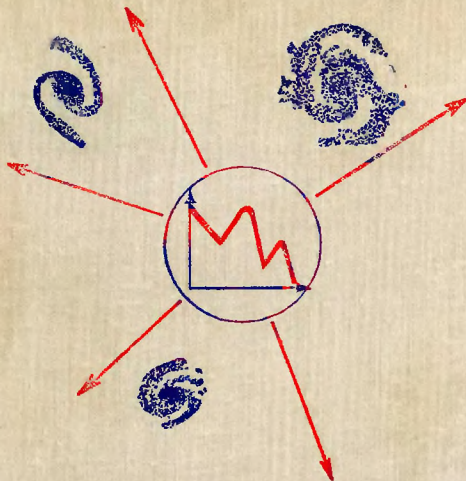


СТРОЕНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ВСЕЛЕННОЙ



Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, И.Д. НОВИКОВ

СТРОЕНИЕ  
И ЭВОЛЮЦИЯ  
ВСЕЛЕННОЙ

Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, И. Д. НОВИКОВ

# СТРОЕНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ВСЕЛЕННОЙ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва 1975

**Строение и эволюция Вселенной. Зельдович Я. В., Новиков И. Д., Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1975, 736 стр.**

Книга посвящена космологии — науке о строении и эволюции Вселенной. В ней рассматриваются как классические основы космологии, так и ее новейшие проблемы: теория расширяющейся горячей Вселенной, проблема сингулярного состояния в прошлом, физические процессы на ранних этапах космологического расширения, гравитационная неустойчивость и образование галактик. С достаточной полнотой и наглядностью рассмотрены и классические проблемы: геометрия мира, движение вещества и распространение света в расширяющейся Вселенной. В доступной форме приводятся сведения на общей теории относительности, теории элементарных частиц, физической статистики.

Качественная сторона излагаемых в книге проблем доступна широкому кругу читателей и представляет общепознавательный интерес. Изложение теории современной космологии, ее наблюдательных основ рассчитано на специалистов — физиков и астрономов, а также на студентов старших курсов, аспирантов и преподавателей. Книга дает подготовку, необходимую для самостоятельной работы.

Рисунков 67. Таблиц 17.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                       |    |
|-----------------------|----|
| Предисловие . . . . . | 9  |
| Введение . . . . .    | 11 |

## РАЗДЕЛ I

### РАСШИРЕНИЕ И ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Глава 1. Локальные свойства однородной изотропной космологической модели . . . . .</b>                           | <b>27</b> |
| § 1. Локальный закон распределения скорости . . . . .   | 27        |
| § 2. Закон эволюции. Критическая плотность . . . . .  | 30        |
| § 3. Продолжительность расширения . . . . .   | 33        |
| § 4. Два частных решения. Начальная стадия . . . . .  | 35        |
| § 5. Влияние давления на закон расширения. Качественные соображения . . . . .                                       | 37        |
| § 6. Уравнения движения с учетом давления . . . . .   | 39        |
| § 7. Время расширения при наличии давления . . . . .  | 41        |
| § 8. Начальная стадия при наличии давления . . . . .  | 42        |
| <b>Глава 2. Релятивистская теория однородной изотропной Вселенной . .</b>   | <b>44</b> |
| § 1. Уравнения тяготения Эйнштейна и космологические уравнения Фридмана . . . . .                                   | 44        |
| § 2. Геометрическая структура модели Вселенной как целого; пространство постоянной положительной кривизны . . . . . | 48        |
| § 3. Метрика открытого мира . . . . .   | 53        |
| § 4. Предельный случай малой плотности вещества . . . . .   | 53        |
| § 5. Случай критической плотности . . . . .   | 56        |
| <b>Глава 3. Распространение света и нейтрино; методы проверки космологических теорий наблюдениями . . . . .</b>     | <b>58</b> |
| § 1. Красное смещение и уменьшение импульса . . . . .   | 58        |
| § 2. Наблюдаемые величины и горизонт . . . . .  | 61        |
| § 3. Графики и формулы для функций, определяющих наблюдаемые величины . . . . .                                     | 67        |
| § 4. Рабочие формулы с параметром $\chi$ . . . . .  | 77        |
| § 5. Первое приближение и евклидово пространство . . . . .  | 81        |
| § 6. Распределение по видимым величинам . . . . .   | 86        |
| § 7. О возможности определения космологической модели по наблюдениям далеких объектов . . . . .                     | 93        |
| § 8. Эволюция радиисточников . . . . .  | 97        |
| § 9. Определение $H_0$ и $q_0$ из наблюдений . . . . .  | 105       |



|   |            |
|---|------------|
| § 10. Наблюдаемые величины во Вселенной, однородной лишь в среднем . . . . .  | 112        |
| § 11. Кинетическое уравнение для фотонов . . . . .  | 116        |
| § 12. Однозначно ли объяснение красного смещения расширением Вселенной? . . . . .   | 123        |
| <b>Глава 4. Космологическая постоянная . . . . .</b>  | <b>126</b> |
| § 1. Отлична ли космологическая постоянная от нуля? . . . . .   | 126        |
| § 2. Космологические модели с $\Lambda$ -членом . . . . .   | 129        |
| Приложение к разделу I . . . . .  | 136        |
| <b>Р А З Д Е Л II</b>   |            |
| <b>ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ГОРЯЧЕЙ ВСЕЛЕННОЙ</b>  |            |
| <b>Глава 5. Введение . . . . .</b>  | <b>141</b> |
| § 1. Вводные замечания и исторический обзор . . . . .   | 141        |
| § 2. Электромагнитное излучение во Вселенной: обзор наблюдений . . . . .  | 149        |
| § 3. Наблюдательное доказательство существования реликтового излучения . . . . .  | 154        |
| <b>Глава 6. Термодинамическое равновесие в начале космологического расширения . . . . .</b>                               | <b>159</b> |
| § 1. Основные периоды в эволюции горячей Вселенной . . . . .  | 159        |
| § 2. Космологическое расширение высокотемпературной плазмы и условия термодинамического равновесия . . . . .              | 162        |
| § 3. Адронная стадия эволюции Вселенной . . . . .   | 164        |
| § 4. Теория Хагедорна . . . . .   | 173        |
| § 5. Концентрация нуклонов и антинуклонов в зарядово-несимметричной Вселенной при термодинамическом равновесии . . . . .  | 177        |
| <b>Глава 7. Кинетика процессов с элементарными частицами . . . . .</b>  | <b>179</b> |
| § 1. Нейтрино в теории горячей Вселенной . . . . .  | 179        |
| § 2. Космологические гравитационные волны . . . . .   | 185        |
| § 3. Антинуклоны в горячей плазме . . . . .   | 191        |
| § 4. Реликтовые кварки в горячей модели . . . . .   | 199        |
| § 5. Нуклеосинтез в теории горячей Вселенной . . . . .  | 203        |
| § 6. Сравнение наблюдательных данных о распространенности легких элементов во Вселенной с предсказаниями теории . . . . . | 213        |
| <b>Глава 8. Раднационно-доминированная плазма и реликтовое излучение . . . . .</b>  | <b>219</b> |
| § 1. Введение и общий обзор . . . . .   | 219        |
| § 2. Рекомбинационное равновесие и кинетика . . . . .   | 225        |
| § 3. Взаимодействие электронов и излучения в разреженной плазме . . . . .   | 231        |
| § 4. Влияние электронов на спектр излучения . . . . .   | 239        |
| § 5. Раннее выделение энергии и квазиравновесие . . . . .   | 240        |
| § 6. Позднее энерговыделение . . . . .  | 247        |
| § 7. Излучение межгалактического газа и его плотность . . . . .   | 254        |
| § 8. Радиоизлучение ионизованного межгалактического газа и период нейтрального водорода . . . . .                         | 259        |
| § 9. Взаимодействие космических лучей с излучением . . . . .  | 263        |

## РАЗДЕЛ III

ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В КОСМОЛОГИИ  
И ОБРАЗОВАНИЕ ГАЛАКТИК

|   |            |
|---|------------|
| Введение . . . . .  | 269        |
| <b>Глава 9. Гравитационная неустойчивость в ньютоновской теории . . .</b> | <b>272</b> |
| § 1. Теория Джинса . . . . .  | 272        |
| § 2. Неустойчивость расширяющегося однородного вещества . . . . .         | 279        |
| § 3. Крупномасштабные возмущения: автомодельное решение . . . . .         | 284        |
| § 4. Возмущения как вариации параметров решения . . . . .                 | 285        |
| § 5. Формулы, описывающие развитие возмущений . . . . .                   | 288        |
| § 6. Численные оценки . . . . .   | 292        |
| § 7. Неустойчивость бесстолкновительного гравитирующего газа . . . .      | 295        |
| <b>Глава 10. Неустойчивость в горячей модели . . . . .</b>                | <b>297</b> |
| § 1. Условия роста возмущений . . . . .                                   | 297        |
| § 2. Диссипативные процессы и затухание адиабатических возмущений         | 302        |
| § 3. Взаимодействие возмущений со свободными частицами . . . . .          | 307        |
| § 4. Энтропийные возмущения . . . . .                                     | 308        |
| § 5. Вращательные возмущения . . . . .                                    | 311        |
| § 6. Сшивание возмущений при изменении уравнения состояния веще-          | 312        |
| ства . . . . .  |            |
| <b>Глава 11. Гравитационная неустойчивость в ОТО . . . . .</b>            | <b>317</b> |
| § 1. Общие принципы и уравнения . . . . .                                 | 317        |
| § 2. Классификация возмущений . . . . .                                   | 321        |
| § 3. Скалярные возмущения . . . . .                                       | 323        |
| § 4. Векторные (вращательные) возмущения . . . . .                        | 327        |
| § 5. Тензорные возмущения — гравитационные волны . . . . .                | 332        |
| § 6. Энтропийные возмущения в релятивистской теории . . . . .             | 335        |
| § 7. Квазизотропное решение и гипотеза равномерного распределения воз-    | 336        |
| мущений . . . . .   |            |
| § 8. Длинноволновые возмущения и их представление сферическими            | 339        |
| волнами . . . . .   |            |
| <b>Глава 12. Статистическая теория . . . . .</b>                          | <b>343</b> |
| § 1. Случайность и фурье-анализ . . . . .                                 | 343        |
| § 2. Корреляционная функция и размеры самогравитирующих объек-            | 347        |
| тов . . . . .   |            |
| § 3. Отклонения средней плотности в данном объеме . . . . .               | 351        |
| § 4. Ограничения и сложности линейной теории . . . . .                    | 357        |
| <b>Глава 13. Нелинейная теория возмущений и тепловая неустойчивость .</b> | <b>360</b> |
| § 1. Возмущения в пылевидной среде; задачи, допускающие точные            | 360        |
| решения . . . . .   |            |
| § 2. Возмущения в пылевидной среде; приближенный анализ общего            | 364        |
| случая («блины») . . . . .  |            |
| § 3. Нелинейная спектральная теория . . . . .                             | 372        |
| § 4. Возникновение длинноволновых возмущений в газе из звезд или          | 376        |
| звездных скоплений . . . . .  |            |
| § 5. Тепловая неустойчивость и разделение однородного газа на фазы        | 382        |
| <b>Глава 14. Теория образования галактик . . . . .</b>                    | <b>386</b> |
| § 1. Введение . . . . .   | 386        |
| § 2. Адиабатические возмущения. Предпосылки . . . . .                     | 394        |

|   |            |
|---|------------|
| § 3. Ударная волна . . . . .  | 396        |
| § 4. Тепловой режим сжатого газа . . . . .  | 403        |
| § 5. Массы скоплений и фрагментация протоскоплений . . . . .  | 408        |
| § 6. Вращение галактик . . . . .  | 413        |
| § 7. Магнитное поле галактик . . . . .  | 420        |
| § 8. Теория энтропийных возмущений . . . . .  | 425        |
| § 9. Вихревая теория . . . . .  | 429        |
| § 10. Сравнение эволюционных теорий происхождения галактик . . . . .  | 437        |
| § 11. Данные наблюдений галактик и скоплений галактик и средняя плотность материи во Вселенной . . . . .              | 443        |
| <b>Глава 15. Исследование возмущений с помощью реликтового излучения . . . . .</b>                                    | <b>450</b> |
| § 1. Введение . . . . .   | 450        |
| § 2. Аннигиляция антивещества . . . . .   | 452        |
| § 3. Адиабатические возмущения, акустические колебания и влияние их на спектр РИ . . . . .                            | 459        |
| § 4. Возмущения пространственной однородности и изотропии реликтового излучения . . . . .                             | 464        |
| § 5. Обнаружение возмущений плотности с помощью реликтового излучения . . . . .                                       | 470        |
| § 6. Спектр возмущений и гиперболическая модель с малой плотностью . . . . .  | 475        |
| § 7. Угловое распределение флуктуаций РИ . . . . .  | 476        |
| <b>Глава 16. Гравитационные волны в космологии . . . . .</b>  | <b>482</b> |
| § 1. Введение . . . . .   | 482        |
| § 2. Общие сведения о гравитационных волнах . . . . .   | 484        |
| § 3. Гравитационные волны в теории малых возмущений космологического решения . . . . .                                | 489        |
| § 4. Ожидаемая интенсивность реликтового коротковолнового гравитационного излучения . . . . .                         | 491        |
| § 5. Гипотеза равномерного распределения и длинноволновое гравитационное излучение . . . . .                          | 494        |
| § 6. Генерация гравитационных волн в современную эпоху и оценки общей плотности энергии гравитационных волн . . . . . | 496        |
| § 7. Влияние гравитационных волн на реликтовое излучение . . . . .  | 500        |
| § 8. Пекулярное движение, вызываемое гравитационными волнами . . . . .  | 502        |
| § 9. Взаимопревращения гравитационных и электромагнитных волн . . . . .   | 506        |
| <b>Р А З Д Е Л IV</b>   |            |
| <b>АНИЗОТРОПНАЯ КОСМОЛОГИЯ</b>  |            |
| <b>Глава 17. Введение . . . . .</b>   | <b>511</b> |
| <b>Глава 18. Простейшие анизотропные космологические решения . . . . .</b>  | <b>515</b> |
| § 1. Ньютонская теория простейшего анизотропного однородного решения как предельный случай локальной задачи . . . . . | 515        |
| § 2. Гравитационный парадокс ньютоновской теории . . . . .  | 519        |
| § 3. Простейшая релятивистская модель; «вакуумное» решение вблизи сингулярности . . . . .                             | 520        |
| § 4. Сравнение ньютоновской и релятивистской задач . . . . .  | 522        |
| <b>Глава 19. Материя в анизотропной космологической модели . . . . .</b>  | <b>525</b> |
| § 1. Изотропизация решения с паскалевским тензором энергии-импульса . . . . .   | 525        |

|  |            |
|--|------------|
| § 2. Влияние пространственной анизотропии тензора энергии-импульса на космологическое решение . . . . .  | 526        |
| § 3. Космологические модели с однородным магнитным полем . . . . .   | 530        |
| § 4. Возмущения в анизотропной однородной Вселенной . . . . .  | 536        |
| § 5. Неустойчивость космологических решений относительно возникновения движения всего вещества . . . . .                                       | 542        |
| <b>Глава 20. Физика процессов на ранних стадиях расширения в анизотропных моделях . . . . .</b>  | <b>547</b> |
| § 1. Слабовзаимодействующие частицы в анизотропной космологической модели . . . . .  | 547        |
| § 2. Нейтрино в анизотропном решении . . . . .   | 552        |
| § 3. Влияние вязкости на динамику расширения анизотропных моделей . . . . .  | 555        |
| § 4. Кинетическая теория нейтрино в анизотропной модели; автономное решение . . . . .  | 557        |
| § 5. Образование химических элементов в анизотропных моделях . . . . .   | 560        |
| <b>Глава 21. Общий анализ однородных космологических моделей . . . . .</b>   | <b>567</b> |
| § 1. Понятие однородности космологической модели . . . . .   | 567        |
| § 2. Дифференциальный критерий однородности . . . . .  | 573        |
| § 3. Динамические свойства однородных моделей вблизи сингулярности . . . . .   | 574        |
| § 4. Модель «перемешанного» мира . . . . .   | 577        |
| § 5. О невозможности «перемешивания» в модели «перемешанного» мира . . . . .   | 582        |
| § 6. Квантовые ограничения для модели «перемешанного» мира . . . . .   | 584        |
| § 7. Изотропизация однородных космологических моделей в ходе расширения . . . . .  | 585        |
| § 8. Анизотропия реликтового излучения в моделях типа I Бианки с критической плотностью вещества . . . . .                                     | 594        |
| § 9. Ожидаемая анизотропия космологического радиоизлучения в однородных анизотропных моделях с искривленным трехмерным пространством . . . . . | 699        |
| <b>Р А З Д Е Л V</b>   |            |
| <b>СИНГУЛЯРНОСТЬ И РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ</b>   |            |
| <b>Глава 22. Космологическая сингулярность . . . . .</b>   | <b>607</b> |
| § 1. Введение . . . . .  | 607        |
| § 2. Сингулярность в начале расширения . . . . .   | 609        |
| § 3. Общее космологическое решение с сингулярностью . . . . .  | 615        |
| <b>Глава 23. Физические процессы вблизи сингулярности и развитие теории тяготения . . . . .</b>  | <b>619</b> |
| § 1. Введение . . . . .  | 619        |
| § 2. Космологические следствия теории Хагедорна . . . . .  | 621        |
| § 3. Космологические выводы из теории Омнеса . . . . .   | 623        |
| § 4. Квантовые явления в сингулярных состояниях метрики и гравитационного поля . . . . .   | 629        |
| § 5. Рождение заряженных частиц в электродинамике . . . . .  | 639        |
| § 6. Математическая теория рождения частиц . . . . .   | 647        |
| § 7. Сверхпространство и минисверхпространство . . . . .   | 651        |
| § 8. Гипотеза несохранения барионов и зарядовая несимметрия элементарных частиц . . . . .  | 654        |

|  |            |
|--|------------|
| § 9. Холодная Вселенная и спектр возмущений . . . . .                          | 657        |
| § 10. Теория стационарной Вселенной . . . . .                                  | 663        |
| § 11. Принцип Маха и совпадения больших чисел физики и космологии . . . . .    | 667        |
| § 12. ОТО и структура (топология) мира как целого . . . . .                    | 675        |
| § 13. Локальная топология, «белые дыры» и космология . . . . .                 | 683        |
| § 14. Статистическая физика и тяготение . . . . .                              | 687        |
| § 15. Теория тяготения Бранса — Дикке и ее космологические следствия . . . . . | 690        |
| § 16. Новые гипотезы в теории поля и космология . . . . .                      | 695        |
| § 17. Осциллирующая Вселенная? . . . . .                                       | 699        |
| § 18. Рождение гравитонов вблизи сингулярности . . . . .                       | 704        |
| § 19. Сингулярность и конформная инвариантность . . . . .                      | 707        |
| § 20. Направление времени . . . . .  | 711        |
| <b>Литература</b> . . . . .  | <b>715</b> |
| <b>Указатель имен</b> . . . . .  | <b>729</b> |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная космология представляет собой обширную быстро развивающуюся область знания.

Теоретической основой ее явились космологические модели советского математика Фридмана, а наблюдательной основой — наблюдения Хаббла красного смещения в спектрах галактик. Если кинематика эволюционирующей Вселенной стала известной десятки лет назад, то исследование физики процессов в расширяющейся Вселенной получило надежную наблюдательную и теоретическую основу только в последнее время.

Истекшее десятилетие принесло подтверждение теории так называемой горячей Вселенной. В общих чертах современное состояние и ближайшее прошлое Вселенной можно считать известным. Достигнуты результаты непреходящего значения, навечно зачисленные в золотой фонд науки.

Однако эти достижения привели к возникновению новых проблем. Начался необычайно активный шторм этих проблем, были предприняты разнообразные попытки разработки более глубоких и более трудных вопросов, относящихся к сингулярному состоянию в далеком прошлом Вселенной, к проблеме возникновения галактик и к другим задачам.

Исследование космологической сингулярности имеет принципиальное значение. Это состояние удалено от нас по времени более чем на 10 миллиардов лет. Однако нельзя забывать, что каждая частица (или ее предки) вышла из горнила сингулярности. Настоящее и будущее Вселенной зависят от ее прошлого, а следовательно, зависят от сингулярного состояния.

Современная космология использует весь арсенал физических и астрономических знаний. Ставшая классической теория горячей Вселенной использует общую теорию относительности, термодинамику, гидродинамику, теорию плазмы. В исследованиях, посвященных сингулярности, широко используются более молодые области физики, включая теорию квантовых полей. Предлагаемая монография, посвящена бурно развивающейся науке, поэтому, естественно, в книге соседствуют почтенные установившиеся теории, имеющие возраст более полувека, и гипотезы, едва вышедшие из младенческого возраста, иногда противоречащие друг другу. Части монографии, в которых описаны основные наблюдательные факты и классические теории, должны входить в общеобразовательный минимум каждого

астронома и даже — по нашему убеждению — каждого физика. С другой стороны, в полном объеме монография действительно необходима лишь тем, кто работает или намерен работать в области космологии. Не заменяя полностью оригинальную литературу, монография дает достаточно полное представление о состоянии космологии и особенно теоретической космологии на 1974 год.

Соединение таких разнородных задач оказалось необычайно трудным; совершенно нереальным оказалось первоначальное намерение авторов переработать для данного издания космологический раздел нашей книги «Релятивистская астрофизика» («Наука», 1967). Монографию пришлось писать заново. Несмотря на большой объем книги, авторам только с большим трудом удалось охватить все разделы современной космологии.

Как и в наших предыдущих книгах, мы стремились наряду с математической теорией процессов дать наглядную интерпретацию теории и, особенно, показать, как применяется формализм теории в решении конкретных задач. В заключение наших оправданий по поводу трудностей написания монографий такого рода приведем из введения к книге Кеплера «Новая астрономия, основанная на причинах, или Физика неба» следующую злободневную цитату:

«В настоящее время крайне тяжела участь тех, кто пишет математические, особенно же астрономические книги. Если не соблюдается необходимая строгость в терминах, пояснениях, доказательствах и выводах, то книга не будет математической. Если же строгость соблюдена, то чтение книги становится очень утомительным, особенно по-латыни, которая лишена прелести, свойственной греческой письменной речи. Поэтому сейчас очень редко встретишь подходящих читателей, большинство же предпочитает вообще уклоняться от чтения».

В работе над монографией мы пользовались неизменной поддержкой наших соратников из отдела теоретической астрофизики Института прикладной математики АН СССР и Института космических исследований АН СССР, особенно А. Г. Дорошкевича и Р. А. Сюняева, совместно с которым написана гл. 8. Весьма полезны были также обсуждения и дискуссии с сотрудниками ИКИ, ГАИШ, ФИАН, ИТФ, ИФП, других институтов, а также с зарубежными коллегами.

Мы пользуемся случаем поблагодарить редактора книги И. Г. Вирко за помощь при подготовке рукописи к печати.

*Я. Б. Зельдович,  
И. Д. Новиков*

## ВВЕДЕНИЕ



Научная космология появилась значительно позже других астрономических дисциплин, но, несмотря на это, — а может быть, именно вследствие этого — в настоящее время разрабатывается особенно интенсивно и приносит открытия огромного значения.

В настоящем введении мы попытаемся показать структуру и логические связи современной космологии, полностью отказываясь от исторического порядка изложения (а заодно и от ссылок на литературу, которые будут приведены в соответствующих местах, при подробном изложении вопроса). Выражаясь кратко, прошлое Вселенной бесконечно интереснее прошлого науки о Вселенной.

Важнейшим фактом является наблюдаемая изотропия свойств Вселенной, независимость видимой картины Вселенной от направления луча зрения. Этот факт относится как к общему радиоизлучению, пронизывающему всю Вселенную («реликтовый фон», о котором подробнее см. ниже), так и к длинноволновому радиоизлучению отдельных источников (усредненному по площадкам на небе, содержащим много источников) и к рентгеновскому излучению, происхождение которого еще не вполне ясно. Эти виды излучения приходят к нам с наибольших расстояний; отклонения от изотропии в их интенсивности не превышают  $1\%—0,1\%$ .

Следующий шаг к пониманию структуры Вселенной содержит грандиозную экстраполяцию. Мы знаем, что вместе со всей Солнечной системой находимся в спиральной галактике, которая в свою очередь входит в скопление галактик. Мы видим другие скопления галактик, рассеянные в пространстве. Однако изотропия реликтового и других видов излучений, приходящих издалека, является более фундаментальной, чем неоднородность ближайших нам окрестностей: распределение скоплений галактик на небе тоже представляется в среднем изотропным. Естественно предположить, что Вселенная однородна в больших масштабах, хотя и неоднородна в малом. Наблюдаемую изотропию излучения можно привлечь для того, чтобы дать количественную оценку степени однородности; отклонения от однородности оказываются меньше  $1\%—0,1\%$  в масштабе порядка  $10^{10}$  световых лет.

Нужно подчеркнуть, что наблюдательные данные на первый взгляд сами по себе не противоречат предположению о сферической



симметрии мира. Можно предположить, что в центре находится Земля (Солнечная система, Галактика), средняя плотность вещества во Вселенной зависит от расстояния до центра, но не от направления. Выбор однородной модели вместо модели с центром в Галактике происходил на первых шагах развития современной космологии по общепричинным причинам: в средние века естественным казалось как раз предположение о центральном положении Земли. С тех пор господствующие философские взгляды изменились, мы стали скромнее. Конечно, углубленный анализ всех наблюдательных данных приводит к выводу об однородности Вселенной без каких-либо ссылок на общие концепции и аналогии из истории науки.

Приняв однородную модель Вселенной, нужно сделать выводы, следующие для этой модели из известных физических законов. Здесь уместно спросить: насколько правомерно пользование известными, установленными в лаборатории законами? Не следует ли ожидать, что при переходе к грандиозным масштабам Вселенной сами эти законы придется менять? Такое изменение законов физики в больших масштабах произошло, когда возникли общая теория относительности (ОТО) и представление о кривизне пространства-времени. Ясно, что в больших космологических масштабах должна проявляться кривизна. Уже в пределах Солнечной системы (а в наиболее изоциренных, точных опытах — и в лаборатории) ОТО дает специфические поправки и находит экспериментальное подтверждение. Тем самым доказывается справедливость ОТО, а значит, и следующее из нее искривление пространства-времени в больших масштабах Вселенной. Кроме доказанного факта кривизны пространства и времени есть и не выясненный до настоящего времени вопрос, специфический для больших масштабов, — вопрос о космологической постоянной. Космологическая постоянная описывает определенную (положительную или отрицательную) плотность энергии и соответствующее давление, приписываемое вакууму. Это приводит к появлению дополнительного относительного ускорения (положительного или отрицательного) между любыми двумя частицами, зависящего только от расстояния между ними (но не от их массы). Это очень небольшое изменение закона тяготения не может быть замечено в лабораторных опытах, однако для динамики Вселенной как целого из-за огромности расстояний космологическая постоянная может быть существенной.

Появление новых законов и новых обобщений в физике всегда было связано с тем, что старые законы вступали в непримиримое противоречие с опытом или оказывались логически, внутренне незамкнутыми и непригодными в новой области. Так было, когда доквантовая физика столкнулась с ультрафиолетовой катастрофой в законе излучения и с необъяснимой стабильностью атомов. Так было и тогда, когда потребовалось релятивистское обобщение уравнения Шредингера для больших скоростей. Подойдем с такой мер-

кой к общей теории относительности: применяя ее к безграничной Вселенной, мы не сталкиваемся ни с внутренними логическими противоречиями самой теории, ни с какими-либо вопиющими противоречиями между теорией и наблюдениями. Поэтому представляются необоснованными предположения о необходимости изменения ОТО при применении ее к космологии (если не считать вопроса о космологической постоянной — вопроса, стоящего в рамках ОТО). Нет никаких наблюдательных данных, указывающих на ограниченность применения ОТО к масштабам Вселенной \*).

Авторы хотят подчеркнуть «ортодоксальность» своей точки зрения. Мы не согласны с появляющимися время от времени теориями о нарушении фундаментальных законов физики, например теориями о постоянном рождении вещества «из ничего», (и притом вдали от сингулярности — теория стационарной Вселенной), или с теориями об уменьшении постоянной тяготения. Конкретные причины нашего несогласия и критика таких теорий даются в V разделе книги.

Итак, однородная и изотропная Вселенная может быть рассмотрена в рамках ОТО.

Как известно, существует обширное семейство решений уравнений Эйнштейна, для которых характерна эволюция Вселенной и в то же время свойства однородности и изотропии сохраняются с течением времени.

Наблюдения показывают, что мы живем в эволюционирующей и притом расширяющейся Вселенной. Красное смещение спектральных линий света, приходящего к нам от далеких галактик, есть следствие доплер-эффекта, связанного с тем, что эти галактики удаляются от нас. Новейшие измерения подтверждают пропорциональность скорости и расстояния:  $u = Hr$ , где величина  $H$  называется постоянной Хаббла. Во всей книге мы принимаем ее равной  $\approx 75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мегапарсек} \approx (4 \cdot 10^{17} \text{ сек})^{-1} = (1,3 \cdot 10^{10} \text{ лет})^{-1}$ . Стоящая в скобках величина размерности времени приблизительно соответствует времени расширения от состояния с большой плотностью. Заметим, что постоянная Хаббла известна из наблюдений с точностью по крайней мере до 50%. По последним данным, вероятно  $H = 50 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс} = (2 \cdot 10^{10} \text{ лет})^{-1}$ .

\*) Как мы увидим, релятивистская космология приводит к выводу о необходимости в прошлом во Вселенной состояния, в котором вещество имеет огромную плотность, а пространство-время — огромную кривизну, так называемого сингулярного состояния. В таких ситуациях ОТО в ее настоящей форме, возможно, уже неприменима.

Итак, вся совокупность теоретических, экспериментальных и наблюдательных фактов говорит о применимости физических законов и общей теории относительности для описания эволюции Вселенной «почти с самого начала расширения» — с моментов, когда плотность вещества была много больше ядерной, т. е.  $\rho > 10^{14} \text{ г/см}^3$  (уточнение этого «почти» см. далее), и до настоящего времени. Н об этом подробно говорится далее.

Решения уравнений ОТО согласуются с линейным законом  $u = Hr$ . Именно такой закон расширения необходим для того, чтобы на протяжении всей эволюции сохранялись самые общие свойства решения — однородность и изотропия. При этом предполагается также, что плотность и давление вещества везде одинаковы, не зависят от пространственных координат, но при этом зависят от времени. Однако для полного решения задачи недостаточно задать эти свойства и значение  $H$ ; необходимо знать численное значение плотности вещества и давления в настоящее время, т. е. знать свойства вещества, заполняющего пространство, и значение космологической постоянной  $\Lambda$ .

Весьма вероятно, что  $\Lambda \approx 0$ . В этом случае можно показать, что при любой плотности вещества длительность эволюции в прошлом меньше, чем  $H^{-1}$ . Будущая эволюция существенно зависит от современной плотности вещества: существует критическое значение плотности  $\rho_c$ , зависящее от  $H$  (для  $H = 75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$  это критическое значение  $\rho_c = 10^{-29} \text{ г/см}^3$ ), такое, что при  $\rho < \rho_c$  расширение будет продолжаться неограниченно, а при  $\rho > \rho_c$  расширение сменится сжатием.

От значения плотности зависит также важное свойство Вселенной — ее общая геометрическая структура: конечность или бесконечность. При  $\rho > \rho_c$  Вселенная конечна, хотя и безгранична, подобно тому как конечна, но не имеет границ поверхность шара. При  $\rho \leq \rho_c$  Вселенная бесконечна и в этом смысле не отличается от классического трехмерного евклидова пространства. Следовательно, плотность, будущее и геометрическая структура Вселенной связаны между собой. В случае космологической постоянной, отличной от нуля, ситуация сложнее: например, при определенных соотношениях  $\Lambda$  и  $\rho$  возможен случай конечной Вселенной, которой тем не менее в будущем предстоит неограниченное расширение. Здесь во введении было бы неуместно вдаваться в полную классификацию таких решений.

Как мы увидим далее, определение средней плотности материи во Вселенной прямо из наблюдений различных объектов — это задача очень сложная, так как многие виды материи наблюдать очень трудно.

В принципе можно определить кривизну пространства (а значит, и среднюю плотность всей материи) и решить вопрос о структуре Вселенной, наблюдая, как меняется яркость источника (например, галактики) с известной абсолютной светимостью в зависимости от его расстояния или от его красного смещения (поскольку оно непосредственно связано с расстоянием). В моделях с разной кривизной пространства эта зависимость разная.

Теория распространения света и теория, указывающая связь между свойствами далеких объектов и наблюдаемыми величинами, является тем разделом космологии, который разработан с наибольшей полнотой. В принципе достаточно было бы измерить красные

смещения спектра и поток света всего двух далеких объектов с известной абсолютной светимостью — и можно найти постоянную  $H$  и плотность  $\rho$  (при условии, что  $\Lambda=0$ ; если  $\Lambda \neq 0$ , нужно еще одно наблюдение). Для того чтобы установить структуру Вселенной, вместо светимости можно измерять число объектов данного типа в данном элементе телесного угла и в заданном интервале красного смещения, но опять-таки для объектов, для которых нечто известно — именно плотность которых в пространстве известна из независимых соображений. Однако эта простая и ясная программа до сих пор не проведена, и не только по причине технических трудностей. Существует глубокая принципиальная трудность, связанная с тем, что все небесные тела эволюционируют. Наблюдая далекие объекты, мы наблюдаем их в далеком прошлом и поэтому не можем даже для объектов известного типа (галактики, квазары) указать с уверенностью их абсолютную светимость и число в единице объема в момент, когда было испущено излучение, принимаемое нами сегодня.

Поэтому сопоставление теории с наблюдениями не привело к установлению структуры Вселенной. Вместо этого получены доказательства того, что удельная плотность \*) наиболее мощных источников энергии во Вселенной — квазаров и радиисточников — в прошлом была существенно (до тысячи раз!) больше современной; последние 8—9 миллиардов лет квазары вымирают, рождение новых квазаров не компенсирует угасание старых. Для обычных галактик можно предвидеть гораздо большую стабильность, эволюционные эффекты меньше. Расстояния, на которых можно наблюдать галактики, малы по сравнению с космологическими масштабами, и эволюция их за время распространения света даже от наиболее далеких до нас не очень велика, но меньше и космологические эффекты. Поэтому окончательно структура Вселенной до сих пор не установлена.

Итак, для определения структуры Вселенной приходится вернуться к трудной задаче нахождения средней плотности материи путем непосредственных наблюдений различных небесных тел и излучений во Вселенной. Эти наблюдения необходимы еще по одной причине.

