m}}$ мощности $\mathfrak{m}$ (0 сопоставим пустое множество $\varnothing$). Пусть $\overline{\mathrm{SET}}$ — полная подкатегория категории множеств SET, порожденная всеми множествами вида $A_{\mathfrak{m}}$. Категория SET эквивалентна, но не изоморфна категории $\overline{\mathrm{SET}}$, являющейся скелетом категории SET.

Пусть $\mathfrak{C}$ — произвольная категория, A — объект категории $\mathfrak{C}$, H^A: $\mathfrak{C} \to \mathrm{SET}$ — основной ковариантный функтор и F: $\mathfrak{C} \to \mathrm{SET}$ — любой функтор в категорию множеств SET. Класс всех естественных преобразований функтора H^A в функтор F обозначим $\mathrm{Nat}(H^A, F)$. Для любого естественного преобразования $\alpha \in \mathrm{Nat}(H^A, F)$ определим $\alpha_A(1_A)$.

Лемма Ионеды: отображение $\alpha \mapsto \alpha_A(1_A)$ определяет биективное соответствие $\mathrm{Nat}(H^A, F) \approx F(A)$, так что, в частности, $\mathrm{Nat}(H^A, F)$ — множество для любого основного ковариантного функтора H^A и любого функтора F: $\mathfrak{C} \to \mathrm{SET}$.

Отсюда вытекает, что $\mathrm{Nat}(H^A, H^B) \approx H_{\mathfrak{C}}(B, A)$ для любой пары объектов A, B категории $\mathfrak{C}$.

Функтор F: $\mathfrak{C} \to \mathrm{SET}$ из категории $\mathfrak{C}$ в категорию множеств SET называется *представимым*, если он естественно изоморфен некоторому основному ковариантному функтору H^A. Функтор F: $\mathfrak{C} \to \mathrm{SET}$ является представимым тогда и только тогда, когда в категории $\mathfrak{C}$ существует такой объект A, а в множестве $F(A)$ найдется такая точка a, что для любого объекта $B \in \mathfrak{C}$ и для любой точки $b \in F(B)$ в категории $\mathfrak{C}$ существует единственный морфизм φ: $A \to B$, при котором $F(\varphi)(a) = b$.

Пусть $\mathfrak{K}$ — категория, и пусть для каждой упорядоченной пары объектов A, $B \in \mathfrak{K}$ на множестве $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ задана эквивалентность $\rho_{A,B}$. Система эквивалентностей $\rho = \{\rho_{A,B}\}_{A,\,B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}}$ называется *конгруэнцией* категории $\mathfrak{K}$, если выполняется следующее условие: из соотношения $\alpha\rho_{A,B}\beta$ для пары морфизмов α, β: $A \to B$ следует $\gamma\alpha\rho_{C,B}\gamma\beta$ и $\alpha\delta\rho_{A,D}\beta\delta$ для любых морфизмов γ: $C \to A$ и δ: $B \to D$. По конгруэнции $\rho = \{\rho_{A,B}\}_{A,\,B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}}$ можно построить *факторкатегорию* $\mathfrak{K}/\rho$ категории $\mathfrak{K}$, полагая $\mathrm{Ob}(\mathfrak{K}/\rho) = \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и для каждой пары объектов A, $B \in \mathfrak{K}/\rho$ взяв в качестве $H_{\mathfrak{K}/\rho}(A, B)$ множество эквивалентных классов множества $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ по эквивалентности $\rho_{A,B}$. Естественно определяются произведение морфизмов и единичные морфизмы категории $\mathfrak{K}/\rho$. Сопоставляя произвольному морфизму α: $A \to B$ категории $\mathfrak{K}$ содержащий его класс эквивалентности по $\rho_{A,B}$, получим функтор P_ρ: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}/\rho$, тождественный на объектах. Для любого функтора T: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$, обладающего тем свойством, что $T(\alpha) = T(\beta)$ для всякой пары морфизмов α, β: $A \to B$, для которых выполняется соотношение $\alpha\rho_{A,B}\beta$, существует такой единственный функтор T': $\mathfrak{K}/\rho \to \mathfrak{L}$, что $T = P_\rho T'$.

Система конгруэнций категории $\mathfrak{K}$ образует полную решетку (быть может, с классом в качестве носителя) с наибольшим и наименьшим элементами относительно естественно определяемого отношения частичного порядка между конгруэнциями.

Пусть $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{K}$ — две категории и U — объект категории $\mathfrak{K}$. Тогда определен функтор $\Delta(U)$: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$, при котором $\Delta(U)(A) = U$ для каждого объекта $A \in \mathfrak{C}$

и $\Delta(U)(\varphi) = 1_U$ для каждого морфизма $\varphi \in \mathfrak{C}$. Функтор $\Delta(U)$ называется *постоянным функтором, определяемым объектом* U. Для двух постоянных функторов $\Delta(U)$, $\Delta(V)$: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ каждое естественное преобразование α: $\Delta(U) \to \Delta(V)$ взаимно однозначно определяется некоторым морфизмом α: $U \to V$ категории $\mathfrak{K}$, так что класс $\mathrm{Nat}(\Delta(U), \Delta(V))$ всех естественных преобразований функтора $\Delta(U)$ в функтор $\Delta(V)$ является множеством, равномощным множеству $H_{\mathfrak{K}}(U, V)$.

2.2. Категории функторов, пределы и копределы функторов. По малой категории $\mathfrak{D}$ и любой категории $\mathfrak{K}$ построим *категорию функторов*, или *категорию диаграмм*, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ из категории $\mathfrak{D}$ в категорию $\mathfrak{K}$ (категория диаграмм обозначается также $[\mathfrak{D}, \mathfrak{K}]$ или $\mathfrak{K}^{\mathfrak{D}}$). Объектами категории $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ являются всевозможные функторы F: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{K}$; для любых двух функторов F, G: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{K}$ $H_{\mathfrak{F}}(F, G) = \mathrm{Nat}(F, G)$ — совокупность всех естественных преобразований функтора F в функтор G. Так как $\mathfrak{D}$ — малая категория, то $H_{\mathfrak{F}}(F, G)$ — множество. Произведение морфизмов и тождественные морфизмы в категории $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ определены в п. 2.1.

Сопоставлением каждому объекту $A \in \mathfrak{K}$ постоянного функтора $\Delta(A)$: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{K}$ определяется функтор полного вложения Δ: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ категории $\mathfrak{K}$ в категорию функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$. Из следствия леммы Ионеды (п. 2.1) вытекает, что в случае, когда $\mathfrak{K} = \mathrm{SET}$ — категория множеств, сопоставление объекту $D \in \mathfrak{D}$ основного функтора H^D: $\mathfrak{D} \to \mathrm{SET}$ определяет полное вложение Y: $\mathfrak{D}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathrm{SET})$ категории $\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}$, двойственной категории $\mathfrak{D}$, в категорию функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathrm{SET})$.

Категория $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ наследует многие свойства категории $\mathfrak{K}$. В частности, если категория $\mathfrak{K}$ обладает по крайней мере одним из следующих свойств: $\mathfrak{K}$ — категория с разложением, $\mathfrak{K}$ — категория с произведениями [копроизведениями], $\mathfrak{K}$ — категория с нулевыми морфизмами [с нулевым объектом], $\mathfrak{K}$ — категория с ядрами [коядрами] морфизмов [пар морфизмов], то тем же свойством обладает и категория $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$. Происходит это потому, что эти операции в категории $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ определяются «покомпонентно».

Например, произведение $\prod_{i\in I} F_i$ функторов $F_i \in \mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ определяется формулой $\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(D) = \prod_{i\in I} F_i(D)$ для любого объекта $D \in \mathfrak{D}$.

Малые категории $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$, для которых категории функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}_1, \mathrm{SET})$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}_2, \mathrm{SET})$ эквивалентны, называются *эквивалентными в смысле Мориты* или *морита-эквивалентными*. Справедливы следующие утверждения. Для двух малых категорий $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ категории функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{K})$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}_2, \mathfrak{K})$ в произвольную категорию $\mathfrak{K}$ с разложением эквивалентны тогда и только тогда, когда категории $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ морита-эквивалентны. Любая малая категория $\mathfrak{D}$ морита-эквивалентна такой своей полной подкатегории $\mathfrak{D}_0$, что каждый объект категории $\mathfrak{D}$ является ретрактом некоторого объекта из $\mathfrak{D}_0$ (см. Полин С. В.//Вестник МГУ: Математика, механика. — 1974. — № 2. — С. 41—45).

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две малые категории. Тогда для любой категории $\mathfrak{K}$ можно образовать две категории функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}, \mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{K}))$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \mathfrak{K})$. Сопоставляя любому функтору $F\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{K})$ функтор $\hat{F}\colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$, при котором $\hat{F}(A, B) = F(A)(B)$ для любых объектов $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$, получим, что категории $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}, \mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{K}))$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \mathfrak{K})$ изоморфны.

Частным случаем категории функторов является *категория морфизмов* $\mathfrak{K}^{\to}$ над данной категорией $\mathfrak{K}$, представляющая собой категорию функторов $\mathfrak{F}(\text{качум } \mathbf{2}, \mathfrak{K})$ (напомним, что $\mathbf{2}$ — двухэлементная цепь). Объектами категории $\mathfrak{K}^{\to}$ служат морфизмы категории $\mathfrak{K}$. Морфизмами объекта $\alpha\colon A \to B$ в объект $\beta\colon C \to D$ категории $\mathfrak{K}^{\to}$ является любая пара морфизмов (φ, ψ) категории $\mathfrak{K}$, где $\varphi\colon A \to C$, $\psi\colon B \to D$, при которой диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] & D \end{tikzcd}$$

коммутативна.

По двум функторам $P\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{K}$ и $Q\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$ с общим концом $\mathfrak{K}$ строится категория $(P \downarrow Q)$, называемая *коммакатегорией относительно функторов* P и Q. Объектами категории $(P \downarrow Q)$ служат тройки (A, φ, B), состоящие из объектов $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, и морфизма $\varphi\colon P(A) \to Q(B)$ категории $\mathfrak{K}$. Морфизмами тройки (A, φ, B) в тройку (A', φ', B') служат такие пары (α, β), что $\alpha\colon A \to A' \in \mathfrak{A}$, $\beta\colon B \to B' \in \mathfrak{B}$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd}
P(A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "P(\alpha)"'] & Q(B) \arrow[d, "Q(\beta)"] \\
P(A') \arrow[r, "\varphi'"'] & Q(B')
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Коммакатегория $(\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \downarrow \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}})$ совпадает с категорией морфизмов $\mathfrak{K}^{\to}$. Наиболее часто используются коммакатегории вида $(\Delta(A) \downarrow F)$ или $(F \downarrow \Delta(A))$, где $\Delta(A)\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{K}$ — постоянный функтор, а функтор $F\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$ — любой. Коммакатегория $(\Delta(A) \downarrow \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}})$ обозначается $A/\mathfrak{K}$ и называется *категорией морфизмов категории* $\mathfrak{K}$ *с общим началом* A. Двойственно, коммакатегория $(\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \downarrow \Delta(A))$ обозначается $\mathfrak{K}/A$ и называется *категорией морфизмов категории* $\mathfrak{K}$ *с общим концом* A.

Более подробно с коммакатегориями можно познакомиться по монографии [23].

Пусть $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{K}$ — две категории, $\Delta(A)\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ — постоянный функтор, определяемый объектом $A \in \mathfrak{K}$, и $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ — любой функтор. Любое естественное преобразование $\alpha\colon \Delta(A) \to F$ представляет собой не что иное, как конус $(\alpha_C\colon A \to F(C);\ C \in \mathfrak{C})$ морфизмов категории $\mathfrak{K}$ (состоящий, быть может, из класса морфизмов) с вершиной A, обладающий тем свойством, что $\alpha_D = \alpha_C F(\varphi)$ для любого морфизма $\varphi\colon C \to D$ категории $\mathfrak{C}$. Такой конус называется *допустимым относительно функтора* F. Таким образом, каждое естественное преобразование вида $\alpha\colon \Delta(A) \to F$ представляет собой конус в категории $\mathfrak{K}$, допустимый относительно функтора F. Двойственно, каждое естественное преобразование вида $\gamma\colon F \to \Delta(A)$ представляет собой коконус $(\gamma_C\colon F(C) \to A;\ C \in \mathfrak{C})$ морфизмов категории $\mathfrak{K}$ с вершиной A, *допустимый относительно* *функтора* F, т. е. удовлетворяющий условию $\gamma_C = F(\varphi)\gamma_D$ для любого морфизма $\varphi\colon C \to D$ категории $\mathfrak{C}$.

Пусть $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ — функтор. *Пределом*, или *обратным пределом*, функтора F, обозначаемым $\lim F$, или $\varprojlim F$, в категории $\mathfrak{K}$ называется такое естественное преобразование $\varepsilon\colon \Delta(A) \to F$, что для любого естественного преобразования вида $\alpha\colon \Delta(B) \to F$ в категории $\mathfrak{K}$ найдется такой единственный морфизм $\varphi\colon B \to A$, что $\alpha = \Delta(\varphi)\varepsilon$, т. е. $\alpha_C = \varphi\varepsilon_C$ для каждого объекта $C \in \mathfrak{C}$. Предел $\lim F$, если он в категории $\mathfrak{K}$ существует, определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Под пределом функтора F иногда понимается объект A, обозначаемый в этом случае через $\operatorname{Lim} F$. Если $\varepsilon\colon \Delta(A) \to F$ — предел функтора F, то соответствующий конус $(\varepsilon_C\colon A \to F(C);\ C \in \mathfrak{C})$ является моноконусом.

Двойственно пределу функтора F определяется *копредел*, или *прямой предел*, обозначаемый $\operatorname{colim} F$, или $\varinjlim F$, функтора F как такое естественное преобразование $\zeta\colon F \to \Delta(E)$, что для любого естественного преобразования вида $\eta\colon F \to \Delta(U)$ в категории $\mathfrak{K}$ найдется единственный морфизм $\psi\colon E \to U$, для которого $\eta = \zeta\Delta(\psi)$, иначе $\eta_C = \zeta_C\psi$ для каждого объекта $C \in \mathfrak{C}$. Иногда под копределом функтора F понимается объект E, обозначаемый в этом случае через $\operatorname{Colim} F$.

Примеры пределов и копределов функторов. Далее описываются пределы [копределы] некоторых функторов $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ в предположении, что эти пределы [копределы] в категории $\mathfrak{K}$ существуют.

1) $\mathfrak{C}$ — малая дискретная категория. Тогда предел функтора $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ есть произведение $\lim F = \prod\limits_{C \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}} F(C)\,(\pi_C)$, а копредел — копроизведение $\operatorname{colim} F = \coprod\limits_{C \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}} F(C)\,(\tau_C)$ семейства объектов $F(C) \in \mathfrak{K}$, $C \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$.

2) $\mathfrak{C} = \left\{ U \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} V \right\}$ — категория с двумя параллельными морфизмами, не считая, конечно, единичных морфизмов. Функтор $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ из категории $\mathfrak{C}$ представляет собой произвольную пару $A \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} B$ параллельных морфизмов категории $\mathfrak{K}$. При этом $\lim F = \ker(\alpha, \beta)$. Двойственно, $\operatorname{colim} F = \operatorname{coker}(\alpha, \beta)$.

Если $\mathfrak{C} = \{U \xrightarrow{\varphi} W \xleftarrow{\psi} V\}$ — категория, состоящая из двух морфизмов с общим концом, то функтор $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ представляет собой пару морфизмов

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B \end{tikzcd}$$

категории $\mathfrak{K}$ с общим концом. Пределом $\lim F$ функтора F является такой моноконус $(A \xleftarrow{\gamma} D \xrightarrow{\delta} C)$, что квадрат

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"'] & C \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B \end{tikzcd} \qquad (*)$$

коммутативен и для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\zeta"'] & C \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B \end{tikzcd}$$

в категории $\mathfrak{K}$ существует единственный морфизм $\xi\colon E \to D$, для которого $\eta = \xi\delta$ и $\zeta = \xi\gamma$. Квадрат $(*)$ называется *универсальным квадратом* (используются также термины: *декартов квадрат*, *коамальгама*, *расслоенное произведение* объектов A и C относительно морфизмов α и β, pull-back). Объект D в универсальном квадрате $(*)$ называется *вершиной универсального квадрата* и иногда обозначается $A \times_B C$. Указанный выше морфизм $\xi\colon E \to D$ иногда обозначается в виде $\zeta (\times)_B \eta$. В случае когда в универсальном квадрате $(*)$ B является терминальным объектом категории $\mathfrak{K}$, вершина D оказывается произведением объектов A и C. Для построения универсального квадрата относительно морфизма $\gamma\colon D \to C$ и произведения $\alpha\beta$

последовательных морфизмов $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ достаточно построить коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\zeta"'] & E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta"] & D \arrow[d, "\gamma"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

в которой правый квадрат универсален относительно морфизмов β и γ, а левый квадрат универсален относительно морфизмов α и δ. Окаймляющий прямоугольник является универсальным квадратом относительно морфизмов $\alpha\beta$ и γ.

Говорят, что свойство P морфизма β *устойчиво относительно универсального квадрата* (*), если морфизм γ также обладает свойством P. Свойство быть [строгим, регулярным, нормальным] мономорфизмом устойчиво относительно универсальных квадратов. Таким образом, если в универсальном квадрате (*) β — мономорфизм, определяющий подобъект $(\beta]$ объекта B, то γ — мономорфизм, определяющий подобъект $(\gamma]$ объекта A, называемый *прообразом* или *обратным образом подобъекта* $(\beta]$ *при морфизме* α и обозначаемый $(\alpha^{-1}(\beta)]$. Если в универсальном квадрате (*) α и β — мономорфизмы, то $\gamma\alpha = \delta\beta$ — мономорфизм и подобъект $(\gamma\alpha]$ является пересечением $(\gamma\alpha] = (\alpha] \cap (\beta]$ подобъектов $(\alpha]$ и $(\beta]$ в частично упорядоченном классе $\mathrm{Sub}(B)$ подобъектов объекта B.

Категория $\mathfrak{K}$, в которой для любой пары морфизмов с общим концом существует универсальный квадрат, называется *категорией с универсальными квадратами.*

Для локально малой слева категории $\mathfrak{K}$ с универсальными квадратами существует контравариантный функтор $\mathrm{Sub}\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{Pr}$ категории $\mathfrak{K}$ в категории $\mathfrak{Pr}$ полурешеток относительно пересечений и гомоморфизмов полурешеток, сопоставляющий каждому объекту $A \in \mathfrak{K}$ полурешетку (относительно пересечений) $\mathrm{Sub}(A)$ подобъектов объекта A и каждому морфизму $\alpha\colon A \to B$ категории $\mathfrak{K}$ гомоморфизм полурешеток $\mathrm{Sub}(\alpha)\colon \mathrm{Sub}(B) \to \mathrm{Sub}(A)$, при котором $\mathrm{Sub}(\alpha)((\mu]) = (\alpha^{-1}(\mu)]$ для любого подобъекта $(\mu]$ объекта B.

В случае когда в универсальном квадрате (*) $\alpha = \beta$, пара морфизмов $D \overset{\gamma}{\underset{\delta}{\rightrightarrows}} A$ называется *ядерной парой морфизма* α. В этом случае будем писать $(\gamma, \delta) = \ker \alpha$. Таким образом, ядерная пара $\ker \alpha$ морфизма α: $A \to B$ представляет собой такую пару параллельных морфизмов γ, δ: $D \to A$, что $\gamma\alpha = \delta\alpha$ и для любой пары параллельных морфизмов φ, ψ: $U \to A$, для которых $\varphi\alpha = \psi\alpha$, в категории $\mathfrak{K}$ существует такой единственный морфизм $\varkappa$: $U \to D$, что $\varphi = \varkappa\gamma$ и $\psi = \varkappa\delta$. Ядерная пара $\ker \alpha$ морфизма α определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Если $(\gamma, \delta) = \ker \alpha$, то, поскольку $1_A\alpha = 1_A\alpha$, существует такой единственный морфизм ε: $A \to D$, что $\varepsilon\gamma = 1_A$ и $\varepsilon\delta = 1_A$. Для регулярного эпиморфизма θ: $A \to B$ ядерная пара $\ker \theta = (\gamma, \delta)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{coker}(\gamma, \delta) = \theta$. Диаграмма

$$D \overset{\gamma}{\underset{\delta}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{\theta} B,$$

в которой $\ker \theta = (\gamma, \delta)$ и $\operatorname{coker}(\gamma, \delta) = \theta$, называется *точной диаграммой*.

Двойственно, коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\gamma"] \\ C \arrow[r, "\delta"'] & D \end{tikzcd}$$

называется *коуниверсальным* (говорят также *кодекартов квадрат*, *амальгама*, *расслоенное копроизведение*, push-hout) *относительно морфизмов* α и β, если для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\zeta"] \\ C \arrow[r, "\eta"'] & E \end{tikzcd}$$

существует такой единственный морфизм ξ: $D \to E$, что $\eta = \delta\xi$ и $\zeta = \gamma\xi$.

Двойственно ядерной паре $\ker\alpha$ морфизма α определяется *коядерная пара* $\mathrm{coker}\,\alpha$ *морфизма* α.

Пусть $\mathscr{S}$ — некоторый класс категорий. Категория $\mathfrak{K}$ называется *$\mathscr{S}$-полной* [*$\mathscr{S}$-кополной*], если всякий функтор F: $\mathfrak{D}\to\mathfrak{K}$, где $\mathfrak{D}$ — любая категория из $\mathscr{S}$, обладает пределом [копределом].

Категория $\mathfrak{K}$ называется [*конечно*] *полной* [[*конечно*] *кополной*], если в категории $\mathfrak{K}$ всякий функтор F: $\mathfrak{D}\to\mathfrak{K}$ из любой малой [конечной] категории $\mathfrak{D}$ обладает пределом [копределом]. Категория $\mathfrak{K}$, являющаяся одновременно [конечно] полной и [конечно] кополной, называется [*конечно*] *биполной*. Категория $\mathfrak{K}$ является [конечно] полной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}$ — категория с [конечными] произведениями и с ядрами пар морфизмов.

Конечно полная категория $\mathfrak{K}$ содержит терминальный объект $\top$, являющийся пределом функтора F: $\varnothing\to\mathfrak{K}$ из пустой категории $\varnothing$. Двойственно, конечно кополная категория $\mathfrak{K}$ содержит инициальный объект $\perp$.

Если $\mathfrak{K}$ есть $\mathscr{S}$-полная категория для произвольного класса $\mathscr{S}$ категорий, то $\mathscr{S}$-полной будет и категория функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ для любой малой категории $\mathfrak{D}$, так как всякий функтор F: $\mathfrak{C}\to\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ из некоторой категории $\mathfrak{C}\in\mathscr{S}$ можно рассматривать как функтор $F(-, -)$: $\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}\to\mathfrak{K}$, и при этом $(\mathrm{Lim}\,F)(D)=\mathrm{Lim}\,F(-, D)$ для любого объекта $D\in\mathfrak{D}$, где $(\mathrm{Lim}\,F)(D)$ — значение функтора $\mathrm{Lim}\,F$: $\mathfrak{D}\to\mathfrak{K}$ на объекте D, а $\mathrm{Lim}\,F(-, D)$ — предел функтора $F(-, D)$: $\mathfrak{C}\to\mathfrak{K}$.

Аналогично, категория функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ сохраняет свойство категории $\mathfrak{K}$ быть $\mathscr{S}$-кополной категорией.

Говорят, что функтор G: $\mathfrak{K}\to\mathfrak{L}$ *перестановочен с пределом* функтора F: $\mathfrak{C}\to\mathfrak{K}$ или что он *сохраняет предел* функтора F, если в категории $\mathfrak{K}$ существует предел $\lim F$ и $G(\lim F)=\lim FG$. Функтор G называется *$\mathscr{S}$-непрерывным* [[*конечно*] *непрерывным*], если он перестановочен с пределом любого функтора F: $\mathfrak{C}\to\mathfrak{K}$, существующего в категории $\mathfrak{K}$, где $\mathfrak{C}$ — любая категория из класса $\mathscr{S}$ [любая [конечная] малая категория]. Конечно непрерывный функтор называется также *точным слева*.

Если $\mathfrak{K}$ — [конечно] полная категория, то функтор G: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ [конечно] непрерывен тогда и только тогда, когда он перестановочен со всеми [конечными] произведениями и ядрами пар морфизмов.

Аналогично определяется функтор G: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$, *перестановочный с копределом* функтора F: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$, *$\mathcal{S}$-конепрерывный* и [*конечно*] *конепрерывный функтор*. Конечно конепрерывный функтор называется также *точным справа*.

Предел $\lim F$ [копредел $\operatorname{colim} F$] функтора F: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{K}$ называется *абсолютным*, если он сохраняется любым функтором G: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$.

Говорят, что функтор G: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ *отражает пределы* [*копределы*], если для любого функтора F: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ из существования предела $\lim FG$ [копредела $\operatorname{colim} FG$] функтора FG: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{L}$ следуют существование предела $\lim F$ [копредела $\operatorname{colim} F$] функтора F и равенство $G(\lim F) = \lim FG$ [равенство $G(\operatorname{colim} F) = \operatorname{colim} FG$].

Пусть $\mathfrak{D}$ — малая категория, $\mathfrak{K}$ есть $\{\mathfrak{D}\}$-полная категория, F, G: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{K}$ — два функтора, $\lim F = \varepsilon$: $\Delta(A) \to F$, $\lim G = \eta$: $\Delta(B) \to G$ и α: $F \to G$ — естественное преобразование. Тогда определено естественное преобразование $\varepsilon\alpha$: $\Delta(A) \to G$, и по определению предела в категории $\mathfrak{K}$ существует такой единственный морфизм φ: $A \to B$, что $\varepsilon\alpha = \Delta(\varphi)\eta$. Легко проверяется, что сопоставление естественному преобразованию α: $F \to G$ морфизма φ: $\operatorname{Lim} F \to \operatorname{Lim} G$ обладает свойствами функториальности. Таким образом, сопоставляя каждому функтору F: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{K}$ его предел $\operatorname{Lim} F$, мы получаем функтор Lim: $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K}) \to \mathfrak{K}$.

Таким же образом в случае, когда $\mathfrak{K}$ есть $\{\mathfrak{D}\}$-кополная категория, определяется функтор Colim: $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K}) \to \mathfrak{K}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две малые категории, $\mathfrak{K}$ есть $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$-биполная категория и F: $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$ — некоторый функтор. Тогда для любых морфизмов α: $A \to A' \in \mathfrak{A}$ и β: $B \to B' \in \mathfrak{B}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(A,B) \arrow[r, "F(\alpha, 1_B)"] \arrow[d, "F(1_A, \beta)"'] & F(A',B) \arrow[d, "F(1_{A'}, \beta)"] \\ F(A,B') \arrow[r, "F(\alpha, 1_{B'})"'] & F(A',B') \end{tikzcd} \qquad (**)$$

Фиксируя объект $B \in \mathfrak{B}$, получим функтор $F(—, B)$: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}$ и, следовательно, определены $\mathrm{Lim}_\alpha F(\alpha, B)$ и $\mathrm{Colim}_\alpha F(\alpha, B)$. Из коммутативности диаграммы (**) следует, что любой морфизм β: $B \to B'$ категории $\mathfrak{B}$ определяет естественное преобразование $F(—, \beta)$: $F(—, B) \to F(—, B')$, которое, в свою очередь, определяет морфизмы $\mathrm{Lim}_\alpha F(\alpha, \beta)$: $\mathrm{Lim}_\alpha F(\alpha, B) \to \mathrm{Lim}_\alpha F(\alpha, B')$, $\mathrm{Colim}_\alpha F(\alpha, \beta)$: $\mathrm{Colim}_\alpha F(\alpha, B) \to \mathrm{Colim}_\alpha F(\alpha, B')$. Тем самым определены функторы $\mathrm{Lim}_\alpha F(\alpha, —)$: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$, $\mathrm{Colim}_\alpha F(\alpha, —)$: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$ и, следовательно, определены $\mathrm{Lim}_\beta(\mathrm{Lim}_\alpha F(\alpha, \beta))$, $\mathrm{Colim}_\beta(\mathrm{Lim}_\alpha F(\alpha, \beta))$, $\mathrm{Lim}_\beta(\mathrm{Colim}_\alpha F(\alpha, \beta))$, $\mathrm{Colim}_\beta(\mathrm{Colim}_\alpha F(\alpha, \beta))$.

Аналогично, фиксируя объект $A \in \mathfrak{A}$, получим функтор $F(A, —)$: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$ и, повторяя те же рассуждения, получим $\mathrm{Lim}_\alpha(\mathrm{Lim}_\beta F(\alpha, \beta))$, $\mathrm{Colim}_\alpha(\mathrm{Lim}_\beta F(\alpha, \beta))$, $\mathrm{Lim}_\alpha(\mathrm{Colim}_\beta F(\alpha, \beta))$, $\mathrm{Colim}_\alpha(\mathrm{Colim}_\beta F(\alpha, \beta))$.

Всегда имеют место изоморфизмы $\mathrm{Lim}_\beta(\mathrm{Lim}_\alpha F(\alpha, \beta)) \approx \mathrm{Lim}_\alpha(\mathrm{Lim}_\beta F(\alpha, \beta))$ и $\mathrm{Colim}_\beta(\mathrm{Colim}_\alpha F(\alpha, \beta)) \approx \mathrm{Colim}_\alpha(\mathrm{Colim}_\beta F(\alpha, \beta))$, означающие, что функтор предела [копредела] сохраняет пределы [копределы], и морфизмы ξ: $\mathrm{Colim}_\beta(\mathrm{Lim}_\alpha F(\alpha, \beta)) \to \mathrm{Lim}_\alpha(\mathrm{Colim}_\beta F(\alpha, \beta))$, η: $\mathrm{Colim}_\alpha(\mathrm{Lim}_\beta F(\alpha, \beta)) \to \mathrm{Lim}_\beta(\mathrm{Colim}_\alpha F(\alpha, \beta))$.

Говорят, что в категории $\mathfrak{K}$ *$\mathfrak{A}$-пределы перестановочны с $\mathfrak{B}$-копределами*, если для каждого функтора F: $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$ морфизм ξ: $\mathrm{Colim}_\beta(\mathrm{Lim}_\alpha F(\alpha, \beta)) \to \mathrm{Lim}_\alpha(\mathrm{Colim}_\beta F(\alpha, \beta))$ является изоморфизмом. В качестве примера приведем следующее утверждение. В категории множеств $\mathfrak{A}$-пределы перестановочны с $\mathfrak{B}$-копределами для любой конечной категории $\mathfrak{A}$ и любой малой фильтрованной категории $\mathfrak{B}$. (Категория $\mathfrak{C}$ называется *$\mathfrak{m}$-фильтрованной* для некоторого регулярного кардинала $\mathfrak{m}$, если: 1) для любого множества объектов $A_i \in \mathfrak{C}$, $i \in I$, мощности $|I| < \mathfrak{m}$ в категории $\mathfrak{C}$ существует такой объект B, что $H_{\mathfrak{C}}(A_i, B) \neq \varnothing$ для каждого $i \in I$; 2) всякая пара параллельных морфизмов категории $\mathfrak{C}$ обладает коуравнителем. $\aleph_0$-фильтрованная категория называется *фильтрованной* категорией).

Пусть Σ — некоторый класс морфизмов категории $\mathfrak{K}$. Категория $\mathfrak{K}(\Sigma^{-1})$ называется *категорией частных* категории $\mathfrak{K}$ относительно класса Σ, если: 1) существует такой функтор $P_\Sigma\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}(\Sigma^{-1})$, что $P_\Sigma(\sigma)$ — изоморфизм категории $\mathfrak{K}(\Sigma^{-1})$ для каждого $\sigma \in \Sigma$; 2) для любого функтора $T\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$, для которого $T(\sigma)$ — изоморфизм категории $\mathfrak{L}$ для каждого $\sigma \in \Sigma$, существует такой единственный функтор $T'\colon \mathfrak{K}(\Sigma^{-1}) \to \mathfrak{L}$, что $T = P_\Sigma T'$.

Класс Σ морфизмов категории $\mathfrak{K}$ *допускает исчисление правых частных*, если: 1) класс Σ замкнут относительно произведений и содержит все единичные морфизмы категории $\mathfrak{K}$; 2) в категории $\mathfrak{K}$ каждая диаграмма вида

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

в которой $\sigma \in \Sigma$, вкладывается в коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\delta"] \\ C \arrow[r, "\lambda"'] & D \end{tikzcd}$$

и при этом $\lambda \in \Sigma$; 3) всякая пара параллельных морфизмов $U \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} V$ категории $\mathfrak{K}$, обладающая коуравнителем $\sigma \in \Sigma$, обладает уравнителем $\mu \in \Sigma$.

Если $\mathfrak{K}$ — конечно полная категория и Σ — класс морфизмов категории $\mathfrak{K}$, допускающий исчисление правых частных, то категория частных $\mathfrak{K}(\Sigma^{-1})$ существует, является конечно полной категорией и функтор P_Σ конечно непрерывен. Категории частных отражены в монографиях [4, 34].

2.3. Сопряженные функторы. Пара функторов $F\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ и $G\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ называется *сопряженной*, а функтор F — *сопряженным слева к функтору* G и функтор G — *сопряженным справа к функтору* F, если функторы $H_\mathfrak{L}(F(-), -)$, $H_\mathfrak{K}(-, G(-))\colon \mathfrak{K}^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{L} \to \mathrm{SET}$ естественно изоморфны, т. е. существует естественный изоморфизм $\theta\colon H_\mathfrak{L}(F(-), -) \to H_\mathfrak{K}(-, G(-))$, называемый *сопряжением* функторов F и G; обратный естественный изоморфизм θ^{-1} называется *косопряжением* функторов F и G. Пара сопряженных функторов обозначается $\theta\colon F \dashv G\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$, или $\theta\colon F \dashv G$, или $F \dashv G$. Наличие сопряжения $F \dashv G$ означает, что для любой пары объектов $A \in \mathfrak{K}$, $B \in \mathfrak{L}$ существует биективное отображение

$$\theta_{A,B}\colon H_{\mathfrak{L}}(F(A), B) \to H_{\mathfrak{K}}(A, G(B)), \qquad (*)$$

и при этом для любых морфизмов $\alpha\colon A' \to A \in \mathfrak{K}$ и $\beta\colon B \to B' \in \mathfrak{L}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_{\mathfrak{L}}(F(A),B) \arrow[r, "\theta_{A,B}"] \arrow[d, "H(F(\alpha),\beta)"'] & H_{\mathfrak{K}}(A,G(B)) \arrow[d, "H(\alpha, G(\beta))"] \\
H_{\mathfrak{L}}(F(A'),B') \arrow[r, "\theta_{A',B'}"'] & H_{\mathfrak{K}}(A',G(B'))
\end{tikzcd}$$

означающая, что справедливо равенство

$$\theta_{A',B'}(F(\alpha)\gamma\beta) = \alpha\theta_{A,B}(\gamma)\,G(\beta) \qquad (**)$$

для любого $\gamma \in H_{\mathfrak{L}}(F(A), B)$. Полагая в $(*)$ $B = F(A)$, определим морфизм $\hat{\theta}_A = \theta_{A,F(A)}(1_{F(A)})\colon A \to G(F(A))$. Из $(**)$ нетрудно вывести, что $\hat{\theta}_A$, где $A \in \operatorname{Ob}\mathfrak{K}$, являются компонентами естественного преобразования $\theta\colon \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to FG$, называемого *единицей сопряжения* $\theta\colon F \dashv G$. Аналогично, сопряжением $\theta\colon F \dashv G$ определяется естественное преобразование $\check{\theta}\colon GF \to \mathrm{Id}_{\mathfrak{L}}$, называемое *коединицей сопряжения.*

Пара естественных преобразований $\varphi\colon \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to FG$ и $\psi\colon GF \to \mathrm{Id}_{\mathfrak{L}}$ является соответственно единицей и коединицей некоторого сопряжения $\theta\colon F \dashv G$ тогда и только тогда, когда $F(\varphi_A)\psi_{F(A)} = 1_{F(A)}$ для каждого объекта $A \in \mathfrak{K}$ и $\varphi_{G(B)}G(\psi_B) = 1_{G(B)}$ для каждого объекта $B \in \mathfrak{L}$. При этом $\theta_{A,B}(\gamma) = \varphi_A G(\gamma)$ для любой пары объектов $A \in \mathfrak{K}$, $B \in \mathfrak{L}$ и для любого $\gamma \in H_{\mathfrak{L}}(F(A), B)$.

Пара сопряженных функторов $F \dashv G$ однозначно определяет друг друга с точностью до естественного изоморфизма. Если $\theta\colon F \dashv G$ — пара сопряженных функторов, то функтор F перестановочен с копределами и переводит [строгие] эпиморфизмы в [строгие] эпиморфизмы, а функтор G перестановочен с пределами и переводит [строгие] мономорфизмы в [строгие] мономорфизмы. Кроме того, функтор F унивалентен тогда и только тогда, когда каждая компонента $\hat{\theta}_A$, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$, единицы сопряжения $\hat{\theta}$: $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to FG$ является мономорфизмом, а функтор G унивалентен тогда и только тогда, когда каждая компонента $\check{\theta}_B$, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$, коединицы сопряжения $\check{\theta}$: $GF \to \mathrm{Id}_{\mathfrak{L}}$ является эпиморфизмом.

Как уже отмечалось, функтор G: $\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$, обладающий сопряженным слева функтором, перестановочен с пределами. Если $\mathfrak{L}$ — полная локально малая слева категория с кообразующим объектом, то функтор G: $\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ обладает сопряженным слева функтором тогда и только тогда, когда он перестановочен с пределами.

Если $F_1 \dashv G_1$: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$ и $F_2 \dashv G_2$: $\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ — две пары сопряженных функторов, то $F_1F_2 \dashv G_2G_1$: $\mathfrak{L} \to \mathfrak{C}$ — пара сопряженных функторов.

Любой функтор G: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ для всякой малой категории $\mathfrak{D}$ индуцирует функтор $\bar{G}$: $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{L})$, при котором $\bar{G}(F) = FG$ для каждого объекта, т. е. функтора F: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{K}$, категории $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ и $\bar{G}(\varphi) = G(\varphi)$ для каждого морфизма $\varphi \in \mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$; $\bar{G}$ называется *накрывающим функтором* функтора G. Любое естественное преобразование функторов α: $G \to G'$ определяет *накрывающее естественное преобразование* $\bar{\alpha}$: $\bar{G} \to \bar{G}'$ накрывающих функторов $\bar{G}$, $\bar{G}'$: $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{L})$, для которого $\bar{\alpha}_F = \alpha_F$ (см. с. 401) для любого функтора F: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{K}$ из категории $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$. Если θ: $F \dashv G$: $\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ — пара сопряженных функторов, то для любой малой категории $\mathfrak{D}$ $\bar{\theta}$: $\bar{F} \dashv \bar{G}$: $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{L}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ — пара сопряженных функторов.

Примеры. 1) Любая пара функторов F: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ и G: $\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$, осуществляющих эквивалентность категорий $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}$, является сопряженной парой.

2) В категории множеств SET для любого непустого множества A функтор $- \times A$: SET $\to$ SET сопряжен слева к функтору H^A: SET $\to$ SET, поскольку для любой пары множеств X, Y имеет место биективное соответствие $H(X \times A, Y) \approx H(X, H(A, Y))$, естественное по X и Y.

3) Функтор $|-|$: $\mathfrak{G} \to$ SET из категории групп $\mathfrak{G}$ в категорию множеств SET, сопоставляющий любой группе G множество $|G|$ ее элементов, сопряжен справа к функтору F: SET $\to \mathfrak{G}$, со-

поставляющему любому множеству M свободную группу $F(M)$ с множеством свободных образующих M.

4) Функторы f: качум $A \to$ качум B и g: качум $B \to$ качум A сопряжены, $f \dashv g$, тогда и только тогда, когда для монотонных отображений частично упорядоченных множеств f: $A \to B$ и g: $B \to A$ соотношения $f(a) \leqslant b$ и $a \leqslant g(b)$ равносильны для любых элементов $a \in A$, $b \in B$.

Пусть T: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и F: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}$ — два функтора. Функтор R: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$ вместе с естественным преобразованием ε: $TR \to F$ называется *правым расширением Кана функтора F относительно функтора T* (обозначается $\mathrm{Ran}_T F$), если для любого функтора S: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$ и любого естественного преобразования φ: $TS \to F$ существует такое единственное естественное преобразование φ': $S \to R$, что $\varphi = \varphi'_T \varepsilon$ (см. с. 401). Правое расширение Кана $\mathrm{Ran}_T F$ всякий раз, когда оно существует, определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Если $\mathfrak{A}$ — малая категория, а $\mathfrak{K}$ — полная, то правое расширение Кана $\mathrm{Ran}_T F$ существует для любых функторов T: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и F: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}$. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — малые категории, то функтор T: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ определяет функтор $\hat{T}$: $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{K}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{A}, \mathfrak{K})$, при котором $\hat{T}(S) = TS$ для каждого функтора S: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$ и $\hat{T}(\alpha) = \alpha_T$ для каждого естественного преобразования α: $S \to U$ функторов S, U: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$. Функтор $\hat{T}$ обладает правым сопряженным функтором тогда и только тогда, когда для каждого функтора F: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}$ существует правое расширение Кана $\mathrm{Ran}_T F$; при этом $\hat{T} \dashv \mathrm{Ran}_T(-)$.

Функтор G: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ *сохраняет правое расширение Кана* $\mathrm{Ran}_T F$ функтора F: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}$ относительно функтора T: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, если $(\mathrm{Ran}_T F) G = \mathrm{Ran}_T FG$. Функтор G: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$, обладающий сопряженным слева функтором, сохраняет правые расширения Кана. Правое расширение Кана $\mathrm{Ran}_T F$ называется *поточечным правым расширением Кана*, если оно сохраняется каждым основным ковариантным функтором H^A: $\mathfrak{K} \to \mathrm{SET}$, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$.

Левое расширение Кана определяется двойственно. Таким образом, функтор L: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$ вместе с естественным преобразованием δ: $F \to TL$ называется *левым расширением Кана функтора F: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}$ относительно функтора T: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$* (обозначается $\mathrm{Lan}_T F$), если для любого функтора K: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{K}$ и любого естественного преобразования ψ: $F \to TK$ существует такое единственное естественное преобразование ψ': $L \to K$, что $\psi = \delta\psi'_T$. С помощью левого расширения Кана при соответствующих условиях строится функтор, сопряженный слева к функтору T. Более подробно с расширениями Кана можно познакомиться по монографии [23].