Развитие космологии неотделимо от вопроса о материальном составе Вселенной. Для динамики Вселенной достаточно знать одну лишь величину — среднюю плотность, но для понимания физических процессов нужно знать, *какие* частицы заполняют Вселенную.

Средняя плотность вещества, находящегося сейчас в галактиках, приблизительно известна. Если его «размазать» по всему пространству, то эта величина составляет около  $(3-5) \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$ , т. е. в 20—30 раз меньше критической. В самое последнее время указывается, что галактики, возможно, окружены коронами, состоящими, веро-

---

\*) Количество источников, приходящихся на фиксированную массу вещества во Вселенной.

ятно, из звезд малой светимости, при учете которых средняя плотность может увеличиться в несколько раз. Масса галактик определяется из анализа движения звезд и газовых облаков в естественном предположении, что возраст галактик во много раз больше периода обращения по галактической орбите. Такой способ позволяет определить суммарную массу галактики, включая невидимые формы материи, например погасшие звезды \*). Масса галактики приблизительно равна сумме масс покоя барионов (нейтронов и протонов), входящих в ее состав; таким образом можно получить среднюю плотность барионов во Вселенной — порядка  $3 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-3}$  в настоящее время.

Высказывалось предположение о зарядовой симметрии Вселенной, т. е. о существовании одинаковых в среднем количества частиц и античастиц. Нужно подчеркнуть, что априори с точки зрения теории элементарных частиц такое предположение возможно, но вовсе не обязательно. Специально предпринимались поиски эффектов аннигиляции частиц и античастиц в пространстве между галактиками, состоящими из вещества, и галактиками, состоящими из антивещества. Эти поиски дали отрицательный результат, и поэтому более вероятным в настоящее время представляется предположение о зарядово-несимметричной Вселенной, в которой антибарионы имеются лишь в ничтожном количестве в составе космических лучей.

Наблюдения показывают наличие интенсивного радиоизлучения в сантиметровом и миллиметровом диапазоне; это излучение нельзя приписать каким-либо отдельным источникам. Предполагается, что это излучение является первичным и существует, начиная с весьма ранней стадии эволюции Вселенной, так же как на ранней стадии уже имелись те барионы, которые затем вошли в галактики.

Основываясь на наблюдениях и небольшой теоретической экстраполяции, можно подсчитать плотность первичных (реликтовых) фотонов, она оказывается равной  $\sim 400$  в одном  $\text{см}^3$ , что в  $10^8$ — $10^9$  раз больше средней плотности барионов во Вселенной. Реликтовое излучение соответствует термодинамическому равновесию при  $2,7^\circ\text{К}$ . Средняя энергия фотонов около  $0,001 \text{ эв}$ , плотность энергии излучения  $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-13} \text{ эрг/см}^3$ , и по принципу эквивалентности соответствующая плотность массы  $\rho_\gamma = \varepsilon/c^2 = 5 \cdot 10^{-34} \text{ г/см}^3$ . Таким образом, в настоящее время вклад излучения в общую плотность весьма мал.

Большая теоретическая и наблюдательная работа по определению плотности межгалактического газа в настоящее время еще не закончена. Содержание нейтрального водорода в этом газе весьма мало, газ практически полностью ионизован, его температура, предположительно, лежит в пределах  $2 \cdot 10^4 < T < 3 \cdot 10^6 \text{ К}$ . Такой газ

\*) Отметим, однако, что это относится к массе внутри галактики: масса в возможной короне, окружающей галактику, не повлияет на движение во внутренней части и, следовательно, не может быть определена по движению в этой части.

прозрачен практически для всех длин волн, сам он излучает ультрафиолет и мягкий рентген. Лучшие оценки дают для плотности газа  $\rho_{\text{газ}} \leq 0,3 \rho_c$ .

Прямое определение таких форм материи, как нейтрино и гравитационные волны, весьма затруднительно; их плотность могла бы во много раз превышать плотность обычного вещества (барионов) во Вселенной, и при этом чувствительности прямых физических методов все еще не хватало бы для обнаружения нейтрино и гравитонов. Однако из косвенных оценок следует, что плотность таких частиц существенно меньше плотности обычного вещества.

В настоящее время нет надежных оценок возможного количества потухших квазаров, звезд и каких-либо других слабосветящихся или несветящихся объектов между галактиками.

Итак, в настоящее время достаточно надежно установлена средняя плотность во Вселенной вещества, входящего в галактики:  $\rho_{\text{гал}} \approx (3-5) \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3 \approx 0,03 \div 0,1 \rho_c$ . О других видах материи можно сказать лишь, что хорошо изученные виды (например, реликтовое излучение) имеют плотность существенно меньше  $\rho_c$ , плотность остальных известна очень плохо.

Таким образом, ответа на вопрос, больше ли средняя плотность, чем  $\rho_c$ , или нет и, следовательно, бесконечна ли Вселенная или конечна, до сих пор нет. Большинство исследователей склоняется к первой возможности.

Зная сегодняшний состав материи, можно проследить более ранние этапы эволюции Вселенной. Важнейший факт состоит в расширении Вселенной. С расширением температура реликтового излучения падает. Сегодняшнее значение этой температуры  $2,7^\circ\text{К}$ , в прошлом она была гораздо выше. На ранних этапах расширения плотное вещество было непрозрачным для излучения; вещество и излучение находились в термодинамическом равновесии и имели очень высокую температуру. Отсюда название: «теория горячей Вселенной».

В целом можно считать твердо установленной общую картину эволюции, объединяемую названием «теория горячей Вселенной». Эта картина включает в себя изотропное (т. е. одинаковое во всех направлениях), однородное (одинаковое во всех точках пространства) расширение Вселенной. Вселенная заполнена материей, в которой численно преобладают фотоны. Зная закон расширения и используя законы физики, можно рассчитать состояние вещества и физические процессы в прошлом.

Плотность обычного вещества (барионов) падает с расширением обратно пропорционально объему, т. е.  $\rho_b \sim V^{-1}$ , плотность реликтового излучения  $\rho_{\text{рел}} \sim V^{-1/3}$ , т. е. падает быстрее, чем  $\rho_b$ . Следовательно, в прошлом, на ранней стадии, фотоны преобладали не только по числу, но и по массе, а обычное вещество состояло из водорода и гелия, полностью ионизованных. Эту стадию называют РД-стадией (радиационно-доминированной).

Из уравнений механики и из известного сейчас соотношения между числом квантов и атомов можно найти температуру и состав в зависимости от времени (будем отсчитывать время  $t$  от момента  $\rho = \infty$  в космологической модели). Так, например, в момент  $t = 1$  сек температура была около  $1 \text{ Мэв}$ , т. е.  $10^{10}$  градусов, плотность  $10^6 \text{ г/см}^3$ . Кроме квантов, в равновесии было почти столько же пар электронов и позитронов. При этом сложные ядра не могли существовать. Существовали протоны и нейтроны в почти одинаковом числе; столкновения с электронами и позитронами приводили к взаимным превращениям протонов и нейтронов.

По мере расширения исчезали позитроны. Часть нейтронов распалась, остальные нейтроны соединились с протонами и в конечном счете дали состав: 70% водорода и 30% гелия, следы дейтерия и гелия-3. Практически полностью отсутствуют более тяжелые элементы. Это предсказание теории не противоречит скудным данным о возможном составе первичного вещества (т. е. вещества, не прошедшего стадию нуклеосинтеза в звездах). От этого периода должны оставаться также нейтрино и антинейтрино в количестве, примерно равном количеству квантов, и с той же средней энергией, соответствующей сегодня несконечным градусам, т. е. около  $10^{-3} \text{ эв}$ .

На стадии расширения, следующей за РД-стадией, т. е. уже в близкую к нам эпоху, плотность массы обычного вещества превышает плотность фотонов, вещество находится в виде нейтральных атомов. В этой общей картине отсутствуют некоторые важные детали — в частности, не объяснены отклонения от однородности (галактики, их скопления), не хватает трактовок самых ранних стадий, когда наряду с фотонами присутствовали разнообразные частицы и античастицы и квантовые явления были существенны.

Как мы увидим дальше, между двумя этими вопросами — неоднородность и самые ранние стадии — есть определенная связь \*).

С наблюдательной точки зрения возможность исследования ранних стадий ограничена рассеянием электромагнитных волн на электронах. Все принимаемое сегодня на Земле излучение заведомо рассеивалось на электронах в эпоху, когда масштаб Вселенной был приблизительно в 1000 раз меньше теперешнего, т. е. при красном смещении  $\Delta\lambda/\lambda = z \sim 1000$ . В эту эпоху вещество представляло собой ионизованную плазму с температурой больше  $4000^\circ$ . Только в более близкую к нам эпоху температура упала настолько, что произошла рекомбинация водорода, плазма стала нейтральной и прозрачной для излучения. Следовательно, непосредственно «видеть» с помощью электромагнитных волн более далекое прошлое нельзя. Утверждение об однородности и изотропии мира, следующее из отсутствия

---

\*) Отметим еще не решенные вопросы о плотности энергии гравитационных волн разной длины и о том, можно ли считать равными плотности нейтрино и антинейтрино.

видимых флуктуаций температуры реликтового излучения на небесной сфере, относится к моменту рекомбинации водорода, соответствующему  $z \sim 1000$ , т. е.  $\sim 10^6$  лет с момента начала расширения Вселенной (напомним, что наша эпоха соответствует  $10^{10}$  лет).

Область пространства, охваченная электромагнитными волнами, вышедшими при  $t = 10^6$  лет и пришедшими к нам без рассеяния, мало отличается от «горизонта» — от максимально возможной области наблюдения в расширяющейся Вселенной при пользовании излучением, которое бы абсолютно не рассеивалось и возникло в момент сингулярности (бесконечной плотности вещества), т. е. в момент начала расширения.

Радиус наблюдения, таким образом, велик: он составляет около 97% радиуса «горизонта», и объем, охваченный наблюдением с помощью реликтового излучения, составляет 90% максимально возможного видимого объема (объема внутри «горизонта»). Таким образом, однородность в большом масштабе доказана. Однако возможность неоднородности Вселенной и анизотропии расширения до момента рекомбинации водорода, т. е. при  $z \sim 1000$ ,  $t < 10^6$  лет с начала расширения, не исключена. Более того, сегодняшняя структура окружающей нас Вселенной — существование отдельных галактик и скоплений галактик — с определенностью доказывает и настоятельно требует отклонений от идеальной картины однородной во всех масштабах и изотропной Вселенной.

Общая картина расширяющейся «горячей Вселенной», изложенная выше, надежно установлена и является одним из важнейших завоеваний науки XX века. Теперь мы переходим к более тонким вопросам — таким, как проблема происхождения галактик и проблема начала космологического расширения. Здесь мы обращаемся к проблемам, лежащим на самом переднем крае исследований сегодняшних дней. Не удивительно, что здесь мы будем говорить в менее определенном тоне и перечислять разные гипотезы. Всесторонний анализ отклонений от идеальной картины однородной изотропной Вселенной является важнейшей задачей современной космологии. В этом анализе необходимо комбинировать наблюдения и теорию. Прочный фундамент для исследований дает теория малых возмущений. Самое общее свойство Вселенной, близкой к идеальной, заключается в том, что отклонения от идеальности (возмущения) можно расклассифицировать на отдельные виды («моды»), развивающиеся независимо друг от друга. Такая теория представляет огромную ценность для анализа наблюдений, она дает тот язык, ту систему понятий и взглядов, без которой невозможно было бы продвижение в познании Вселенной.

В самом деле, сравним идеальную однородную изотропную модель и теорию малых возмущений. Идеальную модель удастся рассмотреть полностью благодаря ее совершенно исключительным свойствам, резко упрощающим математическую сторону дела. Идеальная модель в каждый момент характеризуется всего несколькими числа-



ми (радиус мира, скорость расширения, плотность вещества, температура и т. д.). Вся эволюционная картина в таком приближении характеризуется зависимостью этих нескольких чисел от времени, т. е. несколькими функциями переменной  $t$ . Следовательно, задача не сложнее механической задачи о движении одной частицы. Это упрощение достигнуто за счет ограничения однородной задачей; как выражаются математики, — за счет рассмотрения «вырожденного» случая. Между тем противоположный случай — наиболее общая постановка задачи — требует рассмотрения функций по крайней мере от четырех переменных — от времени и трех координат. В такой постановке задача необычайно сложна. Сложность усугубляется еще и тем, что нам неизвестны начальные условия — условия в начале расширения. Либо нужно просчитывать множество вариантов начального состояния, либо, имея (неполное!) представление о сегодняшнем состоянии, надо решать уравнения для прошлого. Оба подхода связаны с большими трудностями.

Теория малых возмущений замечательна тем, что она соединяет общность постановки задачи с математической простотой решения.

Действительно, однородное изотропное решение с наложенными возмущениями уже не является вырожденным: возмущения зависят от координат, возмущенное решение описывает неоднородную Вселенную.

С другой стороны, благодаря малости возмущений, или, как говорят математики, благодаря линейности задачи о малых возмущениях, рассмотрение каждой моды возмущений снова сводится к нахождению нескольких функций только от времени, т. е. задача имеет тот же класс сложности, что и задача о движении точки. Это замечательное соединение общности и простоты объясняет, почему значительная часть книги посвящена теории малых возмущений идеальной Вселенной.

Теория малых возмущений рассматривает эволюцию отдельных мод, и она неполна в том смысле, что абсолютное значение амплитуды различных мод остается за рамками этой теории — его нужно брать извне, из других теоретических соображений или из наблюдений. Теория дает, например, что возмущение плотности, охватывающее массу больше  $10^{15} M_{\odot}$ , растет в 100 раз за время, когда масштаб Вселенной также возрастает в 100 раз (например, от  $t=10^8$  лет после начала расширения до  $t=10^9$  лет). Однако есть ли в природе такого рода возмущения, какова их амплитуда — это остается в теории неизвестным.

О чем же говорят наблюдения?

Прямые наблюдения распределения вещества путем фотографирования неба крупнейшими телескопами свидетельствуют о том, что в масштабе порядка  $10 Mpc$  (примерно таково среднее расстояние между соседними скоплениями галактик) и меньше неоднородность велика. Средняя масса вещества в шаре диаметром  $10 Mpc$  лежит

в пределах  $10^{15} - 3 \cdot 10^{13} M_{\odot}$  (в зависимости от того, равна ли плотность критической,  $\rho = \rho_c$ , или она равна  $\rho = 3 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$ ). В этом масштабе в настоящее время возмущения плотности  $\delta\rho/\rho \sim 1$ . Когда образовались такие большие возмущения? По-видимому, в недалеком прошлом при красном смещении  $z \approx 5$  \*).

В самом деле, совсем грубо можно считать, что плотность вещества в скоплениях галактик порядка средней плотности в тот момент, когда они обособились от расширяющегося фона и превратились в связанные образования. Наглядно можно представить себе, что до определенного  $z_1$  (т. е. при  $z > z_1$ ) вещество расширялось, а затем (при  $z < z_1$ ) распалось на отдельные части — скопления галактик. Расстояние между этими частями продолжало увеличиваться, но сами эти части — или куски — «законсервировались», они поддерживаются в состоянии динамического равновесия без изменения средней плотности.

«Законсервированная» средняя плотность скоплений примерно совпадает со средней плотностью вещества во Вселенной в момент их образования и позволяет дать оценку этого момента, приведенную выше. Отсюда, пользуясь теорией возмущений, можно сделать вывод об амплитуде возмущений плотности и других величин в далеком прошлом.

Для состояния плазмы на РД-стадии получается амплитуда возмущений плотности  $\delta\rho/\rho \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ ; соответственно того же порядка и скорость движения отдельных элементов вещества, выраженная в единицах скорости света, на фоне общего расширения ( $u/c \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ ) и безразмерные возмущения метрики пространства-времени. Все это относится к масштабам, соответствующим сегодняшнему масштабу скоплений галактик.

Радионаблюдения флуктуаций реликтового излучения и его спектра после привлечения теоретических соображений позволяют дать оценку величины возмущений как функции масштаба (или массы), т. е. оценить спектр возмущений. Мы подробно остановимся на этом в соответствующем месте книги.

Резюмируя, можно сказать, что вырисовывается картина Вселенной, представляющей собой слабо возмущенный (почти однородный) расширяющийся мир с определенной (большой) начальной энтропией. В поддержку этой картины говорит измерение спектра и пространственного распределения реликтового радиоизлучения. Таков важнейший итог наблюдений и развития теории последних лет.

---

\*) Каждому красному смещению  $z$  соответствует определенный момент в прошлом. Этот момент отстоит от нашей эпохи на интервал времени, необходимый для того, чтобы лучи света приобрели соответствующее красное смещение. Для читателя удобно запомнить, что величина  $z+1$  показывает, во сколько раз увеличились масштабы расширяющегося мира от рассматриваемой эпохи до нашей.

В обрисованной выше схеме образование галактик и других структурных особенностей объясняется отклонением от однородности, впрочем, достаточно малым для того, чтобы не испортить перечисленные выше привлекательные черты однородной модели. Однако такая концепция не общепризнана. Прежде всего, высказывались сомнения, может ли эта концепция объяснить некоторые конкретные свойства наблюдаемой картины. Имелось в виду прежде всего вращение галактик и магнитные поля галактического масштаба. Кроме того, к списку трудностей теории слабозмущенного однородного мира добавляли еще вопрос о происхождении квазаров. Однако для серьезного рассмотрения этого вопроса нужно, чтобы сама природа квазаров — их строение и источники энергии в настоящее время — была установлена с определенностью.

Несколько лет тому назад проблема зарождения и усиления магнитных полей в космических масштабах была в трудном положении. Общеизвестна высокая электропроводность плазмы и следующее отсюда сохранение магнитных потоков — так называемая «вмороженность» магнитного поля в плазму. Для поддержания магнитного поля нет необходимости во внешних источниках электрического тока: так велико время затухания тока в плазме в космических масштабах. Казалось, что та же «вмороженность» помешает возникновению упорядоченных полей в плазме, первоначально свободной от магнитного поля.

В связи с этим рассматривались «магнитные» космологические модели с первичным полем; поскольку поле выделяет определенное направление в пространстве, такие модели отличались изначальной анизотропией.

В настоящее время этот этап поисков решения проблемы галактических магнитных полей можно считать преодоленным. Среди сложных трехмерных движений плазмы в процессе формирования вращающихся галактик есть и такие движения, которые способны генерировать и усиливать магнитные поля до наблюдаемых в настоящее время. Гипотеза изначального магнитного поля стала ненужной, повисла в воздухе, хотя, разумеется, доказать отсутствие малого начального поля (соответствующего, например,  $10^{-10}$  гс после расширения до сегодняшнего состояния) было бы очень трудно.

Сложнее обстоит дело с вращением. Вращение значительной части галактик является важнейшей их особенностью; именно вращением, центробежной силой, обусловлена дискообразная, плоская их форма. Возникновение отдельных рукавов и спиральной структуры является уже дальнейшим следствием неустойчивости плоского вращающегося диска. Итак, вращение, несомненно, имеет место и играет важную роль; теория, игнорирующая вращение, была бы заведомо неполна и неприемлема.

Известным аналогом понятия вмороженности магнитного поля являются свойства вращательного движения. Сюда относятся сохра-

нение момента вращения изолированной системы и сохранение циркуляции скорости в сплошной среде на РД-стадии. Если галактики возникают в результате роста небольших неоднородностей плотности за счет сил самогравитации, т. е. из «потенциальных» (безвихревых) возмущений, как это предполагается в схеме, описанной выше, то на первый взгляд трудно понять, как возникло вращение галактик. Простейшее объяснение наблюдаемого в настоящее время вращения заключается в предположении об изначальном вращении элементов среды, имевшем место на РД-стадии. Так формулируется гипотеза турбулентной Вселенной и первичных фотонных вихрей, которая противопоставляется теории потенциальных возмущений. Современная теория турбулентности используется для получения более детальных закономерностей корреляции момента вращения и массы галактики и т. п.

Однако происхождение вращения галактик можно объяснить и в рамках потенциальной теории. В момент формирования галактик из вещества, которое было почти однородным, будущие галактики сильнейшим образом взаимодействуют и закон сохранения момента к ним неприменим. Отнюдь не исключено, что вращение возникло самопроизвольно, спонтанно, в ходе развития возмущений, которые первично были потенциальными, безвихревыми; в частности, это возможно при сжатии вещества ударными волнами, возникшими из таких возмущений (речь идет о локальном вращении).

Острота дискуссии между сторонниками потенциальной и вихревой теорий, дискуссии, не законченной в настоящее время, связана с двумя трудностями вихревой теории. Первая из них заключается в том, что из вихревой теории следует, по-видимому, слишком раннее обособление галактик из расширяющегося вещества, обособление в момент, когда средняя плотность материи во Вселенной была еще довольно высока — около  $10^{-23}$ — $10^{-25}$  г/см<sup>3</sup>. Это приводит к некоторым свойствам галактик, трудно согласуемым с наблюдениями. В частности, велики ожидаемые возмущения реликтового радиополучения. Вторая проблема связана с тем, что предположение о существовании первичных вихревых движений требует изменения самого характера начала космологического расширения. Даже скромные дозвуковые вихревые движения требуют разрыва с теорией изотропного расширения, с теорией слабовозмущенного однородного мира. Согласно этой теории, по крайней мере первые  $10^6$  сек расширения мира не описывались однородной изотропной моделью. Признав вихревую теорию, придется отказаться и от теории химического состава дозвездного вещества, ибо синтез элементов проходил в первые 100 сек расширения.

Наконец, нельзя не упомянуть еще одну точку зрения на происхождение галактик. Согласно этой концепции, галактики образуются не из разреженного расширяющегося газа путем гравитационной конденсации малых неоднородностей, а путем взрывов из сверхплотных

тел. Достоинством такой точки зрения является ее непосредственная связь с мощными взрывами, наблюдаемыми в настоящее время в мире галактик. Однако трудности такой концепции чрезвычайно велики. Не останавливаясь в кратком обзоре на этих трудностях, упомянем только, что сторонникам этой теории приходится говорить о нарушении в этих догалактических телах фундаментальных законов физики, например таких, как закон сохранения углового момента или даже закон сохранения энергии. Мы не думаем, что решение проблемы образования галактик лежит на пути отказа от основ современной физики.

Выше нами обрисована в общих чертах картина «горячей» расширяющейся Вселенной от первых секунд расширения до образования галактик. Затронутые проблемы подводят нас к задаче огромной важности, к вопросу о самом начале космологического расширения. С чего началось расширение? Как расширился мир в самом начале? Была ли бесконечной плотность материи в начале расширения? Что было до начала наблюдаемого расширения?

Может быть, самые ранние стадии расширения Вселенной (например, еще до процесса синтеза химических элементов, т. е. до  $t < 1$  сек с начала расширения) действительно сильно отличались от однородной и изотропной модели и характеризовались, например, резко анизотропным расширением, описываемым анизотропными космологическими моделями, которые усиленно изучаются в последнее время. Еще совсем недавно дискутировался вопрос: была ли действительно сингулярность, бесконечная плотность вещества в начале расширения? Может быть, сингулярность характерна только для идеальной однородной изотропной модели, а в общем несимметричном, невырожденном решении сжатие вещества в предыдущую эпоху сменилось расширением без прохождения через сингулярность? В настоящее время строго доказано, что сингулярность в реальной Вселенной в прошлом была, даже если ранние стадии расширения резко отличались от однородного изотропного расширения. Мы остановимся подробно на этих проблемах в соответствующих местах книги. Здесь мы хотим подчеркнуть следующее. Рассмотрение различных типов космологических моделей, претендующих на описание Вселенной вблизи начала космологического расширения, и рассмотрение конкретных теорий различного типа возмущений на более поздней стадии подводят нас к фундаментальному вопросу: можно ли по данным всех возможных сейчас наблюдений, используя законы физики, однозначно восстановить прошлое Вселенной, в том числе и самые ранние стадии расширения, саму сингулярность и эпоху «до расширения» (если это выражение вообще имеет смысл)?

В духе термодинамики легко представить себе, что в определенных условиях широкий класс начальных состояний будет быстро приводить к одному и тому же равновесному состоянию, которое

уже в свою очередь послужит начальным состоянием для дальнейшей эволюции. Тогда начальное состояние «забывается».

На наших глазах возникает новое направление в космологии: теоретическое исследование ненаблюдаемых ранних стадий. Ставится вопрос о той космологической модели, которая могла бы получиться из самого широкого класса начальных ранних состояний.

Так, например, оказывается, что целый ряд анизотропных начальных состояний в силу уравнений общей теории относительности асимптотически приходит в состояние изотропного расширения. Является ли это обстоятельство объяснением того, что Вселенная расширяется изотропно? Может быть, это значит, что из множества «в принципе возможных» вселенных (кошунственное словосочетание!) большая часть будет такой, как наша — единственная наблюдаемая и исследуемая нами.

Но Вселенная одна, и поэтому статистические аргументы кажутся неприменимыми. Наряду с вопросом о том, почему Вселенная расширяется однородно и изотропно, перед космологией стоит и вопрос, почему энтропия Вселенной велика и Вселенная была в начале расширения горячей, а также почему малые возмущения таковы, что привели к образованию галактик в нашу эпоху, а не много раньше или много позже. Возможно, что новая теоретическая постановка вопроса возникнет от рассмотрения квантовой космологии.

В заключение еще раз напомним и подчеркнем вопрос о том фундаменте, на котором строится теоретическая космология, — о физических законах. Было бы соблазнительно провозгласить необходимость новых законов для нового (по сравнению с лабораторными) масштаба Вселенной, подобно тому как новые квантовые законы возникли в микромире. Однако такая аналогия представляется поверхностной и упрощенной.

Микромир сигнализировал о недостаточности классической теории за 50 лет до ее создания. В космологии до сих пор мы не сталкиваемся с каким-либо неразрешимым противоречием теории и опыта или внутренними логическими трудностями теории. Более того, теория расширяющейся Вселенной была создана до фактического открытия удаления галактик, доказавшего расширение Вселенной; теория же горячей Вселенной была создана задолго до открытия реликтового излучения, подтвердившего эту теорию. Это говорит о правильности наших теорий, об их применимости к масштабам Вселенной. Нужно только подчеркнуть, что речь идет не об исключении нового: необычайное и принципиально новое, никогда не наблюденное в лаборатории, возникает в космологии как результат применения существующей теории.

Общая теория относительности приводит к принципиально новой ситуации в релятивистском коллапсе. Новые явления возникают при комбинации квантовой теории материи с теорией тяготения. Неоднократно выдвигались теории рождения частиц, повсеместного и

всегда происходящего в разреженном пространстве в нарушение лабораторных законов физики. Это направление можно уважать как поэтическое предвидение, но не как научное предсказание. Такие теории непрерывного рождения вещества опровергнуты наблюдениями. Между тем в эволюционной космологии есть период — окрестности сингулярности, когда частицы рождаются в гравитационном поле огромной напряженности. При этом оказывается, что интенсивное рождение частиц происходит лишь при анизотропном расширении, — факт отнюдь не очевидный. Наконец, новые явления в тот же период, возможно, возникнут при учете квантования самих уравнений эволюции метрики Вселенной. Это — возможное новое развитие теории в применении к условиям, совершенно неизвестным современной физике. Таким образом: 1) основные положения современной физики, основанные на точнейших опытах и логической замкнутости; 2) развитие их в принципиальных новых условиях в самой сингулярности и 3) наблюдательные данные, полученные с помощью как наземных инструментов, так и с помощью космических аппаратов, — вот тот фундамент, на котором основывается или должна быть основана современная космология.

В заключение мы считаем необходимым сделать замечание исторического характера. Общеизвестно, что теория эволюционирующей Вселенной была создана в 1922—1924 гг. А. А. Фридманом. Однако в зарубежной литературе иногда высказывается точка зрения, что только Леметр (1927) независимо обосновал формулы расширяющейся космологической модели, связал их с открытым Хабблом разбеганием галактик и что Леметра следует считать отцом теории расширяющейся Вселенной, а саму космологическую модель следует называть моделью Леметра.

Не умаляя научных заслуг Леметра, мы решительно не согласны с такой точкой зрения. Все основные формулы теории однородной изотропной Вселенной имеются в работах Фридмана. Эти работы были опубликованы на русском и немецком языках и не остались незамеченными. Эйнштейн сначала не согласился с результатами советского математика, но после переданных ему разъяснений Фридмана полностью их признал. В дальнейшем Эйнштейн в 1931 г., говоря о теории расширяющейся Вселенной, ссылаясь на Фридмана: «Первым... на этот путь вступил Фридман.» [Эйнштейн (1966)] \*).

Теория однородной изотропной Вселенной по праву носит имя Фридмана.

---

\*) Здесь и в дальнейшем мы ссылаемся на «Собрание научных трудов» А. Эйнштейна, вышедшее в издательстве «Наука».

# РАСШИРЕНИЕ И ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ВСЕЛЕННОЙ



## Г Л А В А I

### ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

#### § 1. Локальный закон распределения скорости

Будем рассматривать однородную и изотропную космологическую модель. Однородной изотропной космологической моделью называется идеализированная картина Вселенной, в которой: а) одинаковы все наблюдаемые величины в различных точках пространства в один и тот же (но любой) момент времени (свойство однородности) и б) в любой точке пространства, в любой момент времени равноценны все направления (свойство изотропии). Ниже мы покажем, что если в некоторый момент распределение и движение материи однородно и изотропно, то это свойство сохранится и в течение всей эволюции. Кроме того, из свойства однородности следует, что достаточно проследить судьбу одного элемента объема вещества, ибо судьба всех остальных в точности такая же. Очень важным оказывается для анализа эволюции то обстоятельство, что в данной модели можно воспользоваться ньютоновской теорией тяготения. Почему это оказывается возможным? Дело в том, что рассматриваемая однородная изотропная модель является частным случаем сферически-симметричной модели, причем за центр можно выбрать любую точку. Хорошо известно, что в классической ньютоновской теории тяготения сферически-симметричное распределение вещества не создает гравитационного поля внутри сферической полости. В действительности это утверждение справедливо также и в общей теории относительности (ОТО), если Вселенная однородна и расширяется изотропно. Оба утверждения подробно рассмотрены в нашей книге «Теория тяготения и эволюция звезд» (ТТ и ЭЗ). Таким образом, если мы выделим достаточно малый шар радиуса  $R_0$ , то поле тяготения, создаваемое его массой, будет слабым (внешние массы несутся, ибо они не создают поля внутри полости), скорости относительных движений в этом шаре также малы, и можно пользоваться ньютоновской теорией. В однородной и изотропной модели, которая отлично



описывает нашу Вселенную, ОТО используется для строгого доказательства того, что она не является необходимой для решения локальных проблем в космологии.

Мы воспользуемся этим фактом и будем использовать привычную ньютоновскую теорию для вывода формул эволюции модели [Милн (1934, 1935), Мак-Кри, Милн (1934), Зельдович (1963), Каллан, Дикке и Пиблс (1955)]. Разумеется, когда мы от локальных свойств перейдем к изучению геометрии больших областей, необходимо будет вернуться к ОТО.

Итак, мы пользуемся в малой области ньютоновской теорией, локально являющейся точной. Разумеется, те же формулы можно было бы получить прямо из уравнений ОТО. Мы это сделаем в § 1 следующей главы. Однако смысл формул при таком способе вывода был бы не столь очевиден.

Движение вещества будем рассматривать в системе координат, выбранной так, что в начале координат (0) вещество покоится. В этой системе координат вещество, находящееся на некотором расстоянии от начала координат, движется. Пусть скорость движения положительна, т. е. направлена от начала координат, и пропорциональна расстоянию. В векторной форме такой закон распределения скорости записывается в виде

$$\mathbf{u} = H\mathbf{r}, \quad (1.1.1)$$

причем постоянная  $H > 0$  называется, как уже говорилось во введении, постоянной Хаббла. Название «постоянная» указывает на независимость  $H$  от величины и направления вектора  $\mathbf{r}$ . Однако  $H$  зависит от времени, эта зависимость будет подробно рассмотрена в § 2. Очевидно, что указанное распределение скоростей изотропно: для наблюдателя, находящегося в начале координат, никакое направление не является выделенным. В произвольной точке  $A$ , радиус-вектор которой  $\mathbf{r}_A$ , вещество движется со скоростью  $\mathbf{u}_A$  и, казалось бы, изотропия нарушается.

Перейдем в систему координат с началом в точке  $A$ , движущейся со скоростью  $\mathbf{u}_A$ , т. е. произведем перенос начала координат и галилеев переход к движущейся системе. Величины, измеренные в новой системе, отметим штрихом. Очевидно,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A$ . Тогда

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{u}_A = H\mathbf{r} - H\mathbf{r}_A = H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) = H\mathbf{r}'. \quad (1.1.2)$$

Следовательно, в новой системе имеет место тот же закон распределения скоростей  $\mathbf{u}'$  в зависимости от  $\mathbf{r}'$ , что и в старой для зависимости  $\mathbf{u}$  от  $\mathbf{r}$ . Распределение скоростей (1.1.1) замечательно именно тем, что оно не выделяет никакой особой точки. Только такое распределение скоростей изотропно и однородно. Наблюдатель, движущийся вместе с веществом, в любой точке видит картину удаления от него всех окружающих его частиц.

Закон расширения (1.1.1) приводит к следующей картине локального расширения: расстояние между любой парой материальных точек  $A$  и  $B$  изменяется со временем по закону  $\frac{dr_{AB}}{dt} = Hr_{AB}$ , откуда

$$r_{AB}(t) = r_{AB}(t_0) \exp \int_{t_0}^t H(t) dt. \quad (1.1.3)$$

Рассмотрим закон изменения плотности. Возьмем шар, содержащий определенную массу  $M$ ; радиус его обозначим  $R = R(t)$ . Плотность вещества  $\rho = M / \frac{4\pi}{3} R^3$ , откуда

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{3M}{4\pi R^4} \frac{dR}{dt}.$$

Подставим в последнюю формулу  $\frac{dR}{dt} = u = HR$ ; получим

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho H. \quad (1.1.4)$$

То же уравнение более формально можно получить из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}).$$

Предположим, что  $\rho$  не зависит от координат, т. е.  $\rho = \rho(t)$ ; тогда

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \rho \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(H\mathbf{r}) = 3H,$$

отсюда снова

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -3H\rho. \quad (1.1.4a)$$

Итак,  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  не зависит от координат. Следовательно, если в какой-то момент  $\rho$  не зависело от координат, то при законе расширения (1.1.1) во все последующие моменты  $\rho$  также не зависит от координат\*), хотя и меняется с течением времени,  $\rho = \rho(t)$ .

Таким образом, однородность, заданная в начальный момент, сохраняется всегда.

Тот же результат следует и для свойств распределения скорости. В системе покоя центра шара  $\mathbf{u} = H\mathbf{r}$ . Найдем закон изменения скорости. Ускорение в данной точке  $\mathbf{r}$  внутри шара зависит от тяготения той массы, которая находится внутри соответствующей сферы радиу-

---

\*) В частности, по этой причине  $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ .

сом  $r = |\mathbf{r}|$ . Обозначим эту массу  $m$ , где  $m = \frac{4\pi}{3} \rho r^3$ . Ускорение  $\mathbf{g}$  по величине равно  $\frac{Gm}{r^2} = \frac{4\pi}{3} G\rho r$  и направлено к центру, так что в векторной форме

$$\mathbf{g} = -\frac{4\pi}{3} G\rho \mathbf{r}.$$

Следовательно,  $\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \Delta t \mathbf{g}$ , и поскольку  $\mathbf{u}(t) \sim \mathbf{r}$  и  $\mathbf{g} \sim \mathbf{r}$ , то и в любой последующий и предыдущий момент времени  $\mathbf{u} \sim \mathbf{r}$ , скорость изотропна, т. е. всегда  $\mathbf{u} = H\mathbf{r}$ , хотя величина  $H$  и зависит от времени.

В заключение подчеркнем, что все сказанное применимо для описания вещества и при наличии давления. Действительно, в силу однородности нет градиента давления, нет никакой силы, связанной с давлением и влияющей на движение. Все приведенные выше рассуждения остаются в силе. Правда, необходимо тут же оговориться, что существует релятивистский эффект, связанный с тем, что давление создает добавочную силу тяготения: Этот эффект существен лишь в случае, когда уравнение состояния вещества релятивистское и давление порядка плотности энергии:  $P \sim \epsilon$ . Мы остановимся на этом эффекте далее, в § 5. В последующих параграфах (§§ 2—4) мы предполагаем, что давление много меньше плотности энергии:  $P \ll \rho c^2$ . Этому условию, например, заведомо удовлетворяет совокупность галактик.

## § 2. Закон эволюции. Критическая плотность

Рассмотрим шар радиуса  $R$ , содержащий массу  $M$ , и найдем ускорение частицы, находящейся на поверхности шара. На частицу действует сила притяжения со стороны  $M$ :

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}. \quad (1.2.1)$$

Подставив сюда  $\mathbf{u} = \frac{dR}{dt} = HR$  и  $M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$ , получим

$$\frac{dHR}{dt} = R \frac{dH}{dt} + H \frac{dR}{dt} = R \frac{dH}{dt} + RH^2 = -\frac{4\pi}{3} G\rho R,$$

т. е.

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{4\pi}{3} G\rho. \quad (1.2.2)$$

Уравнения (1.1.4) и (1.2.2) образуют систему, полностью определяющую изменение со временем (и для прошлого, и для будущего) всех локальных свойств Вселенной. Как и следовало ожидать, в эти

уравнения не входит радиус  $R$  произвольно выделенной массы  $M$  и не входит также сама величина  $M$ .

Для того чтобы представить наглядно общий характер расширения вещества, удобно, тем не менее, пользоваться величинами  $R$  и  $M$ .

Уравнение движения (1.2.1) можно один раз проинтегрировать. Умножая его на  $\frac{dR}{dt}$ , получим

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{R} = A. \quad (1.2.3)$$

Это уравнение имеет вид закона сохранения энергии: первый член слева — кинетическая энергия единицы массы, второй член слева (отрицательный) — ее потенциальная энергия, константа  $A$  есть полная энергия единицы массы на поверхности шара.

Будем считать известными значения  $H_0$  и  $\rho_0$  в момент  $t_0$  и заданном некоторым  $R_0$ ; при этом  $M = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \rho_0$ . Мы знаем также значение  $\left( \frac{dR}{dt} \right)_{t=t_0} = H_0 R_0$  в момент  $t_0$ . Таким образом, можно определить значение константы в правой части (1.2.3). Получим

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)_{t=t_0}^2 - G \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_0 R_0^3}{R_0} = \frac{1}{2} H_0^2 R_0^2 - G \frac{4\pi \rho_0 R_0^3}{3}.$$

Итак, из (1.2.3) следует:

$$\left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{G \rho_0 R_0^3}{R} - \frac{8\pi}{3} G R_0^2 \left( \rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi G} \right). \quad (1.2.4)$$

Это уравнение можно проинтегрировать. Решение мы приведем в § 1 гл. 2 (табл. I), но весьма поучительно дать качественный его анализ.

Легко представить себе общий характер решения (1.2.4). В настоящее время  $\frac{dR}{dt}$  положительно. Следовательно, в прошлом  $R$  было меньше, а значит,  $\frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3R}$  было больше, чем в настоящее время.

Следовательно, в прошлом  $\frac{dR}{dt}$  обязательно было больше, чем в настоящее время, и был момент, когда

$$R = 0, \quad \frac{dR}{dt} = +\infty.$$

Предсказание для будущего зависит от знака скобки  $\left( \rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi G} \right)$  во втором члене.

Обозначим

$$\frac{3H_0^2}{8\pi G} = \rho_c, \quad (1.2.5)$$

а отношение  $\rho_0/\rho_c$  — через  $\Omega$ .

Заметим здесь же, что в космологии часто употребляется и другая величина:  $q_0 = \Omega/2$ , носящая название параметра ускорения. Это название связано с тем, что, как легко убедиться из (1.2.1), (1.2.4) и (1.2.5),

$$q_0 = - \left( \frac{d^2 R}{dt^2} \right)_{t=t_0} / R_0 H_0^2. \quad (1.2.6)$$

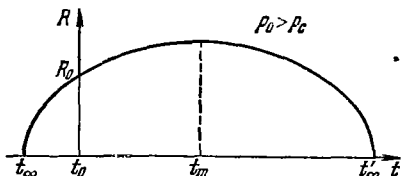


Рис. 1. Изменение со временем расстояния  $R$  между двумя точками, когда плотность  $\rho_0$  больше, чем критическая плотность  $\rho_c$ :  $t_0$  — сегодняшний момент  $t_\infty$  и  $t'_\infty$  — моменты бесконечной плотности,  $t_m$  — момент максимального расширения.

Если  $\rho_0 > \rho_c$ , то скобка в (1.2.4) положительна. Значит, по мере увеличения  $R$  будет достигнуто такое значение, когда вся правая часть (1.2.4) обратится в нуль. В этот момент расширение прекратится и сменится сжатием (рис. 1).

Если  $\rho_0 < \rho_c$ , то расширение будет продолжаться неограниченно. В пределе при  $t \rightarrow \infty$ ,  $R \rightarrow \infty$  имеем из (1.2.4)

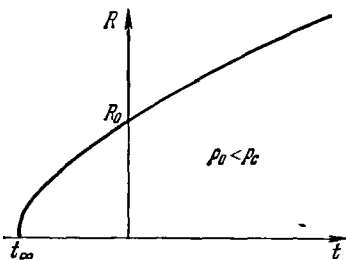


Рис. 2. Изменение со временем расстояния между двумя точками, когда плотность  $\rho_0$  меньше, чем критическая плотность  $\rho_c$ .

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G R_0^2 (\rho_c - \rho_0)} = \text{const.}$$

Соответствующая кривая показана на рис. 2. Как уже отмечалось, расстояние между любой парой объектов меняется пропорционально  $R$ , т. е. проходит через максимум в случае рис. 1 и неограниченно увеличивается в случае рис. 2. В первом случае ( $\rho_0 > \rho_c$ , рис. 1) постоянная Хаббла уменьшается от  $H_0$  при  $t=t_0$  до  $H=0$  при  $t=t_m$  и  $H=-\infty$  при  $t=t'_\infty$ . Во втором случае ( $\rho_0 < \rho_c$ , рис. 2)  $H$

уменьшается, оставаясь всегда положительной величиной, при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\frac{dR}{dt} = b$ ,  $R = bt$ ,  $H = \frac{1}{t}$  (асимптотически точно, без какого-либо численного коэффициента).

Какой случай в действительности имеет место:  $\rho_0 > \rho_c$  или  $\rho_0 < \rho_c$ ?

Для ответа надо, очевидно, знать значения  $\rho_0$  и  $H_0$  для настоящего момента.

Подробно мы рассмотрим современное состояние вопроса об определении  $\rho_0$  и  $H_0$  из наблюдений в § 9 гл. 3. Здесь же только коротко укажем, что наиболее вероятное значение постоянной Хаббла  $H_0$  лежит в интервале  $75\text{—}50 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ . Соответствующее значение критической плотности  $\rho_c = 10^{-29}\text{—}5 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3$ . Достаточно надежно установлено, что средняя плотность материи во Вселенной  $\rho_0$  не меньше чем  $\rho_0 = 3 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$ . Эта величина  $\rho_0$  определяется массой материи, входящей в галактики, и не учитывает массы межгалактического вещества. Если между галактиками нет значительной плотности материи, то  $\rho_0 < \rho_c$  и в действительности осуществляется случай рис. 2.

Не исключено, однако, что на самом деле плотность вещества больше — в частности, за счет межгалактического ионизованного водорода или других труднонаблюдаемых видов материи (подробнее см. гл. 7, 8, 16).

В заключение параграфа сделаем следующую важную оговорку. Мы рассматривали эволюцию элемента объема вещества Вселенной под действием сил тяготения. При этом предполагалось, что космологическая постоянная  $\Lambda$  в уравнении тяготения равна нулю. О космологической постоянной, ее смысле и возможности ее отличия от нуля говорится в §§ 1, 2 гл. 4. Отличие  $\Lambda$  от нуля может повлиять на поздние стадии расширения мира. Однако в настоящее время нет ни теоретических, ни сколько-нибудь убедительных наблюдательных данных в пользу отличия  $\Lambda$  от нуля. Поэтому мы будем считать  $\Lambda \equiv 0$  на протяжении всей книги, исключая §§ 1, 2 гл. 4, где подробно разбираются те следствия, которые получаются при  $\Lambda$ , отличной от нуля.

### § 3. Продолжительность расширения

Найдем момент  $t_\infty$  в прошлом, когда  $R=0$ , т. е. когда плотность вещества была бесконечной. Если бы скорость расширения была постоянной и равной современному значению, то можно было бы написать:

$$R_0 = \left( \frac{dR}{dt} \right)_{t=t_0} (t_0 - t_\infty) = H_0 R_0 (t_0 - t_\infty). \quad (1.3.1)$$

Для «возраста»  $T$  однородной модели Вселенной, т. е. для времени, протекшего от  $t_\infty$  до настоящего момента  $t_0$ , мы получили бы (при  $H_0 = 75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ )

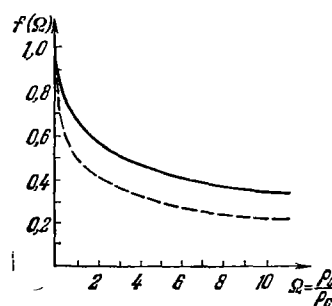
$$T = t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} = 4 \cdot 10^{17} \text{ сек} \approx 10^{10} \text{ лет}.$$

Как видно из уравнения (1.2.3) и рис. 1 и 2, в прошлом  $\frac{dR}{dt}$  было больше, чем в настоящее время. В действительности, как нетрудно

получить из формул предыдущего параграфа (см. (1.2.4)),

$$T = t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} f\left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right) = \frac{1}{H_0} f(\Omega), \quad (1.3.2)$$

где мы обозначили  $\Omega = \rho_0/\rho_c$ . Аналитический вид функции  $f(\Omega)$  приведен в приложении к данному параграфу. График  $f(\Omega)$  дан на рис. 3 \*).



### ПРИЛОЖЕНИЕ К § 3

Сокращение времени эволюции по сравнению с равномерным расширением вещества зависит от плотности. Характеризующая эту зависимость функция  $f$  находится решением уравнения (1.2.4). Функция  $f$  такова, что  $f \leq 1$ , причем при  $\rho_0 = 0$ ,  $\Omega = 0$   $f(0) = 1$ . В общем случае, при произвольном  $\Omega$ , функция  $f$  дается формулами, которые имеют разный вид при  $\Omega > 1$  и при  $\Omega < 1$ . В первом случае

$$f = \frac{\Omega}{(\Omega - 1)^{3/2}} \left[ \arcsin \sqrt{\frac{\Omega - 1}{\Omega}} - \frac{1}{\Omega} \sqrt{\Omega - 1} \right]. \quad (1.3.п1)$$

При этом легко проверить, что при  $\Omega \rightarrow 1$   $f \rightarrow 2/3$ ; при  $\Omega \gg 1$   $f \rightarrow \pi/2 \sqrt{\Omega}$ , так что  $f \rightarrow 0$  при  $\Omega \rightarrow \infty$ . При малой плотности, т. е. при  $\Omega < 1$ ,

$$f = \frac{\Omega}{(1 - \Omega)^{3/2}} \left[ -\operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1 - \Omega}{\Omega}} + \frac{1}{\Omega} \sqrt{-\Omega + 1} \right]. \quad (1.3.п2)$$

Эта формула, естественно, также дает в пределе  $\Omega \rightarrow 1$   $f \rightarrow 2/3$ , так что  $f(1)$  не зависит от того, с какой стороны мы подходим к  $\Omega = 1$ ;  $f$  не терпит разрыва или излома, несмотря на разный аналитический вид (1.3.п1) и (1.3.п2). При  $\Omega \ll 1$  (см. ниже (1.4.8))

$$f = 1 - \frac{\Omega}{2} \ln \frac{1}{\Omega}, \quad (1.3.п3)$$

т. е.  $f \rightarrow 1$  при  $\Omega \rightarrow 0$ .

В случае  $\Omega > 1$  представляет интерес время достижения максимума плотности  $t_m - t_0$ , а также время до полного сжатия  $t'_\infty - t_0$  (см. рис. 1). Из решения уравнения (1.2.4) можно показать, что

$$t_m - t_0 = \frac{1}{H_0} f_m(\Omega), \quad (t'_\infty - t_0) = \frac{1}{H_0} f'(\Omega), \quad (1.3.п4)$$

\*) Пунктиром показана кривая для случая, когда главную часть вещества составляют кванты и нейтрино; см. § 7.

где

$$f_m(\Omega) = \frac{\Omega}{(\Omega-1)^{3/2}} \left[ \frac{\sqrt{\Omega-1}}{\Omega} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{\Omega-1}{\Omega}} \right], \quad (1.3.п5)$$

$$f'(\Omega) = f + 2f_m = \frac{\Omega}{(\Omega-1)^{3/2}} \left[ \pi + \frac{\sqrt{\Omega-1}}{\Omega} - \arcsin \sqrt{\frac{\Omega-1}{\Omega}} \right]. \quad (1.3.п6)$$

Функция  $f_m$  изображена на рис. 4. Плотность вещества проходит через максимум и затем обращается в бесконечность лишь в случае  $\Omega > 1$ . Соответствию и формулы (1.3.5п) и (1.3.6п) определены лишь для  $\Omega > 1$ : при  $\Omega$ , приближающемся к единице,  $f_m$  и  $f'$  уходят в бесконечность пропорционально  $1/(\Omega-1)^{3/2}$ .

#### § 4. Два частных решения. Начальная стадия

Частное решение уравнения (1.2.4) в случае  $\rho_0 = \rho_c$  ( $\Omega = 1$ ) имеет особенно простую форму. Уравнение (1.2.4) в этом случае приобретает вид (напомним, что мы обозначили  $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ )

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{G\rho_0 R_0^3}{R}.$$

Решение этого уравнения с учетом (1.2.5) дает

$$R = R_0 \left( \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} \right)^{2/3}, \quad (1.4.1)$$

$$t_0 - t_\infty = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0}, \quad (1.4.2)$$

и из (1.1.4) получаем

$$\rho = \frac{1}{6\pi G (t - t_\infty)^2} = \frac{8 \cdot 10^5}{(t - t_\infty)^2}, \quad (1.4.3)$$

где время дано в сек, плотность — в  $г/см^3$ . В уравнении (1.2.4) при  $\rho_0 = \rho_c$  исчезает второй член. Но при любом  $\rho_0 \neq \rho_c$  в настоящее время надо иметь в виду, что в прошлом, вблизи  $t_\infty$ , был период, для которого  $R$  было достаточно мало и, следовательно, можно было пренебречь константой — вторым членом в (1.2.4) — по сравнению с первым членом, пропорциональным  $1/R$ . Поэтому выражение плотности (1.4.3) является универсальным для начальной стадии, независимо от сегодняшнего отношения  $\rho_0/\rho_c$ .

Второе частное решение — случай исчезающе малой плотности,  $\rho_0 \ll \rho_c$ . В этом случае, пренебрегая в (1.2.4) членами с  $\rho_0$ , получим

$$\frac{dR}{dt} = H_0 R_0 = \text{const.} \quad (1.4.4)$$

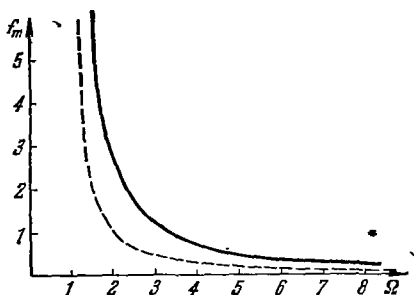


Рис. 4. Безразмерное время, необходимое для достижения максимума радиуса, как функция плотности. Сплошная линия —  $P=0$ , пунктирная —  $P=\epsilon/3$ .



Решением этого уравнения будет

$$R = R_0 + H_0 R_0 (t - t_0). \quad (1.4.5)$$

В этом приближении

$$t_\infty = t_0 - \frac{1}{H_0}, \quad R = H_0 (t - t_\infty), \quad (1.4.6)$$

$$H = H(t) = \frac{1}{(t - t_\infty)} = \frac{H_0}{1 + H_0(t - t_0)}$$

и для плотности найдем \*)

$$\rho(t) = \rho_0 \frac{R_0^3}{R^3} = \rho_0 \left( \frac{t_0 - t_\infty}{t - t_\infty} \right)^3. \quad (1.4.7)$$

Сравним плотность в прошлом, т. е.  $\rho(t)$  при  $t < t_0$ , с критической плотностью в прошлом  $\rho'_c(t)$ , т. е. с величиной \*\*) .

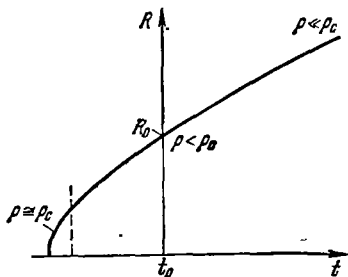


Рис. 5. Расширение при плотности меньше критической. Левее пунктирной линии — интервал времени, когда плотность близка к критической; с течением времени в ходе расширения плотность становится много меньше критической, в будущем  $\rho \ll \rho_c$ .

$$\rho'_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}.$$

При малых  $t - t_\infty \ll t_0 - t_\infty$  плотность  $\rho(t)$  растет быстрее, чем  $\rho'_c(t)$ . Поэтому при любом малом (но конечном) сегодняшнем  $\rho_0$  в прошлом был период, когда плотность была близка к критической плотности  $\rho'_c$ , вычисленной по мгновенному значению  $H = H(t)$ . В целом решение уравнения (1.2.4) и соответствующего уравнения для плотности (1.1.4) для случая  $\rho_0 < \rho_c$  ( $\Omega < 1$ ) состоит из двух частей (см. рис. 5):

$$\rho = \frac{1}{6\pi G (t - t_\infty)^2} \quad \text{при} \quad \rho > \frac{\rho_c^3}{\rho_0^2}, \quad t - t_\infty < \frac{2\Omega}{3H_0}; \quad (1.4.8a)$$

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{t_0 - t_\infty}{t - t_\infty} \right)^3 \quad \text{при} \quad \rho < \frac{\rho_c^3}{\rho_0^2}, \quad t - t_\infty > \frac{2\Omega}{3H_0}, \quad (1.4.8b)$$

а  $t_\infty$  в этом случае дается выражением [см. (1.3.п.3)]

$$t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} \left( 1 - \frac{1}{2} \Omega \ln \frac{1}{\Omega} \right). \quad (1.4.9)$$

\*) Еще раз напомним, что мы пренебрегаем давлением вещества. Вблизи сингулярности ( $\rho = \infty$ ) этого делать нельзя. О влиянии давления на закон расширения см. §§ 5—8 этой главы.

\*\*) Еще раз подчеркнем, что под  $\rho_c$  мы везде понимаем сегодняшнее значение, вычисленное по  $H_0$  в момент  $t = t_0$ ; величина  $\rho'_c(t)$  есть критическая плотность в момент  $t$ .

Напомним, что в (1.4.8) и (1.4.9) под  $\rho_c$  подразумевается величина, вычисленная по формуле (1.2.5) по сегодняшнему значению постоянной Хаббла,  $H_0 = H(t_0)$ , соответственно и  $\Omega = \rho_0/\rho_c = 8\pi G\rho_0/3H_0^2$  вычислено по сегодняшним  $H_0$  и  $\rho_0$ .

### § 5. Влияние давления на закон расширения. Качественные соображения

В предыдущих параграфах рассматривалось движение вещества, давлением которого можно было пренебречь. Таким веществом является, например, газ при невысокой температуре или пыль, равномерно распределенная в пространстве. Совокупность галактик также можно рассматривать как «пыль». Однако, как мы увидим дальше, на более ранней стадии расширения Вселенной основную долю плотности массы составляли фотоны, нейтрино (и гипотетические гравитоны), т. е. частицы, движущиеся со скоростью света.

Для всякого вещества плотность  $\rho$  (г/см<sup>3</sup>) связана с плотностью энергии  $\epsilon$  (эрг/см<sup>3</sup>) релятивистским соотношением

$$\rho = \epsilon/c^2. \quad (1.5.1)$$

Если для «обычного вещества» давлением можно пренебречь по сравнению с  $\epsilon$ , то для нейтрино, фотонов и гравитонов давление сравнимо с  $\epsilon$ :

$$P = \epsilon/3 = (\rho c^2)/3. \quad (1.5.2)$$

Влияние давления на закон расширения Вселенной интересно в связи с началом эволюции. В настоящее время имеется некоторая плотность нейтрино и фотонов, которые существовали с начала расширения (подробнее см. раздел III). Как мы сейчас покажем, из факта существования таких фотонов и нейтрино (хотя и малой плотности по сравнению с плотностью обычного вещества) следует, что в прошлом, на ранних этапах расширения, плотность нейтрино и квантов была заведомо значительно больше плотности обычного вещества, а значит, необходимо учитывать давление \*). В самом деле, рассмот-

---

\*) Однако и в том случае, если плотность нейтрино, фотонов и гравитонов была бы пренебрежимо мала, а температура равна нулю, учет давления все равно был бы необходим в начале эволюции, когда плотность барионов была весьма велика (от  $\rho = \infty$  до плотности атомных ядер порядка  $\rho \approx 10^{14}$  г/см<sup>3</sup>). При такой высокой плотности (подробно см. ТТ и ЭЗ) даже обычное вещество, состоящее из нейтронов, протонов и электронов, имеет давление порядка  $\epsilon = \rho c^2$ . Высокое давление при большой плотности обусловлено двумя причинами. Нейтроны, протоны и электроны подчиняются статистике Ферми; поэтому при большой плотности их средняя скорость даже при равной нулю температуре приближается к скорости света. Следовательно, без учета взаимодействия давление асимптотически приближается к  $P = \epsilon/3$ , оставаясь меньше этой величины. Кроме того, отталкивание нуклонов на близком расстоянии в принципе может привести к  $P = \epsilon$ . В горячей Вселенной роль давления существенна при плотности  $\rho \sim 10^{-20}$  г/см<sup>3</sup> и больше.

рим некий объем, содержащий определенное количество обычного вещества и определенную плотность энергии нейтрино и фотонов. В ходе расширения плотность обычного вещества уменьшается обратно пропорционально увеличению объема  $V^{-1}$ , т. е. как  $R^{-3}$ . Между тем плотность энергии нейтрино и фотонов убывает быстрее, как  $V^{-4/3}$ , т. е.  $R^{-4}$ , как раз вследствие того, что нейтрино и фотоны имеют давление и при расширении совершают работу  $d(\epsilon V) = -P dV$ . Это закон адиабатического расширения газа. При этом температура и энергия нейтрино и квантов меняются, как  $V^{-1/3} = R^{-1}$ . Если в релятивистском газе пренебречь столкновениями, то это не меняет выводов. Кванты и нейтрино летят теперь по прямой, из одного места приходят в другое, к удаляющемуся веществу, а значит, по отношению к этому веществу уменьшают энергию — испытывают красное смещение («охлаждаются») (см. ниже, гл. 3, § 1). Формальный расчет, исходящий из кинетического уравнения для свободно летящих фотонов, дан в § 11 гл. 3. Итак, для релятивистского газа  $\rho \sim \epsilon \sim P \sim V^{-4/3}$ , в то время как для обычного вещества  $\rho \sim \epsilon \sim V^{-1}$ , следовательно, вблизи начала расширения плотность в основном обуславливалась релятивистским газом и давление было порядка плотности энергии.

Обратимся к закону расширения в модели однородной Вселенной, заполненной релятивистским газом. Можно ли говорить о том, что высокое давление является причиной расширения Вселенной, что сильно сжатое вещество расширяется по той же причине, по которой разлетаются газы высокого давления, образующиеся при детонации заряда взрывчатого вещества? Нет, такая точка зрения совершенно неправильна. Качественное различие заключается в том, что заряд взрывчатого вещества окружен воздухом при атмосферном давлении. Расширение вызывается разностью между колоссальным давлением газов (продуктов взрыва) и сравнительно слабым давлением окружающего их воздуха. Но когда мы рассматриваем давление в однородной Вселенной, то предполагается, что давление распределено строго однородно! Следовательно, между различными частицами в один и тот же момент нет разности давления, следовательно, нет и силы, которая могла бы повлиять на расширение и тем более быть причиной расширения. Сам факт расширения в существующей теории есть результат начального распределения скоростей. Причина этого начального распределения пока неизвестна. Влияние давления на закон расширения представляет собой более тонкий релятивистский эффект, и притом, как будет показано ниже (см. § 6 гл. 1), эффект другого знака — не ускоряющий, а замедляющий расширение.

Этот релятивистский эффект связан с двумя обстоятельствами. Первое из них описано выше и заключается в том, что при наличии давления изменение объема, занятого определенной совокупностью частиц, сопровождается изменением энергии, заключенной в этом

объеме: при расширении вещество совершает работу и энергия его уменьшается \*).

Плотность для релятивистского газа, как уже было сказано, пропорциональна  $R^{-4}$  (а не  $R^{-3}$ , как было для пыли!). Поэтому масса рассматриваемого нами расширяющегося шара в случае релятивистского газа не постоянна, в более ранние моменты она была больше. Второе обстоятельство связано с тем, что в ОТО гравитационное поле создается не только плотностью массы, но и всеми другими компонентами тензора энергии-импульса  $T_i^k$ . В случае релятивистского газа компоненты  $T_i^k$ , описывающие давление ( $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P$ ), того же порядка, что и плотность энергии  $T_0^0 = \epsilon$ , ибо  $\epsilon = P/3$ . Поэтому давление равноправно с  $\rho$  участвует в создании гравитационного поля, и гравитационное ускорение, создаваемое элементом массы релятивистского газа, вдвое больше, чем создаваемое элементом массы с той же плотностью, но без давления.

Формулы, описывающие этот эффект, естественно, могут быть последовательно выведены только в рамках ОТО, так как эффект — релятивистский. Однако еще до вывода формул мы в следующем параграфе воспользуемся простым и ясным соотношением, следующим из ОТО, которое будет выведено позже (см. § 1 гл. 2), с тем, чтобы количественно рассмотреть влияние давления на закон расширения.

## § 6. Уравнения движения с учетом давления

С учетом давления, как показал Толмен (1930) [см. Паули (1958), Уиттакер (1955), ТТ и ЭЗ], ускорение притяжения \*\*) в ОТО для покоящегося вещества равно

$$g = -\frac{4\pi R^3}{3R^2} \left( \rho + \frac{3P}{c^2} \right) = -\frac{4\pi G}{3c^2} R (\epsilon + 3P). \quad (1.6.1)$$

Мы рассматриваем шар небольшого радиуса, скорости расширения в нем малы по сравнению с  $c$ , и выражение (1.6.1) остается справедливым, хотя скорости и не в точности равны нулю.

Мак-Кри (1951) использовал приведенное выражение для того, чтобы, пользуясь только ньютоновской механикой и теорией тяготения (с заменой  $\rho$  на  $\rho + \frac{3P}{c^2}$ ), получить закон изменения плотности и расстояний при давлении, сравнимом с плотностью энергии. Ниже воспроизведены его результаты. Рассмотрим снова шар радиуса  $R$ , внутри которого (так же как и вовне) все величины постоянны. Уравнение движения имеет вид [см. (1.6.1)]

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3c^2} R (\epsilon + 3P). \quad (1.6.2)$$

\*) В плотность энергии включается и энергия, соответствующая массе покоя частиц.

\*\*) Измеренное локальным наблюдателем по его времени.

Мы выведем это уравнение в ОТО в § 1 гл. 2. Здесь мы применим его к анализу космологической проблемы. Общее число сохраняющихся частиц (нуклонов) внутри данного шара постоянно. Поэтому плотность сохраняющихся частиц

$$n = \frac{N}{4\pi R^3/3} \quad (1.6.3)$$

зависит от радиуса, как и прежде.

Однако зависимость плотности энергии от радиуса сложнее. Она удовлетворяет уравнению

$$dE = d\left(\frac{4\pi}{3} R^3 \epsilon\right) = -P dV = -P 4\pi R^2 dR. \quad (1.6.4)$$

Замечательно, что совокупность уравнений (1.6.2) и (1.6.4) допускает интеграл движения очень простого и наглядного вида, похожий на (1.2.3).

Умножим (1.6.2) на  $\frac{dR}{dt}$ :

$$\frac{d^2 R}{dt^2} \frac{dR}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -\frac{G}{c^2} \left(\frac{4\pi}{3} R \epsilon \frac{dR}{dt} + 4\pi R P \frac{dR}{dt}\right).$$

Пользуясь (1.6.4), преобразуем выражение в скобках \*):

$$\frac{4\pi}{3} \epsilon R \frac{dR}{dt} + 4\pi P R \frac{dR}{dt} = -\frac{4\pi}{3} \frac{d}{dt} (\epsilon R^2).$$

Окончательно получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - G \frac{1}{R} \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \frac{\epsilon}{c^2}\right) = \text{const}. \quad (1.6.5)$$

Таким образом, при учете связи между давлением и энергией оказывается, что в выражение (1.6.5), в член, описывающий тяготение (пропорциональный  $G$ ), входит  $\rho = \epsilon/c^2$ , тогда как в выражение для ускорения (1.6.2) входит  $\rho + \frac{3P}{c^2} = \frac{\epsilon + 3P}{c^2}$ . Для определения константы в правой части (1.6.5) нужно подставить значения величин в настоящий момент, используя равенство  $\frac{dR}{dt} = H_0 R$ . Результат получается в точности такой же, как и раньше: знак константы зависит от соотношения фактической плотности  $\rho_0 = \epsilon_0/c^2$  в настоящее время и критической плотности  $\rho_c$  (1.2.5).

\*) Так как

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{R} \frac{4\pi}{3} R^3 \epsilon \right) = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \left( \frac{4\pi}{3} R^3 \epsilon \right) + \frac{4\pi}{3} R^3 \epsilon \frac{d}{dt} \frac{1}{R}.$$

Заметим, что если большая часть вещества состоит из частиц, движущихся со скоростью света ( $P=\varepsilon/3$ ), то при равной плотности ускорение вдвое больше, чем при  $P=0$ , так как тогда

$$\frac{\varepsilon + 3P}{c^2} = \frac{2\varepsilon}{c^2} = 2\rho. \quad (1.6.6)$$

Для справки отметим, что критическая плотность  $10^{-29}$  г/см<sup>3</sup> соответствует равновесному планковскому излучению с температурой 30°К или ферми-распределению нейтрино (ферми-газ при 0°К) с граничной энергией  $7,5 \cdot 10^{-3}$  эв (при этом их плотность равна  $10^6$  нейтрино в 1 см<sup>3</sup>).

Данные о фактической плотности электромагнитного излучения и нейтрино во Вселенной будут рассмотрены позже.

## § 7. Время расширения при наличии давления

Предположим, что плотность нейтрино и квантов значительно больше плотности обычного вещества. Тогда легко проинтегрировать уравнение (1.6.5), полагая  $P=\varepsilon/3$ . Результат интегрирования дан в конце § 1 гл. 2 (табл. I). Приведем результаты для возраста Вселенной:

$$t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} \frac{1}{1 + \sqrt{\Omega}}; \quad (1.7.1)$$

выражение справедливо как при  $\Omega > 1$ , так и при  $\Omega < 1$ .

Функция  $f=(1+\sqrt{\Omega})^{-1}$ , относящаяся к случаю  $P=\varepsilon/3$ , нанесена пунктиром на рис. 3.

Этот результат дает возможность получить грубую, но надежную оценку верхней границы возможной плотности нейтрино [Перес (1960); Понтекорво и Смородинский (1961); Вайнберг (1962); Зельдович и Смородинский (1961)].

В самом деле, так как возраст Земли, Солнечной системы и химических элементов порядка  $(4-5) \cdot 10^9$  лет, то следует считать, что  $t_0 - t_\infty$  во всяком случае больше этой величины. Подставляя  $\frac{1}{H_0} \approx 10^{10}$  лет, получим отсюда  $\Omega < 4$ , т. е.  $\rho_v < 8 \cdot 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>. Эта идея оценки плотности вещества применима в равной степени для нерелятивистских частиц с массой покоя  $m \neq 0$ , для невидимых коллапсировавших звезд или галактик, для гравитационных волн, нейтрино или других слабозаимодействующих частиц с нулевой массой покоя. Для нейтрино в тепловом равновесии получаем  $T_v < 50^\circ\text{К}$ . Если предположить, что нейтрино распределены по закону Ферми, их энергия будет меньше 0,01 эв. Такие нейтрино невозможно обнаружить современными ядерно-физическими методами, тогда как

гравитационное действие этих нейтрино в космическом масштабе оказывается более чувствительным детектором \*).

По существу, в цитированных работах осуществлена идея, высказанная еще Эйнштейном (1966): любые формы материи и энергии могут быть обнаружены по их гравитационному действию, независимо от специфических свойств рассматриваемых видов материи.

Выпишем также формулы, относящиеся к будущему модели Вселенной, заполненной нейтрино или квантами (хотя этот случай и не реализуется в действительности).