Полная подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$ называется *рефлективной* [*корефлективной*] *подкатегорией*, если ее функтор вложения $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C},\mathfrak{K}}$: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ обладает сопряженным слева [справа] функтором.

Полная подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$ рефлективна тогда и только тогда, когда существуют такие функтор R: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$ и естественное преобразование ρ: $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to R\,\mathrm{Id}_{\mathfrak{C},\mathfrak{K}}$, что для любого объекта $A \in \mathfrak{K}$ морфизм ρ_A: $A \to R(A)$ обладает тем свойством, что для любого морфизма α: $A \to B$ категории $\mathfrak{K}$ с концом $B \in \mathfrak{C}$ существует такой единственный морфизм α': $R(A) \to B$, что $\alpha = \rho_A\alpha'$. Пара (R, ρ), а иногда лишь функтор R, называется *рефлектором рефлективной подкатегории* $\mathfrak{C}$, а $(R(A), \rho_A)$, а иногда только $R(A)$ — *рефлектором объекта* A относительно подкатегории $\mathfrak{C}$. Если все компоненты ρ_A, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$, естественного преобразования ρ: $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to R\,\mathrm{Id}_{\mathfrak{C},\mathfrak{K}}$ принадлежат некоторому классу морфизмов $\mathfrak{E}$, то рефлективная подкатегория $\mathfrak{C}$ называется $\mathfrak{E}$-*рефлективной*. В случае когда $\mathfrak{E} = \mathrm{Epi}\,\mathfrak{K}$, $\mathfrak{E}$-рефлективная подкатегория называется *эпирефлективной*.

Если $\mathfrak{C}$ — рефлективная подкатегория категории $\mathfrak{K}$, то функтор вложения $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C},\mathfrak{K}}$: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ сохраняет и отражает пределы. Таким образом, если $\mathfrak{K}$ — полная категория, то полной будет и любая рефлективная подкатегория категории $\mathfrak{K}$. На рефлективную подкатегорию переносится также свойство категории $\mathfrak{K}$ быть кополной категорией.

Если рефлектор R рефлективной подкатегории $\mathfrak{C}$ перестановочен с конечными пределами, то подкатегория $\mathfrak{C}$ называется *подкатегорией локализации* категории $\mathfrak{K}$.

Для любой малой категории $\mathfrak{D}$ категория $\mathfrak{K}$ вкладывается функтором вложения Δ: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ (см. п. 2.2) в категорию функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ в качестве рефлективной подкатегории категории $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}$ является $\{\mathfrak{D}\}$-кополной категорией. Отсюда вытекает, что всякая полная локально малая слева категория с кообразующим объектом является кополной категорией.

В категории с разложением $(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$ рефлективная подкатегория $\mathfrak{C}$ является $\mathfrak{E}$-рефлективной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{C}$ замкнута относительно допустимых подобъектов, т. е. если объект $A \in \mathfrak{C}$ и μ: $U \to A$ — мономорфизм из $\mathfrak{M}$, то объект $U \in \mathfrak{C}$. Рефлективная подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$, замкнутая относительно допустимых подобъектов, называется *допустимым предмногообразием категории* $\mathfrak{K}$. Допустимое предмногообразие $\mathfrak{C}$, замкнутое относительно допустимых факторобъектов, называется *допустимым многообразием категории* $\mathfrak{K}$.

Для корефлективных подкатегорий справедливы двойственные результаты и вводятся двойственные понятия. В частности, вводится понятие *корефлектора* (γ, S) корефлективной подкатегории $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$, а в категории $(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$ с разложением вводятся понятия *допустимых предкомногообразия* и *комногообразия категории* $\mathfrak{K}$.

Полная подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$, являющаяся одновременно рефлективной и корефлективной, называется *бирефлективной подкатегорией* категории $\mathfrak{K}$. Аналогичный смысл имеет понятие *допустимого бимногообразия* категории с разложением $(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$.

Если $(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$ и $(\mathfrak{K}', \mathfrak{E}', \mathfrak{M}')$ — две категории с разложением, то функтор F: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ обладает сопряженным справа функтором тогда и только тогда, когда он представим в виде $F = RF_1 \mathrm{Id}_{\mathfrak{C}', \mathfrak{K}'}$, где R — рефлектор допустимого предмногообразия $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$, F_1: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ — унивалентный функтор, обладающий сопряженным справа функтором, и $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}', \mathfrak{K}'}$ — функтор вложения допустимого предкомногообразия $\mathfrak{C}'$ категории $\mathfrak{K}'$.

Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с терминальным объектом $\top$. Полная подкатегория $\{\top\}$ категории $\mathfrak{K}$, порожденная объектом $\top$, является однообъектной дискретной категорией и рефлективной подкатегорией категории $\mathfrak{K}$. Рефлектором рефлективной подкатегории $\{\top\}$ является функтор $\Delta(\top)$: $\mathfrak{K} \to \{\top\}$ (см. п. 2.1). Рефлективными подкатегориями категории множеств SET являются лишь сама категория SET и подкатегории вида $\{\top\}$, т. е. подкатегории, порожденные одноточечными множествами.

Категория абелевых групп $\mathfrak{Ab}$ является рефлективной подкатегорией, в действительности многообразием, категории групп $\mathfrak{G}$. Рефлектор R: $\mathfrak{G} \to \mathfrak{Ab}$ каждой группе $G \in \mathfrak{G}$ сопоставляет факторгруппу G/G' группы G по ее коммутанту G'.

В категории абелевых групп $\mathfrak{Ab}$ полная подкатегория $\mathfrak{Ab}_p$ периодических абелевых групп является корефлективной подкатегорией с корефлектором $\overline{T}$: $\mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Ab}_p$, сопоставляющим каждой абелевой группе A ее периодическую часть $T(A)$ (см. п. 2.1, пример 2)), а полная подкатегория $\mathfrak{Ab}_q$ абелевых групп без кручения является рефлективной подкатегорией с рефлектором $\overline{Q}$: $\mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Ab}_q$, сопоставляющим каждой абелевой группе A факторгруппу $Q(A) = A/T(A)$ по ее периодической части $T(A)$ (см. п. 2.1, пример 3)).

2.4. Монады. Пусть $F \dashv G$: $\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ — пара сопряженных функторов с единицей сопряжения ε: $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to FG$ и коединицей сопряжения η: $GF \to \mathrm{Id}_{\mathfrak{L}}$. Тогда определены функтор $T = FG$: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ и естественные преобразования $\mu = G(\eta_F)$: $T^2 \to T$ и ε: $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to T$, для которых справедливы равенства

$$T(\mu)\,\mu = \mu_T \mu, \quad T(\varepsilon)\,\mu = \varepsilon_T \mu = \mathrm{id}_T, \qquad (*)$$

где id_T — тождественное естественное преобразование функтора T.

Тройка $\boldsymbol{T} = (T, \mu, \varepsilon)$, состоящая из функтора T: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ и естественных преобразований μ: $T^2 \to T$ и ε: $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to T$, удовлетворяющих соотношениям $(*)$, называется *монадой* (а также *тройкой* или *стандартной конструкцией*) на категории $\mathfrak{K}$.

Монада $(FG, G(\eta_F), \varepsilon)$, построенная в начале настоящего пункта, называется *монадой, индуцированной парой сопряженных функторов* $F \dashv G$. В этом случае также говорят, что *пара сопряженных функторов* $F \dashv G$ является *разложением монады* $(FG, G(\eta_F), \varepsilon)$.

Пусть $\boldsymbol{T} = (T, \mu, \varepsilon)$ и $\boldsymbol{T}' = (T', \mu', \varepsilon')$ — две монады на категории $\mathfrak{K}$. *Морфизмом* φ: $T \to T'$ *монады* $\boldsymbol{T}$ *в монаду* $\boldsymbol{T}'$ называется такое естественное преобразование φ: $T \to T'$, что $\mu\varphi = T(\varphi)\,\varphi_{T'}\mu'$ и $\varepsilon' = \varepsilon\varphi$, т. е. коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
T^2 \arrow[r, "T(\varphi)"] \arrow[dd, "\mu"'] & T'T \arrow[r, "\varphi_{T'}"] & T'^2 \arrow[dd, "\mu'"] \\
& & \\
T \arrow[rr, "\varphi"'] & & T'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, "\varphi"] & & T' \\
& \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[ur, "\varepsilon'"'] &
\end{tikzcd}$$

По заданной монаде $\boldsymbol{T} = (T, \mu, \varepsilon)$ на категории $\mathfrak{K}$ можно построить *категорию Эйленберга — Мура*, или *категорию $\boldsymbol{T}$-алгебр*, $\mathfrak{K}^{\boldsymbol{T}}$ и *категорию Клейсли* $\mathfrak{K}_{\boldsymbol{T}}$.

Объектами категории $\mathfrak{K}^T$ служат *$\boldsymbol{T}$-алгебры*, т. е. пары (A, ξ), где A — объект и $\xi\colon T(A) \to A$ — морфизм категории $\mathfrak{K}$, удовлетворяющий условиям $\mu_A\xi = T(\xi)\xi$ и $\varepsilon_A\xi = 1_A$. Морфизмами пары (A, ξ) в пару (B, η) являются все такие морфизмы $\alpha\colon A \to B$ категории $\mathfrak{K}$, что $\xi\alpha = T(\alpha)\eta$. Сопоставлением всякой $\boldsymbol{T}$-алгебре (A, ξ) объекта $A \in \mathfrak{K}$ строится *пренебрегающий функтор* $P^T\colon \mathfrak{K}^T \to \mathfrak{K}$. С другой стороны, каждому объекту $A \in \mathfrak{K}$ можно сопоставить $\boldsymbol{T}$-алгебру $(T(A), \mu_A)$, называемую *свободной $\boldsymbol{T}$-алгеброй* над объектом A. Этим определяется функтор $F^T\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}^T$. Функтор F^T сопряжен слева к функтору P^T, и пара сопряженных функторов $F^T \dashv P^T$ индуцирует исходную монаду $\boldsymbol{T}$. Таким образом, каждая монада индуцируется некоторой парой сопряженных функторов.

Построим теперь по монаде $\boldsymbol{T}$ категорию Клейсли $\mathfrak{K}_T$, положив $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}_T = \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и $H_{\mathfrak{K}_T}(A, B) = H_{\mathfrak{K}}(A, T(B))$ для любой пары объектов $A, B \in \mathfrak{K}_T$. Произведение морфизмов $\alpha\colon A \to B$ и $\beta\colon B \to C$ в категории $\mathfrak{K}_T$ определяется по формуле $\alpha \cdot \beta = \alpha T(\beta)\mu_C$, где $\alpha T(\beta)\mu_C$ — произведение морфизмов в категории $\mathfrak{K}$. Единичным морфизмом объекта $A \in \mathfrak{K}_T$ является морфизм $\varepsilon_A\colon A \to T(A)$. Тождественное на объектах отображение $F_T\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}_T$, при котором $F_T(\alpha) = \alpha\varepsilon_B$ для каждого морфизма $\alpha\colon A \to B \in \mathfrak{K}$, является функтором. Полагая $P_T(A) = T(A)$ для каждого объекта $A \in \mathfrak{K}_T$ и $P_T(\alpha) = T(\alpha)\mu_B$ для каждого морфизма $\alpha\colon A \to B$ категории $\mathfrak{K}_T$, где в выражении $T(\alpha)\mu_B$ α рассматривается как морфизм $\alpha\colon A \to T(B)$ категории $\mathfrak{K}$, получим функтор $P_T\colon \mathfrak{K}_T \to \mathfrak{K}$. При этом $F_T \dashv P_T$ — пара сопряженных функторов, индуцирующая ту же монаду $\boldsymbol{T}$.

Пусть $F \dashv G\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ — любая пара сопряженных функторов, индуцирующая монаду $\boldsymbol{T}$. Тогда существуют и однозначно определяются такие функторы $V_T\colon \mathfrak{K}_T \to \mathfrak{L}$ и $V^T\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}^T$, называемые *функторами сравнения*, что $V_T G = P_T$, $F_T V_T = F$ и $FV^T = F^T$, $V^T P^T = G$. Категория $\mathfrak{L}$ и функтор $G\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ называются *монадизируемыми*, если функтор сравнения $V^T\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}^T$ осуществляет эквивалентность между категориями $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{K}^T$. *Теорема Бека* утверждает, что следующие свойства функтора $G\colon \mathfrak{L}\to\mathfrak{K}$, обладающего сопряженным слева функтором, равносильны: 1) G — монадизируемый функтор; 2) функтор G отражает коядро любой такой пары морфизмов α, $\beta\colon A\to B$ категории $\mathfrak{L}$, образы которых $G(\alpha)$, $G(\beta)$ обладают абсолютным коядром; 3) функтор G отражает коядро любой такой пары морфизмов α, $\beta\colon A\to B$ категории $\mathfrak{L}$, образы которых $G(\alpha)$, $G(\beta)$ обладают расщепляющимся коядром.

Категория $\boldsymbol{T}$-алгебр $\mathfrak{K}^{\boldsymbol{T}}$ для любой монады $\boldsymbol{T}$ на полной категории $\mathfrak{K}$ является полной категорией. Свойство категории $\mathfrak{K}$ быть кополной категорией на категорию $\mathfrak{K}^{\boldsymbol{T}}$ в общем случае не переносится. Однако для любой монады $\boldsymbol{T}$ на категории множеств SET категория $\mathrm{SET}^{\boldsymbol{T}}$ является кополной.

Пусть $\boldsymbol{T}=(T,\mu,\varepsilon)$ и $\boldsymbol{T}'=(T',\mu',\varepsilon')$ — две монады на категории $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}^{\boldsymbol{T}}$ и $\mathfrak{K}^{\boldsymbol{T}'}$ — категории соответственно $\boldsymbol{T}$-алгебр и $\boldsymbol{T}'$-алгебр. Всякий морфизм монад $\varphi\colon \boldsymbol{T}\to\boldsymbol{T}'$ по формуле $R(A,\xi')=(A,\varphi_A\xi')$ для любой $\boldsymbol{T}'$-алгебры (A,ξ') определяет функтор $R\colon \mathfrak{K}^{\boldsymbol{T}'}\to\mathfrak{K}^{\boldsymbol{T}}$, удовлетворяющий условию $P^{\boldsymbol{T}'}=RP^{\boldsymbol{T}}$. Таким образом, устанавливается биективное соответствие между всеми морфизмами монад $\varphi\colon \boldsymbol{T}\to\boldsymbol{T}'$ и всеми функторами $R\colon \mathfrak{K}^{\boldsymbol{T}'}\to\mathfrak{K}^{\boldsymbol{T}}$, удовлетворяющими условию $P^{\boldsymbol{T}'}=RP^{\boldsymbol{T}}$.

Пусть $|-|\colon \mathfrak{G}\to\mathrm{SET}$ и $F\colon \mathrm{SET}\to\mathfrak{G}$ — пара сопряженных функторов $F\dashv|-|$, рассмотренных в п. 2.3, пример 3). Функтор $T=F|-|=|F|\colon \mathrm{SET}\to\mathrm{SET}$ сопоставляет любому множеству M множество $|F(M)|$ элементов свободной группы $F(M)$ с множеством M свободных образующих. Тогда $T^2(M)$ для любого множества M есть множество элементов свободной группы $F(|F(M)|)$ с множеством $|F(M)|$ свободных образующих. Компонентой естественного преобразования $\mu\colon T^2\to T$ на произвольном множестве M есть гомоморфизм групп $\mu_M\colon F(|F(M)|)\to F(M)$, рассматриваемый как отображение множеств, индуцированный тождественным отображением $1_{|F(M)|}\colon |F(M)|\to|F(M)|$ свободных образующих свободной группы $F(|F(M)|)$ на элементы группы $F(M)$. Компонента естественного преобразования $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\mathrm{SET}}\to T$ на произвольном множестве M определяется как естественное вложение $\varepsilon_M\colon M\to|F(M)|$ множества M в качестве множества свободных образующих свободной группы $F(M)$, рассматриваемой как множество. Тогда (T,μ,ε) — монада на категории SET. Категория $\boldsymbol{T}$-алгебр $\mathrm{SET}^{\boldsymbol{T}}$ эквивалентна категории групп $\mathfrak{G}$, так что пренебрегающий функтор $|-|\colon \mathfrak{G}\to\mathrm{SET}$ является монадизируемым.

Двойственно монаде определяется *комонада* на категории $\mathfrak{K}$ как тройка $\boldsymbol{C}=(C,\varkappa,\eta)$, состоящая из функтора $C\colon \mathfrak{K}\to\mathfrak{K}$ и естественных преобразований $\varkappa\colon C\to C^2$ и $\eta\colon C\to \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}$, удовлетворяющих соотношениям $\varkappa C(\varkappa)=\varkappa\varkappa_C$ и $\varkappa C(\eta)=\varkappa\eta_C=\mathrm{id}_C$. По комонаде C строится категория ${}^C\mathfrak{K}$ *С-коалгебр*. Более подробно с монадами можно познакомиться по монографиям [23, 30].

§ 3. Специальные классы категорий

3.1. Регулярные и точные категории. Моноконус $R\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}}X$, образованный двумя параллельными морфизмами произвольной категории $\mathfrak{K}$, называется *отношением* на объекте X. Два параллельных морфизма $Y\overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}}X$ находятся в отношении R (в обозначениях: $\varphi R\psi$), если существует такой морфизм $\gamma\colon Y\to R$, что $\varphi=\gamma\alpha$ и $\psi=\gamma\beta$. Поскольку (α,β) — моноконус, то морфизм γ определяется однозначно всякий раз, когда он существует. Из соотношения $\varphi R\psi$ всегда следует соотношение $\delta\varphi R\delta\psi$ для любого морфизма $\delta\colon Z\to Y$.

Отношение $R\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}}X$ называется *рефлексивным*, если существует такой морфизм $\delta\colon X\to R$, что $\delta\alpha=\delta\beta=1_X$, так что 1_XR1_X и, следовательно, $\varepsilon R\varepsilon$ для любого морфизма $\varepsilon\colon U\to X$. Отношение $R\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}}X$ называется *симметричным*, если существует такой морфизм $\zeta\colon R\to R$, что $\zeta\alpha=\beta$ и $\zeta\beta=\alpha$. Морфизм ζ является изоморфизмом. В этом случае соотношения $\varphi R\psi$ и $\psi R\varphi$ равносильны. Отношение $R\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}}X$ называется *транзитивным*, если для любой пары морфизмов φ_1, $\varphi_2\colon Z\to R$, удовлетворяющей равенству $\varphi_1\beta=\varphi_2\alpha$, существует такой морфизм $\varphi\colon Z\to R$, что $\varphi_1\alpha=\varphi\alpha$ и $\varphi_2\beta=\varphi\beta$. Это условие транзитивности эквивалентно тому, что для любых трех морфизмов γ_1, γ_2, $\gamma_3\colon Y\to X$ из соотношений $\gamma_1R\gamma_2$ и $\gamma_2R\gamma_3$ следует $\gamma_1R\gamma_3$.

Если в категории $\mathfrak{K}$ существует произведение $X\times X(\pi_1,\pi_2)$, то отношение $R\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}}X$ задает подобъект $(R,\alpha(\times)\beta]$ объекта $X\times X$, и в этом случае соотношение $\varphi R\psi$ для некоторых морфизмов $Y \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} X$ означает, что $\varphi(\times)\psi = \gamma(\alpha(\times)\beta)$ для некоторого морфизма $\gamma\colon Y \to R$. Рефлексивность отношения $R \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} X$ в этом случае означает, что подобъект $(R, \alpha(\times)\beta]$ содержит подобъект $(X, \Delta_X]$, т. е. $(X, \Delta_X] \leqslant (R, \alpha(\times)\beta]$, где $\Delta_X\colon X \to X \times X$ — диагональ объекта X. Симметричность отношения $R \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} X$ означает равенство $(R, \alpha(\times)\beta] = (R, (\alpha(\times)\beta)\tau]$ подобъектов объекта $X \times X$, где $\tau\colon X \times X \to X \times X$ — такой изоморфизм, что $\tau\pi_1 = \pi_2$ и $\tau\pi_2 = \pi_1$.

Отношение на объекте X, являющееся одновременно рефлексивным, симметричным и транзитивным, называется *отношением эквивалентности* или *предконгруэнцией* на объекте X.

Легко проверить, что ядерная пара $\ker\gamma$ любого морфизма $\gamma \in \mathfrak{K}$ является предконгруэнцией. Обратное утверждение в общем случае неверно. Предконгруэнция на объекте $X \in \mathfrak{K}$, являющаяся ядерной парой некоторого морфизма $\gamma\colon X \to Y$, называется *эффективным отношением эквивалентности* или *конгруэнцией*.

Категория $\mathfrak{K}$ называется *регулярной*, если: 1) в категории $\mathfrak{K}$ каждый морфизм обладает ядерной парой и для каждой ядерной пары существует коядро; 2) в категории $\mathfrak{K}$ для любых двух морфизмов с общим концом, по крайней мере один из которых является регулярным эпиморфизмом, существует универсальный квадрат и при этом регулярные эпиморфизмы устойчивы относительно универсальных квадратов. Регулярная категория $\mathfrak{K}$ называется *точной*, если в ней каждая предконгруэнция является конгруэнцией.

Каждая регулярная категория $\mathfrak{K}$ является категорией с регулярными кообразами. В точной категории $\mathfrak{K}$ точные диаграммы замкнуты относительно конечных произведений, т. е. если

$$R_i \overset{\alpha_i}{\underset{\beta_i}{\rightrightarrows}} X_i \xrightarrow{\theta_i} Y_i \quad i = 1,\ 2,$$

— две точные диаграммы и в категории $\mathfrak{K}$ существуют произведения $R_1 \times R_2$, $X_1 \times X_2$, $Y_1 \times Y_2$, то

$$R_1 \times R_2 \underset{\beta_1 \times \beta_2}{\overset{\alpha_1 \times \alpha_2}{\rightrightarrows}} X_1 \times X_2 \xrightarrow{\theta_1 \times \theta_2} Y_1 \times Y_2$$

— точная диаграмма, так что, в частности, если θ_i: $X_i \to Y_i$, $i = 1, 2$, — регулярные эпиморфизмы точной категории $\mathfrak{K}$ и в $\mathfrak{K}$ существуют произведения $X_1 \times X_2$ и $Y_1 \times Y_2$, то $\theta_1 \times \theta_2$: $X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ — регулярный эпиморфизм.

Если $\mathfrak{K}$ — регулярная [точная] категория, то для любой малой категории $\mathfrak{D}$ категория функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ является регулярной [точной]. Любое многообразие универсальных алгебр, в частности категория множеств SET, является примером точной категории.

Малая категория $\mathfrak{K}$ регулярна [точна] тогда и только тогда, когда существует полный унивалентный точный слева функтор F: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathrm{SET})$ из категории $\mathfrak{K}$ в категорию функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathrm{SET})$ из некоторой малой категории $\mathfrak{D}$ в категорию множеств SET, переводящий регулярные эпиморфизмы и только их в регулярные эпиморфизмы [для точности категории $\mathfrak{K}$ дополнительно требуется, чтобы функтор F был перестановочен с коядрами ядерных пар морфизмов; поскольку функтор F точен слева, то последнее условие равносильно тому, что функтор F точные диаграммы переводит в точные диаграммы]. Подробные сведения о регулярных и точных категориях можно найти в сборнике Lect. Notes Math. — 1971. — V. 236.

3.2. Нормальные категории. Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с системой нулевых морфизмов. Морфизм $\alpha \in \mathfrak{K}$ называется *нормальным*, если он представим в виде произведения

$$\alpha = \theta\mu \tag{*}$$

нормального эпиморфизма θ и нормального мономорфизма μ; представление (*) будем называть *нормальным разложением* морфизма α.

Категория $\mathfrak{K}$ называется *нормальной*, если: 1) $\mathfrak{K}$ — категория с нулевым объектом; 2) любой морфизм α категории $\mathfrak{K}$ обладает ядром $\ker\alpha$ и коядром $\operatorname{coker}\alpha$; 3) в категории $\mathfrak{K}$ произведение $\lambda\nu$ нормального мономорфизма λ и нормального эпиморфизма ν является нормальным морфизмом, т. е. $\lambda\nu = \theta\mu$, где

θ — нормальный эпиморфизм и μ — нормальный мономорфизм.

Ввиду свойства 2) в нормальной категории $\mathfrak{K}$ любой нормальный подобъект и любой нормальный факторобъект произвольного объекта $A \in \mathfrak{K}$ являются соответственно идеалом и коидеалом объекта A. Поэтому свойство 3) нормальной категории можно переформировать в следующем виде: в категории $\mathfrak{K}$ образ идеала при нормальном эпиморфизме является идеалом образа.

Понятие нормальной категории самодвойственно, так что категория $\mathfrak{K}^{op}$, двойственная нормальной категории $\mathfrak{K}$, является нормальной категорией. Примерами нормальных категорий являются: любое многообразие мультиоператорных групп, в частности, категории групп и колец, категория $\mathfrak{P}_0$ полугрупп с нулем и гомоморфизмов полугрупп, переводящих нулевые элементы в нулевые элементы, категория SET_0 множеств с отмеченной точкой (см. п. 1.6). Категория функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ из любой малой категории $\mathfrak{D}$ в нормальную категорию $\mathfrak{K}$ является нормальной категорией.

В нормальной категории $\mathfrak{K}$ имеет место: если в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\theta'"'] & A \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\theta"] & B \arrow[d, "\theta''"] \\
K' \arrow[r, "\mu'"'] & A' \arrow[r, "\nu'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

μ, μ' — нормальные мономорфизмы, ν, ν', θ — нормальные эпиморфизмы и верхняя строка является 0-точной, то следующие условия равносильны: (1) нижняя строка 0-точная и правый квадрат коуниверсален относительно θ и ν; (2) нижняя строка 0-точная и левый квадрат есть нормальное разложение морфизма $\mu\theta$, т. е. θ' — нормальный эпиморфизм; (3) левый квадрат есть нормальное разложение морфизма $\mu\theta$, а правый квадрат коуниверсален относительно θ и ν. Вместе с двойственным утверждением этот результат дает: конус нормальных эпиморфизмов $(\nu_i\colon A \to B_i;\ i = 1, 2)$ вкладывается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mu_1'"] \arrow[d, "\mu_2'"'] & K_2 \arrow[r, "\nu_1''"] \arrow[d, "\mu_2"] & L_1 \arrow[d, "\mu_2''"] \\
K_1 \arrow[r, "\mu_1"'] \arrow[d, "\nu_2''"'] & A \arrow[r, "\nu_1"'] \arrow[d, "\nu_2"] & B_1 \arrow[d, "\nu_2'"] \\
L_2 \arrow[r, "\mu_1''"'] & B_2 \arrow[r, "\nu_1'"'] & W
\end{tikzcd} \qquad (**)$$

с 0-точными строками и столбцами. В диаграмме (**) верхний левый квадрат универсален относительно μ_1 и μ_2, а нижний правый квадрат коуниверсален относительно ν_1 и ν_2. Отсюда вытекает «3×3-*лемма*», утверждающая, что из того, что в коммутативной диаграмме (**) все строки и столбцы, за исключением верхней или нижней строки [левого или правого столбца], являются 0-точными, вытекает, что и оставшаяся строка [оставшийся столбец] является 0-точной [0-точным].

Из диаграммы (**) следует, что в нормальной категории $\mathfrak{K}$ для любых двух нормальных мономорфизмов μ_i: $K_i \to A$, $i=1, 2$, с общим концом существует универсальный квадрат. $(V, \mu_1'\mu_2 = \mu_2'\mu_1]$ — идеал объекта A, являющийся пересечением $(V, \mu_1'\mu_2] = (K_1, \mu_1] \cap (K_2, \mu_2]$ идеалов $(K_1, \mu_1]$ и $(K_2, \mu_2]$ объекта A в частично упорядоченном классе $I(A)$ идеалов объекта A. Двойственно, для любых двух нормальных эпиморфизмов ν_i: $A \to B_i$, $i=1, 2$, с общим началом существует коуниверсальный квадрат. $[\nu_1\nu_2' = \nu_2\nu_1', W)$ (см. диаграмму (**)) — коидеал объекта A, являющийся пересечением $[\nu_1\nu_2', W) = [\nu_1, B_1) \cap [\nu_2, B_2)$ коидеалов $[\nu_1, B_1)$ и $[\nu_2, B_2)$ объекта A в частично упорядоченном классе $CI(A)$ коидеалов объекта A. При этом $\operatorname{Ker}\nu_1\nu_2'$ — идеал объекта A, являющийся объединением $\operatorname{Ker}\nu_1\nu_2' = (K_1, \mu_1] \cup (K_2, \mu_2]$ идеалов $(K_1, \mu_1]$ и и $(K_2, \mu_2]$ объекта A, а $\operatorname{Coker}\mu_1'\mu_2$ — коидеал объекта A, являющийся объединением $\operatorname{Coker}\mu_1'\mu_2 = [\nu_1, B_1) \cup$ $\cup [\nu_2, B_2)$ коидеалов $[\nu_1, B_1)$ и $[\nu_2, B_2)$ объекта A.

Таким образом, в нормальной категории $\mathfrak{K}$ частично упорядоченные классы $I(A)$ и $CI(A)$ соответственно идеалов и коидеалов произвольного объекта $A \in \mathfrak{K}$ являются решетками, быть может, с классами элементов. Решетка $I(A)$ модулярна, т. е. если $(\lambda]$, $(\mu]$, $(\sigma]$ — три идеала объекта A и при этом $(\mu] \leqslant (\sigma]$, то справедливо равенство $(\sigma] \cap ((\mu] \cup (\lambda]) = (\mu] \cup ((\sigma] \cap \cap (\lambda])$. Модулярной является и решетка $CI(A)$.

Из диаграммы (**) следует, что в решетке $I(A)$ равенство $(\mu_1] \cap (\mu_2] = (0]$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mu_2\nu_1$ (а значит, и $\mu_1\nu_2$) — нормальный мономорфизм, а равенство $(\mu_1] \cup (\mu_2] = (1_A]$ справедливо в том и только том случае, если $\mu_2\nu_1$ (а значит, и $\mu_1\nu_2$) — нормальный эпиморфизм. Отсюда и из диаграммы (**) выводится *вторая теорема об изоморфизме*: если $(K_1, \mu_1]$ и $(K_2, \mu_2]$ — два идеала объекта A, $(V, \mu'] = (\mu_1] \cap (\mu_2]$ — пересечение и $(K, \mu] = (\mu_1] \cup (\mu_2]$ — объединение идеалов $(\mu_1]$ и $(\mu_2]$, μ_1': $V \to K_2$ и $\bar{\mu}$: $K_1 \to \to K$ — такие нормальные мономорфизмы, что соответственно $\mu' = \mu_1'\mu_2$ и $\mu_1 = \bar{\mu}\mu$, то объекты $\operatorname{Coker} \mu_1' = = L_1$ и $\operatorname{Coker} \bar{\mu} = L$ изоморфны. Последнее означает, что в двух 0-точных последовательностях $V \xrightarrow{\mu_1'} \xrightarrow{\mu_1'} K_2 \xrightarrow{\nu_1''} L_1$ и $K_1 \xrightarrow{\bar{\mu}} K \xrightarrow{\nu} L$ объекты L_1 и L изоморфны, т. е. в обычно принятых обозначениях имеет место изоморфизм $K_2/(K_1 \cap K_2) \approx (K_1 \cup K_2)/K_1$.

Если для идеалов $(K_1, \mu_1]$ и $(K_2, \mu_2]$ объекта A имеет место соотношение $(K_1, \mu_1] \leqslant (K_2, \mu_2]$, то в диаграмме (**) $V = K_1$, $\mu_2' = 1_{K_1}$. Поэтому $L_2 = 0$ и, следовательно, изоморфны объекты B_2 и W. Другими словами, имеет место изоморфизм $A/K_2 \approx (A/K_1)/(K_2/K_1)$.

Пусть $\mathfrak{K}$ — по-прежнему нормальная категория. Предположим, что для двух подобъектов $(U, \mu]$ и $(V, \sigma]$ объекта $A \in \mathfrak{K}$ имеет место соотношение $(U, \mu] \leqslant (V, \sigma]$, т. е. $\mu = \tau\sigma$ для некоторого мономорфизма τ: $U \to V$, и предположим, что τ — нормальный мономорфизм. Тогда пару $(\mu] \leqslant (\sigma]$ будем называть *нормальной парой подобъектов* и обозначать $(\mu] \triangleleft (\sigma]$. Коидеал $[\nu, W)$ объекта V, сопряженный идеалу $(U, \tau]$ объекта V, будем называть *фактором нормальной пары* $(\mu] \triangleleft (\sigma]$. Если $(\mu_1] \triangleleft (\sigma_1]$ и $(\mu_2] \triangleleft \triangleleft (\sigma_2]$ — две нормальные пары подобъекта объекта A

с факторами $[\nu_1, W_1)$ и $[\nu_2, W_2)$ соответственно, то будем говорить, что $(\mu_1] \lhd (\sigma_1]$ и $(\mu_2] \lhd (\sigma_2]$ — *нормальные пары с изоморфными факторами*, если объекты W_1 и W_2 изоморфны.

Мономорфизм $\mu = \sigma_1 \ldots \sigma_n\colon U \to A$, представимый в виде произведения нормальных мономорфизмов $\sigma_i\colon U_i \to U_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$, называется *достижимым мономорфизмом*, а подобъект $(U, \mu]$ — *достижимым подобъектом* объекта A. В этом случае $\mu_i = \sigma_i \ldots \sigma_n\colon U_i \to A$ — достижимый мономорфизм и $(\mu_i] \lhd (\mu_{i+1}]$ — нормальная пара для каждого $i = 1, \ldots, n-1$.

Конечная строго возрастающая последовательность

$$(\mu] = (\mu_0] \lhd (\mu_1] \lhd \ldots \lhd (\mu_n] = (1_A] \qquad (***)$$

достижимых подобъектов объекта A, в которой каждая соседняя пара $(\mu_i] \lhd (\mu_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, нормальна, называется *нормальным рядом длины n для достижимого подобъекта* $(\mu]$. Факторы $[\nu_i, W_i)$ нормальных пар $(\mu_i] \lhd (\mu_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, называются *факторами нормального ряда* (***). Пусть

$$(\mu] = (\mu'_0] \lhd (\mu'_1] \lhd \ldots \lhd (\mu'_m] = (1_A] \qquad (****)$$

— второй нормальный ряд для достижимого подобъекта $(\mu]$ объекта A. Нормальные ряды (***) и (****) называются *изоморфными*, если $m = n$ и существует такая подстановка индексов $i \mapsto j(i)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, что фактор $[\nu_i, W_i)$ ряда (***) изоморфен фактору $[\nu'_{j(i)}, W'_{j(i)})$ ряда (****) для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Нормальный ряд (****) называется *уплотнением нормального ряда* (***), если каждый достижимый подобъект, входящий в нормальный ряд (***), совпадает с некоторым достижимым подобъектом из нормального ряда (****). Нормальный ряд (***), для которого не существует уплотнения, называется *композиционным рядом для достижимого подобъекта* $(\mu]$.

Для нормальных рядов любого достижимого подобъекта $(\mu]$ объекта A нормальной категории $\mathfrak{K}$ справедлива *теорема Шрейера*: любые два нормальных ряда для достижимого подобъекта $(\mu]$ обладают изоморфными уплотнениями. Отсюда вытекает *теорема Жордана — Гёльдера*: если для достижимого подобъекта $(\mu]$ объекта A существует композиционный ряд, то любые два композиционных ряда для достижимого подобъекта $(\mu]$ изоморфны и любой нормальный ряд для достижимого подобъекта $(\mu]$ можно уплотнить до композиционного ряда.

Нормальный ряд (***), все члены которого являются идеалами объекта A, называется *инвариантным рядом для идеала* $(\mu]$ объекта A. Неуплотняемый инвариантный ряд для идеала $(\mu]$ называется *главным рядом для идеала* $(\mu]$. Любые два инвариантных ряда для идеала $(\mu]$ объекта A обладают изоморфными уплотнениями. Если для идеала $(\mu]$ объекта A существует главный ряд, то любые два главных ряда для идеала $(\mu]$ изоморфны и любой инвариантный ряд для идеала $(\mu]$ можно уплотнить до главного ряда.

Двойственно достижимому мономорфизму определяется *достижимый эпиморфизм* нормальной категории $\mathfrak{K}$ как эпиморфизм π, разлагающийся в произведение $\pi = \theta_1 \ldots \theta_n$ нормальных эпиморфизмов θ_i, $i = 1, \ldots, n$. Факторобъект $[\pi, B)$ объекта A, задаваемый достижимым эпиморфизмом π, называется *достижимым факторобъектом* объекта A. Аналогично тому, как это сделано выше для достижимого подобъекта [идеала] $(\mu]$ объекта A, для достижимого факторобъекта [коидеала] $[\pi)$ объекта A определяются *нормальный ряд достижимых факторобъектов* [*инвариантный ряд коидеалов*] объекта A, *изоморфизм* двух нормальных [инвариантных] рядов, *уплотнение* нормального [инвариантного] ряда достижимых факторобъектов [коидеалов] объекта A, *композиционный* [*главный*] *ряд для достижимого факторобъекта* [*коидеала*] $[\pi)$ объекта A. Для достижимого факторобъекта [коидеала] $[\pi)$ объекта A нормальной категории $\mathfrak{K}$ справедливы аналоги теоремы Шрейера и теоремы Жордана — Гёльдера. Более подробно с нормальными категориями можно познакомиться по монографии [12].

3.3. Конкретные категории. Пара $(\mathfrak{K}, U)$, состоящая из некоторой категории $\mathfrak{K}$ и унивалентного функтора $U\colon \mathfrak{K} \to \mathrm{SET}$ в категорию множеств SET, называется *конкретной категорией*. Иногда под конкретной категорией понимается категория $\mathfrak{K}$, для которой существует унивалентный функтор $U\colon \mathfrak{K} \to \mathrm{SET}$.

В этом смысле конкретной является каждая категория структуризованных множеств, в частности, любая категория универсальных алгебр, категория топологических пространств и т. д. Конкретной является любая малая категория и любая категория с образующим объектом. Если $\mathfrak{K}$ — конкретная категория, то конкретными будут любая подкатегория категории $\mathfrak{K}$, категория $\mathfrak{K}^{op}$, двойственная категории $\mathfrak{K}$, категория функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ из любой малой категории $\mathfrak{D}$ в категорию $\mathfrak{K}$. Пример категории $\mathfrak{K}$, не являющейся конкретной категорией, дан в [12], с. 229.

Если $(\mathfrak{K}, U)$ и $(\mathfrak{L}, V)$ — две конкретные категории, то функтор F: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ называется *конкретным*, если выполняется условие $U = FV$. Говорят, что $(\mathfrak{K}, U)$ — конкретная категория с *конкретными* [*конечными*] *произведениями* [[*конечными*] *копроизведениями*], если $\mathfrak{K}$ — категория с [конечными] произведениями [[конечными] копроизведениями] и функтор U: $\mathfrak{K} \to$ $\to$ SET перестановочен с [конечными] произведениями [[конечными] копроизведениями]. Конкретная категория $(\mathfrak{K}, U)$ называется *конкретно* [*конечно*] *полной* [[*конечно*] *кополной*], если $\mathfrak{K}$ — [конечно] полная [[конечно] кополная] категория и функтор U — [конечно] непрерывный [[конечно] конепрерывный].

Пусть $\mathfrak{G}$ — категория групп и $|-|$: $\mathfrak{G} \to$ SET — функтор, сопоставляющий каждой группе G множество ее элементов $|G|$. Функтор $|-|$ унивалентный, так что $(\mathfrak{G}, |-|)$ — конкретная категория. Функтор $|-|$ непрерывный, но не конепрерывный (он не перестановочен с копроизведениями, совпадающими в категории групп $\mathfrak{G}$ со свободными произведениями). Таким образом, конкретная категория $(\mathfrak{G}, |-|)$ является конкретно полной, но не является конкретно кополной.

Подробно с конкретными категориями можно познакомиться по монографиям [12, 31].

3.4. Локально представимые и локально порожденные категории. Пусть α — некоторый регулярный кардинал. Частично упорядоченное множество M называется *α-направленным*, если для любого подмножества элементов $\{m_i, i \in I\}$ множества M мощности меньше α существует такой элемент $m \in M$, что $m_i \leqslant m$ для каждого $i \in I$.

Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная категория. Объект A категории $\mathfrak{K}$ называется *α-представимым*, если основной ковариантный функтор H^A: $\mathfrak{K} \to$ SET перестановочен с существующими в категории $\mathfrak{K}$ копределами функторов вида F: качум $M \to \mathfrak{K}$, где M — любое α-направленное множество. Объект $A \in \mathfrak{K}$ называется *α-порожденным*, если функтор H^A: $\mathfrak{K} \to$ SET перестановочен с существующими в категории $\mathfrak{K}$ копределами функторов вида F: качум $M \to \mathfrak{K}$, где M — любое α-направленное множество, значениями которых являются мономорфизмы категории $\mathfrak{K}$, т. е. $F(m \leqslant n)$ — мономорфизм категории $\mathfrak{K}$ для любой упорядоченной пары $m \leqslant n$ из α-направленного множества M.

В любом многообразии универсальных алгебр алгебра A является α-порожденной тогда и только тогда, когда она обладает множеством образующих, мощность которого не более α, и является α-представимой, если существует точная диаграмма

$$F_1 \underset{\delta_2}{\overset{\delta_1}{\rightrightarrows}} F_0 \xrightarrow{\theta} A,$$

где F_1 и F_0 — свободные алгебры ранга не выше α.

Категория $\mathfrak{K}$ называется *локально α-представимой* [*локально α-порожденной*], если она кополная, конечно полная и обладает множеством образующих, являющихся α-представимыми [α-порожденными] объектами. Категория $\mathfrak{K}$ называется *локально представимой* [*локально порожденной*], если она локально α-представима [локально α-порождаема] для некоторого α. Наименьший кардинал α, при котором локально представимая [локально порожденная] категория $\mathfrak{K}$ является локально α-представимой [локально α-порожденной] категорией, называется *рангом* представимости [порожденности] категории $\mathfrak{K}$. Каждая локально представимая категория является локально порожденной категорией, и наоборот. Любое многообразие универсальных алгебр является локально представимой категорией. Любая локально представимая категория $\mathfrak{K}$ вкладывается в качестве полной подкатегории в категорию функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathrm{SET})$ из некоторой малой категории $\mathfrak{D}$ в категорию множеств SET. Дополнительные сведения о локально представимых категориях можно найти в монографии [19].