При  $\Omega < 1$  будет иметь место неограниченное расширение. При  $\Omega > 1$  расширение сменится сжатием через время (см. рис. 4)

$$t_m - t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{1}{\Omega - 1}, \quad (1.7.2)$$

и это сжатие закончится достижением бесконечной плотности через время

$$t'_\infty - t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega - 1}}. \quad (1.7.3)$$

## § 8. Начальная стадия при наличии давления

С учетом закона адиабатического сжатия нейтрино и фотонов  $\epsilon \sim V^{-1/3}$ , т. е.  $\epsilon = \bar{k}/R^4$ , где  $\bar{k}$  — константа, получим уравнения изменения радиуса шара, содержащего данное количество сохраняющихся частиц:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{G}{R^2} \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{1}{c^2} \frac{2\bar{k}}{R^4}, \quad (1.8.1)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{G}{R} \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{1}{c^2} \frac{\bar{k}}{R^4} = \text{const.} \quad (1.8.2)$$

В начале эволюции, вблизи момента  $t_\infty$ , когда плотность была бесконечна, а  $R \rightarrow 0$ , можно пренебречь константой во втором уравнении. Решение имеет вид

$$R = \sqrt[4]{\frac{32\pi}{3} \frac{G\bar{k}}{c^2}} \sqrt{t - t_\infty}, \quad \epsilon = \frac{3c^2}{32\pi G (t - t_\infty)^2},$$

$$\rho = \frac{\epsilon}{c^2} = \frac{3}{32\pi G (t - t_\infty)^2} = \frac{4,5 \cdot 10^6}{(t - t_\infty)^2}. \quad (1.8.3)$$

\*) Можно указать еще более чувствительный детектор. В гл. 7 будет показано, что влияние тяготения частиц с нулевой массой покоя на расширение Вселенной в первые секунды сильно меняет реакции синтеза химических элементов. Это влияние при некоторых естественных предположениях (хотя и не столь бесспорных, как аргументы в тексте) после сравнения с наблюдениями приводит к еще гораздо более жесткому ограничению:  $\rho_{m=0} < 10^{-32} \text{ г/см}^3$  на сегодняшний день (подробнее см. гл. 7).

Выражение плотности отличается только численным множителем ( $\sim 0,5$ ) от выражения плотности в случае  $P=0$ . При этом, однако, плотность сохраняющихся частиц

$$n = \frac{\text{const}}{R^3} = \text{const} \cdot (t - t_\infty)^{-3/2}. \quad (1.8.4)$$

В отличие от численного множителя в (1.8.3), постоянная в (1.8.4) не определяется фундаментальными константами, а является свободным параметром, характеризующим энтропию Вселенной (см. об этом раздел III).

При  $t \rightarrow t_\infty$ , стремящемся к нулю,  $n$  растет слабее, чем  $\rho$ , отношение  $n/\rho \rightarrow 0$ .

Заметим, что плотность нейтрино и квантов, т. е. число частиц в единице объема, в этом решении также  $\sim R^3 \sim (t - t_\infty)^{-3/2}$ . Но температура и средняя энергия одного кванта и средняя энергия одного нейтрино пропорциональны  $1/\sqrt{t - t_\infty}$ . Отсюда и получается, что массовая плотность ( $g/cm^3$ ), пропорциональная произведению числа частиц в единице объема на энергию одной частицы, пропорциональна

$$(t - t_\infty)^{-3/2} (t - t_\infty)^{-1/2} = (t - t_\infty)^{-2}.$$

Рассмотрим, наконец, случай холодного нуклонного газа в предположении предельно жесткого уравнения состояния, т. е. сильного отталкивания нуклонов \*). В этом случае

$$P = \varepsilon = \rho c^2 = A n^2, \quad (1.8.5)$$

где  $n$  — концентрация нуклонов ( $1/cm^3$ ). Для оценки константы можно предположить, что зависящая от взаимодействия плотность сравнивается с плотностью массы покоя  $\rho_0 = n m_0$  ( $m_0$  — масса нуклона) при  $\rho_0$  порядка  $100 \rho_{яд}$ , т. е. при  $\rho = 10^{16} g/cm^3$ :

$$\rho = n m_0 = \frac{A n^2}{c^2} = 10^{16} g/cm^3, \quad (1.8.6)$$

откуда  $n \approx 10^{40} cm^{-3}$  и  $A = 2,5 \cdot 10^{-43}$ .

Тем же способом, что и выше, найдем при таком уравнении состояния ( $P = \varepsilon$ )

$$\rho = \frac{1}{24\pi G (t - t_\infty)^2} = \frac{2 \cdot 10^6}{(t - t_\infty)^2}. \quad (1.8.7)$$

При этом  $R \sim (t - t_\infty)^{-1/2}$ , а плотность нуклонов

$$n \cong \frac{2,5 \cdot 10^{34}}{(t - t_\infty)}, \quad \rho_0 = n m_0 = \frac{4 \cdot 10^{10}}{t - t_\infty}.$$

Это решение относится (в холодной модели) к периоду не дольше нескольких микросекунд, т. е.  $t - t_\infty < 3 \cdot 10^{-6} сек$  (из условия  $\rho > 100 \rho_{яд}$ ).

\*) Подробнее о возможности такого уравнения состояния см. ТТ и ЭЗ, гл. 6, § 12.



## ГЛАВА 2

### РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

#### § 1. Уравнения тяготения Эйнштейна и космологические уравнения Фридмана

В предыдущей главе локальные свойства однородной изотропной космологической модели были получены в рамках ньютоновской теории. Разумеется, для последовательного рассмотрения космологической проблемы ньютоновской теории недостаточно. Действительно, в § 1 гл. 1 нам приходилось предполагать, что в рамках ОТО, так же как и в классической ньютоновской теории, внутри сферической полости, выделенной во Вселенной, однородное, изотропно расширяющееся внешнее вещество никакого гравитационного поля не создает. Для доказательства, разумеется, надо обратиться к ОТО. Кроме того, уравнения ОТО совершенно необходимы, когда мы от локальной проблемы переходим к изучению больших областей пространства, в которых собственное тяготение вещества уже не мало и не мала скорость расширения. Рассмотрение таких областей совершенно необходимо при анализе распространения света от далеких галактик, подсчете слабых галактик и т. д.

Итак, после элементарного разъяснения сути законов расширения Вселенной обратимся к последовательному их выводу из уравнений Эйнштейна. Мы предполагаем, что читатель знаком хотя бы с элементарными основами ОТО. Для понимания дальнейшего достаточно сведений об ОТО, изложенных в гл. 1 ТТ и ЭЗ. Непревзойденным по четкости и экономности остается изложение ОТО в последних главах «Теории поля» Ландау и Лифшица.

Мы будем строить однородную изотропную модель Вселенной, т. е. модель, в которой все точки равноценны и все направления эквивалентны, ничем не выделены. В такой модели трехмерное пространство должно быть однородным и изотропным. Конечно, это трехмерное пространство вовсе не обязано быть евклидовым пространством, так как согласно ОТО геометрические свойства пространства зависят от материи, ее плотности и движения. Это может быть любое однородное изотропное трехмерное пространство. Из математики известно, что таким пространством является пространство постоянной кривизны (не зависящей от направления и от про

пространственных координат). Квадрат элемента длины в таком пространстве записывается в виде

$$dl^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left[1 + \frac{k(x^2 + y^2 + z^2)}{4a^2}\right]^2}, \quad (2.1.1)$$

где  $k=1, 0, -1$ , величина  $a$  — постоянная, имеющая размерность длины. Если  $k=0$ , то мы имеем дело с обычным евклидовым пространством (иногда его называют «плоским» пространством) и  $x, y, z$  — обычные декартовы координаты. При  $k=1$  пространство называют пространством постоянной положительной кривизны, при  $k=-1$  — пространством постоянной отрицательной кривизны. Величину  $a$  называют радиусом кривизны пространства, а величину  $C_G \equiv k/a^2$  (гауссовой) кривизной пространства \*). Мы отложим рассмотрение геометрических свойств этих пространств до следующих параграфов.

Радиус кривизны  $a$  является естественной единицей длины для измерения расстояний в случае  $k \neq 0$ . Поэтому перейдем к новым безразмерным координатам:

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{a}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{a}. \quad (2.1.2)$$

Теперь (2.1.1) переписывается в виде

$$dl^2 = a^2 \frac{d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2}{\left[1 + \frac{k(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2)}{4}\right]^2}. \quad (2.1.3)$$

Выражение (2.1.3) формально справедливо и для  $k=0$ , только в этом случае  $a$  — произвольный масштабный множитель. Для евклидова пространства масштаб  $a$  ничем не выделен и может быть выбран произвольно. Рассматривая  $a$  как переменную величину (функцию времени), можно описать деформацию системы отсчета.

Теперь нашей задачей является написать выражение для четырехмерного интервала \*\*)  $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ . Пространственную часть интервала мы уже выписали [см. (2.1.3)].

В системе отсчета, в которой трехмерное пространство однородно и изотропно и метрика которого имеет вид (2.1.3), материя не может двигаться относительно системы отсчета. Действительно, скорость движения выделяла бы некоторое направление в каждой точке и, следовательно, нарушала бы изотропию. Таким образом, система

\*) Точнее, в математике радиусом кривизны пространства называют  $1/\sqrt{C_G}$ , т. е. если  $k=-1$ , то радиус кривизны мнимый. Мы, однако, будем придерживаться терминологии, приведенной в тексте, поскольку она принята в космологии.

\*\*) Латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3. Индекс «0» относится к временной координате, греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3. По дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

отсчета (2.1.3) является сопутствующей. Выберем в качестве координаты времени собственное время каждой частицы. Тогда  $g_{00} \equiv c^2$ . Наконец, все компоненты  $g_{0\alpha}$  в  $ds^2$  должны быть тождественно равны нулю. В противном случае они составляли бы трехмерный вектор, также нарушающий изотропию.

Итак, выражение для  $ds^2$  может быть записано в виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \frac{d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2}{\left[1 + \frac{k}{4} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2)\right]^2}. \quad (2.1.4)$$

В выражении (2.1.4) координаты  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  являются лагранжевыми координатами частиц материи, так как материя не движется относительно системы отсчета. Все движение материи описывается деформацией самой системы отсчета. Масштабный множитель в выражении (2.1.4) зависит только от времени,  $a = a(t)$ . Его возрастание с течением времени описывает расширение системы отсчета, увеличение всех расстояний в системе отсчета, а значит, и расширение всего вещества, так как система отсчета является сопутствующей. Напомним, что физическое расстояние между любыми близкими частицами в нашей модели есть  $dl$  и, согласно (2.1.3),  $dl$  пропорционально  $a(t)$ , поскольку  $dx, dy, dz$  постоянны. Из уравнений Эйнштейна нам остается найти единственную неизвестную функцию  $a(t)$ .

Уравнения Эйнштейна записываются в следующем виде:

$$R_i^k - \frac{1}{2} R \delta_i^k = - \frac{8\pi G}{c^4} T_i^k. \quad (2.1.5)$$

Здесь  $R_i^k$  — тензор Риччи,  $R$  — его след; оба они являются функциями от  $g_{ik}$ , их первых и вторых производных,  $\delta_i^k$  — символы Кронекера,  $T_i^k$  — тензор энергии-импульса материи. В космологии в качестве материи чаще всего рассматривается газ. Это может быть и «обычный» газ, и газ, «молекулами» которого являются галактики, и ультрарелятивистский газ фотонов и т. д. В этом случае компоненты тензора энергии-импульса записываются в виде

$$T_i^k = (\rho c^2 + P) u^k u_i - P \delta_i^k, \quad (2.1.6)$$

где  $u^i$  — четырехмерная скорость материи. В сопутствующей системе отсчета [как в нашем случае (2.1.4)] компоненты  $T_i^k$ , отличные от нуля, суть

$$T_0^0 = \rho c^2, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P. \quad (2.1.7)$$

В однородной изотропной Вселенной  $\rho$  и  $P$  могут зависеть только от времени, но не от пространственных координат. Нашей задачей является подставить компоненты  $g_{ik}$  из (2.1.4) в уравнения Эйнштейна (2.1.5), подставить туда же (2.1.7) и определить три неизвестные функции от времени:  $a(t)$ ,  $\rho(t)$ ,  $P(t)$ . По существу, неизвестных функций только две:  $a$  и  $\rho$ , так как  $\rho$  и  $P$  связаны уравнением состояния вещества.

Упомянутые подстановки после несложных преобразований приводят к двум уравнениям \*):

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} a \left( \rho + \frac{3P}{c^2} \right), \quad (2.1.8)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}, \quad (2.1.9)$$

где  $k$  может принимать значения  $k=0$ ,  $k=1$  и  $k=-1$ . Эти уравнения связаны тождеством (при любом  $k$ )

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0. \quad (2.1.10)$$

Уравнения (2.1.8), (2.1.9) описывают зависимость  $a$  от  $t$  (т. е. всех масштабов модели от времени) и  $\rho$  от  $t$ . Они совпадают с уравнениями (1.6.2) и (1.6.5) соответственно, с той лишь разницей, что  $R$  заменено на  $a$  и произвольная const в (1.6.5) на  $kc^2$  в (2.1.9). Мы помним, что в предыдущей главе радиус шара выбирался произвольно, нас интересовала лишь зависимость всех масштабов от времени. Следовательно, для этой зависимости от времени уравнения ОТО дают точно такие же результаты, как и ньютоновская теория в предыдущей главе.

Уравнения (2.1.8) — (2.1.10) носят название космологических уравнений Фридмана [Фридман (1963)]. Их решение подробно проанализировано в предыдущей главе.

В заключение приведем (табл. I) аналитические формулы решения уравнений (2.1.8) — (2.1.10) для двух важных случаев уравнения состояния:  $P=0$  и  $P=\epsilon/3$ . Решения записываются в параметрическом виде. Последний столбец таблицы дает отношение текущей плотности  $\rho$  к текущей критической плотности  $\rho'_c = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$ ,  $\Omega' = \frac{\rho}{\rho'_c}$ ,

где  $H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ .

\*) Непосредственная подстановка дает

$$\frac{8\pi G}{c^2} T_0^0 = \frac{8\pi G}{c^2} (\rho c^2) = \frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3kc^2}{a^2},$$

$$\frac{8\pi G}{c^2} T_1^1 = \frac{8\pi G}{c^2} T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^2} T_3^3 = -\frac{8\pi G}{c^2} P = \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}.$$

Остальные уравнения обращаются в тождества. Из приведенных уравнений сразу следуют (2.1.8), (2.1.9).

ТАБЛИЦА 1

Параметрическая зависимость радиуса кривизны пространства  $a$ , постоянной Хаббла  $H$  и плотности  $\Omega = \rho/\rho_c$  от времени  $t^*$ )

| Давление<br>$P$ | $k$ | Время $t$  | Радиус кривизны<br>пространства<br>$a$                               | Постоянная Хаббла<br>$H \equiv \dot{a}/a$                                       | Плотность<br>$\Omega' = \rho/\rho_c$   |
|-----------------|-----|--|--|---|--|
|                 | 1   | $\frac{a_m}{2c} (\eta - \sin \eta)$              | $\frac{a_m}{2} (1 - \cos \eta)$                                      | $\frac{c}{a_m} \frac{2 \sin \eta}{(1 - \cos \eta)^2}$                           | $\frac{2}{1 + \cos \eta}$              |
|                 | 0   | $\frac{a_m}{12c} \eta^3$                         | $\frac{a_m}{4} \eta^2 = \left( \frac{9a_m c^2 t^2}{4} \right)^{1/3}$ | $\frac{8c}{a_m} \eta^{-3} = \frac{2}{3} t^{-1}$                                 | 1                                      |
|                 | -1  | $\frac{a_m}{2c} (\operatorname{sh} \eta - \eta)$ | $\frac{a_m}{2} (\operatorname{ch} \eta - 1)$                         | $\frac{c}{a_m} \frac{2 \operatorname{sh} \eta}{(\operatorname{ch} \eta - 1)^2}$ | $\frac{2}{1 + \operatorname{ch} \eta}$ |
| $\epsilon/3$    | 1   | $\frac{a_m}{c} (1 - \cos \eta)$                  | $a_m \sin \eta$  | $\frac{c}{a_m} \frac{\cos \eta}{\sin^2 \eta}$                                   | $\frac{1}{\cos^2 \eta}$                |
|                 | 0   | $\frac{a_m}{2c} \eta^2$                          | $a_m \eta = (2 \gamma_m c t)^{1/2}$                                  | $\frac{c}{a_m} \eta^{-2} = \frac{1}{2} t^{-1}$                                  | 1                                      |
|                 | -1  | $\frac{a_m}{c} (\operatorname{ch} \eta - 1)$     | $a_m \operatorname{sh} \eta$   | $\frac{c}{a_m} \frac{\operatorname{ch} \eta}{\operatorname{sh}^2 \eta}$         | $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \eta}$   |

\*)  $a_m$  — постоянная,  $\eta$  — параметр, имеющий следующие пределы изменения:  
 1) при  $P=0, k=1$   $0 \leq \eta \leq 2\pi$ ,  
 $k=0, -1$   $0 \leq \eta < \infty$ ;  
 2) при  $P=\epsilon/3, k=1$   $0 \leq \eta < \pi$ ,  
 $k=0, -1$   $0 \leq \eta < \infty$ .  
 В случае  $k=0$  радиус кривизны равен бесконечности. Для этого случая приведена зависимость масштабного фактора  $a$  от времени, причем численный коэффициент выбран так, чтобы при  $\eta \rightarrow 0$  разложения при всех  $k=0, \pm 1$  имели одинаковый вид.

## § 2. Геометрическая структура модели Вселенной как целого; пространство постоянной положительной кривизны

Перейдем теперь к рассмотрению геометрических свойств трехмерного пространства в однородных моделях.

Эти свойства описываются выражением (2.1.3) для интервала в трехмерном пространстве. Ясно, что мы при этом описываем геометрические свойства однородной сопутствующей веществу системы отсчета (рассмотренной в предыдущем параграфе) в фиксированный момент собственного времени, или, как иногда говорят, свойства сопутствующего пространства. В ОТО системы отсчета можно выбирать произвольно. Можно было бы и в нашей задаче выбрать не

сопутствующую, а какую-либо другую систему. В ней геометрические свойства трехмерного пространства были бы уже другие. Но относительно нее вещество бы двигалось, в ней не выполнялись бы свойства однородности и изотропии. Нас в первую очередь интересуют свойства расширяющегося вещества Вселенной. Вот почему сопутствующая система является преимущественной и мы займемся прежде всего изучением свойств трехмерного пространства этой системы. Они зависят от одной величины — кривизны пространства

$$C_G = \frac{k}{a^2}, \quad (2.2.1)$$

где  $k$  и  $a$  — величины, входящие в формулы (2.1.8), (2.1.9). Величину  $\sqrt{1/|C_G|} = a$  называют радиусом кривизны (см. сноску на стр. 45). Подставляя в (2.2.1) величину  $k/a^2$  из (2.1.9), получаем

$$C_G = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2. \quad (2.2.2)$$

Таким образом, геометрические свойства пространства зависят от наличия в нем вещества, его плотности и движения. Из (2.2.2) видно, что знак кривизны определяется тем же критерием для плотности, что и в § 2 гл. 1: если  $\rho > \rho_c$  [см. (1.2.5)], то  $C_G > 0$  — кривизна положительна; если  $\rho < \rho_c$ , то  $C_G < 0$  — кривизна отрицательна.

Величина и знак кривизны одинаковы во всех точках пространства в один и тот же момент. Кроме того, так как в ходе эволюции все время сохраняется неравенство  $\rho(t) > \rho'_c$  или  $\rho(t) < \rho'_c$  [ $\rho'_c$  обозначает текущее значение  $\rho_c(t)$ ], то сохраняется и знак кривизны.

Из дифференциальной геометрии известно, что трехмерное пространство постоянной отрицательной кривизны продолжимо неограниченно. Следовательно, если для постоянного момента  $t_0$  плотность вещества меньше критической:  $\rho_0 < \rho_c$ , т. е.  $\rho_0 < 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>, то однородная Вселенная бесконечна по объему \*). Это значит, что топологически модель Вселенной подобна бесконечному евклидову пространству. Такая модель получила название открытой модели Вселенной.

Если  $\rho_0 > \rho_c$ , то кривизна положительна, а трехмерное пространство оказывается замкнутым и конечным (но безграничным!). Все наши наглядные представления основаны на повседневном опыте и относятся к евклидову трехмерному пространству. Поэтому наглядно представить себе замкнутую Вселенную невозможно (так же, впрочем, как и открытую), можно лишь изучать математически ее свойства, сравнивать результаты расчетов с опытом и наблюдениями и

---

\*) В этой и последующих главах мы будем рассматривать простейшие с топологической точки зрения модели. ОТО с ее идеей кривизны пространства-времени поставила вопрос о возможности более сложных топологий моделей Вселенной. Мы проанализируем эту проблему в §§ 12, 13 гл. 23.

пояснять их с помощью аналогий и моделей, являющихся неполными.

Итак, каковы свойства замкнутой Вселенной? Возьмем какую-либо точку в качестве начала координат. Построим вокруг нее сферу, т. е. рассмотрим совокупность частиц, равноудаленных от той, которая находится в начале координат. Определим такие величины, как длина экватора сферы и площадь поверхности сферы. При этом нужно иметь в виду нестационарность модели Вселенной. Длина экватора и площадь сферы, ограничивающей данную совокупность частиц, зависят от того, в какой момент мы их измерим. Все величины измеряются в один и тот же момент времени  $t$  сопутствующей системы отсчета.

Важнейший вывод теории (формулы см. далее) заключается в следующем: при  $\rho_0 > \rho_c$ , т. е. в случае замкнутого мира, по мере того, как мы переходим ко все более удаленным сферам длина экватора и площадь сферы вначале возрастают, но потом проходят максимум и затем уменьшаются до нуля. Понятия ближе — дальше вполне однозначны, как и понятия внутри — снаружи; более далекая сфера включает в себя не только все то вещество, которое находится в более близкой сфере, но и еще вещество, находящееся между сферами.

Сфера, более удаленная, содержащая больше вещества и имеющая больший объем, в то же время имеет меньший экватор и меньшую поверхность. Это непривычно, не похоже на евклидову геометрию, но все это является следствием кривизны пространства, и такая непривычная ситуация логически непротиворечива.

Общеизвестной аналогией является замкнутое, искривленное, двумерное пространство — поверхность обычного трехмерного шара. Возьмем северный полюс за центр. Аналогами сфер на поверхности шара являются окружности, т. е. параллели. Длина окружности вначале растет по мере удаления от северного полюса, но затем на экваторе достигается максимум, и далее длина окружности уменьшается; между тем площадь, охваченная параллелью, монотонно растет. Наконец, при приближении окружности к южному полюсу площадь, охваченная ею, становится равной  $4\pi r^2$ , а длина стремится к нулю.

Заметим, что в случае замкнутого мира сфера разделяет все пространство на две части, каждая из которых конечна. Объемом, заключенным внутри сферы, мы условимся всегда называть ту часть, которая включает в себя начало координат. В двумерной аналогии поверхностью, ограниченной параллелью (т. е. линией, все точки которой находятся на равном расстоянии от северного полюса), назовем поверхность части шара, лежащей севернее параллели и включающей в себя северный полюс. При таком определении стягивание параллели к южному полюсу сопровождается стремлением к  $4\pi r^2$  площади поверхности, ограниченной этой параллелью.

Вернемся к трехмерному замкнутому пространству, которым является однородная Вселенная в том случае, если  $\rho_0 > \rho_c$ . Обращение в нуль длины экватора и поверхности сферы, описанной вокруг начала координат, при достаточном увеличении ее радиуса, т. е. удалении ее от центра, как раз и означает, что рассматриваемое трехмерное пространство является замкнутым. Можно показать, что кратчайшая линия — «геодезическая» в трехмерном пространстве возвращается к исходной точке, имеет конечную длину.

Выпишем теперь соответствующие формулы.

Запишем выражение для квадрата длины (2.1.3) в других координатах. Перейдем сначала к сферическим координатам:

$$\tilde{x} = \tilde{r} \sin \theta \cos \varphi, \quad \tilde{y} = \tilde{r} \sin \theta \sin \varphi, \quad \tilde{z} = \tilde{r} \cos \theta. \quad (2.2.3)$$

Квадрат длины теперь запишется в виде

$$dl^2 = a^2 \frac{d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{(1 + k\tilde{r}^2/4)^2}, \quad k = 1, 0, -1. \quad (2.2.4)$$

Теперь для случая пространства постоянной положительной кривизны  $k=1$  сделаем следующую замену радиальной координаты:

$$\frac{\tilde{r}}{1 + \tilde{r}^2/4} = \sin r. \quad (2.2.5)$$

В результате получим

$$dl^2 = a^2 [dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (2.2.6)$$

Разумеется, преобразования пространственных координат меняют только выражение для квадрата длины пространственного расстояния, выражение для  $ds^2$  по-прежнему имеет вид  $ds^2 = c dt^2 - dl^2$ , где  $dl^2$  может записываться в разных пространственных координатах, например в написанных выше. Определение времени остается без изменений.

Из (2.2.6) следует, что площадь сферы радиуса (координатного, сопутствующего)  $r$ , описанной вокруг центра, есть

$$s(r) = 4\pi a^2 \sin^2 r, \quad (2.2.7)$$

а длина экватора сферы

$$l_{\text{экв}} = 2\pi a \sin r. \quad (2.2.8)$$

Из выражения (2.2.7), видно, что  $s$  достигает максимума  $s_{\text{max}} = 4\pi a^2$  при  $r = \pi/2$  и снова уменьшается до нуля при  $r = \pi$ . Это значение  $r = \pi$  и есть тот предел, до которого может изменяться эта координата.

Объем, охваченный сферой координатного радиуса  $r$ , равен

$$V = \int_0^r s(r) a dr = 4\pi a^3 \int_0^r \sin^2 r dr = 4\pi a^3 \left( \frac{1}{2} r - \frac{1}{4} \sin 2r \right) \quad (2.2.9)$$



и с ростом  $r$ , естественно, монотонно возрастает. При  $r=\pi$  получаем объем всего замкнутого мира \*):

$$V_{\text{мира}} = 2\pi^2 a^3.$$

Соответственно, зная среднюю плотность нуклонов в единице объема  $n \text{ см}^{-3}$ , можно найти общее число нуклонов во всей модели мира:  $N_{\text{полн}} = nV_{\text{мира}}$ . С помощью формулы (2.2.2) запишем выражение для радиуса кривизны  $a$ :

$$a = \frac{1}{\sqrt{cG}} = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega - 1}}. \quad (2.2.10)$$

Напомним, что в этом разделе везде обозначено  $\Omega = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2}$ .

Выражение (2.2.10) относится только к  $\Omega > 1$ . При  $\Omega$ , близком к единице, радиус кривизны весьма велик и стремится к бесконечности при плотности, приближающейся сверху к критическому условию замкнутости,  $\Omega \rightarrow 1$ .

Рассмотрим обычное вещество с  $\rho_0 = nm_0$ , где  $m_0$  — масса нуклона,  $n$  — их плотность. При данном значении  $H_0$  оказывается, что общее число нуклонов  $N$  во Вселенной тем меньше, чем больше их плотность! В самом деле, при  $n \gg \rho_c/m_0$ ,  $\Omega \gg 1$  имеем из (2.2.10)  $a \sim 1/\sqrt{n}$  и  $V_{\text{мира}} \sim a^3 \sim n^{-3/2}$ , а следовательно, общее число нуклонов  $N_{\text{полн}} = nV_{\text{мира}} \sim n^{-1/2}$ .

При уменьшении  $n$  общее число  $N$  возрастает вначале, как  $n^{-1/2}$ , а затем еще быстрее, так как при приближении  $n$  к  $n_c = \rho_c/m_0$  величина  $N$  стремится к бесконечности.

До сих пор мы рассматривали свойства замкнутой Вселенной в фиксированный момент времени. Теперь вспомним, что космологи-

\*) Разумеется, полный объем не зависит от того, в каких координатах мы проводили вычисления. Так, можно было воспользоваться координатами (2.2.4). Радиальная координата  $\tilde{r}$  в них не имеет верхнего предела:  $0 \leq \tilde{r} < \infty$ . Тем не менее полный объем мира, соответствующий этим пределам, конечен и совпадает с (2.2.9):

$$V_{\text{мира}} = 4\pi a^3 \int_0^\infty \frac{\tilde{r}^2 d\tilde{r}}{(1 + \tilde{r}^2/4)^3} = 2\pi^2 a^3.$$

Точно так же одинаков и максимальный физический (т. е. не координатный) радиус:  $l_r = \int \sqrt{-g_{11}} dx^1$ , где  $x^1$  — радиальная координата. Вычисленный с помощью координат  $r$  или  $\tilde{r}$ , он равен

$$l_r = \int_0^\pi a dr = \int_0^\infty a \frac{d\tilde{r}}{1 + \tilde{r}^2/2} = \pi a.$$

Замкнутость мира, конечность  $l_r$  и  $V_{\text{мира}}$  суть объективные свойства трехмерного пространства постоянной положительной кривизны, не зависящие от координатной сетки, используемой для их исследования.

ческая модель нестационарна, эволюционирует со временем. Эволюция описывается зависимостью величины  $a$  от времени,  $a=a(t)$ . Подробно эта зависимость выписана в аналитическом виде в табл. I предыдущего параграфа. В случае замкнутого мира функция  $a(t)$  начинается от нуля, достигает максимума и снова уменьшается до нуля.

### § 3. Метрика открытого мира

В предыдущем параграфе были рассмотрены свойства замкнутого мира; мир замкнут в том случае, если он однороден (так что, в частности, его плотность и постоянная Хаббла везде одинаковы в один и тот же момент времени) и если  $\rho_0 > \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ . Однако современные данные о плотности (см. об этом далее) показывают, что, по-видимому, в действительности имеет место обратное неравенство:  $\rho_0 < \rho_c$ .

В этом случае, как видно из уравнения (2.2.2), кривизна отрицательна и мы имеем трехмерное пространство Лобачевского постоянной отрицательной кривизны. Запишем выражение  $dl^2$  для этого случая. Заменяя при  $k=-1$  радиальную координату в (2.2.4):

$$\frac{\tilde{r}}{1-\tilde{r}^2/4} = \text{sh } r, \quad (2.3.1)$$

приходим к выражению

$$dl^2 = a^2 [dr^2 + \text{sh}^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (2.3.2)$$

Трехмерное пространство Лобачевского бесконечно по объему.

В этом случае мир, как говорят, «открыт», т. е. качественно, топологически не отличается от обычного евклидова трехмерного пространства. В частности, полагая по-прежнему, что Вселенная однородна, мы приходим к выводу о бесконечном количестве галактик, звезд, нуклонов во Вселенной.

Вместе с тем при  $\rho_0 < \rho_c$  имеет место определенное отличие метрики, т. е. количественных геометрических свойств физического пространства от евклидова. Из формулы (2.2.2) следует, что в этом случае кривизна  $C_G$  отрицательна. Поэтому в сопутствующем пространстве сумма углов треугольника меньше  $\pi$ : длина экватора и площадь сферы больше соответствующих евклидовых выражений.

### § 4. Предельный случай малой плотности вещества

Предельный случай малой плотности  $\rho_0 \ll \frac{3H^2}{8\pi G}$  отличается особенной простотой. С той точностью, с которой можно считать  $\rho_0 = 0$ , можно пренебречь силами тяготения. Как уже отмечалось, в прошлом в таком мире обязательно был период, когда силой тяжести

нельзя было пренебречь (см. § 4 гл. 1). Мы, однако, не будем сейчас рассматривать этот период. Вернемся к периоду, когда имеет место  $\rho \ll \rho'_c$  и силы тяготения пренебрежимо малы.

Всю картину движения можно представить себе совершенно элементарно следующим образом: в плоском евклидовом пространстве

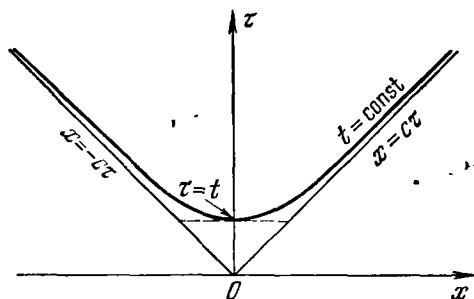


Рис. 6. Линия постоянного собственного времени  $t = \text{const}$  модели Милна в «лабораторной» системе координат. Пунктир — линия постоянного лабораторного времени  $\tau = \text{const}$ .

в начальный момент  $t=0$  из начала координат вылетает совокупность частиц, движущихся со всеми возможными скоростями  $u$ ; разумеется, скорости эти не превышают скорости света,  $|u| \leq c$ . Массой частиц пренебрегаем, поэтому пренебрегаем и искривлением пространства, которое могло бы быть вызвано частицами. Следовательно, движение происходит в плоском (евклидовом) пространстве.

Сопутствующее пространство этой системы, как можно видеть из (2.2.2), имеет отрицательную кривизну. На рис. 6 показано сечение пространства в «лабораторных» координатах  $\tau, x$ . В этих координатах скорости частиц меньше  $c$ , так что все траектории — прямые и лежат внутри угла, образованного прямыми  $x = \pm c\tau$ . Итак,  $x = u\tau$ ,  $u < c$  и длина окружности, проведенной через данную точку  $x$  с центром в  $x=0$ , равна  $2\pi x$ . Собственное время  $t$  частицы, движущейся со скоростью  $u$ , выражается известной формулой специальной теории относительности:

$$t = \tau \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (2.4.1)$$

Совокупность точек, в которых находятся частицы через одинаковое собственное время  $t = \text{const}$ , описывается уравнением

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad x = u\tau = t \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (2.4.2)$$

Это — уравнение гиперболы. В самом деле, чтобы построить линию  $t = \text{const}$  в координатах рис. 6, мы должны задаться  $t$  и  $\tau$ , найти сначала  $u$  и затем, зная  $u$ , выразить  $x$  через  $t$  и  $\tau$ . Получим

$$u = c \sqrt{1 - \left(\frac{t}{\tau}\right)^2}, \quad x = \frac{c\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{\tau}\right)^2}}. \quad (2.4.3)$$

При фиксированном значении  $t$  зависимость  $x$  от  $\tau$  представляет со-

бой гиперболу, асимптотами которой являются линии  $x = \pm ct$  (см. рис. 6). Итак, если назвать «скоростью»  $u'$  путь \*), пройденный за единицу собственного времени:

$$u' = \frac{x}{t} = \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (2.4.4)$$

получим величину, которая может быть и больше  $c$ . Выражение (2.4.4) полезно для популярного пояснения некоторых свойств космологических моделей Фридмана. Например, иногда спрашивают: известно, что галактики удаляются с тем большей скоростью, чем они дальше; существуют ли галактики, удаляющиеся от нас со скоростью больше скорости света? Ответ заключается в том, что такие скорости получаются при пользовании расстоянием, измеренным в лабораторной системе отсчета (т. е. в случае модели Милна в инерциальной системе наблюдателя), и собственным временем частицы, т. е. это не есть скорость перемещения частицы.

Для вычисления реальной скорости надо и расстояния и время измерить в одной и той же системе отсчета. При этом всегда  $u \leq c$ . Известно из лабораторных опытов, что мезон (пион) со временем жизни  $2 \cdot 10^{-8}$  сек может пройти до распада путь значительно больший, чем  $2 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^{10}$  см =  $6 \cdot 10^2$  см, когда его скорость близка к скорости света. Определяя трехмерное пространство из условия одинаковости собственного времени  $t$  во фридмановском решении, т. е. сопутствующее пространство, мы получили пространство, отличающееся от трехмерного «лабораторного» пространства  $\tau = \text{const}$ . При плотности  $\rho \rightarrow 0$  весь четырехмерный мир в целом (пространство-время) в пределе является плоским, четырехмерная кривизна его равна нулю, мир евклидов или, точнее, псевдоевклидов в силу особой роли времени (пространство Минковского  $s^2 = \tau^2 - x^2 - y^2 - z^2$ ). Но его трехмерное сечение поверхностью  $t = \text{const}$  не плоское.

Зельманов (1959а) подчеркивает, что пространственное сечение совокупности мировых линий внутри светового конуса  $x = \pm ct$  на рис. 6, отвечающее постоянному лабораторному времени  $\tau = \text{const}$ , является конечным (пунктир на рис. 6): пространственная координата  $x$  ограничена значениями  $-ct \leq x \leq ct$ . Отсюда делается вывод, что само утверждение о конечности или бесконечности пространства не является инвариантным, ответ зависит от того, как выбрано «время» и «пространство».

Рассмотрим реальный случай, когда плотность  $\rho_0$  хотя и мала, но конечна. В сечении  $\tau = \text{const}$  вблизи границы ( $x = ct$ ) находятся частицы, собственное время которых мало [см. (2.4.1)]. Поэтому плотность у края возрастает. Можно показать, что в сечении  $\tau = \text{const}$

\*) «Путь» при этом определяем по лабораторной системе координат или как длину окружности, деленную на  $2\pi$ .

плотность равна  $\frac{\rho_0}{1-(x/\tau)^2}$ . Следовательно, даже при малом  $\rho_0$  в сечении  $\tau = \text{const}$  есть область, где нельзя пренебречь плотностью вещества, нельзя пренебречь искривлением пространства, вызванным гравитационным полем вещества. При малом, но конечном  $\rho_0$  ввести «лабораторное время»  $\tau$  во всем пространстве нельзя, парадокс с конечностью пространства исчезает.

Если же поставить вопрос об общем числе  $N$  сохраняющихся частиц во Вселенной, то с самого начала нет никаких парадоксов: величина  $N$  является инвариантом в ОТО. Выше уже говорилось, что в замкнутом мире число  $N$  конечно: мы приводили конкретную формулу для  $N_{\text{полн}}$ . При  $\rho_0 < \rho_c$  в открытом мире  $N$  бесконечно, и этот вывод не зависит от способа подсчета.

В сечении  $t = \text{const}$  плотность  $n = n_0$  постоянна, объем пространственного сечения бесконечен,  $N = \infty$ . Но и при рассмотрении сечения  $\tau = \text{const}$  (при  $\rho_0 \ll \rho_c$ )  $N = \int n dV = \infty$  за счет того, что плотность частиц у края  $n = \frac{n_0}{1-(x/c\tau)^2}$  неограниченно растет, интегрирование по конечному объему  $V = \frac{4\pi}{3} (c\tau)^3$  дает бесконечное  $N$ .

В заключение историческое замечание. Описанное выше в этом параграфе решение называют моделью Милна. Действительно, Милн (1935, 1948) впервые ввел в рассмотрение совокупность частиц, не подверженных тяготению и одновременно вылетающих из одной точки со всеми скоростями.

## § 5. Случай критической плотности

Остановимся вкратце на случае

$$\rho = \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.5.1)$$

Если это соотношение имеет место в определенный момент, то уравнения движения обеспечивают выполнение  $\rho = \rho_c$  в любой другой момент времени как в прошлом, так и в будущем (притом также и при давлении, отличном от нуля).

При  $\rho = \rho_c$  метрика мира особенно проста именно в сопутствующих координатах, трехмерное сечение  $t = \text{const}$  ( $t$  — собственное время) является евклидовым.

Выражение (2.2.4) для этого случая переписывается в виде

$$dl^2 = a^2 [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (2.5.2)$$

Это обычное выражение для расстояния в евклидовом пространстве в сферической системе координат,  $a$  — масштабный множитель. При искривленном пространстве, когда  $k = \pm 1$ , множитель  $a$  не являлся

произвольным, он был равен радиусу кривизны пространства. Этот радиус был естественным масштабом для измерения всех длин. В случае евклидова пространства это не так, радиус кривизны равен бесконечности, выделенного масштаба нет, выражение (2.5.2) допускает масштабное преобразование, и множитель  $a$  произволен. Когда мы обращаемся к расширяющемуся миру с критической плотностью (2.5.1), то в выражении для интервала

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (2.5.3)$$

множитель  $a(t)$  определен с точностью до численной константы, не зависящей от времени.

Мы уже знаем (см. табл. I), что в простейшем случае, при  $P=0$  и  $\rho=\rho_c$ , расстояние между каждой парой точек растет пропорционально  $t^{2/3}$ , т. е.  $a=a_1 t^{2/3}$ . Константа  $a_1$  зависит от выбора масштаба сопутствующей системы координат. В самом деле, при любом  $a_1$  можно найти такой момент  $t_1$ , когда  $a_1 t_1^{2/3} \equiv 1$ ,  $a_1 = t_1^{-2/3}$ . Поскольку выбор момента  $t_1$  произволен, то произвольна и константа  $a_1$ .

Только после выбора  $t_1$  и  $a_1$  определяется масштаб координаты  $r$ .

В случае  $P \neq 0$  справедливо сказанное о произвольности выбора константы  $a_1$ . Только в этом случае зависимость  $a$  от  $t$  будет иная. Так, при  $P = \epsilon/3$   $a = a_1 t^{1/3}$ . Как уже отмечалось в § 4 гл. I, в начале эволюции отличие плотности от критической всегда мало. Это справедливо и при  $P=0$  и при  $P \neq 0$ . Поэтому в начале расширения вблизи сингулярности, когда плотность велика, всегда можно производить расчеты скорости расширения с использованием закономерностей плоского мира.

Как понять факт, что мир является плоским при вполне определенной, отличной от нуля плотности вещества? Все четырехмерное многообразие пространство-время отнюдь не плоское. В случае  $\rho = \rho_c$  плоскими являются лишь определенные сечения пространства-времени, в данном случае — сечения, отвечающие одинаковому собственному времени совокупности удаляющихся друг от друга частиц \*).

---

\*) Переход от системы отсчета (2.5.3), являющейся сопутствующей, к системе, в которой  $g_{22}$  не зависит от времени (называемой иногда «лабораторной»), проведен в § 4 гл. I6 нашей книги «Релятивистская астрофизика» (1967б). Для общего случая  $\rho \neq \rho_c$  вычисления проделаны Станюковичем, Шаршикеевым (1970, 1973).

## ГЛАВА 3

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА И НЕЙТРИНО; МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ НАБЛЮДЕНИЯМИ

#### § 1. Красное смещение и уменьшение импульса

В этой главе мы будем говорить о движении в модели Фридмана частиц с массой покоя, равной нулю. Примером таких частиц являются фотоны и нейтрино. При этом мы будем говорить о свободном их движении, т. е. без учета их возможного взаимодействия с веществом (рассеяния, поглощения).

Выводы, приведенные в этой главе, применяются для анализа наблюдений далеких небесных тел — галактик, квазаров; для расчета их видимой яркости, видимых размеров и т. п. в расширяющейся Вселенной. Все эти наблюдения осуществляются с помощью электромагнитных волн, приходящих от этих тел (видимого света, радиоволн, рентгеновского излучения и т. д.). Естественно, что, наблюдая источник, мы видим именно тот свет, который пришел к нам от него, не поглотившись или рассеявшись. Вот почему рассматриваемый вопрос о свободном движении квантов столь важен для сравнения теории с наблюдениями. Заметим, что в эпоху, близкую к нашей, большая часть фотонов, путешествующих во Вселенной, не поглощается и не рассеивается, так как средняя плотность вещества во Вселенной очень мала. На более ранних этапах расширения Вселенной ситуация была совсем иной. Но об этом мы будем подробно говорить в III разделе книги.

Что касается нейтрино, то, за исключением первых долей секунд после начала космологического расширения (см. об этом также в III разделе), они распространяются свободно, Вселенная для них прозрачна.

В дальнейшем, говоря о движении ультрарелятивистских частиц, мы будем называть их фотонами, имея в виду, что выведенные формулы применяются на практике к свету далеких объектов, т. е. именно к фотонам; но полученные выводы применимы к любым ультрарелятивистским частицам.

Начнем с рассмотрения красного смещения света.

Красное смещение света в расширяющейся Вселенной является результатом эффекта Доплера. Пусть квант испущен в момент  $t_1$

в точке  $l_1$  с частотой  $\omega_1$  и к моменту  $t_2$  пришел в близкую точку  $l_2$  с частотой  $\omega_2$ . Изменение его частоты дается формулой

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_1 \frac{u_{21}}{c}, \quad (3.1.1)$$

где  $u_{21}$  есть скорость движения вещества в точке 2 относительно вещества в точке 1. Формула справедлива для случая, когда скорость движения вещества мала и направлена по линии  $l_{21}$ , соединяющей точки 1 и 2, т. е. по линии распространения кванта. Так как  $l_{21}$  малó, то и  $u_{21}$  малó,  $u_{21} \ll c$ . В хаббловском распределении скорости  $u_{21} = H l_{21}$ , так что

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{1}{c} H l_{21} \omega_1.$$

Это выражение является асимптотически точным в пределе малого  $l_{21}$ , так как все поправки — учет кривизны пространства и релятивистские поправки к простой формуле (3.1.1) — оказываются порядка  $(u/c)^2$ , т. е. более высокого порядка в  $l_{21}$ . Поэтому в дифференциальном виде имеем точное равенство ( $\omega_2 - \omega_1 = d\omega$ ;  $l_{21} = dl$ ):

$$d\omega = -\frac{1}{c} H \omega dl. \quad (3.1.2)$$

Не существенно, был ли квант с частотой  $\omega_1$  испущен в точке  $l_1$  или он пришел в эту точку откуда-то издалека и имеет частоту  $\omega_1$  в точке  $l_1$ . Важно только то, что  $\omega_1$  измерено в системе, движущейся вместе с веществом, находящимся в  $l_1$ , а  $\omega_2$  — аналогично в точке 2 в соответствующей системе.

Равенство (3.1.2) можно рассматривать как дифференциальное уравнение, с помощью которого шаг за шагом можно проследить за изменением частоты кванта, в частности, и в том случае, когда пройденный им путь и изменение частоты отнюдь не малы.

Запишем  $dl = c dt$  и  $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{d \ln a}{dt}$ . В последней формуле  $a$  есть радиус мира, но с тем же успехом можно написать  $H = \frac{1}{l_{12}} \frac{dl_{12}}{dt}$ , где  $l_{12}$  — расстояние между двумя фиксированными частицами, пропорциональное  $a(t)$ . Подставляя выражения для  $dl$  и  $H$  в (3.1.2), получим

$$d\omega = -\omega \frac{d \ln a}{dt} dt, \quad \ln \omega + \ln a = \text{const},$$

$$a\omega = \text{const}, \quad \omega = \omega_0 \frac{a_0}{a}. \quad (3.1.3)$$

Таким образом, частота изменяется обратно пропорционально радиусу мира.

Совершенно аналогично можно рассмотреть движение материальной частицы. Под ее скоростью  $\omega$  будем понимать скорость движения относительно среднего хаббловского движения вещества в той точке



пространства, в которой находится частица в данный момент. Для простоты рассмотрим нерелятивистское движение,  $\omega \ll c$ . Тогда по закону сложения скоростей

$$\omega_2 = \omega_1 - u_{21} = \omega_1 - H l_{21}, \quad \omega_2 - \omega_1 = d\omega = -H dl.$$

Подставим  $dl = \omega dt$ ,  $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ , получим

$$d\omega = -\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \omega dt$$

и снова

$$\omega = \text{const}/a. \quad (3.1.4)$$

В нерелятивистском случае количество движения частицы  $p = m\omega$ , так что  $p \sim 1/a$ . В общем случае, когда  $\omega$  сравнимо со скоростью света, применяя релятивистский закон сложения, можно убедиться, что закон  $p \sim 1/a$  остается в силе, хотя теперь  $p = \frac{m_0 \omega}{\sqrt{1 - \omega^2/c^2}}$  и скорость  $\omega$  уже не будет обратно пропорциональна  $a$ .

Красное смещение квантов, очевидно, также согласуется с законом изменения количества движения; для кванта  $p = \hbar \omega/c$ . Длина волны кванта  $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi \hbar/p$ . Так же выражается через  $p$  и квантовомеханическая (дебройлевская) длина волны любого тела. Таким образом, оба закона — закон красного смещения для квантов и закон изменения количества движения произвольного тела — можно совместно сформулировать так: в расширяющейся однородной модели Вселенной все длины волн меняются пропорционально изменению всех расстояний, т. е. пропорционально радиусу мира. Полезная следующая аналогия. Представим себе случай замкнутого мира: пусть в нем находится одна стоячая электромагнитная волна. Мир мы рассматриваем в данном случае как полый резонатор, в котором возбуждено определенное колебание (определенная гармоника), например, с  $n$  узлами. При расширении мира номер гармоники и число узлов остаются неизменными: естественно поэтому, что длина волны растет пропорционально радиусу шара. Такая трактовка неоднократно отмечалась раньше [Лауэ (1931), Паули (1958), Уилер (1958, 1960)].

Рассматривая изменение частоты при последовательном прохождении малых отрезков пути  $dr$ , мы могли не учитывать гравитационное изменение частоты, которое здесь порядка  $(dr)^2$ . После интегрирования в (3.1.3) получен точный результат для немалых отрезков. Если бы мы проводили вычисления не как в (3.1.3), а прямым интегрированием по пути фотона, то при непосредственном вычислении изменения частоты на конечном пути  $r_{12}$  гравитационное изменение частоты нужно было бы, очевидно, учесть (см. § 4 этой главы). Важно, что частота измеряется наблюдателями, движущимися подобно свободным частицам, без влияния градиента давления. В локальной

системе отсчета таких наблюдателей гравитационное ускорение исчезает в начале координат, и поэтому гравитационный потенциал, нормированный на нуль в начале координат, порядка  $(dr)^2$  на расстоянии  $dr$  от начала координат.

Вычисление красного смещения как интеграла по доплеровским красным смещениям между соседними свободными частицами (3.1.2) является точной процедурой. Она применима не только для однородной изотропной Вселенной, но также и в присутствии возмущений, неоднородности и анизотропии.

## § 2. Наблюдаемые величины и горизонт

Сопоставление предсказаний теории расширяющейся Вселенной с данными наблюдений является трудной, до конца не разрешенной и в настоящее время проблемой.

При изучении космологических вопросов мы имеем дело с расстояниями, на которых уже сказывается кривизна пространства. Интерес к большим расстояниям в особенности возрос после открытия квазаров с большими красными смещениями. Поэтому нельзя пользоваться евклидовой геометрией с ее наглядными привычными представлениями \*). Само понятие «расстояния» не имеет определенного однозначного смысла. Необходима предварительная математическая работа для получения соотношений между наблюдаемыми величинами \*\*). Во все формулы теории входят постоянная Хаббла и плотность материи. Постоянная Хаббла может считаться известной с точностью хотя бы  $\pm 50\%$  (см. § 9 настоящей главы). Плотность материи может находиться в пределах  $3 \cdot 10^{-31} - 10^{-28} \text{ г/см}^3$  за счет возможных больших количеств трудно наблюдаемых форм материи. Поэтому в ряде работ приводятся соотношения между наблюдаемыми величинами при различных предположениях о  $\rho_0$  и  $H_0$ \*\*\*). Ниже будет приведена сводка соответствующих формул и кривых. В принципе сравнение с наблюдениями формул, зависящих от плотности как параметра, должно привести к определению плотности. Однако параметры источников известны недостаточно хорошо. Кроме того, от далеких источников мы наблюдаем свет, испущенный давно, т. е. испущенный объектами, находящимися на более ранней стадии развития, по сравнению с близкими объектами. Поэтому обработка наблюдений зависит от предположений об эволюционном эффекте и до сих пор выводы остаются очень неопределенными.

\*) Ниже, в § 4 этой главы будет специально рассмотрен вопрос о пределах применимости евклидова приближения.

\*\*) Эта принципиальная постановка вопроса особенно подчеркнута в известных обзорах Мак-Витти (1959а, 1962а), см. также работы Эндиджа (1961), Маттига (1958, 1959).

\*\*\*). Следует упомянуть о возможности  $\Lambda \neq 0$ . Этот случай будет обсуждаться в гл. 4.

Начнем с качественных особенностей наблюдаемой картины. Предполагается, что был момент, когда  $\rho = \infty$ ,  $a = 0$ . Условимся этот момент обозначать  $t = 0$ . Ясно, что нельзя увидеть свет, испущенный ранее, уже потому, что при приближении к этому моменту оптическая толщина бесконечно велика, ибо  $\int \sigma dx$ , где  $\sigma$  — коэффициент поглощения света, расходится.

Можно определить, какая частица должна испустить свет в момент  $t = 0$ , чтобы он (двигаясь без поглощения) был принят нами сегодня, в момент  $t = t_0$ . Совокупность этих частиц образует сферу с центром в точке наблюдения. Эту сферу можно назвать горизонтом. Если правильны представления о том, что было  $\rho = \infty$ , то принципиально можно получить информацию лишь о веществе, находящемся внутри горизонта. В действительности можно видеть с помощью света еще меньшую область, ибо в начале расширения плотность вещества настолько велика, что оно непрозрачно для света. Как мы покажем в разделе III, в действительности из-за рассеяния и поглощения света можно видеть лучи из области, которая определяется тем условием, что свет, приходящий к нам сейчас, покинул ее, когда средняя плотность вещества во Вселенной была  $\rho_t \leq 10^{-20} \text{ г/см}^3$  (для нейтрино соответственно  $\rho_t < 10^5 \text{ г/см}^3$ ). Практически, однако, расчет распространения света при расширении от  $\rho_t$  до сегодняшней плотности  $\rho_0$  или от  $\rho = \infty$  до  $\rho_0$  дает одинаковый результат \*), ибо путь, проходимый светом (если бы он не поглощался при большой плотности) за время расширения от  $\rho = \infty$  до  $\rho = \rho_t$ , много меньше, чем за время от  $\rho = \rho_t$  до  $\rho = \rho_0$ .

Распространение света подчиняется условию  $ds = 0$ . Начало координат помещаем в точку наблюдения. Принимаемые лучи движутся к началу координат. Мы будем работать с интервалом, записанным в виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)[dr^2 + \tilde{\varphi}^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (3.2.1)$$

причем

$$\tilde{\varphi}(r) = \sin r \quad \text{для } \Omega > 1, \quad \tilde{\varphi}(r) = \text{sh } r \quad \text{для } \Omega < 1.$$

При  $\Omega = 1$   $\tilde{\varphi}(r) = r$  и мы будем вместо  $a(t)$  обозначать масштаб через  $b(t)$ .

Вернемся к  $\Omega \neq 1$ . Для светового луча, распространяющегося вдоль радиуса ( $d\theta = d\varphi = 0$ ), очевидно,  $ds^2 = 0 = c^2 dt^2 - a^2 dr^2$ ,  $\dot{a}(t) dr = -c dt$ . Знак минус появился потому, что мы рассматриваем световой луч, приходящий к наблюдателю, находящемуся в начале

\*) Напомним, что мы все время рассматриваем случай  $\Lambda = 0$ ;  $\Lambda \neq 0$  будет рассмотрено в гл. 4. Там будет показано (§ 2), что в случае  $\Lambda \neq 0$ ,  $e_\Lambda > 0$  с длинным периодом медленного расширения, и для замкнутого мира горизонта не существует; в этом случае световой луч имеет достаточно времени, чтобы обойти весь мир.

системы координат. Сопутствующая координата горизонта  $r_0$  дается интегралом

$$r_0 = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.2.2)$$

Следует указать, что  $a \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ , однако интеграл не расходится. Для плоского случая  $\Omega = 1$  интегрирование (3.2.2) непосредственно дает [заменяем  $a(t)$  на  $b(t)$ ]

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= 3 \frac{c}{b_1} t_0^{1/3} = 2 \frac{c}{b_1 t_0^{1/3} H_0}, \quad P = 0; \\ r_0 &= 2 \frac{c}{b_2} t_0^{1/2} = \frac{c}{b_2 t_0^{1/2} H_0}, \quad P = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3)$$

Для общего случая  $\Omega \neq 1$  интегрирование удобно проводить с использованием приведенной выше, в табл. I, параметрической зависимости  $a$  от  $t$ . Интегрирование во всех случаях дает

$$r_0 = \eta_0. \quad (3.2.4)$$

Зная  $r_0$ , можно вычислить  $R_0 = a(t_0)r_0$  и  $\tilde{R}_0 = a(t_0)\tilde{\varphi}(r_0)$ , где  $\tilde{\varphi}(r_0) = \sin r_0$  при  $\Omega > 1$  и  $\tilde{\varphi}(r_0) = \text{sh } r_0$  при  $\Omega < 1$ . Первая величина,  $R_0$ , — это сегодняшнее расстояние до частицы, которая находится сейчас на горизонте, вторая,  $\tilde{R}_0$ , есть деленная на  $2\pi$  длина экватора сферы, на которой сегодня находятся частицы горизонта.

Далее можно найти

$$V_0 = a^3(t_0) 4\pi \int_0^{r_0} \tilde{\varphi}^2(r) dr,$$

а также

$$\tilde{M}_0 = \rho_0 V_0, \quad N_0 = n_0 V_0,$$

где  $V_0$  — это сегодняшний объем, заключенный внутри горизонта,  $\tilde{M}_0$  — масса частиц вещества в объеме  $V_0$ ,  $N_0$  — полное число нуклонов в объеме  $V_0$  ( $n_0$  — их плотность).

Общий вид формул для  $R_0$ ,  $V_0$  и  $\tilde{M}_0$  удобно записать, выделяя безразмерные функции от  $\Omega$ :

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{c}{H_0} S(\Omega), \\ V_0 &= \frac{4\pi}{3} \left( \frac{c}{H_0} \right)^3 g(\Omega), \\ \tilde{M}_0 &= \frac{4\pi}{3} \left( \frac{c}{H_0} \right)^3 \rho_0 g(\Omega), \\ N_0 &= \frac{4\pi}{3} \left( \frac{c}{H_0} \right)^3 n_0 g(\Omega). \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

Функции  $g$  для двух уравнений состояния ( $g_1$  для  $P=0$  и  $g_2$  для  $P=e/3$ ) представлены на графике рис. 7. Для справок ниже приводим формулы; следует предупредить читателя, что формулы громоздки и вычисления по ним сложны.

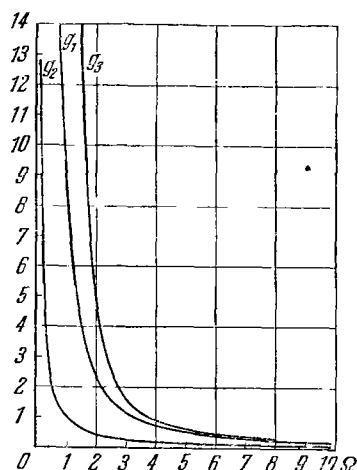


Рис. 7. Безразмерный объем области, доступной для наблюдения (внутри горизонта). Кривая  $g_1$  для  $P=0$  и кривая  $g_2$  для  $P=e/3$  как функции безразмерной плотности  $\Omega$ . Для сравнения приведена кривая  $g_3$  полного объема замкнутого мира (определенная только для  $\Omega > 1$ ) при  $P=0$ .

Безразмерные функции  $S(\Omega)$  и  $g(\Omega)$  имеют следующий вид:  
а) Случай  $P=0$ :

$$S = S_1 = \frac{2}{\Omega};$$

$$g_1(\Omega) = \frac{3}{2(1-\Omega)^{3/2}} \left[ \left( \frac{2}{\Omega} - 1 \right) \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left( \frac{1}{\Omega} - 1 \right)} - \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left( \frac{1}{\Omega} - 1 \right)} \right] \quad \text{при } \Omega < 1;$$

$$g_1(\Omega) = 8 \quad \text{при } \Omega = 1;$$

$$g_1(\Omega) = \frac{3}{2(\Omega-1)^{3/2}} \left[ \arcsin \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left( 1 - \frac{1}{\Omega} \right)} - \left( \frac{2}{\Omega} - 1 \right) \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left( 1 - \frac{1}{\Omega} \right)} \right] \quad \text{при } 1 \leq \Omega \leq 2;$$

$$g_1(\Omega) = \frac{3}{2(\Omega-1)^{3/2}} \left[ \pi - \arcsin \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left( 1 - \frac{1}{\Omega} \right)} + \left( 1 - \frac{2}{\Omega} \right) \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left( 1 - \frac{1}{\Omega} \right)} \right] \quad \text{при } \Omega \geq 2.$$

б) Случай  $P = \varepsilon/3$ :

$$S = S_2 = \frac{1}{\sqrt{\Omega}};$$

$$g_2 = \frac{3}{2(1-\Omega)^{3/2}} \left[ \frac{\sqrt{1-\Omega}}{\Omega} - \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1}{\Omega} - 1} \right] \text{ при } \Omega < 1;$$

$$g_2 = 1 \text{ при } \Omega = 1;$$

$$g_2 = \frac{3}{2(\Omega-1)^{3/2}} \left[ \arcsin \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega}} - \frac{1}{\Omega} \sqrt{1-\Omega} \right] \text{ при } \Omega > 1.$$

Наконец, приводим асимптотику:

$$g_1 = \frac{3\pi}{2} \Omega^{-3/2} \quad \text{и} \quad g_2 = \frac{3\pi}{4} \Omega^{-3/2} \quad \text{при} \quad \Omega \gg 1;$$

$$g_1 = \frac{6}{\Omega^2} \quad \text{и} \quad g_2 = \frac{3}{2\Omega} \quad \text{при} \quad \Omega \ll 1.$$

Следует особенно обратить внимание на непрерывность кривых при критическом значении плотности, т. е. при  $\Omega = 1$ . При этом происходит качественный скачок — изменение однородной Вселенной от бесконечной (открытой) модели при  $\Omega \leq 1$  к закрытой модели при  $\Omega > 1$ .

При  $\Omega < 1$  общий объем  $V$ , масса  $\tilde{M}$ , число частиц  $N$  бесконечны, при  $\Omega > 1$  величины  $V$ ,  $\tilde{M}$ ,  $N$  конечны. Однако в обоих случаях доступная наблюдению часть Вселенной конечна, и в этом смысле различие между открытой и замкнутой Вселенной оказывается меньше, чем можно было ожидать \*).

Рассмотрим случай замкнутого мира,  $\Omega > 1$ . Уравнение (3.2.4) позволяет судить о том, какая доля мира находится в тот или иной момент внутри горизонта наблюдателя и доступна его наблюдению.

Пусть  $P = 0$ . Из табл. I следует, что за все время расширения до максимума параметр  $\eta$  меняется от 0 до  $\pi$ . Из (3.2.4) следует, что  $r$  света при этом также изменится от 0 до  $\pi$ , что, согласно (2.2.6), соответствует прохождению света от одного полюса до другого. На фазе сжатия свет, идя от противоположного полюса, вернется к исходной точке. Это максимальный путь, который успеет пройти свет за время всей эволюции мира.

Для случая  $P = \varepsilon/3$  параметр  $\eta$  за время расширения меняется от 0 до  $\pi/2$ . Следовательно, свет успевает пройти при этом только половину расстояния до противоположного полюса. На фазе сжатия он доходит до противоположного полюса.

---

\*) Общее число нуклонов в замкнутой Вселенной  $N_{\text{полн}}$  (относящееся к  $\Omega > 1$ ) также можно выразить в безразмерном виде:  $N_{\text{полн}} = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{c}{H_0} \right)^3 n_0 g_3(\Omega)$ , при этом функция  $g_3 = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{(\Omega-1)^{3/2}}$  и также показана на рис. 7. Заметим, что при  $\Omega \gg 1$   $g_1 \rightarrow g_3$ ,  $g_2 \rightarrow g_3/2$ .

Можно ли в замкнутом мире наблюдать один и тот же объект с двух сторон? Пользуясь аналогией с земным шаром, вопрос можно поставить так: можно ли, находясь на Северном полюсе, наблюдать одну и ту же радиостанцию, один раз по ближайшему лучу, второй раз — по лучу, который обошел по дуге большого круга через Южный полюс и пришел к наблюдателю на Северном полюсе?

На земном шаре с помощью длинных радиоволн, огибающих земную поверхность, это возможно. Во Вселенной, находящейся в стадии расширения, это невозможно: слишком мало времени проходит с момента  $t=0$ ,  $\rho=\infty$ . Луч, испущенный в этот момент или позже, не успеет дойти до наблюдателя к сегодняшнему моменту по длинному пути. Это может стать возможным, если  $\Omega > 1$ ,  $P=0$ , через несколько миллиардов лет, когда расширение сменится сжатием и наши потомки будут говорить о (хаббловском) синем смещении. Итак, наличие в каждый момент времени горизонта позволяет видеть только конечный участок Вселенной.

Подчеркнем, что речь идет о принципиальной невозможности, определяемой не сегодняшним уровнем экспериментальной техники, а конечной скоростью распространения света; никакая нейтринная астрономия не расширит горизонта \*).

Следовательно, сами утверждения о конечности или бесконечности мира принципиально связаны с экстраполяцией известной нам ситуации в нашей окрестности на области не только далекие, но и ненаблюдаемые сейчас.

Конечно, само понятие «принципиального» горизонта наблюдателя имеет место только потому, что в космологических моделях есть момент  $\rho=\infty$  и за конечное время, прошедшее от этого момента, свет от далеких областей не успевает дойти до наблюдателя.

Если вблизи сингулярности  $\rho=\infty$  мир расширялся не так, как в модели Фридмана (о возможности этого см. разделы IV и V), то закон движения света там был бы иной, свет при некоторых условиях успевал бы уже вблизи сингулярности проходить огромные расстояния и горизонт бы отсутствовал. Этот вопрос мы подробно разберем в разделе IV книги. Наконец, если бы до момента сингулярности  $\rho=\infty$  была бы эпоха сжатия Вселенной (см. об этом раздел V), то никакого «принципиального» горизонта бы не было, так как свет, вышедший до момента  $\rho=\infty$ , успеет пройти дальше и т. д. Конечно, реальный свет при этом неизбежно поглотится в эпоху очень больших  $\rho$ , но мы говорим сейчас о принципиальном горизонте для сколь угодно проникающих сквозь плотное вещество частиц. Для них горизонта не было бы. О ситуации с горизонтом в случае  $\Lambda \neq 0$  и о возможности исследования проблемы эпохи до момента  $\rho=\infty$  см. раздел V книги.

\*) Горизонт сам постепенно расширяется с течением времени — по мере уменьшения  $H$  и увеличения  $t_0$ . Однако для заметного увеличения  $R_0$ ,  $M_0$ ,  $V_0$  потребуется время порядка  $t_0$ , т. е. миллиарды лет!

### § 3. Графики и формулы для функций, определяющих наблюдаемые величины

Для характеристики красного смещения введем величину ( $\omega$  — частота)

$$\Delta = 1 - \frac{\omega_{\text{набл}}}{\omega_{\text{исп}}} = \frac{\omega_{\text{исп}} - \omega_{\text{набл}}}{\omega_{\text{исп}}}. \quad (3.3.1)$$

Очень часто применяется другая величина,  $z$ :

$$z = \frac{\lambda_{\text{набл}} - \lambda_{\text{исп}}}{\lambda_{\text{исп}}}. \quad (3.3.2)$$

Очевидно,

$$z = \frac{\Delta}{1 - \Delta},$$

$$\Delta = \frac{z}{1 + z}. \quad (3.3.3)$$

Преимущество использования  $\Delta$  связано с конечной областью изменения — от  $\Delta=0$  вблизи точки наблюдения до  $\Delta=1$  на горизонте;  $\Delta \rightarrow 1$  соответствует тому, что частота наблюдаемого света стремится к нулю;  $\Delta=1$  есть предел возможности наблюдения. Переменная  $z$  меняется от 0 до  $\infty$ , что затрудняет построение графиков \*). Поскольку все же использование  $z$  широко распространено, мы даем формулы в двойной записи: с  $\Delta$  и с  $z$ . Для удобства перехода от  $\Delta$  к  $z$  даем таблицу:

|          |   |      |      |     |     |     |          |
|----------|---|------|------|-----|-----|-----|----------|
| $\Delta$ | 0 | 0,2  | 0,4  | 0,5 | 0,6 | 0,8 | 1        |
| $z$      | 0 | 0,25 | 0,67 | 1   | 1,5 | 4   | $\infty$ |

Заметим при этом, что для  $\Delta = \alpha \ll 1$   $z \approx \alpha$ , а для  $\Delta = 1 - \beta$ ,  $\beta \ll 1$   $z \approx \beta^{-1}$ .

Рассмотрим угол  $\theta$ , под которым виден объект данного линейного размера  $l$ . В евклидовой геометрии

$$\theta = l/R, \quad (3.3.4)$$

где  $R$  — расстояние до объекта. В кривом мире назовем, по определению, величину  $l/\theta$  угловым расстоянием и обозначим через  $\tilde{R}$ . Длина окружности с центром в точке наблюдения, на которой в момент испускания света находится рассматриваемый объект, равна  $2\pi\tilde{R}$ . Сопоставляя с выражением интервала (3.2.1), найдем  $\tilde{R} = a(t_e)\tilde{\varphi}(r_e)$ , где  $r_e$  — сопутствующая координата объекта. Момент  $t_e$  испускания света задается условием, чтобы в точку наблюдения (на Землю) свет пришел сегодня. Следовательно, вблизи горизонта

\*) Переменная, аналогичная  $\Delta$ , введена Мак-Витти (1962б) и обозначена им  $Y$ , причем  $Y + \Delta = 1$ .



$t_e \rightarrow 0$ ,  $a(t_e) \rightarrow 0$ , а значит, и  $\tilde{R} \rightarrow 0$ , т. е. угол  $\theta$  неограниченно возрастает. Так как для близкого к наблюдателю объекта с его удалением (ростом  $r_e$ ) угол  $\theta$  убывает, а у горизонта он возрастает, то отсюда следует, что угол  $\theta$  для объекта с данным  $l$  проходит через минимум при изменении  $r_e$ . Наличие минимума  $\theta$  и максимума  $\tilde{R}$  является общим свойством расширяющейся Вселенной, справедливым и для открытой и для закрытой модели. Наглядный подход к физической интерпретации этого минимума будет изложен в связи с расчетом углов в неоднородной Вселенной (§ 10).