3.5. Предаддитивные и аддитивные категории. Категория $\mathfrak{K}$ называется *предаддитивной*, если для любой пары объектов A, $B \in \mathfrak{K}$ на множестве морфизмов $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ определена структура абелевой группы и при этом умножение морфизмов дистрибутивно относительно сложения, т. е. $\gamma(\alpha+\beta)=\gamma\alpha+\gamma\beta$ и $(\alpha+\beta)\delta=\alpha\delta+\beta\delta$ для любых морфизмов $\gamma\colon U\to A$, α, $\beta\colon A\to B$, $\delta\colon B\to V$. Система нейтральных элементов $0_{A,B}$ абелевых групп $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$, A, $B\in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$, является системой нулевых морфизмов категории $\mathfrak{K}$. Понятие предаддитивной категории самодвойственно, так что категория $\mathfrak{K}^{\mathrm{op}}$, двойственная предаддитивной категории $\mathfrak{K}$, является предаддитивной категорией. Однообъектная предаддитивная категория представляет собой не что иное, как ассоциативное кольцо R с единицей. Если $\mathfrak{K}$ — предаддитивная категория, то для любой малой категории $\mathfrak{D}$ категория функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ предаддитивна.

Если для некоторого морфизма α предаддитивной категории $\mathfrak{K}$ существует ядерная пара $\mathrm{kep}\,\alpha=(\delta_1, \delta_2)$, то существует ядро морфизма α: $\ker\alpha=\delta_1-\delta_2$.

Функтор $F\colon \mathfrak{K}\to\mathfrak{L}$ между предаддитивными категориями называется *аддитивным*, если $F(\alpha+\beta)=F(\alpha)+F(\beta)$ для любых двух параллельных морфизмов α, $\beta\in\mathfrak{K}$.

Предаддитивная категория $\mathfrak{K}$ с конечными произведениями и конечными копроизведениями, обладающая нулевым объектом, называется *аддитивной категорией.*

Отметим, что, например, в монографии [12] под аддитивной категорией понимается категория $\mathfrak{K}$ с конечными произведениями и нулевыми морфизмами, в которой на множестве морфизмов $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ для любых объектов A, $B\in\mathfrak{K}$ вместо структуры аддитивной абелевой группы определена структура аддитивной абелевой полугруппы с нулем. Такую категорию, может быть, следует назвать *полуаддитивной.*

Понятие аддитивной категории самодвойственно, так что категория $\mathfrak{K}^{\mathrm{op}}$, двойственная аддитивной категории $\mathfrak{K}$, является аддитивной категорией. В аддитивной категории $\mathfrak{K}$ канонический морфизм $\gamma\colon A*B\to A\times B$ является изоморфизмом для любых двух объектов A, $B\in\mathfrak{K}$, так что можно считать, что в аддитивной категории $\mathfrak{K}$ произведение $A_1\times\ldots\times A_n$ конечного множества объектов $A_1, \ldots, A_n$ всегда совпадает с копроизведением $A_1*\ldots*A_n$ тех же объектов, и в этом случае произведение и копроизведение конечного множества объектов $A_1, \ldots, A_n$ называется *прямой суммой объектов* $A_1, \ldots, A_n$ и обозначается $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ или $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ $(\pi_i;\ \sigma_i,\ i=1, \ldots, n)$, где $\pi_i\colon A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \to A_i$ — проекции и $\sigma_i\colon A_i \to A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ — вложения прямой суммы.

Для того чтобы объект A аддитивной категории $\mathfrak{K}$ разлагался в прямую сумму $A = A_1 \oplus A_2$, необходимо и достаточно существование таких морфизмов $\pi_i\colon A \to A_i$ и $\sigma_i\colon A_i \to A$, $i=1, 2$, что $\sigma_i\pi_i = 1_{A_i}$, $i=1, 2$, $\sigma_i\pi_j = 0$ при $i \neq j$ и $\pi_1\sigma_1 + \pi_2\sigma_2 = 1_A$. В этом случае для любых двух морфизмов $\alpha_i\colon X \to A_i$, $i=1, 2$, морфизм $\alpha_1 (\times) \alpha_2\colon X \to A$ определяется по формуле $\alpha_1 (\times) \alpha_2 = \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2$ и для любых двух морфизмов $\beta_i\colon A_i \to Y$, $i=1, 2$, морфизм $\beta_1 (*) \beta_2\colon A \to Y$ определяется по формуле $\beta_1 (*) \beta_2 = \pi_1\beta_1 + \pi_2\beta_2$.

В аддитивной категории $\mathfrak{K}$ структура абелевой группы на множестве морфизмов $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$, $A, B \in \operatorname{Ob}\mathfrak{K}$, определяется однозначно: сумма $\alpha + \beta$ для любых двух морфизмов $\alpha, \beta\colon A \to B$ определяется по формуле $\alpha + \beta = \Delta_A (\alpha \oplus \beta) \nabla_B$, где $\Delta_A\colon A \to A \oplus A$ — диагональ объекта A, $\alpha \oplus \beta = \alpha \times \beta\colon A \oplus A \to B \oplus B$ и $\nabla_B\colon B \oplus B \to B$ — кодиагональ объекта B.

Функтор $F\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ между аддитивными категориями аддитивен тогда и только тогда, когда он переводит прямую сумму $A_1 \oplus A_2 (\pi_1, \pi_2;\ \sigma_1, \sigma_2)$ любых двух объектов $A_1, A_2 \in \mathfrak{K}$ в прямую сумму $F(A_1) \oplus F(A_2) (F(\pi_1), F(\pi_2);\ F(\sigma_1), F(\sigma_2))$.

Аддитивными категориями являются, например, категория R-Mod всех левых модулей над произвольным ассоциативным кольцом R с единицей, в частности, категория абелевых групп, категория абелевых групп без кручения, категория периодических абелевых групп, категория конечных абелевых групп, категория делимых абелевых групп и т. д.

3.6. Предабелевы и абелевы категории. Аддитивная категория $\mathfrak{K}$ с ядрами и коядрами морфизмов называется *предабелевой* категорией. Понятие предабелевой категории самодвойственно, так что категория $\mathfrak{K}^{op}$, двойственная предабелевой категории $\mathfrak{K}$, является предабелевой.

Предабелева категория $\mathfrak{K}$ является конечно биполной, поскольку в ней существуют конечные прямые суммы объектов и для любых двух параллельных морфизмов $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$ ядро пары $\operatorname{Ker}(\alpha, \beta)$ и коядро пары $\mathrm{Coker}(\alpha, \beta)$ определяются по формулам $\mathrm{Ker}(\alpha, \beta) = \mathrm{Ker}(\alpha - \beta)$ и $\mathrm{Coker}(\alpha, \beta) = \mathrm{Coker}(\alpha - \beta)$.

В предабелевой категории $\mathfrak{K}$ морфизм φ является мономорфизмом [эпиморфизмом] тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ [$\mathrm{Coker}\,\varphi = 0$].

Объект B называется *прямым слагаемым* объекта A, если $A = B \oplus C$ для некоторого объекта C. В предабелевой категории $\mathfrak{K}$ объект B является прямым слагаемым объекта A тогда и только тогда, когда B является ретрактом объекта A. Для двух морфизмов $\alpha_i\colon A_i \to A$, $i = 1, 2$, предабелевой категории $\mathfrak{K}$ универсальный квадрат строится следующим образом: берутся прямая сумма $A_1 \oplus A_2$ $(\pi_1, \pi_2;\ \sigma_1, \sigma_2)$ и идеал $(P, \mu]$ объекта $A_1 \oplus A_2$, являющийся ядром морфизма $\pi_1\alpha_1 - \pi_2\alpha_2\colon A_1 \oplus A_2 \to A$. Тогда

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\mu\pi_1"] \arrow[d, "\mu\pi_2"'] & A_1 \arrow[d, "\alpha_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\alpha_2"'] & A \end{tikzcd} \qquad (*)$$

— универсальный квадрат относительно α_1 и α_2. В универсальном квадрате $(*)$ α_1 — мономорфизм тогда и только тогда, когда $\mu\pi_2$ — мономорфизм. Двойственно, для построения в предабелевой категории $\mathfrak{K}$ коуниверсального квадрата относительно морфизмов $\beta_i\colon B \to B_i$, $i = 1, 2$, берутся прямая сумма $B_1 \oplus B_2$ $(\nu_1, \nu_2;\ \rho_1, \rho_2)$ и коидеал $[\theta, Q)$ объекта $B_1 \oplus B_2$, являющийся коядром морфизма $\beta_1\rho_1 - \beta_2\rho_2\colon B \to B_1 \oplus \oplus B_2$. Тогда

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & B_1 \arrow[d, "\rho_1\theta"] \\ B_2 \arrow[r, "\rho_2\theta"'] & Q \end{tikzcd} \qquad (**)$$

— коуниверсальный квадрат относительно β_1 и β_2. В коуниверсальном квадрате $(**)$ β_1 — эпиморфизм тогда и только тогда, когда $\rho_2\theta$ — эпиморфизм.

Предабелева категория $\mathfrak{K}$, в которой каждый мономорфизм является нормальным мономорфизмом и каждый эпиморфизм является нормальным эпиморфизмом, называется *абелевой* категорией. Понятие абелевой категории самодвойственно, так что категория $\mathfrak{K}^{op}$, двойственная абелевой категории $\mathfrak{K}$, является абелевой категорией. Если $\mathfrak{K}$ — абелева категория, то для любой малой категории $\mathfrak{D}$ категория функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ — абелева категория.

Примерами абелевых категорий являются: категория R-Mod всех левых модулей над произвольным ассоциативным кольцом R с единицей, категория абелевых групп, категория периодических абелевых групп, категория конечных абелевых групп, категория топологических абелевых групп. Следует отметить, что не каждая даже полная подкатегория абелевой категории является абелевой категорией. Например, полная подкатегория $\mathfrak{Z}$ категории абелевых групп $\mathfrak{Ab}$, порожденная всеми циклическими группами, является предаддитивной, но не является даже аддитивной.

Точная категория $\mathfrak{K}$ является абелевой категорией тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}$ — аддитивная категория. Нормальная категория $\mathfrak{K}$ является абелевой категорией тогда и только тогда, когда в категории $\mathfrak{K}$ для любых двух объектов A_1, A_2 существует произведение $A_1 \times A_2(\pi_1, \pi_2; \sigma_1, \sigma_2)$, причем коконус вложений $(\sigma_i\colon A_i \to A_1 \times A_2;\ i = 1, 2)$ является эпикоконусом, и для любого объекта $A \in \mathfrak{K}$ диагональ $\Delta_A\colon A \to A \times A$ — нормальный мономорфизм.

Любая абелева категория $\mathfrak{K}$ является категорией с разложением $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}, \mathrm{Epi}_n \mathfrak{K}, \mathrm{Mon}_n \mathfrak{K})$, где $\mathrm{Epi}_n \mathfrak{K}$ — класс всех нормальных эпиморфизмов, совпадающий с классом всех эпиморфизмов, и $\mathrm{Mon}_n \mathfrak{K}$ — класс всех нормальных мономорфизмов, совпадающий с классом всех мономорфизмов категории $\mathfrak{K}$. Таким образом, любой морфизм $\alpha\colon A \to B$ абелевой категории $\mathfrak{K}$ является нормальным, т. е. он обладает нормальным разложением $\alpha = (\mathrm{coim}\,\alpha)(\mathrm{im}\,\alpha)$ в произведение нормального эпиморфизма $\mathrm{coim}\,\alpha\colon A \to \mathrm{Im}\,\alpha$ и нормального мономорфизма $\mathrm{im}\,\alpha\colon \mathrm{Im}\,\alpha \to B$.

Пусть $\mathfrak{K}$ — абелева категория. Конечная или бесконечная последовательность

$$\ldots \to A_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n+1} \to \ldots$$

морфизмов категории $\mathfrak{K}$ называется *точной*, если для каждого $n \in N$ последовательность

$$\mathrm{Im}\,\varphi_{n-1} \xrightarrow{\mathrm{im}\,\varphi_{n-1}} A_n \xrightarrow{\mathrm{coim}\,\varphi_n} \mathrm{Im}\,\varphi_n$$

является 0-точной. Наиболее распространенными являются следующие точные последовательности:

$$0 \to U \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varphi} B, \qquad (***)$$

означающая, что μ — нормальный мономорфизм и $\ker \varphi = \mu$;

$$V \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\theta} B \to 0, \qquad (****)$$

означающая, что $\operatorname{im} \psi = \ker \theta$ и θ — нормальный эпиморфизм, так что $\theta = \operatorname{coker} \psi$;

$$0 \to U \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\theta} B \to 0, \qquad (*****)$$

означающая, что последовательность $U \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\theta} B$ является 0-точной. Последовательность (*****) часто называется *короткой точной последовательностью.*

Поскольку, как отмечено, построение ядра и коядра пары параллельных морфизмов абелевой категории $\mathfrak{K}$ сводится к построению ядра и коядра морфизма, и всякий аддитивный функтор сохраняет прямую сумму двух объектов, аддитивный функтор $F\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ между абелевыми категориями точен слева [справа] тогда и только тогда, когда он переводит любую точную последовательность вида (***) [любую точную последовательность вида (****)] в точную последовательность $0 \to F(U) \xrightarrow{F(\mu)} F(A) \xrightarrow{F(\varphi)} F(B)$ [в точную последовательность $F(V) \xrightarrow{F(\psi)} F(A) \xrightarrow{F(\theta)} F(B) \to 0$]. Функтор $F\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ называется *точным*, если он точен слева и точен справа. Аддитивный функтор $F\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ между абелевыми категориями точен тогда и только тогда, когда он всякую короткую точную последовательность (*****) переводит в короткую точную последовательность $0 \to F(U) \xrightarrow{F(\mu)} F(A) \xrightarrow{F(\theta)} F(B) \to 0$.

Говорят, что абелева категория $\mathfrak{K}$ удовлетворяет *условию* AB3, если $\mathfrak{K}$ — кополная категория, т. е. для любого семейства объектов $A_i \in \mathfrak{K}$, $i \in I$, существует копроизведение $\coprod_{i \in I} A_i$.

Категория конечных абелевых групп является примером абелевой категории, не удовлетворяющей условию AB3.

Говорят, что абелева категория $\mathfrak{K}$ удовлетворяет *условию* AB4, если $\mathfrak{K}$ удовлетворяет условию AB3 и для любого семейства мономорфизмов λ_i: $A_i \to B_i$, $i \in I$, морфизм $\coprod\limits_{i \in I} \lambda_i$: $\coprod\limits_{i \in I} A_i \to \coprod\limits_{i \in I} B_i$ (см. п. 1.7) является мономорфизмом.

Говорят, что абелева категория $\mathfrak{K}$ удовлетворяет *условию* AB5, если $\mathfrak{K}$ удовлетворяет условию AB3 и для любого направленного вверх множества подобъектов $(\mu_i]$, $i \in I$, любого объекта $A \in \mathfrak{K}$ и для любого подобъекта $(\sigma]$ объекта A выполняется равенство $\left(\bigcup\limits_{i \in I} (\mu_i]\right) \cap (\sigma] = \bigcup\limits_{i \in I} ((\mu_i] \cap (\sigma])$. Поскольку в абелевой категории $\mathfrak{K}$ с условием AB5 выполняется условие AB3, в категории $\mathfrak{K}$ для любого множества подобъектов $(U_i, \mu_i]$, $i \in I$, любого объекта $A \in \mathfrak{K}$ в частично упорядоченном классе $\mathrm{Sub}(A)$ подобъектов объекта A существует объединение (см. п. 1.7). В $\mathrm{Sub}(A)$ определены пересечения конечного множества подобъектов, поскольку в абелевой категории каждый подобъект является идеалом объекта A, т. е. $\mathrm{Sub}(A) = I(A)$, а пересечение конечного множества идеалов любого объекта определено в нормальной категории, а следовательно, и в абелевой категории. Каждая абелева категория $\mathfrak{K}$ с условием AB5 является абелевой категорией с условием AB4.

Для любой абелевой категории $\mathfrak{K}$ с условием AB3 [AB4, AB5] и для любой малой категории $\mathfrak{D}$ категория функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ удовлетворяет условию AB3 [AB4, AB5]. Категория $\mathfrak{K}^{op}$, двойственная абелевой категории $\mathfrak{K}$ с условием AB3, удовлетворяет условию AB3*, двойственному условию AB3, но может не удовлетворять условию AB3. Например, категория периодических абелевых групп $\mathfrak{Ab}_p$ является кополной, т. е. удовлетворяет условию AB3, но не является полной, т. е. не удовлетворяет условию AB3*. Значит, абелева категория $\mathfrak{Ab}_p^{op}$, двойственная категории $\mathfrak{Ab}_p$, не удовлетворяет условию AB3. Заметим, что абелева категория $\mathfrak{Ab}_p$ удовлетворяет не только условию AB3, но и условию AB5. Категория абелевых групп $\mathfrak{Ab}$ удовлетворяет условию AB5, а двойственная категория $\mathfrak{Ab}^{op}$ удовлетворяет условию AB4 и не удовлетворяет условию AB5.

Следующие свойства кополной абелевой категории $\mathfrak{K}$ равносильны: (1) $\mathfrak{K}$ — категория с условием AB5; (2) для любого направленного вверх множества Q функтор $\mathrm{Colim}: \mathfrak{F}(\text{качум}\, Q, \mathfrak{K}) \to \mathfrak{K}$ точный; (3) в категории $\mathfrak{K}$ имеет место перестановочность $\mathfrak{A}$-пределов с качум $\mathfrak{B}$-копределами для любой конечной категории $\mathfrak{A}$ и любого направленного качум $\mathfrak{B}$.

Абелева категория $\mathfrak{K}$ с условием AB5, обладающая образующим объектом U, называется *категорией Гротендика.*

Категория R-Mod всех левых модулей над произвольным ассоциативным кольцом R с единицей, в частности категория абелевых групп $\mathfrak{Ab}$, является категорией Гротендика. Категория периодических абелевых групп $\mathfrak{Ab}_p$ удовлетворяет условию AB5, но не является категорией Гротендика. Категория $\mathfrak{K}^{\mathrm{op}}$, двойственная категории Гротендика $\mathfrak{K}$, может не быть категорией Гротендика. Как отмечено выше, категория $\mathfrak{Ab}^{\mathrm{op}}$ не является категорией Гротендика.

Каждая категория Гротендика $\mathfrak{K}$ является локально малой биполной категорией, в которой для любого семейства объектов $A_i \in \mathfrak{K}$, $i \in I$, канонический морфизм $\gamma: \coprod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} A_i$ является мономорфизмом. В случае конечного множества индексов I канонический морфизм γ является изоморфизмом (см. п. 3.5), а в случае бесконечного множества индексов I мономорфизм γ, как правило, изоморфизмом не является. Каждый объект категории Гротендика $\mathfrak{K}$ обладает инъективной оболочкой.

Пусть $\mathfrak{K}$ — категория Гротендика. Тогда она локально малая и, как отмечено выше, частично упорядоченное множество $\mathrm{Sub}(A)$ подобъектов любого объекта $A \in \mathfrak{K}$ является полной решеткой. Объект $A \in \mathfrak{K}$ называется: *конечно порожденным*, если объединение $\bigcup_{i \in I} (\mu_i]$ любой возрастающей цепочки собственных подобъектов $(\mu_i]$, $i \in I$, объекта A является собственным подобъектом объекта A, *компактным*, если из равенства $\bigcup_{i \in I} (\mu_i] = (1_A]$ для некоторого множества подобъектов $(\mu_i]$, $i \in I$, объекта A следует, что $(\mu_1] \cup \ldots \cup (\mu_n] = (1_A]$ для некоторого конечного подмножества $(\mu_1], \ldots, (\mu_n]$ множества $(\mu_i]$, $i \in I$, подобъектов объекта A, *нётеровым*, если решетка

$\mathrm{Sub}(A)$ нётерова (т. е. любая строго возрастающая цепь подобъектов объекта A конечна), ***малым***, если для всякого морфизма $\varphi\colon A \to \coprod_{i \in I} B_i$ из семейства объектов B_i, $i \in I$, можно выбрать такое конечное подсемейство объектов $B_1, \ldots, B_n$, что $\varphi = \varphi'\sigma$ для некоторого морфизма $\varphi'\colon A \to B_1 * \ldots * B_n$ и естественно определяемого вложения $\sigma\colon B_1 * \ldots * B_n \to \coprod_{i \in I} B_i$.

Объект $A \in \mathfrak{K}$ является конечно порожденным тогда и только тогда, когда он компактный. Каждый конечно порожденный объект A является малым объектом. Каждый нётеров объект A является конечно порожденным. Если $\theta\colon A \to B$ — эпиморфизм категории $\mathfrak{K}$ и A — конечно порожденный объект, то B — конечно порожденный объект. В категории R-Mod всех левых модулей над любым ассоциативным кольцом R с единицей объект A конечно порожден тогда и только тогда, когда A — конечно порожденный модуль.

Категория Гротендика $\mathfrak{K}$ называется *локально нётеровой*, если в ней существует нётеров образующий объект U. Если R — нётерово ассоциативное кольцо с единицей, то категория модулей R-Mod локально нётерова. В локально нётеровой категории $\mathfrak{K}$ каждый конечно порожденный объект является нётеровым объектом и каждый объект представим в виде объединения некоторого множества своих конечно порожденных подобъектов. В локально нётеровой категории $\mathfrak{K}$ копроизведение $\coprod_{i \in I} Q_i$ любого семейства инъективных объектов Q_i, $i \in I$, инъективно и имеет место *теорема Крулля — Ремака — Шмидта*: любой инъективный объект Q локально нётеровой категории $\mathfrak{K}$ однозначно с точностью до перестановок сомножителей разлагается в копроизведение $Q = \coprod_{i \in I} Q_i$ неразложимых инъективных объектов Q_i, $i \in I$ (объект U абелевой категории $\mathfrak{K}$ называется ***неразложимым***, если $U = U_1 \oplus U_2$ влечет за собой $U_1 = 0$ или $U_2 = 0$). Инъективный объект Q категории Гротендика $\mathfrak{K}$ неразложим тогда и только тогда, когда его кольцо эндоморфизмов $H_{\mathfrak{K}}(Q, Q)$ является локальным кольцом.

Категория Гротендика $\mathfrak{K}$ эквивалентна категории всех левых модулей R-Mod над некоторым ассоциативным кольцом R с единицей тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}$ обладает конечно порожденным проективным образующим U. В этом случае в качестве кольца R берется кольцо, инверсное кольцу эндоморфизмов $R^* = H_{\mathfrak{K}}(U, U)$ объекта U, и функтор $H^U_{\mathfrak{Ab}}$: $\mathfrak{K} \to R$-Mod, осуществляющий эквивалентность категорий $\mathfrak{K}$ и R-Mod, определяется следующим образом: $H^U_{\mathfrak{Ab}}(A) = H_{\mathfrak{K}}(U, A)$ для каждого объекта $A \in \mathfrak{K}$, где $H_{\mathfrak{K}}(U, A)$ — абелева группа, на которой структура левого R-модуля определяется по формуле $\varphi \cdot \alpha = \varphi\alpha$ для любых элементов $\varphi \in R$ и $\alpha \in H_{\mathfrak{K}}(U, A)$ (в правой части этого равенства имеется в виду произведение морфизмов в категории $\mathfrak{K}$), и $H^U_{\mathfrak{Ab}}(\gamma)$: $H_{\mathfrak{K}}(U, A) \to H_{\mathfrak{K}}(U, B)$ — гомоморфизм модулей для любого морфизма γ: $A \to B$ категории $\mathfrak{K}$, сопоставляющий любому элементу $\alpha \in H_{\mathfrak{K}}(U, A)$ элемент $\alpha\gamma \in H_{\mathfrak{K}}(U, B)$.

Любую малую подкатегорию $\mathfrak{L}$ любой абелевой категории $\mathfrak{K}$ можно расширить до некоторой малой абелевой подкатегории $\overline{\mathfrak{L}}$ категории $\mathfrak{K}$. Любая же малая абелева категория $\mathfrak{K}$ точно вкладывается в качестве полной абелевой подкатегории категории модулей R-Mod над некоторым ассоциативным кольцом R с единицей и в качестве абелевой подкатегории категории абелевых групп $\mathfrak{Ab}$.

3.7. Ol-категории. Категория $\mathfrak{R}$ называется *упорядоченной* или О-*категорией*, если для любой пары объектов $A, B \in \mathfrak{R}$ множество морфизмов $H_{\mathfrak{R}}(A, B)$ частично упорядочено, причем $\alpha \leqslant \beta$ для морфизмов $\alpha, \beta \in H_{\mathfrak{R}}(A, B)$ влечет за собой $\gamma\alpha \leqslant \gamma\beta$ и $\alpha\delta \leqslant \beta\delta$ для любых морфизмов γ: $X \to A$ и δ: $B \to Y$. Функтор F: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{R}$ О-категории $\mathfrak{K}$ в О-категорию $\mathfrak{R}$ называется О-*функтором*, если для параллельных морфизмов $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$ из соотношения $\alpha \leqslant \beta$ следует $F(\alpha) \leqslant F(\beta)$, т. е. для любых объектов $A, B \in \mathfrak{K}$ отображение $F_{A, B}$: $H_{\mathfrak{K}}(A, B) \to H_{\mathfrak{R}}(F(A), F(B))$ (см. п. 2.1) монотонно.

Примером О-категории является категория $\mathfrak{P}$ частично упорядоченных множеств и монотонных отображений (см. п. 1.1, пример 4)). В этой категории на множестве $H_{\mathfrak{P}}(M, N)$ монотонных отображений из частично упорядоченного множества M

в частично упорядоченное множество N можно ввести отношение частичного порядка $\leqslant$, полагая $f \leqslant g$, где $f, g\colon M \to N$, если $f(m) \leqslant g(m)$ для каждого элемента $m \in M$.

Категория $\mathfrak{K}$ называется *категорией с инволюцией* или I-*категорией*, если задан контравариантный функтор $^\#\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$, называемый *инволюцией*, удовлетворяющий условиям $A^\# = A$ для любого объекта $A \in \mathfrak{K}$ и $(\alpha^\#)^\# = \alpha$ для любого морфизма $\alpha \in \mathfrak{K}$. Функтор $F\colon \mathfrak{R} \to \mathfrak{K}$ из I-категории $\mathfrak{R}$ в I-категорию $\mathfrak{K}$ называется I-*функтором*, если $F(\alpha^\#) = F(\alpha)^\#$ для любого морфизма $\alpha \in \mathfrak{R}$. Категория $\mathfrak{K}$, являющаяся одновременно O-категорией и I-категорией, называется OI-*категорией*, если из соотношения $\alpha \leqslant \beta$ для параллельных морфизмов $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$ следует $\alpha^\# \leqslant \beta^\#$. Функтор между OI-категориями, являющийся одновременно O-функтором и I-функтором, называется OI-*функтором*.

Пусть $\mathfrak{K}$ есть OI-категория и $\alpha\colon A \to B$ — морфизм категории $\mathfrak{K}$, так что $\alpha^\#\colon B \to A$. Морфизм α называется D-*регулярным* [B-*регулярным*, I-*регулярным*, K-*регулярным*], если $\alpha\alpha^\# \geqslant 1_A$ [$\alpha^\#\alpha \geqslant 1_B$, $\alpha^\#\alpha \leqslant 1_B$, $\alpha\alpha^\# \leqslant 1_A$]. Морфизмы одного и того же типа регулярности образуют подкатегорию категории $\mathfrak{K}$. DI-*регулярные* морфизмы, т. е. морфизмы, являющиеся одновременно D-регулярными и I-регулярными, называются *собственными* или *функциональными морфизмами* OI-категории $\mathfrak{K}$; они образуют подкатегорию $\mathfrak{P}(\mathfrak{K})$ функциональных морфизмов OI-категории $\mathfrak{K}$. DIB-регулярные морфизмы называются *проекциями*, а DIK-регулярные морфизмы — *инъекциями* OI-категории $\mathfrak{K}$. Проекции и инъекции образуют подкатегории $\mathrm{Pr}\,\mathfrak{K}$ и $\mathrm{In}\,\mathfrak{K}$ соответственно.

Примером OI-категории является категория $\mathfrak{K}(\mathrm{SET})$ соответствий над категорией множеств SET, объектами которой являются все множества, а морфизмами — соответствия между множествами (см. I. 1.2). Единичным морфизмом любого множества A в категории $\mathfrak{K}(\mathrm{SET})$ является диагональ Δ_A. Отношение частичного порядка на множестве $H_{\mathfrak{K}(\mathrm{SET})}(A, B)$ определяется включением, а инволюция $^\#$ любому соответствию $R \in H_{\mathfrak{K}(\mathrm{SET})}(A, B)$ сопоставляет соответствие $R^\# = \{(a, b) \mid (b, a) \in R\}$.

Более подробные сведения об OI-категориях можно найти в [16].

3.8. Моноидальные, замкнутые и относительные категории. Под *моноидальной* категорией понимается шестерка $(\mathfrak{K}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$, состоящая из категории $\mathfrak{K}$, функтора $-\otimes-: \mathfrak{K}\times\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}$, объекта $I\in\mathfrak{K}$ и естественного изоморфизма α: $-\otimes(-\otimes-)\to\to(-\otimes-)\otimes-$ функтора $-\otimes(-\otimes-): \mathfrak{K}\times\mathfrak{K}\times\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}$ в функтор $(-\otimes-)\otimes-: \mathfrak{K}\times\mathfrak{K}\times\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}$, т. е. для любых трех объектов $A, B, C\in\mathfrak{K}$ в категории $\mathfrak{K}$ определен изоморфизм $\alpha_{A,B,C}$: $A\otimes(B\otimes C)\to(A\otimes B)\otimes C$ (мы далее будем опускать индексы у α), естественный по всем трем аргументам, т. е. для любых морфизмов φ: $A\to A'$, ψ: $B\to B'$, ε: $C\to C'$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A\otimes(B\otimes C) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi\otimes(\psi\otimes\varepsilon)"'] & (A\otimes B)\otimes C \arrow[d, "(\varphi\otimes\psi)\otimes\varepsilon"] \\
A'\otimes(B'\otimes C') \arrow[r, "\alpha"'] & (A'\otimes B')\otimes C'
\end{tikzcd}$$

естественного изоморфизма λ: $I\otimes-\to\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}$ функтора $I\otimes-: \mathfrak{K}\to\mathfrak{K}$ в тождественный функтор $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}: \mathfrak{K}\to\mathfrak{K}$, т. е. для каждого объекта $A\in\mathfrak{K}$ в категории $\mathfrak{K}$ определен изоморфизм λ_A: $I\otimes A\to A$ (мы далее будем опускать индекс у λ), естественный по A, т. е. для любого морфизма φ: $A\to A'$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
I\otimes A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "1_I\otimes\varphi"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
I\otimes A' \arrow[r, "\lambda"'] & A'
\end{tikzcd}$$

и естественного изоморфизма ρ: $-\otimes I\to\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}$ функтора $-\otimes I$: $\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}$ в функтор $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}$: $\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}$, т. е. для каждого объекта $A\in\mathfrak{K}$ в категории $\mathfrak{K}$ определен изоморфизм ρ_A: $A\otimes I\to A$ (мы далее будем опускать индекс у ρ), естественный по A (в том же смысле, в каком естествен изоморфизм λ). Естественные изоморфизмы α, λ, ρ удовлетворяют *условиям когерентности*, выражающимся в коммутативности следующих двух диаграмм:

$$\begin{tikzcd}
A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_A\otimes\alpha"'] & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \arrow[r, "\alpha"] & ((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \arrow[d, "\alpha^{-1}\otimes 1_D"] \\
A\otimes((B\otimes C)\otimes D) \arrow[rr, "\alpha"'] & & (A\otimes(B\otimes C))\otimes D
\end{tikzcd}$$

для любых объектов A, B, C, $D \in \mathfrak{K}$,

$$\begin{tikzcd}
A\otimes(I\otimes B) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "1_A\otimes\lambda"'] & & (A\otimes I)\otimes B \arrow[dl, "\rho\otimes 1_B"] \\
& A\otimes B &
\end{tikzcd}$$

для любых объектов A, $B \in \mathfrak{K}$ и в равенстве $\lambda_I = \rho_I$: $I \otimes I \to I$. Функтор $\otimes$ часто называют *тензорным произведением* в моноидальной категории, естественный изоморфизм α — *изоморфизмом ассоциативности* тензорного произведения, естественные изоморфизмы λ и ρ — *изоморфизмами* соответственно *левой* и *правой единицы* тензорного произведения, объект I — *единичным объектом* моноидальной категории. Моноидальную категорию $(\mathfrak{K}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ часто обозначают $(\mathfrak{K}, \otimes, I)$ или даже одной буквой $\mathfrak{K}$. Моноидальная категория $(\mathfrak{K}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ называется *строго моноидальной*, если в ней α, λ, ρ — тождественные естественные преобразования, т. е. имеют место равенства: $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$, $I \otimes A = A$, $A \otimes I = A$ для любых объектов A, B, $C \in \mathfrak{K}$.

Функтор T: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ из моноидальной категории $(\mathfrak{K}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ в моноидальную категорию $(\mathfrak{K}', \otimes', I', \alpha', \lambda', \rho')$ называется *моноидальным*, если выполняются следующие равенства: $T(A \otimes B) = T(A) \otimes' T(B)$ для любых объектов A, $B \in \mathfrak{K}$, $T(\varphi \otimes \psi) = T(\varphi) \otimes' T(\psi)$ для любых морфизмов φ, $\psi \in \mathfrak{K}$, $T(\alpha_{A,B,C}) = \alpha'_{T(A), T(B), T(C)}$, $T(\lambda_A) = \lambda'_{T(A)}$, $T(\rho_A) = \rho'_{T(A)}$.

Моноидальная категория $\mathfrak{K}$ называется *симметрической* моноидальной категорией, если для любых двух объектов A, $B \in \mathfrak{K}$ в категории $\mathfrak{K}$ определен изоморфизм $\gamma_{A,B}$: $A \otimes B \to B \otimes A$ (мы будем часто опускать индексы у γ), естественный по A и B, т. е. для любых морфизмов φ: $A \to A'$ и ψ: $B \to B'$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A\otimes B \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\varphi\otimes\psi"'] & B\otimes A \arrow[d, "\psi\otimes\varphi"] \\ A'\otimes B' \arrow[r, "\gamma"'] & B'\otimes A' \end{tikzcd}$$

В симметрической моноидальной категории $\mathfrak{K}$ к указанным выше условиям когерентности добавляются следующие:

$$\gamma_{A,B}^{-1} = \gamma_{B,A}$$

для любых объектов A, $B \in \mathfrak{K}$ и коммутативны диаграмма

$$\begin{tikzcd} I\otimes A \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & A\otimes I \arrow[dl, "\rho"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

для любого объекта $A \in \mathfrak{K}$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} A\otimes(B\otimes C) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_A\otimes\gamma"'] & (A\otimes B)\otimes C \arrow[r, "\gamma"] & C\otimes(A\otimes B) \arrow[d, "\alpha"] \\ A\otimes(C\otimes B) \arrow[r, "\alpha"] & (A\otimes C)\otimes B \arrow[r, "\gamma\otimes 1_B"] & (C\otimes A)\otimes B \end{tikzcd}$$

для любых объектов A, B, $C \in \mathfrak{K}$.

Примеры моноидальных и симметрических моноидальных категорий.

1) Категория R-Mod модулей над коммутативным ассоциативным кольцом R с единицей является симметрической моноидальной категорией относительно обычного тензорного произведения модулей над кольцом R. Единичным объектом моноидальной категории R-Mod является само кольцо R, рассматриваемое как R-модуль. Изоморфизм $\gamma_{A,B}$: $A \otimes_R B \to B \otimes_R A$ для любых R-модулей A и B определяется по формуле $\gamma_{A,B}(a \otimes b) = b \otimes a$ для любых $a \in A$ и $b \in B$.

2) Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с конечными произведениями и терминальным объектом $\top$. Тогда $\mathfrak{K}$ — моноидальная категория, в

которой роль тензорного произведения $\otimes$ играет произведение $\times$, т. е. $A \otimes B = A \times B$ для любых объектов $A, B = \mathfrak{K}$, а роль единичного объекта — объект $\top$. Если $A \times B(\pi_1, \pi_2)$ и $B \times A(\rho_1, \rho_2)$ — произведения, то морфизм $\gamma = \pi_2(\times)\pi_1$: $A \times B \to B \times A$ является изоморфизмом, естественным по A и B. Таким образом, $\mathfrak{K}$ — симметрическая моноидальная категория.

Аналогично, категория $\mathfrak{K}$ с конечными копроизведениями и инициальным объектом $\perp$ является симметрической моноидальной категорией, в которой роль тензорного произведения $\otimes$ играет копроизведение $*$, т. е. $A \otimes B = A * B$ для любых объектов A, $B \in \mathfrak{K}$, а единичным объектом является объект $\perp$.

Таким образом, если $\mathfrak{K}$ — категория с конечными произведениями и конечными копроизведениями (таким является, например, любое многообразие универсальных алгебр и, в частности, категория множеств SET) и $\top$ и $\perp$ — ее терминальный и инициальный объекты соответственно, то на категории $\mathfrak{K}$ можно определить по крайней мере две структуры симметрической моноидальной категории $(\mathfrak{K}, \times, \top)$ и $(\mathfrak{K}, *, \perp)$.

3) Если $\mathfrak{D}$ — любая малая категория и $\mathrm{End}(\mathfrak{D})$ — категория эндофункторов категории $\mathfrak{D}$, т. е. функторов из категории $\mathfrak{D}$ в категорию $\mathfrak{D}$, то $\mathrm{End}(\mathfrak{D})$ — строго моноидальная категория, в которой $F \otimes G = FG$ для любых функторов F: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ и G: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$. Единичным объектом моноидальной категории $\mathrm{End}(\mathfrak{D})$ является тождественный функтор $\mathrm{Id}_{\mathfrak{D}}$. Строго моноидальная категория $\mathrm{End}(\mathfrak{D})$ в общем случае не является симметрической моноидальной категорией.

Симметрическая моноидальная категория $(\mathfrak{K}, \times, I)$, называется *замкнутой*, если для каждого объекта $B \in \mathfrak{K}$ функтор $-\otimes B$: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ обладает сопряженным справа функтором $(-)^B$: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$, т. е. для любых объектов A, B, $C \in \mathfrak{K}$ существует биективное соответствие

$$\theta_{A,B,C}\colon H_{\mathfrak{K}}(A \otimes B, C) \to H_{\mathfrak{K}}(A, C^B), \qquad (*)$$

естественное по A и C (в действительности это биективное соответствие естественно и по B). Функтор $(-)^B$ иногда обозначают $\mathrm{Hom}(B, -)$ или $\mathrm{hom}(B, -)$ и называют *внутренним* Hom-*функтором* или *внутренним* hom-*функтором*. Сопоставление объектам $A, B \in \mathfrak{K}$ объекта $A^B \in \mathfrak{K}$ в действительности определяет функтор $(-)^{(-)}$: $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{K}$, ковариантный по первому аргументу A и контравариантный по второму аргументу B.

Симметрическая моноидальная замкнутая категория $(\mathfrak{K}, \otimes, I, (-)^{(-)})$, в которой тензорное произведение $\otimes$ совпадает с произведением $\times$ (см. пример 2)), называется *декартово замкнутой категорией*. Таким образом, категория $\mathfrak{K}$ является декартово замкнутой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}$ — категория с конечными произведениями, терминальным объектом $\top$ и для каждого объекта $A \in \mathfrak{K}$ функтор $-\times A$: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ обладает сопряженным справа функтором $(-)^A$: $\mathfrak{K} \to \to \mathfrak{K}$.

Примеры. 4) Категория множеств SET — декартово замкнутая категория (см. пример 2) и п. 2.3, пример 2)).

5) Категория $\mathfrak{P}$ частично упорядоченных множеств и монотонных отображений в качестве морфизмов — декартово замкнутая категория. Здесь применимы соображения примера 4); следует лишь заметить, что, как отмечено в п. 3.7, $\mathfrak{P}$ есть О-категория.

6) Категория абелевых групп $\mathfrak{Ab}$ — симметрическая моноидальная замкнутая категория относительно обычного тензорного произведения абелевых групп. Единичным объектом здесь служит бесконечная циклическая группа, и A^B для любых двух абелевых групп A и B есть множество гомоморфизмов $A^B = H_{\mathfrak{Ab}}(B, A)$, на котором структура абелевой группы определяется так: $(f+g)(b) = f(b) + g(b)$ для любых двух гомоморфизмов f, g: $B \to A$ и любого элемента $b \in B$. Следует отметить, что любая категория с нулевым объектом, отличная от однообъектной дискретной категории, не может быть декартово замкнутой категорией.