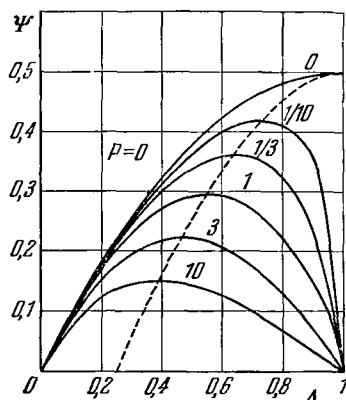


Рис. 8. Безразмерное состояние  $\Psi$  (измеренное по видимому угловому диаметру объекта с фиксированным линейным размером) в зависимости от красного смещения  $\Delta$  при разных значениях безразмерной плотности  $\Omega$  (значения  $\Omega$  даются цифрами над кривыми) и при  $P=0$ . Пунктирная линия — геометрическое место максимумов кривых.

Перейдем теперь к выражению  $\tilde{R}$  через красное смещение  $z$ . Для сравнительно близких объектов, при  $\Delta \ll 1$ , геометрия евклидова. Доплер-эффект можно рассматривать нерелятивистским образом,  $d\omega = -\frac{u\omega}{c}$ , изменение расстояния за время прохождения света мало. Значит, в пределе при малых  $\Delta$

$$u = c \frac{d\omega}{\omega} = c\Delta = H_0 \tilde{R}, \quad \tilde{R} = \frac{c}{H_0} \Delta, \quad (3.3.5)$$

$$u = cz, \quad \tilde{R} = \frac{c}{H_0} z. \quad (3.3.5a)$$

Для любых расстояний можно ввести функцию безразмерного углового расстояния  $\Psi$  и написать \*)

$$\tilde{R} = \frac{c}{H_0} \Psi(\Delta), \quad (3.3.6)$$

$$\tilde{R} = \frac{c}{H_0} \Psi(z). \quad (3.3.6a)$$

Функция  $\Psi$  находится следующим образом. По определению  $\tilde{R} = a(t_e) \tilde{\varphi}(r_e)$ . Величины  $t_e$  и  $r_e$  связаны между собой уравнением распространения света:  $dt = a dr$ , и поэтому  $r_e$  выражается через  $t_e$  и сегодняшние значения  $H_0$  и  $\Omega$ . После этого остается выразить  $t_e$  через  $z$  (или через  $\Delta$ ). Как это делается, подробно рассказано в следующем параграфе. Здесь мы приведем окончательный ответ и разберем свойства функции  $\Psi$ .

Функция  $\Psi$  зависит не только от  $\Delta$  или  $z$ , но и от отношения  $\Omega = \rho_0/\rho_c$ . Вид  $\Psi$  различен при  $P=0$  и  $P=e/3$ . Функции  $\Psi$  имеют

\*) Функции  $\Psi(\Delta)$  в (3.3.6) и  $\Psi(z)$  в (3.3.6a) имеют разный вид, см. (3.3.9), (3.3.10).

следующие общие свойства:

$$\Psi(\Delta \rightarrow 0; \Omega) = \Delta; \quad \Psi(\Delta = 1; \Omega \neq 0) = 0, \quad (3.3.7)$$

$$\Psi(z \rightarrow 0; \Omega) = z; \quad \Psi(z \rightarrow \infty; \Omega \neq 0) = 0. \quad (3.3.7a)$$

На рис. 8, 9 приведены кривые  $\Psi(\Delta, \Omega)$  для  $\Omega = 0, 1/10, 1/3, 1, 3, 10$ , причем на рис. 8 даны кривые для  $P=0$ , на рис. 9 — для  $P=\varepsilon/3$ . Следует особенно обратить внимание на предельный случай  $\Omega=0$ . Чем меньше  $\Omega$ , тем дальше находится максимум (при  $\Delta$ , близком к единице). В пределе при  $\Omega=0$ , т. е. для модели Милна, функция  $\Psi$  имеет простой вид:

$$\Psi(\Delta; 0) = \Delta \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right), \quad (3.3.8)$$

$$\Psi(z; 0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(1+z)^2}\right). \quad (3.3.8a)$$

Кривые для  $\Omega=0$  на рис. 8 и 9, естественно, совпадают. При  $\Omega=0$  функция не имеет максимума или, точнее, максимум оказывается на краю интервала определения функции, при  $\Delta=1$ . При большой плотности,  $\Omega \gg 1$ , максимум  $\Psi$  в случае  $P=0$  приходится на  $\Delta=0,25$  ( $z=0,33$ ). При этом

$$\Psi_m = \frac{3\sqrt{3}}{8} \Omega^{-1/2} = \frac{0,65}{\sqrt{\Omega}}.$$

Аналогично в случае  $P=\varepsilon/3$

$$\Delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,29, \quad (z = \sqrt{2} - 1 = 0,41), \quad \Psi_m = \frac{1}{z\sqrt{\Omega}}.$$

Для справок приводим формулы:

$$P=0,$$

$$\Psi = \frac{2(1-\Delta)}{\Omega^2} [2(\Omega-1)\Delta + (\Omega-2) \times \\ \times \sqrt{1 + (\Omega-2)\Delta - (\Omega-1)\Delta^2} - 1], \quad (3.3.9)$$

$$\Psi = \frac{2}{\Omega^2(1+z)^2} \left\{ \Omega z + (\Omega-2) [\sqrt{1 + \Omega z} - 1] \right\}; \quad (3.3.9a)$$

$$P=\varepsilon/3;$$

$$\Psi = \frac{1-\Delta}{\Omega} [\sqrt{1 + 2(\Omega-1)\Delta - (\Omega-1)\Delta^2} - 1 + \Delta], \quad (3.3.10)$$

$$\Psi = \frac{1}{\Omega(1+z)^2} (\sqrt{1 + \Omega z(z+2)} - 1). \quad (3.3.10a)$$

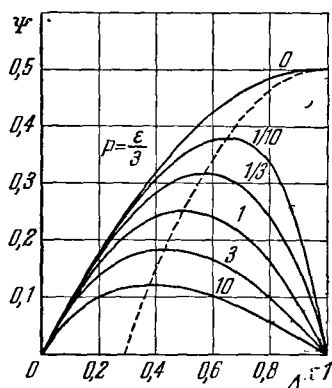


Рис. 9. То же, что и на рис. 8, но при  $P=\varepsilon/3$

Разложение при малых  $\Delta$  будет рассмотрено отдельно, в § 5 этой главы.

Наблюдаемая светимость объекта, для которого известны размеры, яркость и спектр, а также красное смещение, полностью определяется функцией  $\Psi(\Delta, \Omega)$ . Удобно расчленить вопрос о светимости на вопросы о яркости и об угловых размерах.

Мерой яркости является количество световой энергии, приходящей к наблюдателю в единицу времени на единицу площади приемника, нормального лучу, отнесенное к телесному углу,  $I = \frac{d^2 E}{d\Xi} ds$ .

В силу изотропии Вселенной элемент телесного угла обычным образом выражается в сферических угловых координатах,  $d\Xi = \sin \theta d\varphi d\theta$ . Наряду с интегральной по спектру яркостью можно ввести спектральную яркость  $F(\omega)$ , т. е.  $dE = F(\omega) d\omega d\Xi ds$ .

Из оптики известно, что в плоском пространстве яркость не зависит ни от расстояния, ни от преломления лучей, если только нет поглощения или рассеяния света.

Для расширяющейся Вселенной есть аналогичная теорема: яркость не зависит ни от чего, кроме красного смещения  $\Delta$ . В частности, яркость не зависит от кривизны пространства, плотности вещества и т. п. (предполагается, что на пути луча нет поглощения или рассеяния света). В очень общей форме как следствие теоремы Лиувилля для квантов эта теорема выведена Линдквистом (1966).

Излучение черного тела, соответствующее абсолютной температуре  $T_{исп}$ , преобразуется в излучение черного тела с температурой

$$T_{набл} = (1 - \Delta) T_{исп} = \frac{T_{исп}}{1 + z}.$$

Формула Планка имеет вид

$$F(\omega, T) d\omega = \text{const} \cdot \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega = \text{const} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (3.3.11)$$

Полный поток излучения в элементе телесного угла

$$I = \int_0^\infty F(\omega, T) d\omega = \text{const} \cdot T^4, \quad (3.3.12)$$

следовательно, при красном смещении  $I$  преобразуется по закону

$$I = I_{исп} (1 - \Delta)^4, \quad (3.3.13)$$

$$I = I_{исп} (1 + z)^{-4}. \quad (3.3.13a)$$

Спектр произвольного вида, характеризуемый спектральной функцией  $F(\omega)$ , преобразуется по следующему закону:

$$F(\omega_{набл}) d\omega_{набл} = (1 - \Delta)^4 F(\omega_{исп}) d\omega_{исп} = (1 - \Delta)^3 F\left(\frac{\omega_{набл}}{1 - \Delta}\right) d\omega_{набл}; \quad (3.3.14)$$

при этом

$$\omega_{\text{набл}} = (1 - \Delta) \omega_{\text{исп}}, \quad d\omega_{\text{набл}} = (1 - \Delta) d\omega_{\text{исп}}, \quad (3.3.14a)$$

$$\omega_{\text{набл}} = \frac{\omega_{\text{исп}}}{1+z}, \quad d\omega_{\text{набл}} = \frac{d\omega_{\text{исп}}}{1+z}, \quad (3.3.14b)$$

так что интегральная (болометрическая) яркость всегда убывает, как  $(1 - \Delta)^4 = (1 + z)^{-4}$ , независимо от формы спектра источника.

Дифференциальный закон изменения спектральной яркости для данной фиксированной частоты зависит от вида спектра испускания. Формула для произвольного спектра испускания приведена выше [см. (3.3.14)]. В частном случае степенного спектра испускания

$$F(\omega_{\text{исп}}) d\omega_{\text{исп}} = A \omega_{\text{исп}}^n d\omega_{\text{исп}}, \quad (3.3.15)$$

наблюдаемый спектр, подвергшийся красному смещению, имеет также степенной вид:

$$F(\omega_{\text{набл}}) d\omega_{\text{набл}} = A (1 - \Delta)^{3-n} \omega_{\text{набл}}^n d\omega_{\text{набл}} = A (1 + z)^{n-3} \omega_{\text{набл}}^n d\omega_{\text{набл}}. \quad (3.3.16)$$

Выяснив закон изменения яркости, т. е. потока света в единице телесного угла, обратимся к вопросу о полном количестве света, попадающего к наблюдателю от данного небесного тела.

Далекая звезда не разрешается по угловым размерам. Измеряется не яркость ее поверхности, а поток энергии от всей звезды, приходящийся на единицу поверхности в точке наблюдения.

В области, где применима евклидова геометрия, телесный угол, под которым виден источник, равен отношению проекции площади источника к квадрату расстояния:

$$\Xi = \frac{s}{R^2}. \quad (3.3.17)$$

В расширяющейся Вселенной мы должны поставить  $\tilde{R}$  вместо  $R$ , так что

$$\Xi = \frac{s}{(c\Psi/H_0)^2}. \quad (3.3.18)$$

Полное количество света, приходящееся на  $1 \text{ см}^2$  поверхности у наблюдателя, выражается через поток энергии звезды  $L$ :

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi (c/H_0)^2} \frac{(1 - \Delta)^4}{\Psi^2}, \quad (3.3.19)$$

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi (c/H_0)^2} \frac{1}{\Psi^2 (1 + z)^4}. \quad (3.3.19a)$$

Можно определить «болометрическое» расстояние  $D$  как расстояние, на котором в евклидовом пространстве неподвижный объект дал бы поток энергии наблюдателю такой же, какой дает тот же объект в расширяющейся модели Фридмана.

Из сравнения (3.3.19) и (3.3.19а) и соотношения, определяющего  $D$ :

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi D^2}, \quad (3.3.20)$$

находим

$$D = \frac{c}{H_0} \frac{\Psi(\Delta, \Omega)}{(1-\Delta)^2}, \quad (3.3.21)$$

$$D = \frac{c}{H_0} (1+z)^2 \Psi(z, \Omega). \quad (3.3.21a)$$

При малых  $\Delta$  имеем  $\Psi(\Delta, \Omega) \approx \Delta$  и поэтому

$$D = \frac{c}{H_0} \Delta = \frac{c}{H_0} z = \tilde{R},$$

т. е., естественно, все различные определения расстояния совпадают. При  $\Delta$ , сравнимых с 1, знаменатель  $(1-\Delta)^2$  играет большую роль. С ростом  $\Delta$  величина  $D$  монотонно растет и не имеет максимума, в отличие от  $\tilde{R}$ . Во всех вариантах ( $P=0$ ,  $P=e/3$ , любое  $\Omega$ ) при  $\Delta \rightarrow 1$   $D \rightarrow \infty$ . Это значит, что красное смещение существенно уменьшает поток энергии далеких звезд.

Для практических наблюдений важен поток энергии в части спектра, воспринимаемой фотопластинкой или другим приемником излучения. Теория спектральных поправок (так называемая  $k$ -поправка), учитывающих чувствительность приемника, основана на формуле (3.3.14) и хорошо разработана [Уитфорд (1971), Оук (1967), Мак-Витти (1959а, б, 1962а, б), Сэндидж (1968)]; мы не будем ее здесь приводить.

В выражении (3.3.19)  $\tilde{E}_1$  есть энергия, принимаемая в единицу собственного времени наблюдателя, тогда как  $L$  есть поток энергии звезды в единицу ее собственного времени. Здесь, как и выше, фактически учтено преобразование времени: если на звезде между двумя явлениями (например, двумя вспышками) проходит время  $\tau$ , то наблюдатель воспринимает световые сигналы об этих явлениях с большим интервалом,  $\tau_{\text{набл}} = \frac{\tau}{1-\Delta} = \tau(1+z)$ .

Формулы, в которые входят звездные величины и которые обычно используются астрономами, см. далее, в §§ 4, 5.

Наконец, нам остается обсудить еще один тип наблюдений, связанных с количеством вещества, заключенным в слое с красным смещением между  $\Delta$  и  $\Delta+d\Delta$  (или  $z$  и  $z+dz$ ). Начнем опять с классической картины: в евклидовой статической Вселенной, очевидно,

$$d\tilde{M} = \rho_0 4\pi R^2 dR, \quad (3.3.22)$$

где  $\rho_0$  — средняя плотность вещества; или, если говорить о числе частиц (например, нуклонов),

$$dN = n_0 4\pi R^2 dR. \quad (3.3.23)$$

Подставим вместо  $R$  его выражение через  $\Delta$ . При малых  $\Delta$   $R = \frac{c\Delta}{H}$  и получаем

$$dN = n_0 \frac{4\pi c^3}{H_0^3} \Delta^2 d\Delta. \quad (3.3.24)$$

Введем функцию  $\xi(\Delta, \Omega)$ , «исправляющую» классическую формулу: в действительности в расширяющейся искривленной Вселенной

$$dN = n_0 \frac{4\pi c^3}{H_0^3} \xi(\Delta, \Omega) \Delta^2 d\Delta. \quad (3.3.25)$$

Функция  $\xi$  учитывает и то, что Вселенная расширяется, и раньше, т. е. при  $\Delta$ , заметно отличающихся от нуля, плотность вещества была другая, и то, что пространство неевклидово. Выводится эта функция следующим образом. По определению в момент испускания света  $t_e$  в искривленном пространстве

$$dN = n(t_e) 4\pi [a(t_e) \tilde{\varphi}(r_e)]^2 a(t_e) dr_e.$$

После этого повторяем вычисления, о которых мы говорили выше при выводе функции  $\Psi$ , и получаем выражение для  $dN$  вида (3.3.25), в котором безразмерный множитель, зависящий от  $\Delta$  и  $\Omega$ , и называем функцией  $\xi$ .

Эта функция приведена на наших графиках для двух случаев:  $P=0$  (рис. 10) и  $P=\epsilon/3$  (рис. 11). Она меняется в широких пределах, поэтому для каждого случая приводится отдельно график, выполненный в большом масштабе (рис. 12, 13), на котором удобно считать значения  $\xi$  при малых  $|\xi-1| < 1$ . По смыслу поправки ясно, что при  $\Delta \rightarrow 0$   $\xi \rightarrow 1$  при любых  $\Omega$ . При малых  $\Omega$  значения  $\xi$  достигают величин, во много раз превышающих единицу.

Переходя к переменной  $z$  вместо  $\Delta$ , нужно дать новое определение «исправляющей» функции:

$$dN = n_0 \frac{4\pi c^3}{H_0^3} \xi'(z, \Omega) z^2 dz. \quad (3.3.25a)$$

Новая функция  $\xi'$  связана с  $\xi$  следующим образом:

$$\xi' z^2 dz = \xi \Delta^2 d\Delta,$$

поэтому

$$\xi' = (1-\Delta)^4 \xi = (1+z)^{-4} \xi.$$

Следовательно, чтобы использовать графики рис. 10—13, работая с  $z$  вместо  $\Delta$ , надо преобразовать как шкалу абсцисс, так и шкалу ординат, разделив функцию  $\xi$  на  $(1+z)^4$ , чтобы получить  $\xi'(z, \Omega)$ .

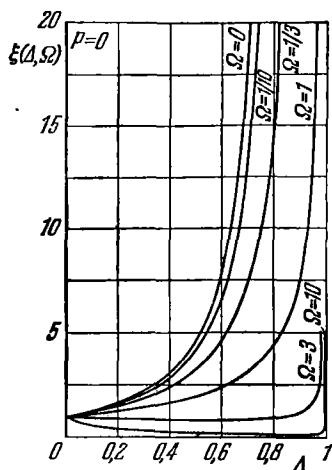


Рис. 10. Безразмерная поправка  $\xi(\Delta, \Omega)$  для количества материи в слое с данным красным смещением как функция  $\Delta$  для разных  $\Omega$  и  $P=0$ .

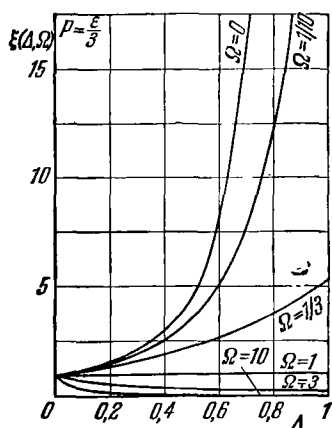


Рис. 11. То же, что и на рис. 10, но при  $P=\epsilon/3$ .

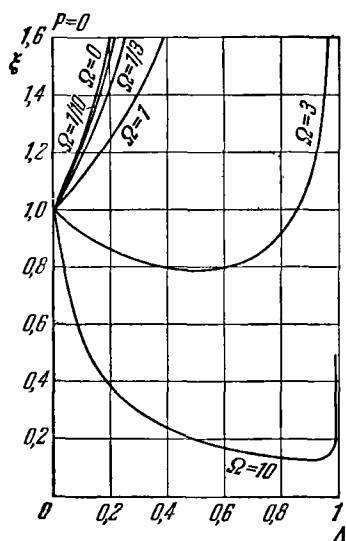


Рис. 12. То же, что на рис. 10, но в увеличенном масштабе.

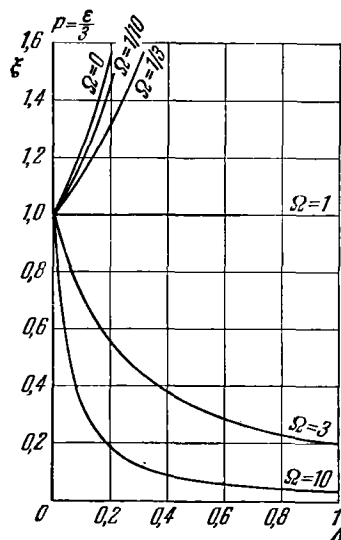


Рис. 13. То же, что на рис. 11, но в увеличенном масштабе.

Качественно поведение  $\xi$  отлично от поведения  $\xi'$ :  $\xi'$  всегда и везде имеет отрицательную производную,  $\frac{\partial \xi'}{\partial z} < 0$ , так что  $\xi'$  всегда падает. При малых  $z$  в обоих случаях ( $P=0$ ,  $P=\epsilon/3$ )

$$\xi' = 1 - 2z(1 + \Omega).$$

При  $\Omega=0$  (модель Милна) имеют место простые формулы:

$$\xi = \frac{(2-\Delta)^2}{4(1-\Delta)^3}, \quad (3.3.26)$$

$$\xi' = \frac{(1+z)(2+z)^2}{4(1+z)^4}. \quad (3.3.26a)$$

При  $P=0$  и  $\Delta \rightarrow 1$   $\xi \rightarrow \infty$  при любых  $\Omega$ , как видно из приведенных рисунков. Резкая зависимость  $\xi$  от  $\Omega$  будет, возможно, полезна для наблюдательного определения величины  $\Omega$  (см. по этому поводу §§ 9 и 10 этой главы). Через функцию  $\xi$  выражается также распределение объектов по наблюдаемой величине, которым мы займемся ниже, в § 5.

При практическом применении формулы (3.3.25) часто делается предположение, что число наблюдаемых объектов определенного типа, например число галактик в данном слое, пропорционально общему числу нуклонов в этом слое. В случае  $P=0$  это предположение соответствует утверждению, что число галактик пропорционально общей массе вещества в данном слое.

Случай  $P = \frac{\epsilon}{3} = \frac{\rho c^2}{3}$  означает, что в общей плотности  $\rho$  главную часть составляют кванты и нейтрино, а плотность обычного вещества, из которого состоят звезды, составляет малую долю  $\rho$ . Эта доля к тому же переменная, так как в ходе расширения происходит изменение энергии квантов и нейтрино; поэтому по закону адиабатического расширения вещества с  $P = \frac{\rho c^2}{3}$  плотность нуклонов

$$n = \text{const} \cdot \rho^{3/4}. \quad (3.3.27)$$

В этом случае естественно предположение, что плотность галактик (или других объектов) пропорциональна именно  $n$ , а не  $\rho$ . Поправочная функция  $\xi$  дается для  $dN$  и  $n$ , а не для  $dM$  и  $\rho$ .

Для справок приводим общие формулы (к сожалению, весьма громоздкие и неудобные), а также некоторые частные случаи.

а) Случай  $P=0$ :

$$\xi = \frac{4 [2(\Omega-1)\Delta + (\Omega-2)(k-1)]^2}{\Omega^4 \Delta^2 k}, \quad (3.3.28)$$

где  $k = \sqrt{1 + (\Omega-2)\Delta - (\Omega-1)\Delta^3}$ ;

$$\xi' = \frac{4[\Omega z + (\Omega-2)(\sqrt{1+\Omega z} - 1)]^2}{\Omega^4 z^2 (1+z)^3 \sqrt{1+\Omega z}}. \quad (3.3.28a)$$



Асимптотические формулы для этого случая имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 1 + \Delta (2 - \Omega) \quad \text{при } \Delta \ll 1; \\ \xi &= \frac{4}{\Omega^{3/2} \sqrt{1 - \Delta}} \quad \text{при } 1 - \Delta \ll 1; \end{aligned} \right\} \quad (3.3.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= 1 - z (2 + \Omega) \quad \text{при } z \ll 1; \\ \xi' &= 4\Omega^{-3/2} z^{-7/2} \quad \text{при } z \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.29a)$$

Для частного случая  $\Omega=0$  нами уже получены формулы (3.3.26).  
При  $\Omega=1$

$$\xi = \frac{4(2 - \Delta - 2\sqrt{1 - \Delta})}{\Delta^2 \sqrt{1 - \Delta}}, \quad (3.3.30)$$

$$\xi' = \frac{4(2 + z - 2\sqrt{1 + z})\sqrt{1 + z}}{z^2(1 + z)^3}. \quad (3.3.30a)$$

б) Случай  $P=e/3$ :

$$\xi = \frac{1}{\Delta^2 \Omega^2 \sqrt{\Omega - (\Omega - 1)(1 - \Delta)^2}} \{1 - \Delta - \sqrt{\Omega - (\Omega - 1)(1 - \Delta)^2}\}^2, \quad (3.3.31)$$

$$\xi' = \frac{1}{\Omega^2 z \sqrt{1 + \Omega z(z + 2)}} [1 - \sqrt{1 + \Omega z(z + 2)}]^2 (1 + z)^2; \quad (3.3.31a)$$

асимптотические формулы следующие:

$$\xi = 1 + 2\Delta(1 - \Omega) \quad \text{при } \Delta \ll 1; \quad (3.3.32)$$

$$\xi' = 1 - 2z(1 + \Omega) \quad \text{при } z \ll 1; \quad (3.3.32a)$$

$$\xi = \frac{1}{\Omega^{3/2}} \quad \text{при } 1 - \Delta \ll 1; \quad (3.3.33)$$

$$\xi' = \frac{\Omega^{-3/2}}{z^4} \quad \text{при } z \gg 1. \quad (3.3.33a)$$

Для частного случая  $\Omega=1$   $\xi=1$  (тождественно при всех  $\Delta$ ).

Функция  $\xi$ , характеризующая распределение вещества по слоям, просто связана с функцией  $g(\Omega)$  (см. выше, § 2 этой главы), дающей общее количество вещества внутри горизонта:

$$g(\Omega) = 3 \int_0^1 \xi(\Delta, \Omega) \Delta^2 d\Delta = 3 \int_0^\infty \xi'(z, \Omega) z^2 dz. \quad (3.3.34)$$

При  $P=0$  и  $\Delta \rightarrow 1$   $\xi \rightarrow \infty$ , но так, что интеграл (3.3.34) сходится (за исключением случая, когда  $\Omega=0$ ).

Дадим, наконец, еще одну формулу для случая  $P=0$  (вывод этой формулы см. далее, в § 4):

$$H_0 dt = \frac{dz}{(1+z)^2 \sqrt{1 + \Omega z}} = \sqrt{\frac{1 - \Delta}{1 + (\Omega - 1)\Delta}} d\Delta. \quad (3.3.35)$$

Хотя сама величина  $dt$  и не является наблюдаемой, но она входит в выражения для таких наблюдаемых величин, как оптическая толщина, полное излучение из слоя с  $\Delta$  (или  $z$ ), меняющимся в заданных пределах, и т. п.

#### § 4. Рабочие формулы с параметром $z$

В этом параграфе мы получим формулы, которые обычно непосредственно используются для обработки наблюдательных данных. Считают, что в настоящую эпоху и в прошлом, когда существовали отдельные объекты (галактики, квазары и пр.), давлением  $P$  можно пренебречь по сравнению с плотностью  $\rho$ . Мы увидим далее, в гл. 5, что это действительно справедливо. Перепишем формулы (2.1.8) и (2.1.10), используя обозначение  $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ :

$$\frac{dH(t)}{dt} + H^2(t) = -\frac{4\pi G\rho(t)}{3}, \quad \frac{d\rho(t)}{dt} = -3\rho(t)H(t). \quad (3.4.1)$$

Поделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{dH(t)}{d\rho(t)} = \frac{4\pi G\rho(t) + 3H^2(t)}{9\rho(t)H(t)}. \quad (3.4.2)$$

Удобно ввести новые переменные  $h = h(t) = \frac{H(t)}{H_0}$  и

$$(1+z)^3 = \frac{\rho(t)}{\rho_0} = \frac{\rho(t)}{\rho_c} \frac{\rho_c}{\rho_0} = \frac{8\pi G\rho(t)}{3H_0^2\Omega}.$$

В этих переменных после несложных преобразований получим

$$\frac{dh}{dz} = \frac{h}{1+z} + \frac{\Omega(1+z)^2}{2h}. \quad (3.4.3)$$

Удобство безразмерных переменных  $h$  и  $z$  и параметра  $\Omega$  проявляется при решении задачи о прошлом Вселенной, когда известны параметры современного ее состояния  $H_0$  и  $\rho_0$ . Из этих параметров находится единственный безразмерный параметр  $\Omega$ , который входит в уравнение (3.4.3). Начальные условия суть тождества: по определению  $z=0$  и  $h=1$  в настоящий момент. Уравнение легко интегрируется — переменные разделяются после подстановки

$$\psi^* = h^2(1+z)^{-3}. \quad (3.4.4)$$

Приводим сразу решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$h^2 = (1+z)^2(1+\Omega z). \quad (3.4.5)$$

В этой форме решение можно было получить прямо из уравнения «энергии» (2.1.9). Выразим все величины через  $z$ .

Из уравнения (3.4.1) для  $\rho(t)$  получим \*)

$$\frac{d(1+z)^3}{dt} = -3H_0 h (1+z)^3, \quad H_0 dt = -h \frac{dz}{1+z}. \quad (3.4.6)$$

Подставляя сюда выражение  $h$ , имеем

$$H_0 dt = -\frac{dz}{(1+z)^3 \sqrt{1+\Omega z}}. \quad (3.4.7)$$

В ряде важных вопросов достаточно знать это дифференциальное выражение. Пусть, например, интенсивность какого-то процесса (условно — образование некоего вещества  $x$ ) считается известной как функция плотности вещества и температуры во Вселенной:

$$\frac{dx}{dt} = Q(\rho, T), \quad x = \int Q dt. \quad (3.4.8)$$

Нет надобности вычислять  $\rho(t)$  и  $T(t)$  для того, чтобы взять интеграл. Удобнее воспользоваться  $z$  как переменной интегрирования. Средняя плотность просто выражается через  $z$  (из определения  $z$  в начале данного параграфа):  $\rho = \rho_0(1+z)^3$ . Как мы увидим в следующем разделе, температура реликтового излучения меняется по закону  $T = T_0(1+z)$ , так что легко написать  $Q(\rho, T) = Q(z)$ . Формула (3.4.7) позволит перейти к  $z$  как переменной интегрирования:

$$x = \int Q(z) \left( \frac{dt}{dz} \right) dz = \frac{1}{H_0} \int \frac{Q(z) dz}{(1+z)^2 \sqrt{1+\Omega z}}, \quad (3.4.9)$$

причем (как уже не раз напоминалось)  $H_0$  и  $\Omega$  суть константы, сегодняшние значения. В дальнейшем при решении многих конкретных вопросов (излучение газа, поглощение излучения, рост возмущений однородности) будет широко использоваться именно  $z$  как параметр, заменяющий время  $t$ .

С помощью (3.4.7) нетрудно найти и  $t$ . При этом время  $t$ , отсчитанное от сингулярности ( $z = \infty$ ,  $t = 0$ ), получится при подстановке соответствующего предела:

$$t = H_0^{-1} \int_z^{\infty} \frac{dz}{(1+z)^2 \sqrt{1+\Omega z}}. \quad (3.4.10)$$

---

\*) Это уравнение следует и прямо из связи между масштабом, красным смещением и постоянной Хаббла:

$$a(t) = \frac{a_0}{1+z}, \quad \frac{da(t)}{dt} = -H(t) a(t) = -h H_0 a(t).$$

Этот интеграл берется точно, аналитически:

$$t = \frac{H_0^{-1}}{1-\Omega} \left[ \frac{\sqrt{1+\Omega z}}{1+z} + \begin{cases} \frac{\Omega}{2\sqrt{1-\Omega}} \ln \frac{\sqrt{1+\Omega z} - \sqrt{1-\Omega}}{\sqrt{1+\Omega z} + \sqrt{1-\Omega}}, & \Omega < 1. \\ \frac{\Omega}{\sqrt{1-\Omega}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1+\Omega z}}{\sqrt{\Omega-1}} \right) - \frac{\Omega\pi}{2\sqrt{1-\Omega}}, & \Omega > 1. \end{cases} \right] \quad (3.4.11)$$

При  $\Omega=1$

$$t = \frac{2}{3H_0(z+1)^{3/2}}. \quad (3.4.12)$$

В общем случае, при  $\Omega \neq 1$ ,  $\Omega \neq 0$ , обратить интеграл, т. е. выразить аналитической формулой  $z$  как функцию  $t$ , не удастся.

Значение интеграла при  $z=0$  (т. е. полный возраст Вселенной, выраженный через  $H_0$  и  $\Omega$ ) дано формулами (1.3.2) и (1.3.2п), там же (рис. 3) приведена кривая зависимости  $t(z=0) = \frac{1}{H_0} f(\Omega)$  от  $\Omega$ .

Асимптотику  $z \gg 1$ ,  $\Omega z \gg 1$  легко усмотреть из интеграла (3.4.10) [а не из выражения (3.4.11)]; получим

$$t = \frac{2}{3H_0 \sqrt{\Omega} z^{3/2}}. \quad (3.4.13)$$

Отсюда вытекают все общеизвестные следствия для асимптотики при малом  $t$  и большом  $z$ . Из (3.4.13), (3.4.5) и (3.4.1) имеем

$$H(t) = \frac{2}{3t}, \quad \rho(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (3.4.14)$$

Мгновенное значение  $\Omega(t)$  также легко выразить через  $z$  и сегодняшнее  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \Omega(t) = \Omega(z) &= \Omega \frac{\rho(t)}{\rho_0} \frac{H_0^2}{H^2(t)} = \frac{\Omega(1+z)^3}{h^2} = \\ &= \Omega \frac{(1+z)^3}{(1+z)^2(1+\Omega z)} = \frac{\Omega + \Omega z}{1 + \Omega z} = 1 - \frac{1-\Omega}{1 + \Omega z}. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Наглядно подтверждается, что все локальные свойства приближаются к свойствам плоского мира,  $\Omega(z) \rightarrow 1$ , при приближении к сингулярности, т. е. при росте  $\Omega z$ .

Наконец, параметр  $z$  удобен и для получения формул, относящихся к наблюдаемым величинам — угловому диаметру далеких тел и болометрическому расстоянию (без вывода эти формулы приведены выше, в § 3).

Прежде всего, через  $H_0$  и  $\Omega$  выражается сегодняшний радиус мира. Для определенности будем говорить об открытой модели,  $\Omega < 1$  (вычисления легко повторяются для закрытой модели,  $\Omega > 1$ ).