7) Категория Cat. Объектами категории Cat являются всевозможные малые категории, включая пустую категорию $\varnothing$. Для любых двух малых категорий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ множество $H_{\mathrm{Cat}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ — множество всех функторов из категории $\mathfrak{A}$ в категорию $\mathfrak{B}$. Cat — биполная категория (определения произведения и копроизведения см. п. 1.1). Терминальным объектом $\top$ категории Cat является однообъектная дискретная категория, а инициальным объектом $\perp$ — пустая категория. На категории Cat можно определить по крайней мере две структуры симметрической моноидальной категории (Cat, $\times$, $\top$) и (Cat, $*$, $\perp$). Cat — декартово замкнутая категория. Для любых двух малых категорий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ малая категория $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$ — категория функторов из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ — моноидальная категория. Класс $\mathfrak{A}$ объектов $A, B, \ldots$ называется *относительной категорией* над $\mathfrak{K}$ или *$\mathfrak{K}$-категорией*, если задано отображение $\mathfrak{A}(-, -)$: $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и выполняются следующие условия: 1) каждой упорядоченной тройке $A, B, C \in \mathfrak{A}$ сопоставлен морфизм $\mu_{A,B,C}$: $\mathfrak{A}(A, B) \otimes \mathfrak{A}(B, C) \to \mathfrak{A}(A, C)$ (точнее, $\mu_{A,B,C} = \mu^{\mathfrak{A}}_{A,B,C}$) категории $\mathfrak{K}$; 2) каждому объекту $A \in \mathfrak{A}$ сопоставлен морфизм ε_A: $I \to \mathfrak{A}(A, A)$ (точнее, $\varepsilon_A = \varepsilon^{\mathfrak{A}}_A$) категории $\mathfrak{K}$; 3) для любых объектов $A, B, C, D \in \mathfrak{A}$

в категории $\mathfrak{K}$ коммутативны диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{A}(A,B)\otimes\mathfrak{A}(B,C))\otimes\mathfrak{A}(C,D) \arrow[r, "\mu_{A,B,C}\otimes 1"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] & \mathfrak{A}(A,C)\otimes\mathfrak{A}(C,D) \arrow[dr, "\mu_{A,C,D}"] & \\
\mathfrak{A}(A,B)\otimes(\mathfrak{A}(B,C)\otimes\mathfrak{A}(C,D)) \arrow[r, "1\otimes\mu_{B,C,D}"] & \mathfrak{A}(A,B)\otimes\mathfrak{A}(B,D) \arrow[r, "\mu_{A,B,D}"] & \mathfrak{A}(A,D)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}(A,A)\otimes\mathfrak{A}(A,B) \arrow[dr, "\mu_{A,A,B}"] & & \mathfrak{A}(A,B)\otimes\mathfrak{A}(B,B) \arrow[dl, "\mu_{A,B,B}"'] \\
& \mathfrak{A}(A,B) & \\
I\otimes\mathfrak{A}(A,B) \arrow[uu, "\varepsilon_A\otimes 1"] \arrow[ur, "\lambda"] & & \mathfrak{A}(A,B)\otimes I \arrow[uu, "1\otimes\varepsilon_B"'] \arrow[ul, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

По $\mathfrak{K}$-категории $\mathfrak{A}$ можно построить обычную категорию $\mathfrak{A}$, называемую *носителем* $\mathfrak{K}$-категории $\mathfrak{A}$. Объектами (обычной) категории $\mathfrak{A}$ являются объекты $\mathfrak{K}$-категории $\mathfrak{A}$. Для любых двух объектов $A, B \in \mathfrak{A}$ множество морфизмов $H_{\mathfrak{A}}(A, B) = H_{\mathfrak{K}}(I, \mathfrak{A}(A, B))$. Произведение последовательных морфизмов $\varphi\colon A \to B$ и $\psi\colon B \to C$ категории $\mathfrak{A}$ определяется по формуле $\varphi\psi = \rho^{-1}(\varphi\otimes\psi)\mu_{A,B,C}$ (справа стоит произведение последовательных морфизмов $I \xrightarrow{\rho^{-1}} I\otimes I \xrightarrow{\varphi\otimes\psi} \mathfrak{A}(A, B)\otimes\otimes\mathfrak{A}(B, C) \xrightarrow{\mu_{A,B,C}} \mathfrak{A}(A, C)$ категории $\mathfrak{K}$). При этом отображение $\mathfrak{A}(-, -)\colon \mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\to\mathfrak{K}$ превращается в обычный функтор $\mathfrak{A}(-, -)\colon \mathfrak{A}^{op}\times\mathfrak{A}\to\mathfrak{K}$, и $\mathfrak{K}$-категорию $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как обычную категорию, снабженную дополнительной структурой объектов категории $\mathfrak{K}$, определяемой функтором $\mathfrak{A}(-, -)\colon \mathfrak{A}^{op}\times\mathfrak{A}\to\mathfrak{K}$, удовлетворяющим условию $H_{\mathfrak{A}}(-, -) = \mathfrak{A}(-, -)H^I\colon \mathfrak{A}^{op}\times\mathfrak{A}\to \mathrm{SET}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две $\mathfrak{K}$-категории. *$\mathfrak{K}$-функтор* $T\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ состоит из отображения $T\colon \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}\to\mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}$ класса объектов $\mathfrak{K}$-категории $\mathfrak{A}$ в класс объектов $\mathfrak{K}$-категории $\mathfrak{B}$ и семейства морфизмов $T_{A,B}\colon \mathfrak{A}(A, B)\to\to\mathfrak{B}(T(A), T(B))$ категории $\mathfrak{K}$, определенных для каждой пары объектов $A, B \in \mathfrak{A}$ и удовлетворяющих следующим условиям: для любых объектов A, B,

$C \in \mathfrak{A}$ диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}(A,B)\otimes\mathfrak{A}(B,C) \arrow[r, "T_{A,B}\otimes T_{B,C}"] \arrow[d, "\mu^{\mathfrak{A}}_{A,B,C}"'] & \mathfrak{B}(T(A),T(B))\otimes\mathfrak{B}(T(B),T(C)) \arrow[d, "\mu^{\mathfrak{B}}_{T(A),T(B),T(C)}"] \\
\mathfrak{A}(A,C) \arrow[r, "T_{A,C}"'] & \mathfrak{B}(T(A),T(C))
\end{tikzcd} \qquad (**)$$

и

$$\begin{tikzcd}
& I \arrow[dl, "\varepsilon^{\mathfrak{A}}_A"'] \arrow[dr, "\varepsilon^{\mathfrak{B}}_{T(A)}"] & \\
\mathfrak{A}(A,A) \arrow[rr, "T_{A,A}"'] & & \mathfrak{B}(T(A),T(A))
\end{tikzcd} \qquad (***)$$

коммутативны. Каждый $\mathfrak{K}$-функтор $T: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ между $\mathfrak{K}$-категориями определяет обычный функтор $T: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ между носителями $\mathfrak{K}$-категорий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно.

Назовем *$\mathfrak{K}$-естественным преобразованием* $\varphi: T \to S$ $\mathfrak{K}$-функтора $T: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ в $\mathfrak{K}$-функтор $S: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ семейство морфизмов $\varphi_A: T(A) \to S(A)$ носителя $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{K}$-категории $\mathfrak{B}$, заданных для каждого объекта $A \in \mathfrak{A}$ и удовлетворяющих условию: для каждой пары объектов $A, B \in \mathfrak{A}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}(A,B) \arrow[r, "T_{A,B}"] \arrow[d, "S_{A,B}"'] & \mathfrak{B}(T(A),T(B)) \arrow[d, "\mathfrak{B}(1_{T(A)},\varphi_B)"] \\
\mathfrak{B}(S(A),S(B)) \arrow[r, "\mathfrak{B}(\varphi_A, 1_{S(B)})"'] & \mathfrak{B}(T(A),S(B))
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

П р и м е р ы $\mathfrak{K}$ - к а т е г о р и й. 8) $\mathfrak{K} = \mathrm{SET}$ — декартово замкнутая категория (см. пример 4)). SET-категорией $\mathfrak{A}$ является обычная категория. В этом случае $\mathfrak{A}(A, B) = H_{\mathfrak{A}}(A, B)$ и для любых трех объектов $A, B, C \in \mathfrak{A}$ отображение $\mu_{A,B,C}: H_{\mathfrak{A}}(A, B) \times H_{\mathfrak{A}}(B, C) \to H_{\mathfrak{A}}(A, C)$ определяется по формуле

$$\mu_{A,B,C}(\varphi, \psi) = \varphi\psi \qquad (****)$$

для любых морфизмов $\varphi: A \to B$ и $\psi: B \to C$.

9) $\mathfrak{K} = \mathfrak{P}$ — декартово замкнутая категория (см. пример 5)). $\mathfrak{P}$-категорией $\mathfrak{A}$ является О-категория (см. п. 3.7). В этом случае $\mathfrak{A}(A, B) = H_{\mathfrak{P}}(A, B)$ — частично упорядоченное множество и в формуле (****) $\mu_{A,B,C}$ — монотонное отображение. $\mathfrak{P}$-функтором является О-функтор.

10) $\mathfrak{K} = \mathfrak{Ab}$ — симметрическая моноидальная замкнутая категория (см. пример 6)). $\mathfrak{Ab}$-категорией $\mathfrak{A}$ является предаддитивная

категория (см. п. 3.5). В этом случае $\mathfrak{A}(A, B) = H_{\mathfrak{A}}(A, B)$ — абелева группа и в формуле (****) $\mu_{A,B,C}$ — гомоморфизм абелевых групп. $\mathfrak{Ab}$-функтором является аддитивный функтор.

2-*категорией* называется Cat-категория, где Cat — декартово замкнутая категория (см. пример 7)). 2-категория $\mathfrak{A}$ состоит из класса $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}$ объектов A, B, C, ..., каждой паре объектов $A, B \in \mathfrak{A}$ сопоставляется малая категория $\mathfrak{A}(A, B)$, объекты которой называются 1-*морфизмами*, а морфизмы — 2-*морфизмами* 2-категории $\mathfrak{A}$. Каждому объекту $A \in \mathfrak{A}$ сопоставляется функтор ε_A: $\top \to \mathfrak{A}(A, A)$ и трем объектам A, B, $C \in \mathfrak{A}$ — функтор $\mu_{A,B,C}$: $\mathfrak{A}(A, B) \times \mathfrak{A}(B, C) \to \mathfrak{A}(A, C)$.

2-*функтор* T: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ между 2-категориями представляет собой отображение T: $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A} \to \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}$ и семейство функторов $T_{A,B}$: $\mathfrak{A}(A, B) \to \mathfrak{B}(T(A), T(B))$, определенных для каждой пары объектов A, $B \in \mathfrak{A}$ и удовлетворяющих условиям (**) и (***).

Примером 2-категории является 2-категория 2-Cat, объектами которой служат все малые категории, 1-морфизмами — все функторы между малыми категориями и 2-морфизмами — естественные преобразования функторов. Каждой паре малых категорий $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ сопоставляется малая категория 2-Cat$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ функторов из категории $\mathfrak{A}$ в категорию $\mathfrak{B}$. Каждой малой категории $\mathfrak{A}$ сопоставляется функтор ε_A: $\top \to \mathfrak{F}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$, выделяющий тождественный функтор $\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}$ категории $\mathfrak{A}$, и любым трем малым категориям $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ сопоставляется функтор $\mu = \mu_{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}}$: $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \times \times \mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$, для которого $\mu(F, G) = FG$ для любых функторов F: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и G: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ и $\mu(\varphi, \psi) = G(\varphi)\psi_{F'}$: $FG \to \to F'G'$ (см. п. 2.1) для любых естественных преобразований φ: $F \to F'$ и ψ: $G \to G'$ соответственно из категорий $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$.

Каждая замкнутая категория $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}, \otimes, I, \alpha, \gamma, \lambda, \rho, (-)^{(-)})$ сама является $\mathfrak{K}$-категорией. В замкнутой категории $\mathfrak{K}$ для любого объекта $A \in \mathfrak{K}$ определено сопряжение θ_A: $-\otimes A \dashv (-)^A$ с коединицей сопряжения ev^A: $(-)^A \otimes A \to \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}$, компонента которого ev^A_B: $B^A \otimes A \to B$ на объекте $B \in \mathfrak{K}$ называется *морфизмом значений*. Полагаем $\mathfrak{K}(A, B) = B^A$ для любых объектов A, $B \in \mathfrak{K}$. Для определения морфизма $\mu_{A,B,C}$: $B^A \otimes C^B \to C^A$ возьмем произведение ζ морфизмов

$$(B^A \otimes C^B) \otimes A \xrightarrow{\alpha^{-1}} B^A \otimes (C^B \otimes A) \xrightarrow{1 \otimes \gamma} B^A \otimes (A \otimes C^B) \xrightarrow{\alpha}$$

$$\to (B^A \otimes A) \otimes C^B \xrightarrow{\mathrm{ev}^A_B \otimes 1} B \otimes C^B \xrightarrow{\gamma} C^B \otimes B \xrightarrow{\mathrm{ev}^B_C} C.$$

Положим $\mu_{A,B,C}=\theta_{B^A\otimes C^B,A,C}(\zeta)$ (см. формулу (*)). Наконец, морфизм ε_A: $I\to A^A$ определяется по формуле $\varepsilon_A=\theta_{I,A,A}(\lambda_A)$.

Более подробно с материалом настоящего пункта можно познакомиться по монографиям [21, 23].

3.9. Топосы. Категория $\mathfrak{C}$ называется *топосом* или *элементарным топосом*, если выполняются следующие условия: 1) $\mathfrak{C}$ — локально малая конечно полная категория с терминальным объектом $\top$; 2) $\mathfrak{C}$ — декартово замкнутая категория; 3) функтор Sub: $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\to\mathrm{SET}$ (см. п. 2.2) представим, т. е. существуют такой объект $\Omega\in\mathfrak{C}$, называемый *классификатором подобъектов*, и такой морфизм τ: $\top\to\Omega$, называемый *«истина»*, или *«верно»*, или «true», что для каждого объекта $X\in\mathfrak{C}$ сопоставлением любому подобъекту $(U,\lambda]$ объекта X морфизма $\mathrm{ch}(\lambda)$, при котором квадрат

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\omega_U"] \arrow[d, "\lambda"'] & \top \arrow[d, "\tau"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{ch}(\lambda)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

универсален, устанавливается биективное соответствие

$$\mathrm{ch}\colon\ \mathrm{Sub}(X)\to H_{\mathfrak{C}}(X,\Omega) \qquad (*)$$

Морфизм $\mathrm{ch}(\lambda)$ (точнее было бы писать $\mathrm{ch}((U,\lambda]))$ называется *характеристическим* или *классифицирующим морфизмом* подобъекта $(\lambda]$ (говорят также, что $\mathrm{ch}(\lambda)$ является характеристическим или классифицирующим морфизмом мономорфизма λ). Так как $\top$ — терминальный объект, то τ — мономорфизм.

Примеры топосов. 1) $\mathfrak{C}=\mathrm{SET}$ — категория множеств. SET — полная декартово замкнутая категория (см. п. 3.8, пример 4)) с одноточечным множеством $\top=\{*\}$ в качестве терминального объекта. Классификатором подобъектов является двухточечное множество $\Omega=2=\{0,1\}$. Морфизм «истина» τ: $\top\to\Omega$: $\tau(*)=1$. Для любого непустого множества M и его подмножества N с мономорфизмом естественного вложения λ: $N\to M$ характеристическим морфизмом мономорфизма λ является характеристическое отображение $\mathrm{ch}(\lambda)$: $M\to\Omega$, при котором

$$\mathrm{ch}(\lambda)(m)=\begin{cases}1, & \text{если } m\in N,\\ 0, & \text{если } m\in M\setminus N.\end{cases}$$

Если $M = \varnothing$ — инициальный объект категории SET, то $N = \varnothing$; $\lambda = 1_\varnothing$ и $\mathrm{ch}(1_\varnothing) = \omega_\Omega$: $\varnothing \to \Omega$ — единственное отображение из пустого множества $\varnothing$.

2) $\mathfrak{C} = \mathrm{SET}_f$ — категория конечных множеств и всех отображений между ними. Так как в категории SET предел любого функтора из конечной категории, принимающего значения в подкатегории SET_f, принадлежит SET_f, любое множество X^Y, где X и Y — конечные множества, конечно и множества $\top = \{*\}$ и $\Omega = \{0, 1\}$ принадлежат SET_f, то SET_f — топос.

3) $\mathfrak{C} = \mathrm{SET}\text{-}M$ — категория правых полигонов над произвольным моноидом M. Категория SET-M как частный случай категории функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathrm{SET})$, в которой $\mathfrak{D} = M$ — одноообъектная категория, является полной категорией (см. п. 2.2). Терминальным объектом категории SET-M является одноточечный M-полигон $\{*\}$. Для любых двух M-полигонов A и B M-полигон $A^B = \mathrm{Hom}(M \times B, A)$ — множество всех гомоморфизмов M-полигона $M \times B$ (M рассматривается как правый M-полигон) в M-полигон A, на котором действие любого элемента $m \in M$ определяется по формуле $fm(n, b) = f(nm, bm)$ для любого гомоморфизма M-полигонов f: $M \times B \to A$ и любых элементов $n \in M$, $b \in B$. Классификатором подобъектов в категории SET-M является M-полигон Ω, элементами которого являются все правые идеалы (включая и пустой) моноида M. Элементы моноида M действуют на M-полигоне Ω следующим образом: для любого элемента $m \in M$ и любого правого идеала $J \in \Omega$ правый идеал Jm состоит из всех элементов $n \in M$, для которых $mn \in J$. Морфизм «истина» τ: $\{*\} \to \Omega$ точке $*$ сопоставляет правый идеал $\tau(*) \in \Omega$, состоящий из всех элементов моноида M.

Как уже отмечалось, категория SET-M является частным случаем категории функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathrm{SET})$. В действительности справедливо более общее утверждение: для любой малой категории $\mathfrak{D}$ категория функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathrm{SET})$ является топосом.

Если $\mathfrak{C}$ — произвольный топос, то для малой категории $\mathfrak{D}$ категория функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{C})$ в общем случае топосом не является. Например, не является топосом категория SET_f-$\mathbf{N}$ правых конечных полигонов над мультипликативным моноидом натуральных чисел $\mathbf{N}$.

4) Для любого топоса $\mathfrak{C}$ и любого объекта $X \in \mathfrak{C}$ топосом является коммакатегория $\mathfrak{C}/X$ морфизмов топоса $\mathfrak{C}$ с концом X (морфизмами в категории $\mathfrak{C}/X$ из объекта α: $A \to X$ в объект β: $B \to X$ являются все такие морфизмы φ: $A \to B$ категории $\mathfrak{C}$, что $\alpha = \varphi\beta$). Топос $\mathfrak{C}/X$ называется *слоем* топоса $\mathfrak{C}$ относительно объекта X.

Каждый топос $\mathfrak{C}$ является точной конечно кополной категорией со строго инициальным объектом $\perp$, в которой регулярны каждый эпиморфизм и каждый мономорфизм. Если топос $\mathfrak{C}$ является $\{\mathfrak{D}\}$-полным для малой категории $\mathfrak{D}$, то он и $\{\mathfrak{D}\}$-кополный. Конечные копроизведения в топосе $\mathfrak{C}$ *дизъюнктны*, т. е. если $A = A_1 * \ldots * A_n$ — копроизведение конечного семейства объектов $A_i \in \mathfrak{C}$, $i = 1, \ldots, n$, с вложениями σ_i: $A_i \to A$, то σ_i — мономорфизм для каждого $i =$

$=1, \ldots, n$ и для любых двух различных i и j пересечение подобъектов $(A_i, \sigma_i] \cap (A_j, \sigma_j] = (\perp, o_A]$ является наименьшим подобъектом объекта A. В любом топосе $\mathfrak{E}$ универсальные квадраты перестановочны с копределами, т. е. для любого функтора $F\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ из любой малой категории $\mathfrak{D}$, обладающего копределом $\left(F(D) \xrightarrow{\gamma_D} \operatorname{Colim} F = L;\ D \in \operatorname{Ob} \mathfrak{D}\right)$, и для любого морфизма $\varphi\colon K \to L$ топоса $\mathfrak{E}$ в универсальном квадрате

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\psi"'] & \Delta(K) \arrow[d, "\Delta(\varphi)"] \\ F \arrow[r, "\gamma"'] & \Delta(L) \end{tikzcd}$$

в категории функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{E})$ ($\Delta\colon \mathfrak{E} \to \mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{E})$ — функтор вложения (см. п. 2.2)) $\left(G(D) \xrightarrow{\delta_D} K = \operatorname{Colim} G;\ D \in \operatorname{Ob} \mathfrak{D}\right)$ — копредел функтора G.

Пусть $\mathfrak{E}$ — топос. Для любого объекта $Y \in \mathfrak{E}$ существует такой мономорфизм $\eta_Y\colon Y \to \tilde{Y}$ топоса $\mathfrak{E}$, что для любой пары (λ, φ), состоящей из мономорфизма $\lambda\colon X' \to X$ и морфизма $\varphi\colon X' \to Y$ и называемой *частичным морфизмом* объекта X в объект Y, существует универсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\ X \arrow[r, "\tilde{\varphi}"'] & \tilde{Y} \end{tikzcd}$$

для однозначно определяемого морфизма $\tilde{\varphi}$. Сопоставление объекту $Y \in \mathfrak{E}$ объекта $\tilde{Y} \in \mathfrak{E}$ определяет функтор $(\tilde{-})\colon \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$. Объект $\tilde{Y}$ инъективен, и поскольку η_Y — мономорфизм, то любой топос инъективно богат.

Функтор $F\colon \mathfrak{E} \to \mathfrak{F}$ между топосами называется *логическим*, если он точен слева, $F(X^Y) = F(X)^{F(Y)}$ для любых объектов $X, Y \in \mathfrak{E}$ и $F(\Omega_{\mathfrak{E}}) = \Omega_{\mathfrak{F}}$, где $\Omega_{\mathfrak{E}}$, $\Omega_{\mathfrak{F}}$ — классификаторы подобъектов соответственно топосов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{F}$. Каждый логический функтор F точен справа, и если логический функтор F обладает сопряженным слева функтором, то он обладает и сопряженным справа функтором.

Примеры логических функторов. 5) Естественный функтор вложения топоса SET_f в топос SET.

6) Для любого топоса $\mathfrak{E}$ и любого объекта $X \in \mathfrak{E}$ функтор $F\colon \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}/X$, сопоставляющий каждому объекту $A \in \mathfrak{E}$ проекцию $F(A) = \pi_1\colon X \times A \to X$ произведения $X \times A(\pi_1, \pi_2)$, являющуюся объектом топоса $\mathfrak{E}/X$, и каждому морфизму $\alpha\colon A \to B$ топоса $\mathfrak{E}$ морфизм $F(\alpha) = 1_X \times \alpha\colon X \times A \to X \times B$ топоса $\mathfrak{E}/X$.

Пара $F = (F^*, F_*)$, состоящая из функторов $F_*\colon \mathfrak{E} \to \mathfrak{F}$ и $F^*\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{E}$, называется *геометрическим морфизмом* топоса $\mathfrak{E}$ в топос $\mathfrak{F}$ (обозначение $F = (F^*, F_*)\colon \mathfrak{E} \to \mathfrak{F}$; иногда здесь опускается F, а иногда — (F^*, F_*)), если F^* — точный слева функтор, сопряженный слева к функтору F_*. Функтор F_* называется *прямым образом*, а функтор F^* — *обратным образом* геометрического морфизма $(F^*, F_*)\colon \mathfrak{E} \to \mathfrak{F}$. *Естественным преобразованием геометрического морфизма* $(F^*, F_*)\colon \mathfrak{E} \to \mathfrak{F}$ *в геометрический морфизм* $(G^*, G_*)\colon \mathfrak{E} \to \mathfrak{F}$ является любое естественное преобразование $\varphi\colon F^* \to G^*$ между обратными образами геометрических морфизмов.

Примером геометрического морфизма топосов служит $(\Delta, \mathrm{Lim})\colon \mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathrm{SET}) \to \mathrm{SET}$ (определение функторов Δ и Lim см. п. 2.2).

Любой морфизм $\alpha\colon X \to Y$ топоса $\mathfrak{E}$ определяет функтор $\alpha^*\colon \mathfrak{E}/Y \to \mathfrak{E}/X$, сопоставляющий объекту $\varphi\colon B \to Y$ топоса $\mathfrak{E}/Y$ объект $\psi\colon A \to X$ топоса $\mathfrak{E}/X$, являющийся морфизмом топоса $\mathfrak{E}$, входящим в универсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\psi"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

топоса $\mathfrak{E}$. α^* является обратным образом некоторого геометрического морфизма $(\alpha^*, \alpha_*)\colon \mathfrak{E}/X \to \mathfrak{E}/Y$.

Пусть $\mathfrak{E}$ — произвольный топос. Характеристическим морфизмом мономорфизма $\omega_\perp = \omega_\top\colon \perp \to \top$ является морфизм $\phi\colon \top \to \Omega$, называемый *«фальшь»*, или *«ложь»*, или *«неверно»*. ϕ — мономорфизм, характеристическим морфизмом которого является морфизм $\neg: \Omega \to \Omega$, называемый *морфизмом отрицания*. Характеристическим морфизмом мономорфизма $\tau(\times)(\times)\tau: \top \to \Omega \times \Omega$ является морфизм $\wedge: \Omega \times \Omega \to \Omega$, называемый *морфизмом конъюнкции*. Пусть $(\Omega_1, \lambda] = \mathrm{Ker}(\pi_1, \wedge)$, где $\pi_1, \pi_2: \Omega \times \Omega \to \Omega$ — проекции произведения. Характеристическим морфизмом мономорфизма $\lambda: \Omega_1 \to \Omega \times \Omega$ является морфизм $\Rightarrow: \Omega \times \times \Omega \to \Omega$, называемый *морфизмом импликации*. Так как топос $\mathfrak{C}$ является категорией с конечными копроизведениями и как точная категория является категорией с регулярными кообразами, для подобъектов $(\Omega, \omega_\Omega\tau(\times)1_\Omega]$ и $(\Omega, 1_\Omega(\times)\omega_\Omega\tau]$ объекта $\Omega \times \Omega$, где $\omega_\Omega: \Omega \to \top$ — единственный морфизм в терминальный объект $\top$, в частично упорядоченном множестве $\mathrm{Sub}(\Omega \times \Omega)$ подобъектов объекта $\Omega \times \Omega$ существует объединение $(\sigma] = (\omega_\Omega\tau(\times)1_\Omega] \cup (1_\Omega(\times)\omega_\Omega\tau]$ (см. п. 1.7). Характеристическим морфизмом подобъекта $(\sigma]$ объекта $\Omega \times \Omega$ является морфизм $\vee: \Omega \times \Omega \to \Omega$, называемый *морфизмом дизъюнкции*.

Для любого объекта X топоса $\mathfrak{C}$ на множестве морфизмов $H_\mathfrak{C}(X, \Omega)$ можно определить структуру хейтинговой алгебры, полагая $\alpha \wedge \beta = (\alpha(\times)\beta)\wedge$, $\alpha \vee \beta = (\alpha(\times)\beta)\vee$ и $\alpha \Rightarrow \beta = (\alpha(\times)\beta)\Rightarrow$, где $\alpha(\times)\beta: X \to \Omega \times \Omega$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow: \Omega \times \Omega \to \Omega$, для любых $\alpha, \beta \in H_\mathfrak{C}(X, \Omega)$. При этом биективное соответствие (*) является изоморфизмом хейтинговых алгебр. В множестве $H_\mathfrak{C}(X, \Omega)$ можно определить также операцию $\neg$, полагая $\neg(\alpha) = \alpha\neg$ для любого морфизма $\alpha \in H_\mathfrak{C}(X, \Omega)$. Для топоса $\mathfrak{C}$ следующие свойства эквивалентны: (1) для каждого объекта $X \in \mathfrak{C}$ хейтингова алгебра $H_\mathfrak{C}(X, \Omega)$, а значит, и хейтингова алгебра $\mathrm{Sub}(X)$ являются булевыми алгебрами; (2) $\neg\neg = 1_\Omega$; (3) $\tau(*)\tau: \top * \top \to \Omega$ — изоморфизм. Топос $\mathfrak{C}$, удовлетворяющий эквивалентным между собой условиям (1)—(3), называется *булевым топосом*. Любой топос $\mathfrak{C}$ вкладывается в качестве подкатегории в булев топос.

Топос правых G-полигонов над любой группой G, в частности, топос множеств SET, является булевым топосом. Произведение $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ булевых топосов является булевым топосом. Если M — моноид, обладающий по крайней мере одним отличным от M непустым правым идеалом, то топос SET-M правых M-полигонов не является булевым. Не является булевым топос $\mathrm{SET}^{\to}$ морфизмов над топосом SET.

Пусть $\mathfrak{E}$ — произвольный топос. Морфизм $j\colon \Omega \to \Omega$ называется *топологией* в топосе $\mathfrak{E}$, если $\tau j = \tau$, $j^2 = j$ и $(j \times j)\wedge = \wedge j$, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega\times\Omega & \xrightarrow{\ \wedge\ } & \Omega \\ {\scriptstyle j\times j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \Omega\times\Omega & \xrightarrow[\ \wedge\ ]{} & \Omega \end{array}$$

Пусть $\lambda\colon J \to \Omega$ — мономорфизм топоса $\mathfrak{E}$, характеристическим морфизмом которого является j (в формуле (*) ch — биективное отображение). Мономорфизм $\mu\colon X \to Y$ топоса $\mathfrak{E}$ называется (j)-*плотным*, если его характеристический морфизм $\operatorname{ch}(\mu)\colon Y \to \Omega$ представим в виде $\operatorname{ch}(\mu) = \gamma\lambda$ для некоторого морфизма $\gamma\colon Y \to J$.

Объект $F \in \mathfrak{E}$ называется (j)-*пучком*, если для любого (j)-плотного мономорфизма $\mu\colon X \to Y$ и любого морфизма $\alpha\colon X \to F$ в топосе $\mathfrak{E}$ существует такой единственный морфизм $\beta\colon Y \to F$, что $\alpha = \mu\beta$. Другими словами, каждая диаграмма вида

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

в которой μ есть (j)-плотный мономорфизм и F есть (j)-пучок, единственным морфизмом β дополняется до коммутативного треугольника. Пусть $\mathrm{Sh}_j(\mathfrak{E})$ — полная подкатегория топоса $\mathfrak{E}$, порожденная (j)-пучками. Естественное вложение $I_j\colon \mathrm{Sh}_j(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{E}$ подкатегории $\mathrm{Sh}_j(\mathfrak{E})$ в топос $\mathfrak{E}$ сохраняет и отражает конечные пределы, так что $\mathrm{Sh}_j(\mathfrak{E})$ — конечно полная категория, терминальным объектом которой является терминальный объект $\top$ топоса $\mathfrak{E}$. Для любого (j)-пучка F и любого объекта $X \in \mathfrak{E}$ объект F^X является (j)-пучком. Следовательно, $\mathrm{Sh}_j(\mathfrak{E})$ — декартово замкнутая категория. В действительности $\mathrm{Sh}_j(\mathfrak{E})$ — топос, называемый *топосом* (j)-*пучков* топоса $\mathfrak{E}$, классификатором подобъектов которого является объект $\Omega_j = \operatorname{Ker}(j, 1_\Omega)$ — ядро пары морфизмов $j, 1_\Omega\colon \Omega \to \Omega$ топоса $\mathfrak{E}$. $\mathrm{Sh}_j(\mathfrak{E})$ — подкатегория локализации топоса

$\mathfrak{E}$, так что существует точный слева рефлектор P_j: $\mathfrak{E} \to \mathrm{Sh}_j(\mathfrak{E})$, называемый *функтором ассоциированного пучка* и являющийся обратным образом геометрического морфизма (P_j, I_j): $\mathrm{Sh}_j(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{E}$. Каждая подкатегория локализации $\mathfrak{L}$ топоса $\mathfrak{E}$ представима в виде $\mathfrak{L} = \mathrm{Sh}_j(\mathfrak{E})$ для однозначно определенной топологии j топоса $\mathfrak{E}$.

Топос множеств SET обладает лишь двумя топологиями — тривиальной, т. е. $j = 1_\Omega$, $\mathrm{Sh}_{1_\Omega}(\mathrm{SET}) = \mathrm{SET}$, и топологией, определяемой отображением j: $\Omega \to \Omega$, где $\Omega = \{0, 1\}$, при котором $j(0) = j(1) = 1$. Топос (j)-пучков $\mathrm{Sh}_j(\mathrm{SET})$ есть одноообъектная дискретная категория, порождаемая одноточечным множеством.

В любом топосе $\mathfrak{E}$ морфизм $\neg\neg$: $\Omega \to \Omega$ является топологией, причем топос $(\neg\neg)$-пучков $\mathrm{Sh}_{\neg\neg}(\mathfrak{E})$ булев.

Топос $\mathfrak{E}$, в котором для любого семейства объектов X_i, $i \in I$, существует дизъюнктное копроизведение $\coprod_{i \in I} X_i$ и обладающий множеством образующих, называется *топосом Гротендика*.

Примером топоса Гротендика является топос $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathrm{SET})$ функторов из произвольной малой категории $\mathfrak{D}$ в категорию множеств SET; множество образующих топоса $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathrm{SET})$ состоит из всех основных ковариантных функторов H^U: $\mathfrak{D} \to \mathrm{SET}$, $U \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$. Примером топоса, не являющегося топосом Гротендика, является топос конечных множеств SET_f.

Для любой малой категории $\mathfrak{D}$ топос $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}^{op}, \mathrm{SET})$ называется *топосом предпучков на категории $\mathfrak{D}$ со значениями в категории множеств* или *топосом множественных предпучков на категории $\mathfrak{D}$*. Имеет место *теорема Жиро*: категория $\mathfrak{E}$ является топосом Гротендика тогда и только тогда, когда существует такая малая категория $\mathfrak{D}$, что $\mathfrak{E} = \mathrm{Sh}_j(\mathfrak{F}(\mathfrak{D}^{op}, \mathrm{SET}))$ — топос (j)-пучков относительно некоторой топологии j в топосе $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}^{op}, \mathrm{SET})$. Из теоремы Жиро вытекает, что если $\mathfrak{E}$ — топос Гротендика, то для любой малой категории $\mathfrak{D}$ категория функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{E})$ является топосом Гротендика. Справедлива также следующая характеризация топосов Гротендика: топос $\mathfrak{E}$ является топосом Гротендика тогда и только тогда, когда существует по крайней мере один геометрический морфизм $\mathrm{SET} \to \mathfrak{E}$ и в топосе $\mathfrak{E}$ существует объект G, который вместе со своими подобъектами образует множество образующих топоса $\mathfrak{E}$ (геометрические морфизмы из топоса множеств SET в любой топос $\mathfrak{E}$ часто называют *точками топоса* $\mathfrak{E}$).

Пусть $\mathfrak{D}$ — малая категория и U — объект категории $\mathfrak{D}$. Каждый подфунктор R основного контравариантного функтора H_U: $\mathfrak{D} \to$ SET представляет собой не что иное, как левый идеал морфизмов категории $\mathfrak{D}$ с концом U. Для любого объекта $X \in \mathfrak{D}$ множество $R(X)$ есть подмножество множества морфизмов $H_{\mathfrak{D}}(X, U)$, принадлежащих левому идеалу R категории $\mathfrak{D}$. Подфунктор R называется *покрытием* или *решетом* объекта U. Если R — покрытие объекта U и α: $V \to U$ — морфизм категории $\mathfrak{D}$, то совокупность морфизмов φ: $X \to V$ категории $\mathfrak{D}$ с концом V, удовлетворяющих условию $\varphi\alpha \in R$, образует покрытие объекта V, обозначаемое $R : \alpha$.

Говорят, что на категории $\mathfrak{D}$ задана *топология Гротендика* J, если каждому объекту $U \in \mathfrak{D}$ сопоставлено некоторое множество $J(U)$ покрытий объекта U и при этом выполняются следующие условия: 1) $H_U \in J(U)$; 2) для любого покрытия $R \in J(U)$ и для любого морфизма α: $V \to U$ имеет место включение R: $\alpha \in J(V)$; 3) если R' — покрытие объекта U и существует такое покрытие $R \in J(U)$, что для любого морфизма α: $V \to U$ из R имеет место R': $\alpha \in J(V)$, то $R' \in J(U)$. Множество $\mathrm{Top}_{\mathfrak{D}}$ всех топологий Гротендика на малой категории $\mathfrak{D}$ образует полную решетку относительно частичного порядка $\leqslant$, при котором $J_1 \leqslant J_2$, если $J_2(U) \subset J_1(U)$ для каждого объекта $U \in \mathfrak{D}$.

Если J — топология Гротендика на малой категории $\mathfrak{D}$, то сопоставление каждому объекту $U \in \mathfrak{D}$ множества его покрытий $J(U)$ определяет функтор J: $\mathfrak{D}^{\mathrm{op}} \to$ SET, являющийся подфунктором функтора Ω: $\mathfrak{D}^{\mathrm{op}} \to$ SET — классификатора подобъектов топоса Гротендика $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}, \mathrm{SET})$. Характеристический морфизм $j = \mathrm{ch}(J)$: $\Omega \to \Omega$ подобъекта J объекта Ω является топологией в топосе $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}, \mathrm{SET})$. При этом существует биективное соответствие между множеством $\mathrm{Top}_{\mathfrak{D}}$ всех топологий Гротендика на малой категории $\mathfrak{D}$ и всеми топологиями в топосе $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}, \mathrm{SET})$. Если J — топология Гротендика на малой категории $\mathfrak{D}$ и j—соответствующая J топология в топосе $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}, \mathrm{SET})$, то функтор $F\colon \mathfrak{D}^{op} \to \mathrm{SET}$ является (j)-пучком тогда и только тогда, когда для любого объекта $U \in \mathfrak{D}$ и любого покрытия R объекта U, т. е. подфунктора (R, σ) основного контравариантного функтора $H_U\colon \mathfrak{D}^{op} \to \mathrm{SET}$, принадлежащего $J(U)$, любой морфизм $\gamma\colon R \to F$ топоса $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}^{op}, \mathrm{SET})$ однозначно представим в виде $\gamma = \sigma\gamma'$ для некоторого морфизма $\gamma'\colon H_U \to F$. Другими словами, каждая диаграмма вида

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & H_U \arrow[dl, dashed, "\gamma'"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

в которой R — покрытие объекта U, принадлежащее $J(U)$, и F есть (j)-пучок, единственным морфизмом γ' дополняется до коммутативного треугольника. Таким образом, подфунктор (R, σ) функтора H_U является (j)-плотным подобъектом объекта $H_U \in \in \mathfrak{F}(\mathfrak{D}^{op}, \mathrm{SET})$ тогда и только тогда, когда $R \in J(U)$, и F есть (j)-пучок, если он обладает свойством (j)-пучка по отношению к (j)-плотным подобъектам объектов вида $H_U \in \mathfrak{F}(\mathfrak{D}^{op}, \mathrm{SET})$ для каждого объекта $U \in \mathfrak{D}$. (j)-пучок топоса $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}^{op}, \mathrm{SET})$ часто называют J-пучком, а топос (j)-пучков $\mathrm{Sh}_j(\mathfrak{F}(\mathfrak{D}^{op}, \mathrm{SET}))$ обозначают $\mathrm{Sh}(\mathfrak{D}, J)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.
2. Басс Х. Алгебраическая K-теория.— М.: Мир, 1973.
3. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972.
4. Габриэль П., Цисман М. Категории частных и теория гомотопий. — М.: Мир, 1971.
5. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. — М.: Мир, 1983.
6. Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. — М.: ИЛ, 1961.
7. Джонстон П. Теория топосов. — М.: Наука, 1986.
8. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра — М.: ИЛ, 1960.
9. Маклейн С. Гомология. — М.: Мир, 1966.
10. Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. — М.: Наука, 1983.

11. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977. Т. 2. — М., Мир, 1979.
12. Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г. Основы теории категорий. — М.: Наука, 1974.
13. Adamek J. Theory of mathematical structures. — Dordrecht e. a.: D. Reidel Publ. Co., 1983.
14. Barr M., Wells Ch. Toposes, triples and theories. — New York e. a.: Springer, 1985.
15. Borceux F., Van den Bossche G. Algebra in a localic topos with applications to ring theory. — Spirnger, 1983. — (Lect. Notes Math. V. 1038).
16. Calenko M. S., Gisin V. B., Raikov D. A. Ordered categories with involution//Rozpr. mat. — 1984. — N 227.
17. Diers Y. Categories of Boolean sheaves of simple algebras.— Springer, 1986. — (Lect. Notes Math. V. 1187).
18. Freyd P. Abelian categories: An introduction to the theory of functors. — New York: Harper and Bros., 1964.
19. Gabriel P., Ulmer F. Lokal präsentierbare Kategorien.— Springer, 1971. — (Lect. Notes Math. V. 221).
20. Herrlich H., Strecker G. Category theory. An introduction. — Berlin: Heldermann Verl., 1979.
21. Kelly G. Basic concepts of enriched category theory//London Math. Soc. Lect. Note Ser. — 1982. — N 64.
22. Lambek J., Scott P. J. Introduction to higher order categorical logic. — Cambridge e. a.: Cambridge Univ. Press, 1986.
23. MacLane S. Categories for the working mathematician. — New York: Springer, 1971.
24. Makkai M., Reyes G. First order logic. Model-theoretical methods in the theory of topoi and related categories. — Springer, 1977. — (Lect. Notes Math. V. 611).
25. Manes E. Algebraic theories. — New York e. a.: Springer, 1976.
26. Mitchell B. Theory of categories. — New York; London: Acad. Press, 1965.
27. Mitchell B. Rings with several objects//Adv. in Math. — 1972. — V. 8, N 1.
28. Mitchell B. Separable algebroids//Mem. AMS. — 1985. — V. 57, N 333.
29. Obtułowicz A. The logic of categories of partial functions and its applications//Rozpr. mat. — 1986. — N 241.
30. Pareigis B. Categories and functors. — New York; London: Acad. Press, 1970.
31. Pultr A., Trnková V. Combinatorial, algebraic and topological representations of groups, semigroups and categories. — Prague: Academia, 1980.
32. Radu A. Teoria toposurilor. V. 1. — Bucureşti: Acad. RSR, 1981; V. 2. — Bucureşti: Acad. RSR, 1982.
33. Ščedrov A. Forcing and classifying topoi//Mem. AMS. — 1984. — V. 48, N 295.
34. Schubert H. Categories. — Berlin e. a.: Springer, 1972.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Глава IV

Полугруппы и теоретико-полугрупповые конструкции

Классы или семейства (под)полугрупп и условия на полугруппы

Подмножества в полугруппе

Отношения и отображения

Слова и их параметры

Ранги

Разное

Глава V

Глава VI

Справочное издание

АРТАМОНОВ Вячеслав Александрович,
САЛИЙ Вячеслав Николаевич,
СКОРНЯКОВ Лев Анатольевич,
ШЕВРИН Лев Наумович,
ШУЛЬГЕЙФЕР Ефим Григорьевич

ОБЩАЯ АЛГЕБРА

Том 2

Серия «Справочная математическая библиотека»

Заведующий редакцией *С. И. Зеленский*
Редактор *Ф. И. Кизнер*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Л. В. Лихачева*
Корректоры *Т. Г. Егорова, И. Я. Кришталь*

ИБ № 32385

Сдано в набор 17.05.90. Подписано к печати 24.05.91. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 25,2. Усл. кр.-отт. 25,2. Уч.-изд. л. 27,73. Тираж 25 500 экз. Заказ № 532. Цена 2 р. 20 к.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 198052, Ленинград Л-52, Измайловский проспект, 29

2 р. 20 к.