Итак, для  $\Omega < 1$  имеем в настоящее время [см. (2.2.2) и определение  $\Omega$ ]

$$a_0 = \frac{c}{H_0 \sqrt{1-\Omega}}, \quad (3.4.16)$$

а в произвольный момент

$$a(z) = \frac{a_0}{1+z} = \frac{c}{H_0(1+z)\sqrt{1-\Omega}}. \quad (3.4.17)$$

Выразим через  $z$  безразмерную сопутствующую координату  $r$  точки наблюдения, т. е. найдем  $r$  для галактики, имеющей красное смещение  $z$ . Из условия  $ds=0$  для света и  $ds^2=c^2dt^2-a^2dr^2$  находим

$$dr = -\frac{c dt}{a} = \frac{\sqrt{1-\Omega} dz}{(1+z)\sqrt{1+\Omega z}}.$$

Соответствующий интеграл берется в элементарных функциях:

$$r = \sqrt{1-\Omega} \int_0^z \frac{dz}{(1+z)\sqrt{1+\Omega z}} = -\ln \frac{\sqrt{1+\Omega z} - \sqrt{1-\Omega}}{\sqrt{1+\Omega z} + \sqrt{1-\Omega}} \Big|_0^z. \quad (3.4.18)$$

Видимая болометрическая (полная) светимость  $\tilde{E}_1$  источника определяется количеством энергии, проходящей через единицу поверхности приемника в единицу времени. Для источника с координатой  $r$  и абсолютной светимостью  $L$

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{(4\pi a_0^2 \operatorname{sh}^2 r)(1+z)^2}. \quad (3.4.19)$$

Множитель в первых скобках в знаменателе есть площадь сферы радиуса  $r$  в момент приема света  $t_0$  (т. е. площадь сферы, на которую растеклось излучение), второй множитель в знаменателе определяет уменьшение интенсивности света из-за красного смещения, причем один множитель  $(1+z)$  описывает уменьшение энергии каждого кванта, второй множитель  $(1+z)$  — уменьшение частоты прихода отдельных квантов к наблюдателю. Эту формулу можно также записать в виде

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi \bar{R}^2 (1+z)^4}. \quad (3.4.19a)$$

Такую форму записи можно интерпретировать следующим образом:  $4\pi \bar{R}^2$  в знаменателе входит, поскольку этой величине обратно пропорционален телесный угол, под которым виден источник; второй множитель  $((1+z)^4$  дает изменение яркости, так как яркость пропорциональна  $T^4$  (эта величина определяет энергию в единице телесного угла), а  $T \sim (1+z)$ .

Астрономы используют не величину  $\tilde{E}_1$ , а звездные величины  $m$  (десятичные логарифмы потока от объекта).

По определению

$$m = -2,5 \lg \tilde{E}_z + \text{const.} \quad (3.4.20)$$

Напомним, что светимость объекта  $L$  в астрономии характеризуется так называемой абсолютной звездной величиной. Абсолютной звездной величиной  $M$  объекта называется его видимая величина на расстоянии десяти парсек ( $= 3 \cdot 10^{19}$  см). Если учитывается энергия от источника во всем диапазоне длин волн, то говорят о болометрических звездных величинах.

Перейдем теперь в (3.4.19) к звездным величинам согласно (3.4.20). Подставим в это выражение (3.4.16), (3.4.18) и параметр ускорения  $q_0 = \Omega/2$  [см. (1.2.6)], получим

$$m_{\text{бол}} = 5 \lg \frac{1}{q_0} [q_0 z + (q_0 - 1) (\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1)] + C_1. \quad (3.4.21)$$

Величина  $C_1$  зависит только от абсолютной звездной величины источника  $M$  (или, что то же, от  $L$ ) и от  $H_0$ . Конкретно, используя определение  $M$ , получаем

$$C_1 = M \text{ (в момент испускания света)} - 45,06 - 5 \lg H_0. \quad (3.4.22)$$

где  $H_0$  выражено в  $\text{сек}^{-1}$ .

Формула (3.4.21) справедлива и для закрытой модели, т. е. когда  $\Omega > 1$ ,  $q_0 > 1/2$ . Эта изящная формула была получена Маттигом (1958) и используется для анализа соотношения звездная величина — красное смещение в космологии. В следующем параграфе мы получим другую формулу, пригодную для анализа объектов с небольшим красным смещением ( $z < 0,3$ ).

## § 5. Первое приближение и евклидово пространство

Выше мы систематически сравнивали общие результаты, полученные для различных космологических моделей, с простейшей классической картиной евклидовой Вселенной, в которой определено единственное элементарное понятие расстояния  $R$ , количество получаемого наблюдателем света от неподвижного источника убывает, как  $R^{-2}$ , объем растет, как  $R^3$ , а общая плотность вещества никак не влияет ни на структуру пространства, ни на наблюдаемые зависимости.

Точные формулы, относящиеся к теории расширяющейся Вселенной, зависят как от плотности материи, так и от ее уравнения состояния; в частности, выше давались формулы для  $P=0$  и  $P=\varepsilon/3$ .

Ясно, что при экспериментальном исследовании в первую очередь и с большей точностью будут получены данные в более близких к нам областях. Естественно при их обработке разложить теоретические формулы в ряд по возрастающим степеням  $\Delta$  или  $z$ . В этом ряду первый член обязательно должен совпадать с классической

картиной, а следующие члены представляют собой поправки к этой картине. При этом под классической картиной мы понимаем расширяющуюся Вселенную в ньютоновской теории, без каких-либо релятивистских эффектов.

Но поправки, зависящие от кривизны пространства, пропорциональны квадрату расстояния. Эти поправки должны быть пропорциональны плотности, а чтобы получить безразмерную величину, нужно взять комбинацию  $G\rho R^2/c^2$ . Расстояние пропорционально красному смещению, следовательно, указанные поправки порядка  $\Delta^2$ . Отсюда следует вывод, что формулы, в которые включены только члены первого порядка по  $\Delta$ , могут быть получены без учета кривизны пространства.

Рассмотрим картину движения в евклидовом пространстве и лабораторном времени, пользуясь ньютоновской теорией тяготения \*). Систему координат выбираем так, что наблюдатель находится в начале координат и покоится. За нуль времени берем сегодняшний момент (момент наблюдения), а не так, как выше, где принималось  $t=0$  в момент сингулярности  $r=\infty$ . Рассматриваем случай  $P=0$ . Для сегодняшнего момента, т. е. при  $t=0$ , имеем заданную постоянную во всем пространстве плотность вещества  $\rho_0$  и хаббловское поле скоростей  $u=H_0R$ .

Напишем гидродинамические уравнения неразрывности и движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\operatorname{div} \rho u = -3H\rho, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{G \frac{4\pi}{3} \rho R^3}{R^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.5.1)$$

и найдем первые члены разложения решения в ряд по малому  $t$ :

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 - \frac{1}{2} H_0^2 t^2 \rho_0, \\ u &= H_0 R - H_0^2 R t - \frac{4\pi}{3} G \rho_0 R t. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.2)$$

Вспоминая определения  $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$  и  $\Omega = \frac{\rho_0}{\rho_c}$ , последнюю формулу перепишем так:

$$u = H_0 R - H_0^2 \left(1 + \frac{\Omega}{2}\right) R t. \quad (3.5.3)$$

Рассмотрим распространение света и красное смещение. Уравнение луча, приходящего в начало координат в момент  $t=0$ , есть

$$R = -ct, \quad (3.5.4)$$

\*) Относительное различие между собственным временем и лабораторным временем тоже порядка  $\Delta^2$ , следовательно, в рассматриваемом приближении его можно не принимать во внимание точно так же как и кривизну пространства.

где  $R$  — расстояние тела от начала координат в момент испускания (в этот момент, очевидно,  $t < 0$ ).

Учтем сначала только красное смещение, связанное с доплер-эффектом движения источника света. Мы обозначим эту часть красного смещения через  $\Delta'$ .

Частота света  $\omega'$  в лабораторной системе, испущенного с частотой  $\omega_0$  частицей, движущейся со скоростью  $u$ , дается формулой специальной теории относительности:

$$1 - \Delta = \frac{\omega'}{\omega_0} = \frac{\sqrt{1-u/c}}{\sqrt{1+u/c}}. \quad (3.5.5)$$

Мы строим формулы, включающие поправки к классическим формулам порядка  $\Delta$ , но не более высокие. Поэтому и выражение  $\Delta$  разлагаем в ряд и оставляем только

$$1 - \Delta = 1 - \frac{u}{c} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{c} \right)^2, \quad \Delta' = \frac{u}{c} - \frac{1}{2} \left( \frac{u}{c} \right)^2. \quad (3.5.6)$$

Для получения полного красного смещения  $\Delta$  с нужной точностью теперь необходимо еще учесть изменение частоты света при его движении в поле тяжести от точки испускания  $R$  до начала координат:

$$\omega - \omega' = \frac{\varphi(R) - \varphi(0)}{c^2} \omega', \quad (3.5.7)$$

где  $\varphi$  — ньютоновский гравитационный потенциал.

Из уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho G \quad (3.5.8)$$

и из сферической симметрии задачи находим

$$\varphi = \text{const} + \frac{2\pi}{3} G\rho R^2. \quad (3.5.9)$$

В нашем приближении заменим  $\rho$  на  $\rho_0$ ,  $\omega'$  на  $\omega_0$  и найдем

$$\left. \begin{aligned} \omega - \omega' &= \frac{2\pi}{3c^2} G\rho_0 R^2 \omega_0, \\ \Delta &= \frac{u}{c} - \frac{1}{2} \left( \frac{u}{c} \right)^2 - \frac{2\pi}{3c^2} G\rho_0 R^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.10)$$

Подставим сюда выражение скорости (3.5.3) и выразим момент испускания через  $R$  с помощью (3.5.4). Подставляя затем выражение  $\rho_0 = \Omega \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ , получим окончательно в нужном приближении (опуская члены порядка  $R^3$  и выше):

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{H_0}{c} R + \frac{H_0^2}{c^2} \left( 1 + \frac{\Omega}{2} \right) R^2 - \frac{1}{2} \frac{H_0^2 R^2}{c^2} - \frac{H_0^2 \Omega}{c^2} \frac{1}{4} R^2 = \\ &= \frac{H_0}{c} R + \frac{H_0^2}{c^2} R^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\Omega}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.5.11)$$



Решая это уравнение с нужной точностью, получим

$$R = \frac{c}{H_0} \left[ \Delta - \left( \frac{1}{2} + \frac{\Omega}{4} \right) \Delta^2 \right], \quad (3.5.12)$$

$$R = \frac{c}{H_0} \left[ z - \left( \frac{3}{2} + \frac{\Omega}{4} \right) z^2 \right] \quad (3.5.12a)$$

и, соответственно, для момента испускания света, который придет в точку наблюдения (начало координат) с данным красным смещением в момент  $t=0$ :

$$t = -\frac{1}{H_0} \left[ \Delta - \left( \frac{1}{2} + \frac{\Omega}{4} \right) \Delta^2 \right], \quad (3.5.13)$$

$$t = -\frac{1}{H_0} \left[ z - \left( \frac{3}{2} + \frac{\Omega}{4} \right) z^2 \right]. \quad (3.5.13a)$$

Напомним, что  $R$  есть расстояние источника именно в момент  $t$  испускания света, который принят в момент  $t=0$  с красным смещением  $\Delta$  наблюдателем, находящимся в начале координат.

Выражение  $R$ , выведенное выше, совпадает с первыми двумя членами разложения в ряд по степеням  $\Delta$  общей формулы (3.3.9).

В нашем приближении — приближении евклидовой геометрии — расстояние имеет единственный смысл. В этой геометрии очевидным образом находится угловой размер источника, абсолютный размер которого равен  $l$ . Угловое расстояние — это и есть  $R$ , так что

$$\theta = \frac{l}{R} = \frac{lH_0}{c} \frac{1}{\Delta} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{\Omega}{4} \right) \Delta \right], \quad (3.5.14)$$

$$\theta = \frac{lH_0}{cz} \left[ 1 + \left( \frac{3}{2} + \frac{\Omega}{4} \right) z \right]. \quad (3.5.14a)$$

Поправка к элементарной формуле евклидовой геометрии  $\theta = \frac{lH_0}{c\Delta}$  (причем  $R = \frac{c\Delta}{H_0}$ ) связана только с поправками к линейной зависимости между расстоянием в момент испускания света и красным смещением.

Как было показано выше [см. (3.3.20)],

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi D^2} = \frac{L(1-\Delta)^2}{4\pi R^2},$$

откуда, разлагая в ряд и оставляя члены первого порядка по  $\Delta$ , найдем

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi (c/H_0)^2} \frac{1}{\Delta^2} \left[ 1 - \left( 3 - \frac{\Omega}{2} \right) \Delta \right], \quad (3.5.15)$$

$$D = \frac{R}{(1-\Delta)^2} = \frac{c}{H_0} \Delta \left[ 1 + \left( \frac{3}{2} - \frac{\Omega}{4} \right) \Delta \right], \quad (3.5.16)$$

$$D = \frac{cz}{H_0} \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} - \frac{\Omega}{4} \right) z \right]. \quad (3.5.16a)$$

Найдем выражение для массы  $\tilde{M}$ , заключенной внутри сферы радиуса  $R$  в момент испускания света. Подставляя  $t$  из (3.5.13) в (3.5.2), найдем

$$\rho = \rho_0 (1 + 3\Delta),$$

$$\tilde{M} = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \left( \frac{c}{H_0} \Delta \right)^3 \left[ 1 + \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \Omega \right) \Delta \right]. \quad (3.5.17)$$

Теперь легко найти производную

$$\frac{d\tilde{M}}{d\Delta} = 4\pi\rho_0 \left( \frac{c}{H_0} \Delta \right)^2 [1 + (2 - \Omega)\Delta] \frac{c}{H_0}. \quad (3.5.18)$$

Величина в квадратных скобках есть функция  $\xi(\Delta, \Omega)$  [см. (3.3.25)] или, точнее, первые два члена разложения ее в ряд Тейлора:

$$\xi = 1 + (2 - \Omega) \Delta. \quad (3.5.19)$$

Выведенные формулы дают все сведения, необходимые для обработки наблюдений при не слишком больших  $\Delta$  ( $\Delta < 0,3$ ).

Выше рассматривался только случай  $P=0$ . В случае произвольного давления гравитационное поле и ускорение силы тяжести зависят от комбинации  $\rho + \frac{3P}{c^2}$ , тогда как выражение критической плотности не изменяется. Поэтому при  $P \neq 0$  надо везде подставить вместо  $\Omega$  величину

$$\Omega' = \Omega \left( 1 + \frac{3P}{\rho c^2} \right). \quad (3.5.20)$$

В частности \*),  $\Omega' = 2\Omega$  при  $P = \frac{\rho c^2}{3}$ . [Если  $\Lambda \neq 0$ ,  $\Omega' = \Omega \left( \frac{1 + \Delta c^2}{4\pi G \rho} \right)$ ].

Соответственно и обработка наблюдений (для области  $\Delta < 0,3$ ) дает именно величину  $\Omega'$ : в сущности, мы измеряем ускорение силы тяжести. Если  $1 < \Omega' < 2$ , то для Вселенной, заполненной обычным веществом,  $P=0$ ,  $\Omega = \Omega' > 1$  и мир замкнут. Но для Вселенной, заполненной в основном квантами и нейтрино, в этом случае  $\Omega = \frac{\Omega'}{2} < 1$  и мир открыт.

В ряде книг и обзоров расширяющаяся Вселенная характеризуется двумя параметрами:

$$h_1 = \frac{\dot{l}_{ab}}{l_{ab}}, \quad h_2 = \frac{\ddot{l}_{ab}}{l_{ab}}, \quad (3.5.21)$$

где  $l_{ab}$  — расстояние между двумя точками среды.

---

\*) Легко проверить, что формулы, которые получаются при замене  $\Omega$  на  $\Omega' = 2\Omega$  в (3.5.12), (3.5.15), (3.5.16), (3.5.19), совпадают с первыми членами разложения в ряд (3.3.10), (3.3.31); см. также (3.3.32).

Так как расстояние между любой парой объектов пропорционально радиусу мира  $a(t)$ , то формулы (3.5.21) эквивалентны формулам

$$h_1 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad h_2 = \frac{\ddot{a}}{a}. \quad (3.5.22)$$

Константа  $h_1$  есть не что иное, как постоянная Хаббла,  $h_1 = H_0$ . Величина  $h_2$  зависит от плотности:

$$h_2 = -\frac{4\pi}{3} G\rho \left(1 + \frac{3P}{\rho c^2}\right). \quad (3.5.23)$$

Вместо  $h_2$  иногда вводят безразмерный коэффициент ускорения [см. (1.2.6)], который можно выразить через  $\Omega$ :

$$q_0 = -\frac{h_2}{h_1^2} = \frac{1}{2} \Omega \left(1 + \frac{3P}{\rho c^2}\right) = \frac{\Omega'}{2}. \quad (8.5.24)$$

Итак, в случае  $P=0$  критическое значение  $q_0=1/2$  отделяет замкнутый мир (при  $q_0 > 1/2$ ) от открытого ( $0 < q_0 < 1/2$ ). В случае  $P=\varepsilon/3$  критическое значение  $q_0=1$ . Вывод из рассуждений данного параграфа заключается в том, что формулы, линейные по  $q_0$  и содержащие поправки порядка  $\Delta$  (но не  $\Delta^2$ ), не содержат эффектов кривизны пространства и могут быть последовательно выведены в евклидовом пространстве с помощью ньютоновской теории тяготения (с учетом гравитационного изменения частоты кванта и точной формулы доплер-эффекта).

В заключение параграфа перепишем формулу (3.5.15) в виде, привычном для астрономов, т. е. перейдем к звездным величинам  $z$  и параметру  $q_0$ :

$$m_{\text{бол}} = 5 \lg z + 1,086 (1 - q_0) z + C_1, \quad (3.5.25)$$

где выражение для  $C_1$  дается формулой (3.4.22). Формула (3.5.25) справедлива для  $z < 0,3$ . Она была получена Гекманом (1942), Робертсоном (1955), Мак-Витти (1956).

## § 6. Распределение по видимым величинам

В классическом случае, когда можно не учитывать кривизну пространства, влияние красного смещения на яркость и эволюционный эффект, получаются общеизвестные четкие зависимости для распределения объектов данного типа по видимой величине.

Рассмотрим объекты с абсолютной светимостью  $L$ . Плотность распределения таких объектов в пространстве обозначим  $n$ . Количество света, получаемое наблюдателем от каждого объекта, находящегося на расстоянии  $R$ ,

$$\bar{E}_1 = \frac{L}{4\pi R^2}, \quad (3.6.1)$$

так что

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\tilde{E}_1}}. \quad (3.6.2)$$

Число объектов внутри шара радиуса  $R$ , дающих световой поток больше  $\tilde{E}_1$ , равно

$$N = \frac{4\pi}{3} R^3 n = \text{const} \cdot n L^{3/2} \tilde{E}_1^{-3/2}. \quad (3.6.3)$$

Соответствующий дифференциальный закон:

$$dN = \text{const} \cdot \tilde{E}_1^{-3/2} d\tilde{E}_1. \quad (3.6.4)$$

Пользуясь величиной  $m$  (3.4.20), найдем

$$dN = \text{const} \cdot 10^{0.6m} dm. \quad (3.6.5)$$

Хорошо известно, что при наличии объектов разных типов (светимостей) этот закон не изменяется. Для дальнейшего полезно привести элементарное доказательство. Пусть в элементе объема имеется определенное распределение объектов по абсолютной величине или, что то же, по светимости. Именно, пусть число объектов со светимостью между  $L$  и  $L+dL$  есть

$$dn = n_0 W(L) dL. \quad (3.6.6)$$

Распределение нормировано на единицу,  $\int_0^\infty W(L) dL = 1$ , так что  $W(L) dL$  есть доля объектов с данным  $L$  в интервале  $dL$ , а общая их плотность равна  $n_0$ . Для каждой группы объектов светимостью между  $L$  и  $L+dL$ , находящихся на разных расстояниях и потому дающих разное  $\tilde{E}_1$ , получим

$$d_2 N = \text{const} \cdot W(L) L^{3/2} \tilde{E}_1^{-3/2} dL d\tilde{E}_1. \quad (3.6.7)$$

Знак  $d_2$  означает, что справа стоят два дифференциала  $dL d\tilde{E}_1$ .

Интегрирование по  $dL$  можно выполнить отдельно; получим

$$dN = A \tilde{E}_1^{-3/2} d\tilde{E}_1, \quad (3.6.8)$$

где

$$A = \text{const} \cdot n_0 \int_0^\infty L^{3/2} W(L) dL. \quad (3.6.9)$$

Таким образом, закон распределения объектов по видимой величине,  $\frac{dN}{d\tilde{E}_1}$ , не изменился, только вместо одинаковой светимости всех объектов  $L$  в (3.6.3) теперь вошла величина  $A$ , определенным образом взвешенная по распределению  $W(L)$ . Это взвешивание

несколько отличается от того выражения, которое дает полное количество света, испускаемого единицей объема \*).

В расширяющейся Вселенной для объектов данной абсолютной величины получается более сложный закон, так как видимая и абсолютная величины и число объектов в данной сфере связаны сложными, не степенными зависимостями. Кроме того, при больших расстояниях велико время распространения света от момента испускания до наблюдения. Поэтому надо учесть и эволюционный эффект, т. е. изменение распределения объектов по абсолютной величине со временем. Общие формулы чрезвычайно громоздки и необозримы. Приведем лишь формулу второго приближения, которая может быть получена методом, подобным описанному выше, в предыдущем параграфе, из рассмотрения ускоренного (точнее, замедленного) движения объектов в плоском пространстве. В соответствии со сказанным выше ограничимся везде поправками первого порядка по  $\Delta$ . Распределение объектов по светимости характеризуем функцией

$$dn = n_1(t) W(L, t) dL. \quad (3.6.10)$$

Здесь  $t$  отсчитывается от сегодняшнего дня, так что в момент испускания  $t = -R/c$ ,  $n_1$  — общая плотность всех объектов в единице евклидова (не сопутствующего!) пространства. Предполагая, что источники (галактики) не возникают и не уничтожаются, примем, что [см. (3.5.2)]

$$n_1 = n_0(1 - 3Ht). \quad (3.6.11)$$

При этом учет эволюционного эффекта полностью связан с зависимостью  $W$  от времени. Наконец, видимая звездная величина (или, что то же,  $\tilde{E}_1$ ) связана со светимостью  $L$  выражением, учитывающим влияние красного смещения [см. (3.4.19a)]:

$$\tilde{E}_1 = \text{const} \cdot L \frac{(1 - \Delta)^4}{R^2}, \quad (3.6.12)$$

$$\cdot \quad \tilde{E}_1 = \text{const} \cdot \frac{L}{R^2(1 + z)^4}. \quad (3.6.12a)$$

Четвертая степень  $(1 - \Delta)$  получается при рассмотрении болометрической величины. На практике обычно измеряется энергия лишь в определенном интервале длин волн, к которым чувствителен приемник. При этом в формулу войдет  $(1 - \Delta)^v$  ( $v = 3 - n$ ), где спектральный поток можно приближенно описать формулой  $F \sim \omega^n d\omega$  [см.

---

\*) Последнее равно, очевидно,  $n_0 \int L W(L) dL$ .

выше (3.3.16)] \*). Выразив  $R$  через  $\Delta$  (см. § 5 гл. 6), получим

$$\tilde{E}_1 = \tilde{a}L \frac{(1-\Delta)^v}{\Delta^2 [1-\Delta(1+\Omega'/2)]}, \quad (3.6.13)$$

где  $\tilde{a}$  — некоторая константа,

$$\tilde{E}_1 = \tilde{a}L \frac{(1+z)^{3-v}}{z^2 \left(1 - \frac{\Omega'}{2} z\right)}. \quad (3.6.13a)$$

Поскольку весь расчет ведется с точностью до поправок порядка  $\Delta$ , то

$$\tilde{E}_1 = \tilde{a}L \frac{1}{\Delta^2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{\Omega'}{2} - v \right) \Delta \right], \quad (3.6.14)$$

$$\tilde{E}_1 = \tilde{a}L \frac{1}{z^2} \left[ 1 + \left( 3 + \frac{\Omega'}{2} - v \right) z \right], \quad (3.6.14a)$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{\tilde{a}L}{\tilde{E}_1}} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{\Omega'}{4} - \frac{v}{2} \right) \sqrt{\frac{\tilde{a}L}{\tilde{E}_1}} \right], \quad (3.6.15)$$

$$z = \sqrt{\frac{\tilde{a}L}{\tilde{E}_1}} \left[ 1 + \left( \frac{3}{2} + \frac{\Omega'}{4} - \frac{v}{2} \right) \sqrt{\frac{\tilde{a}L}{\tilde{E}_1}} \right]. \quad (3.6.15a)$$

Найдем число объектов, расположенных в слое с красным смещением от  $\Delta$  до  $\Delta + d\Delta$  и дающих поток света от  $\tilde{E}_1$  до  $\tilde{E}_1 + d\tilde{E}_1$ . Используя выражение (3.5.18), получим

$$d_{\Delta} N = \text{const} \cdot n_0 \Delta^2 [1 + \Delta (2 - \Omega')] W(L, t) \left( \frac{\partial L}{\partial \tilde{E}_1} \right)_{\Delta} d\Delta d\tilde{E}_1, \quad (3.6.16)$$

$$d_{\Delta} N = \text{const} \cdot n_0 z^2 [1 - (2 + \Omega') z] W(L, t) \left( \frac{\partial L}{\partial \tilde{E}_1} \right)_z dz d\tilde{E}_1. \quad (3.6.16a)$$

Считая  $\Delta$ , а значит, и  $t = -\Delta/H$  малым, разложим  $W(L, t)$  в ряд:

$$W(L, t) = W(L, 0) - \frac{\Delta}{H} \dot{W}(L, 0), \quad (3.6.17)$$

где  $\dot{W} = \frac{dW}{dt}$ . Имея выражение (3.6.15)  $\Delta$  через  $L$  и  $\tilde{E}_1$ , заменим  $d\Delta$  на  $\frac{d\Delta}{dL}$  и проведем интегрирование в (3.6.16) по  $dL$  при постоянном

\*) Применяя формулу Планка, найдем, что для узкой спектральной полосы с  $\hbar\omega/kT > 3$  с хорошей точностью  $n = 3 - \hbar\omega/kT$ ,  $v = \hbar\omega/kT$ , где  $\hbar\omega$  — энергия кванта,  $k$  — постоянная Больцмана.

$\bar{E}_1$ . В результате получим

$$dN = \text{const} \cdot \bar{E}_1^{-3/2} d\bar{E}_1 \left\{ \int_0^\infty W(L, 0) L^{1/2} dL + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{a}{\bar{E}_1}} \left[ (4-2\nu) \int_0^\infty W(L, 0) L^2 dL - \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \dot{W}(L, 0) L^2 dL \right] \right\}. \quad (3.6.18)$$

Изучение близких галактик позволяет найти их распределение по светимостям  $W(L, 0)$  для настоящего времени ( $t=0$ ). Величина  $\nu$  может быть найдена из распределения интенсивности в спектре источника и спектральной чувствительности регистрирующего прибора.

Формула (3.6.18) является решением поставленной проблемы: она описывает распределение объектов в зависимости от потока излучения от них  $\bar{E}_1$  (или, что то же, от их видимой звездной величины). Этот результат можно записать в других, более наглядных формах.

Мы уже раньше предполагали, что эволюционный эффект, т. е. изменение со временем функции  $W(L, t)$ , зависит не от рождения или исчезновения новых объектов, а исключительно от изменения их абсолютной величины.

Пусть светимость отдельного объекта в зависимости от времени подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{dL}{dt} = f(L, t) = k(L, t) L. \quad (3.6.19)$$

Функция  $f$  переписана через  $k$  для удобства дальнейшего использования.

Из (3.6.19), очевидно, следует:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial W}{\partial L} W f. \quad (3.6.20)$$

Это уравнение выражает закон сохранения объектов, движущихся со скоростью  $f$  вдоль оси  $L$ .

Подставим выражение  $\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial t}$  в интеграл в формуле (3.6.18); интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^\infty \dot{W} L^2 dL = 2 \int_0^\infty L f(L, 0) W(L, 0) dL. \quad (3.6.21)$$

Для частного случая одинаковых, синхронно эволюционирующих объектов можно написать

$$W(L, t) = \delta(L - L_0(t)),$$

$$\frac{dL_0}{dt} = f_0 = kL_0. \quad (3.6.22)$$

Теперь из (3.6.18) находим

$$dN = \text{const} \cdot \bar{E}_1^{-5/2} d\bar{E}_1 L^{3/2} \left[ 1 + \sqrt{\frac{\bar{a}L_0}{\bar{E}_1}} \left( 4 - 2\nu - \frac{2k}{H_0} \right) \right]. \quad (3.6.23)$$

Здесь  $k = \frac{d \ln L_0}{dt}$  — величина, характеризующая эволюцию объектов. По всей вероятности, она отрицательна, как это следует из расчетов [см. Тинсли (1968, 1972), Тинсли и Спинард (1971), Сэндидж (1970), Спинард и Тейлор (1971)]. Константа  $k$  имеет размерность  $\text{сек}^{-1}$ , т. е. такую же, как и постоянная Хаббла  $H_0$ . Константа  $\bar{a}$  имеет размерность обратного квадрата расстояния,  $\bar{a} = \frac{H_0^2}{4\pi c^2}$ , и корень в (3.6.23) можно написать в виде

$$\sqrt{\frac{\bar{a}L_0}{\bar{E}_1}} = \sqrt{\frac{\bar{E}_0}{\bar{E}_1}}, \quad (3.6.24)$$

где  $\bar{E}_0 \equiv \bar{a}L_0$  — это поток, который дал бы в точке наблюдения покоящийся источник  $L_0$ , находящийся на характерном расстоянии  $c/H_0$  от приемника в евклидовом пространстве. Общую формулу (3.6.18) можно привести к виду, аналогичному (3.6.23).

Определим средневзвешенные по распределению величины  $\bar{L}$  и  $\bar{k}$  с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\bar{L}} &= \frac{\int_0^\infty W(L, 0) L^2 dL}{\int_0^\infty W(L, 0) L^{3/2} dL}, \\ \bar{k} &= \frac{\int_0^\infty \dot{W}(L, 0) W(L, 0) L^2 dL}{\int_0^\infty W(L, 0) L^2 dL} = \frac{\int W \frac{dL}{dt} L dL}{\int W L^2 dL}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.25)$$

Определим, далее,  $\bar{E}_0$  как поток от источника мощностью  $\bar{L}$  на



расстоянии  $c/H_0$  в евклидовом пространстве:

$$\bar{\bar{E}}_0 = \frac{\bar{L}}{4\pi (c/H_0)^2}.$$

Получим

$$dN = \text{const} \cdot \bar{E}_1^{-3/2} d\bar{E}_1 \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\bar{\bar{E}}_0}{\bar{E}_1}} \left( 4 - 2\nu - \frac{2\bar{k}}{H_0} \right) \right\}. \quad (3.6.26)$$

В этом виде и надо формулу сравнивать с наблюдениями.

Практически надо взять из наблюдений величину  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{dN}{\bar{E}_1^{-3/2} d\bar{E}_1}.$$

Тогда из (3.6.26) следует, что

$$\varphi = \varphi_0 \left( 1 + S \sqrt{\frac{\bar{\bar{E}}_0}{\bar{E}_1}} \right). \quad (3.6.27)$$

Откладывая  $\varphi$  на графике в зависимости от  $1/\sqrt{\bar{E}_1}$ , определяем коэффициент

$$S = 4 - 2\nu - \frac{2\bar{k}}{H_0}.$$

Наблюдатели зачастую искали эмпирическую зависимость вида

$$dN = \text{const} \cdot \bar{E}_1^{-3/2-\mu} d\bar{E}_1 = \text{const} \cdot d(\bar{E}_1^{-3/2-\mu}),$$

т. е. пытались учесть для интегральной величины  $N$  отступления от закона  $3/2$  изменением показателя степени. Мак-Витти (1959б) показал, что должно быть  $\mu=0$ , и, действительно, формулы (3.6.26) и (3.6.27) показывают, что показатель степени  $\bar{E}_1$  измениться не может. При больших  $\bar{E}_1$ , т. е. на близких расстояниях, всегда показатель равен  $3/2$  для интегральной величины  $N$  и  $5/2$  для дифференциальной  $\frac{dN}{d\bar{E}}$ . Поправка носит характер разложения по степеням  $\frac{1}{\sqrt{\bar{E}_1}}$ , т. е. величины, пропорциональной расстоянию. Выражения (3.6.26) и (3.6.27) (о значении  $\nu$  см. примечание на стр. 89) могут быть полезны для обработки наблюдений.

Важнейшее качественное следствие проделанных расчетов заключается в том, что найденный выше первый член разложения по  $\Delta$  не содержит плотности  $\Omega'$  [соответствующая формула (137) и следующие формулы в обзоре Зельдовича (1965в) ошибочны].

Таким образом, исследования функции распределения объектов по видимой величине  $N(\bar{E}_1)$ , относящейся к близким объектам, могут быть полезны для характеристики эволюции объектов в недалеком прошлом и для проверки основного предположения об однородном (хотя бы в среднем) распределении вещества в пространстве.

## § 7. О возможности определения космологической модели по наблюдениям далеких объектов

В формулы, связывающие абсолютную мощность источника и принимаемый на Земле поток, входят величины  $H$  и  $\Omega$ , определяющие космологическую модель. Эти же величины входят в выражение для числа далеких источников с данным красным смещением и (или) с данным принимаемым потоком; в это выражение входит также, очевидно, множителем плотность источников в единице объема сопутствующего пространства. При больших  $z$  существенно сказывается неевклидовость пространства, следовательно, влияние  $\Omega$  на результаты велико. Если значительная часть вещества представляет собой полностью ионизованный газ, велико также влияние рассеяния электромагнитных волн на свободных электронах. Все это надо учитывать при обработке наблюдений.

Можно ли на основе наблюдений получить сведения о космологических величинах?

Очевидно, это возможно, если известна абсолютная мощность источника или если известна плотность источников. В ряде работ рассчитаны зависимости, на основе которых это можно сделать; такие зависимости приведены в предыдущих параграфах этой главы. Однако наиболее трудная часть вопроса заключается как раз в том, чтобы получить необходимые исходные данные об источниках. Звезды главной последовательности представляют собой тот единственный тип источников, для которых физическая теория дает вполне определенные выводы о связи спектра с абсолютной мощностью. Примером звезд, для которых эмпирически и теоретически установлена определенная связь между периодом и мощностью, являются цефеиды. Но цефеиды не видны в далеких галактиках, а для получения надежных данных, естественно, нужны далекие объекты с большим  $z$ . С больших расстояний мы видим только галактики как целое (или квазары) и не в состоянии различать отдельные объекты или структурные образования в них. Но относительно квазаров или радиогалактик — объектов, наблюдаемых на наибольших расстояниях, — надежных методов определения абсолютной мощности нет.

В § 9 мы коротко остановимся на способах определения абсолютной мощности излучения обычных галактик и — с их помощью — параметров космологической модели. В данном параграфе мы рассмотрим принципиальный вопрос о влиянии эволюции источников на способы определения параметров космологической модели. Речь будет идти главным образом о способах определения параметров модели по подсчетам радиоисточников. Длительное время с этими способами космологи связывали большие надежды.

Можно ли определить космологическую модель при наличии эволюции источников? Ниже мы покажем, что если не известна эволюция источников из независимых соображений, то это принципи-

ально невозможно. Любая модель, т. е. любые значения  $H_0$  и  $\Omega$ , совместима с любыми наблюдательными данными по статистике источников, если никак не ограничивать закон эволюции источников. Следовательно, никакие данные по статистике сами по себе (без знания эволюции) не позволяют определить  $H_0$  и  $\Omega$ . Поскольку  $H_0$  можно считать известным с точностью порядка  $\pm 50\%$ , практически речь идет об определении  $\Omega$ . В оценке  $\Omega$  неопределенность достигает более сотни ( $5 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3 < \rho_0 < 5 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$ , т. е.  $0,01 < \Omega < 5$ ). Различия в точности определения  $H_0$  и  $\Omega$  объясняются ниже. Учет рассеяния света электронами ничего не меняет. Всякое утверждение, относящееся к величине  $\Omega$ , полученное обработкой статистических данных и сопоставлением их с формулами релятивистской космологии, в действительности, явно или неявно, основано на тех или иных предположениях, касающихся эволюции; достоверность получаемых значений не больше достоверности эволюционных предположений.

Рассмотрим вопрос в самом общем виде. Обозначим через  $P$  абсолютную мощность излучения источника. Пусть  $\rho(P, t)$  есть функция плотности источников; число источников с мощностью между  $P$  и  $P+dP$  в единице сопутствующего объема дается выражением  $dn = \rho(P, t)dP$ . Мы используем здесь букву  $P$  для характеристики светимости источников, чтобы подчеркнуть, что речь идет не обязательно об интегральной светимости  $L$ ; так, например, можно говорить о радиосветимости, которая обычно и обозначается через  $P$ . Релятивистская космология дает нам, во-первых, связь между  $t$  и  $z$ , т. е.  $t = t(z, \Omega)$ , и, во-вторых, связь между принимаемым потоком  $S$  и мощностью:

$$S = P\psi_*(z, \Omega), \quad \text{или} \quad P = S\psi_*^{-1} = S\psi_*(z, \Omega). \quad (3.7.1)$$

Влияние электронного рассеяния заключено в функциях  $\varphi$  и  $\psi_*$ : если без рассеяния  $\varphi_* = \varphi_{*0}(z, \Omega)$ , то с учетом рассеяния  $\varphi_* = \varphi_{*0}e^{-\tau}$ , где  $\tau$  — оптическая толщина. В-третьих, известен сопутствующий объем, приходящийся на слой, в котором красное смещение меняется от  $z$  до  $z+dz$ , и на один стерадиан телесного угла:

$$dV = \chi(z, \Omega) dz. \quad (3.7.2)$$

Рассмотрим теперь число наблюдаемых объектов в одном стерадиане, для которых поток лежит между  $S$  и  $S+dS$ , а красное смещение между  $z+dz$  и  $z$ . Их мощность, очевидно, лежит в пределах между  $P = S\psi_*$  и  $P+dP = (S+dS)\psi_*$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} d^2N &= N''(S, z) dS dz = \rho(S\psi_*, t) \psi_* dS \chi dz = \\ &= \rho[S\psi_*(z, \Omega), t(z, \Omega)] \psi_*(z, \Omega) \chi(\Omega, z) dS dz. \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Итак, для любой функции  $N''(S, z)$ , полученной из наблюдений при любом значении  $\Omega$ , можно построить соответствующую

эволюционную функцию

$$\rho(P, t) = \frac{N''[P\varphi_*(z, \Omega), t(z, \Omega)]}{\psi_*[z(t), \Omega]\chi[z(t), \Omega]}, \quad (3.7.4)$$

и это показывает, что знание  $N''(S, z)$  не позволяет определить  $\Omega$  без фиксирования функции  $\rho$ , т. е. без знания эволюции источников. Наблюдения неидентифицированных оптических радиосточников (для них  $z$  неизвестно) дают распределение их по величине потока, т. е. функцию  $N'(S)$ :

$$dN = N'(S) dS = dS \int_0^\infty N''(S, z) dz. \quad (3.7.5)$$

Очевидно, что такие менее полные наблюдения тем более не дают оснований для определения  $\Omega$ . Статистические наблюдения дают сведения об эволюции радиосточников (см. § 8), но не о космологии в узком смысле этого слова.

Мы говорили в начале параграфа, что из наблюдений  $H_0$  вычисляется достаточно надежно, а  $\Omega$ , как показано выше, без знания эволюции вообще не определяется. Здесь мы покажем конкретно на формулах различие в вычислении  $H_0$  и  $\Omega$  (подробнее см. § 9). Предположим, что измерения для некоторых типов объектов в нашей окрестности дают определенное значение их мощности  $P$ . Мы можем допустить также, что величина  $P$  подвергается эволюционным изменениям,  $P = P(t)$ , причем представляется невероятным, что на сегодняшний день  $t = t_0$  в эволюции имеется сингулярная точка. Поэтому функция  $P(t)$  дается рядом

$$P = P_0 + (t - t_0) P'_0 + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 P''_0 + \dots, \quad (3.7.6)$$

не содержащим отрицательных и дробных степеней:  $P_0$  предполагается известной в противоположность  $P'_0$ ,  $P''_0$  и т. д. Космологическая модель дает нам связь между  $t - t_0$  и  $z$  (ср. § 5):

$$t - t_0 = -\frac{z}{H_0} + \left(\frac{3}{2} - \frac{\Omega}{4}\right) z^2 + \dots, \quad (3.7.7)$$

так что

$$P = P_0 - \frac{z}{H_0} P'_0 + z^2 (P''_0 + \Omega P'_0) + \dots \quad (3.7.8)$$

Теперь для вычисления наблюдаемого потока  $S$  мы должны вспомнить [см., например, (3.6.14a)], что

$$\varphi_*(z, \Omega) = \frac{H_0^2}{4\pi c^2 z^2} \left[ 1 - \left(1 - \frac{\Omega}{2}\right) z \right], \quad (3.7.9)$$

так что

$$S = \frac{P_0 H_0^2}{4\pi c^2 z^2} \left[ 1 - \left(1 - \frac{\Omega}{2} + \frac{1}{H_0} \frac{P'_0}{P_0}\right) z + \dots \right]. \quad (3.7.10)$$

Из (3.7.10) видно, что для определения  $H_0$  нужен только первый член разложения, плотность  $\Omega$  переплетается с плохо известной величиной  $P'_0$  (подробнее см. § 9).

Если принять, что эволюционного эффекта нет, т. е. положить  $\rho = \rho(P)$  (не зависит от  $t$ ), то получаются определенные функции  $N''(S, z, \Omega)$  и  $N'(S, \Omega)$ , зависящие только от  $\Omega$ . Вид функции  $\rho(P)$  можно получить исследованием близких объектов. Была надежда, что таким способом можно найти, хотя бы приближенно, величину  $\Omega$ . Очевидно, для этого необходимы объекты с достаточно большой мощностью излучения, поэтому одно время упомянутая надежда возлагалась на подсчеты радиоисточников. В действительности наблюдаемая функция  $N'(S)$  для радиоисточников оказалась несовместимой с функцией  $\rho(P)$ , не зависящей от времени, ни при каких предположениях об  $\Omega$  ( $0 < \Omega < \infty$ ).

Делались попытки задать форму эволюционной зависимости в каком-либо особо простом виде, например:  $\rho(P, t) = \rho_0(P)(t/t_0)^{-\beta}$  или

$$\rho[P, t(z)] = \rho_0(P)(1+z)^\beta. \quad (3.7.11)$$

Общая плотность материи в единице физического (не сопутствующего!) объема  $\rho_m \sim (1+z)^3$ . Значит, указанное предположение о радиогалактиках означает, что их плотность в единице физического объема равна

$$\rho_{\text{физ}} = \rho(1+z)^3 \sim (1+z)^{3+\beta} \sim \rho_m^{1+\frac{\beta}{3}}. \quad (3.7.12)$$

При этом предполагается, что вид распределения их по мощности [функция  $\rho_0(P)$ ] остается неизменным.

Делались также попытки представить простейшими зависимостями и  $\rho(P)$  на сегодняшний момент по наблюдениям ближайших источников. По наблюдаемой интегральной кривой  $N(S)$  определялись параметры, характеризующие эволюцию, а резкий завал этой кривой для малых  $S$  (см. следующий параграф) объяснялся рассеянием света на электронах межгалактической плазмы. Таким образом определялась концентрация электронов, а следовательно, и  $\Omega$ . Однако надо подчеркнуть иллюзорность такого подхода: форма кривой  $N(S)$  и, в частности, ее завал при малых  $S$  могут быть обусловлены не влиянием  $\Omega$  (через электронное рассеяние), а отклонением эволюционной кривой от простого степенного хода  $(1+z)^\beta$ , изменением распределения источников по мощности с течением времени \*) и другими причинами. При отсутствии полной теории, из которой следовала бы степенная зависимость  $(1+z)^\beta$ , нет никаких оснований считать, эту зависимость универсальной. Таким образом, следует подчерк-

---

\*) При этом  $\rho(P, t)$  нельзя уже представить как произведение двух функций  $\rho(P)f(t)$  или  $\rho(P)f(z)$ .

нуть, что только создание надежной теории эволюции источников, например эволюции тех или иных типов галактик, позволит по наблюдаемым зависимостям определить  $q_0$  и, следовательно, тип модели. Еще раз отметим, что значение  $q_0$  может быть найдено (в предположении  $\Lambda=0$ ) не из зависимостей  $m-z$  или  $N-z$ , а непосредственно — выявлением всех видов материи в ближайших окрестностях нашей Галактики (см. об этом далее).

Есть одно важное исключение из общего утверждения, что любую космологическую модель можно согласовать с любой наблюдаемой функцией  $N(S)$  за счет произвола в предположениях об эволюции.

Этим исключением является космологическая модель стационарной Вселенной (steady state theory на языке ее авторов). Эта теория подробно охарактеризована в § 10 гл. 23. Здесь достаточно сказать, что в теории предполагается неизменность всех свойств Вселенной и заполняющего ее вещества на всем бесконечном времени ее эволюции,  $-\infty < t < 0$ . В теории стационарной Вселенной исключена возможность эволюции (в среднем, за исключением неизбежных статистических флуктуаций) и предсказывается одна, вполне определенная функция  $N(S)$ . Вид ее зависит (впрочем, слабо) только от функции  $W(P)$  распределения источников по мощности, которую можно определить в нашей окрестности.

Наблюдения радиоисточников не согласуются с теорией стационарной Вселенной. Ниже будут указаны и другие трудности этой теории.

Именно острая дискуссия по поводу теории стационарной Вселенной вызвала особое внимание к подсчету радиоисточников, особенно в Англии (где эта теория создавалась и обсуждалась) в последние два десятилетия.

## § 8. Эволюция радиоисточников

Прежде чем обращаться к способам определения  $H_0$  и  $\Omega$  по наблюдению обычных галактик, закончим вопрос о том, что же дали подсчеты радиоисточников.

Систематические наблюдения, проведенные кембриджскими радиоастрономами, возглавляемыми Райлом, явились основой для теоретических исследований.

Как показано в предыдущем параграфе, данные наблюдений дают сведения о законе эволюции радиоисточников. Эти сведения неполны, поскольку интерпретация данных зависит от предположений, относящихся к космологии (значения  $H_0$ ,  $\Omega$ ). Приведем результаты работы Лонгейра (1966) — одной из работ этого направления.

Лонгейр принимает для расчетов модель плоского мира, т. е. случай критической плотности  $\Omega=1$ . При этом  $(1+z) \sim t^{-1/2}$ . Он задается различными вариантами закона эволюции. Удовлетворительное согласие с наблюдениями вплоть до достаточно малых

потоков  $S \cong 0,4 \cdot 10^{-26} \text{ вт/м}^2 \cdot \text{гц}$  дали два варианта. В варианте, обозначенном Лонгейром (b), предполагается, что источники с абсолютной величиной  $M_r > -29,5$  (т. е. сравнительно слабые) \*) не эволюционируют, а более мощные,  $M_r < -29,5$ , эволюционируют так, что мощность их растет пропорционально  $t^{-2,2}$ , т. е. пропорционально  $(1+z)^{3,3}$ . Этот закон относится к области  $z < 3$ . При  $z > 3$  предполагается, что нет никаких источников, ни сильных, ни слабых.

Второй вариант, обозначенный (d), предполагает, что плотность источников с  $M_r < -33$  в прошлом была больше, пропорционально  $\sim t^{-3,8} \sim (1+z)^{6,7}$ . Плотность (на единицу сопутствующего объема) и мощность более слабых источников,  $M_r > -33$ , была неизменной. При  $z > 4$  источников нет.

Эти два варианта, как выяснилось позже, хорошо описывают также и результаты, относящиеся к источникам вплоть до еще меньших потоков,  $S = 0,06 \cdot 10^{-26} \text{ вт/м}^2 \cdot \text{гц}$ .

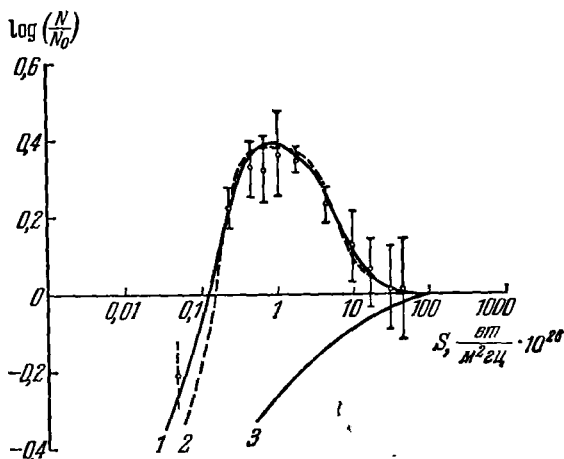


Рис. 14. Стношение числа источников  $N$  с потоком меньше данного к величине  $N_0 = AS^{-1/2}$ . Кривая 1 — в предположении (b) об эволюции источников (см. текст), кривая 2 — в предположении (d) об эволюции, кривая 3 — без учета эволюции. По сси абсцисс отложен поток на частоте 178 Мгц в единицах  $10^{-26} \text{ вт/м}^2 \cdot \text{гц}$ .

На графике, приведенном на рис. 14, показана кривая зависимости отношения  $N(S)$  к  $N_0 = AS^{-1/2}$  в зависимости от  $S$ . Кривая дана в логарифмическом масштабе. Закон  $N_0 \sim S^{-1/2}$  соответствует плоскому пространству, без учета эволюции и красного смещения, константа  $A$  выбрана в соответствии с числом близких источников; поэтому для больших  $S$  отношение  $N/N_0 \rightarrow 1$ . Для сравнения приве-

\*) Радиосветимость  $M_r$  определяется формулой  $M_r = 33,95 - 2,5 \lg P_{178}$ , где  $P_{178}$  — мощность в вт/стер·гц на частоте 178 Мгц (длина волны 1,7 м).

дена кривая 3 без учета эволюции, но с учетом космологических эффектов ( $\Omega=1$ ), эта кривая целиком лежит под осью абсцисс. Подъем кривой в области  $10 < S < 1$  обусловлен эволюционным эффектом — возрастанием числа источников или их мощности. Спад кривой при  $S < 1$  требует для своего описания эволюционного эффекта противоположного знака — отсутствия или резкого уменьшения числа радиогалактик при  $z > 3$  или  $z > 4$ . Крайняя левая точка получена Шоломицким по данным работы Кендердина, Райла и Поолея (1966) и в работе Лонгейра не была учтена, тем не менее она отлично легла на кривую.

На графике, приведенном на рис. 15, представлено распределение по мощности радиоисточников, находящихся вблизи нас в области  $z < 0,01$ . Для них эволюционный эффект мал.

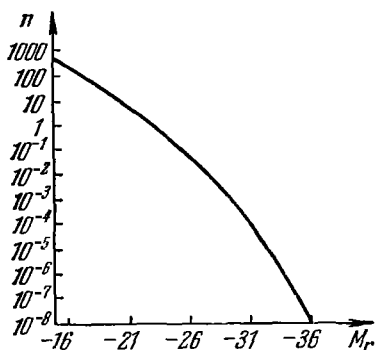


Рис. 15. Распределение по мощности радиоисточников, находящихся в области с  $z < 0,01$ . По вертикали отложено количество источников с  $z < 0,01$ , приходящихся на стерадиан, имеющих абсолютную радиояркость от  $M_r$  до  $M_r + 0,5$ .

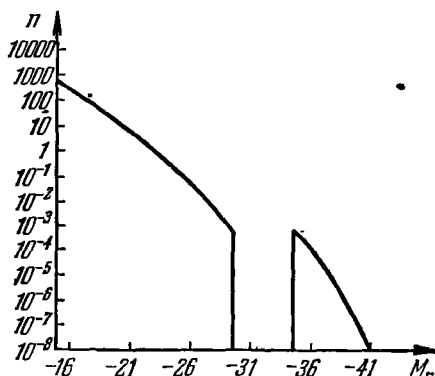


Рис. 16. Эволюция радиоисточников в варианте (b). Представлена кривая плотности радиоисточников, какой она должна быть на момент, соответствующий  $z=3$ . Эволюционируют только радиоисточники с  $M_r < -29,5$ . Плотность дана на объем сопутствующего пространства, который в настоящее время совпадает с объемом, используемым для получения  $n$  на рис. 15.

Эволюционные предположения Лонгейра соответствуют своеобразной деформации кривой для разных  $z$ : в варианте (b) при  $z=3$  кривая приведена на рис. 16, в варианте (d) при  $z=4$  вид кривой приведен на рис. 17. Кривая существенно меняет свою форму!

Особенно надо подчеркнуть «обрезание» при  $z=3$  или 4. Предполагается, следовательно, что при  $z > 3$  или 4, т. е. раньше определенного момента ( $t < 5 \cdot 10^8$  лет), радиогалактик не было. Эта оценка момента начала массового рождения радиогалактик совпадает с оценками, полученными из других соображений.



Однако такая оценка основана на соотношении между размерами скоплений (диаметр порядка  $D=3 \text{ Mnc}$ ) и средним расстоянием между ними (порядка  $l=10 \text{ Mnc}$ )\*. Где-то при  $z \approx 3,5$  скопления соприкасались, заполняли все пространство, а следовательно, именно при

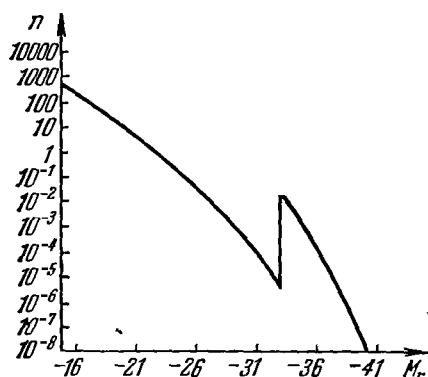


Рис. 17. Эволюция радиисточников в варианте (d). Кривая  $n=n(M_r)$  на момент  $z=4$ . Меняется число источников с  $M_r < -33$ . Плотность отложена в тех же единицах, что и на рис. 16.

кварзары. Необъяснимым остается только тот факт, что в настоящее время две группы источников дают плавную кривую  $\rho(P)$ , без изломов или разрывов.

Насколько однозначной является картина эволюции, предложенная Лонгейром? Если предположить, что эволюционируют все источники, т. е. вся кривая  $\rho(P)$  смещается вправо или вверх без изменения формы, нельзя получить резкий завал  $N(S)/N_0(S)$  при малых  $S$ . Его нельзя получить ни за счет выбора  $z$ , выше которого нет источников, ни за счет учета рассеяния.

В самом деле, если при увеличении чувствительности приемной аппаратуры (т. е. при уменьшении  $S$ ) мы не видим более далеких источников (потому что их нет за пределами определенного  $z$  или они скрыты пеленой рассеяния), то зато мы видим новые, более слабые источники. Лишь при немонотонной кривой вида рис. 16 или рис. 17 можно добиться того, чтобы прекращался быстрый рост  $N(S)$ .

Лонгейр не учитывает рассеяния света электронами. Предполагая, что ионизованный газ составляет долю  $\alpha$  средней плотности, и используя соотношения для оптической толщины  $\tau$  ( $\sigma$  — сечение рассеяния,  $\mu_e$  — молекулярный вес на один электрон)

$$\tau = c\sigma \int n_e dt = c\sigma \frac{6 \cdot 10^{23}}{\mu_e} \int \rho_{\text{газ}}(z) \frac{dt}{dz} dz$$

\*) Для крупных скоплений  $D \approx 8 \text{ Mnc}$ ,  $l \approx 40 \text{ Mnc}$ , см. § 11 гл. 14.

этом  $z$  произошло их обособление друг от друга (Цвикки дает значение  $z=4,25$ ). Другая оценка связана с рассмотрением теплового баланса газа до образования галактик (см. далее).

На первый взгляд представляется неестественным резкое изменение самой формы кривой  $\rho(P)$  в прошлом по сравнению с плавной кривой в настоящее время: появление разрыва или горба на рис. 16 и 17. Это означает, что современные радиоисточники состоят из двух групп. По Лонгейру, с данными наблюдений совместимо предположение, что мощная эволюционирующая группа представляет собой

и для плотности газа  $\rho_{\text{газ}}(z) = \alpha \rho_0 (1+z)^3 = \alpha \rho_c \Omega (1+z)^3$ , получим формулу для оптической толщи рассеяния (считаем  $\mu_e = 1,16$ ):

$$\tau = 0,04\alpha \left( \frac{H_0}{75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}} \right) \Omega \int_0^z \frac{(1+z) dz}{\sqrt{1+\Omega z}}. \quad (3.8.1)$$

При  $H_0 = 75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ ,  $\Omega = 1$  и  $\alpha \approx 1$  формула (3.8.1) дает

$$\tau = 0,04 \cdot \frac{2}{3} [(1+z)^{3/2} - 1], \quad (3.8.2)$$

т. е.  $\tau = 1$  при  $z \approx 10$ .

Для эволюционных моделей Лонгейра  $\tau \approx 0,2-0,3$  на границе образования источников (при  $z=4$ ). Следовательно, необходимо предположить дополнительное ничтожное изменение мощности источников, чтобы компенсировать влияние рассеяния. Напомним, что эволюционное изменение мощности по Лонгейру составляет  $(1+z)^{3,3}$ , т. е. при  $z=3$  достигает 100 раз!

Вопрос о статистической точности кривой  $N(S)$  осложняется тем, что в  $N(S_1)$  с малым  $S_1$  входит как слагаемое  $N(S_2)$  с большим потоком  $S_2$ , т. е. два значения  $N(S_1)$  и  $N(S_2)$  не являются независимыми.

В связи с этим Джонси (1970) предложил пользоваться дифференциальной кривой  $\frac{dN}{dS}$  в зависимости от  $S$ . Практически целесообразно находить  $\Delta_n N$  — число источников с мощностью в интервале  $S$ , меняющемся в геометрической прогрессии  $\Delta S_n = S(\beta^n - \beta^{n-1})$ ,  $\beta < 1$ . При степенной функции  $N(S)$  получится линейная зависимость  $\log \Delta_n N$  от  $n$ . Преимущество дифференциального или разностного представления результатов подсчета радиоисточников заключается в том, что случайная флуктуация количества близких источников при этом не влияет на последующий ход кривой.

Против работ Лонгейра выдвигались возражения: в частности, Келлерман (1972) утверждал, что на самом деле в нашей окрестности не хватает мощных источников, что и приводит к кажущемуся эффекту эволюции. По нашему мнению, статья Лонгейра и Риса (1972) содержит убедительную защиту эволюционной картины\*).

Рассмотрим теперь соотношение между подсчетами радиоисточников и общим фоном радиоизлучения.

Особенно интересны данные о суммарной интенсивности радиоизлучения на частоте  $178 \text{ МГц}$ . Измерения показывают, что эффективная температура равна  $80^\circ \text{К}$  (в направлении на полюс Галактики); предполагается, что из этого излучения на внегалактические источники приходится  $28 \pm 5^\circ$  или, по другим данным,  $23 \pm 5^\circ$  (см. § 2

\* В последнее время выполнены новые подсчеты в диапазоне от  $178 \text{ МГц}$  до  $5 \text{ ГГц}$ . При обсуждении этих подсчетов необходимо принимать во внимание разные спектры источников. Новые данные подтверждают общую картину, приведенную выше [см. Лонгейр (1974)].

гл. 5). Отсюда следует еще вычесть  $3^\circ$  реликтового излучения. Таким образом, на все, в том числе и неразрешенные, источники излучения приходится от  $15$  до  $30^\circ$ . Важная особенность суммарного излучения состоит в том, что на него не влияет рассеяние, способное изменить лишь направление, но не частоту и интенсивность излучения.

Обозначим общую радиомощность единицы сопутствующего объема через  $P_1$ :

$$P_1 = 4\pi \int P_\rho(P) dP.$$

С учетом эволюционного эффекта  $P_1 = P_1(t)$ ; удобнее, зная связь  $t$  и  $z$ , перейти к  $P_1 = P_1(z)$ . Светимость в единице физического объема равна  $(1+z)^3 P_1(z)$ . Для степенного спектра  $P_1 \sim \nu^{-\alpha}$  закон изменения плотности энергии на данной частоте в ходе расширения имеет вид  $\epsilon_\nu \sim (1+z)^{-3-\alpha}$ .

Используя зависимость (3.4.7):

$$dt = \frac{1}{H_0} \frac{dz}{(1+z)^2 \sqrt{1+\Omega z}},$$

получим для плотности излучения в настоящее время выражение

$$\begin{aligned} \epsilon_\nu &= \frac{1}{H_0} \int P_1(z) (1+z)^3 (1+z)^{-3-\alpha} \frac{dz}{(1+z)^2 \sqrt{1+\Omega z}} = \\ &= \frac{1}{H_0} \int P_1(z) (1+z)^{-\alpha-2} \frac{dz}{\sqrt{1+\Omega z}}. \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

Удобно от плотности излучения перейти к эффективной температуре. Для радиочастот ( $h\nu \ll kT$ ) эти величины связаны формулой Рэлея — Джинса:

$$\epsilon_\nu = 8\pi kT \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{c} (\text{эрг/см}^3 \cdot \text{Гц}),$$

поэтому формула для эффективной температуры будет иметь вид

$$T = A \int P_1(z) (1+z)^{-\alpha-2} \frac{dz}{\sqrt{1+\Omega z}},$$

где

$$A = \frac{\lambda^2 c}{8\pi k H_0}.$$

Если выделить эволюционный фактор, т. е. записать  $P_1 = P_0 f(z)$ , где  $P_0$  — радиомощность в настоящее время, последнее выражение приобретает вид \*)

$$T = 16^\circ \int f(z) (1+z)^{-2-\alpha} \frac{dz}{\sqrt{1+\Omega z}}.$$

\*) Численное значение константы взято для частоты  $178 \text{ МГц}$  и  $H_0 = 100 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ .

Предположим степенной закон эволюции от некоторого  $z$  до  $z=0$ ; положим, далее,  $\Omega=1$ . Для  $f=(1+z)^{\alpha}$ ,  $\alpha=1$  найдем  $T=16^{\circ} \cdot 2 (\sqrt{1+z}-1)$ ; при  $z=4$  было бы  $T \approx 40^{\circ}$ .

Если же взять более крутой рост,  $f(z) \sim (1+z)^{4.5}$ , который необходим для описания роста  $N(S)$ , то  $T=16^{\circ} \cdot \frac{1}{2} [(1+z)^2 - 1] \approx 190^{\circ}$  при  $z=4$ . Предположение об общей эволюции всех источников, и сильных и слабых, с обрезанием при  $z=4$  противоречит измеренной температуре.

Любопытно оценить вклад в температуру, который дают только идентифицированные источники. Принято характеризовать их функцией  $N(S)$  — числом источников в одном стерадиане, у которых поток превышает  $S$ . Число источников с потоком в интервале от  $S$  до  $S+dS$  равно —  $\frac{dN}{dS} dS$ , следовательно, полный поток

$$g = \int_S^{\infty} S \left( \frac{dN}{dS} \right) dS = \int_S^{\infty} N dS + S N(S). \quad (3.8.4)$$

В широком интервале от  $S=0,3 \cdot 10^{-26}$  до  $S \approx 30 \cdot 10^{-26}$   $\text{вт/м}^2 \cdot \text{гц}$  наблюдательные данные описываются степенной формулой

$$N = 1,6 \cdot 10^3 S^{-1.7}.$$

При таком показателе полный поток определяется нижним пределом интегрирования  $S_n$  в (3.8.4) ( $S$  — в единицах  $10^{-26} \text{вт/м}^2 \cdot \text{гц}$ ), т. е. в основном зависит от многочисленных слабых источников и оказывается равным

$$g = 4 \cdot 10^3 S_n^{-0.7} \cdot 10^{-26} \text{ (вт/м}^2 \cdot \text{гц} \cdot \text{стерад)}.$$

Если же выражать его через эффективную температуру (для  $\nu = 178 \text{ Мгц}$ ), то

$$g = 960 T \cdot 10^{-26} \text{ (вт/м}^2 \cdot \text{гц} \cdot \text{стерад)}.$$

Вследствие того, что при  $S < 0,3$  рост  $N(S)$  резко замедляется, все источники с  $S > 0,3$  дают, согласно Лонгейру,  $T \sim 10^{\circ}$ ; более поздние данные до  $S=0,03$  незначительно увеличивают это значение. Однако если бы замедление роста  $N(S)$  было связано с рассеянием, то источники, которые без рассеяния давали бы поток  $S > 0,03$ , дали бы  $T = 44^{\circ}$ , что выходит за допустимый предел  $15^{\circ} - 30^{\circ}$ .

Следовательно, если в принципе замедленный рост  $N(S)$  можно описать как влияние рассеяния, то наблюдаемую температуру описать нельзя, не предполагая, что где-то при  $z > 4$  (или, соответственно  $S < 0,03$ ) источников нет или по крайней мере закон эволюции таков, что излучение источников не столь резко нарастает в прошлое.

После опубликования работы Лонгейра последующие измерения подтвердили его предсказания для малых  $S$ .

Число источников при  $S$  меньше определенной величины не растет так быстро, как прежде. Лонгейр предполагал резкое обрезание  $P_1(z)=0$  при  $z>z_c$ . Как показано позже Дорошкевичем, Лонгейром и Зельдовичем (1970), нельзя исключить, что  $P_1(z)=\text{const}=P_1(z_c)$  при  $z>z_c$ . Даже функция совершенно иного типа,  $P_1=\text{const}\cdot e^{-1/z^2}$ , без какого-либо обрезания также достаточно хорошо объясняет измерения. Необходимость обрезания характерна только для степенного закона  $(1+z)^8$  — такой закон нельзя экстраполировать неограниченно к  $z\rightarrow\infty$ . Имеются физические причины полагать, что при больших  $z$ , скажем  $z\gg 10$ , нет радиоисточников, так как достаточно рано во Вселенной вообще не было отдельных объектов. Но здесь утверждается только, что измерения  $N(S)$  не дают определенных указаний о величине максимально возможного  $z$  для радиоисточников.

Непосредственные наблюдения дают картину, внешне напоминающую островную Вселенную с нашей Галактикой в центре. При удалении от центра плотность источников вначале нарастает, но затем, на определенном расстоянии, резко падает. Однако вся совокупность теоретических взглядов заставляет нас эту кажущуюся пространственную неоднородность истолковывать как эволюционный эффект в пространственно-однородном мире.

Все расчеты в статье Лонгейра были сделаны в предположении  $\Omega=1$ ,  $H_0=100$  км/сек·Мпс. Насколько они чувствительны к этим предположениям? Определение  $\rho(P)$  было основано на счете идентифицированных источников с  $z<0,01$ , для которых известен поток  $S$ . Пересчет этой величины на плотность на единицу объема выражается через  $\rho_{100}(P)$  (где  $\rho_{100}$  рассчитано для случая  $H_0=100$  км/сек·Мпс):

$$\rho(P) dP = \frac{100}{H_0} \rho_{100} \left[ P \left( \frac{H}{100} \right)^2 \right] dP;$$

от  $\Omega$  пересчет не зависит.

Однако вид эволюционных кривых  $f(z)$  не зависит от  $H_0$ , но зависит от  $\Omega$ . Иначе говоря, данная функция  $f(z)$  дает одинаковый результат при любом  $H_0$ , но для получения одних и тех же наблюдательных результатов при различных  $\Omega$  нужно менять закон эволюции.

Чтобы выяснить, как велики эти изменения, можно сравнить данные для  $\Omega=1/3$ ,  $\Omega=1$  и  $\Omega=3$  при  $z=4$ . Легко вычислить величины  $\frac{dt}{dz}$ ,  $D^2$ ,  $D^2 \frac{dt}{dz}$ ,  $\tau$ ,  $e^\tau$  на момент  $z=4$ . Оказывается, что изменения при переходе от одной модели к другой отнюдь не малы и достигают одного порядка. Однако их надо сравнивать с предполагаемыми эволюционными эффектами. Согласно Лонгейру, эволюционные эффекты, как показано выше, составляют в разных вариантах от двух до четырех порядков. По сравнению с такой эволюцией изменения при переходе от одной модели к другой малы; малое изменение показа-

телей эволюции, не меняющее качественной картины, позволяет согласовать наблюдения с любой космологической моделью.

Отсюда следует вывод: наблюдения свидетельствуют об эволюции радиоисточников, но они не помогают в определении параметров космологической модели. Способу определения этих параметров посвящен следующий параграф. Одна из «космологических» целей подсчета радиоисточников была все же достигнута: результаты подтвердили направленную эволюцию мира как целого, а значит, опровергли теорию «стационарного состояния» Вселенной. Критический разбор этой теории будет дан в разделе V.

### § 9. Определение $H_0$ и $q_0$ из наблюдений

Формулы, приведенные в §§ 2—5 и выражающие различные наблюдаемые величины через параметры космологической модели, в принципе должны (путем сравнения с наблюдениями) приводить к определению двух параметров  $H_0$  и  $q_0$  (или  $\Omega$ ) и нахождению, таким образом, всех параметров однородной изотропной космологической модели. Как подчеркивалось во введении, такая модель с большой точностью описывает сегодняшнее состояние окружающей Вселенной, что подтверждается наблюдениями, и в первую очередь наблюдениями реликтового излучения, о чем подробно говорится далее.

Из всех способов проверки космологических теорий наблюдениями далеких объектов, рассмотренных в предыдущих параграфах, наиболее подходящим для определения  $H_0$  и  $q_0$  оказался способ, основанный на зависимости видимая звездная величина — красное смещение ( $m - \lg z$ ). Все другие способы [см. например, Хьюиш, Ридхид, Дюффе-Смит (1974)] связаны с большими трудностями и ошибками наблюдений, селекции и т. п. Соотношение ( $m - \lg z$ ) описывается формулой (3.4.21) и разложением (3.5.25) этой формулы для  $z < 0,3$ . Перепишем эти формулы еще раз:

$$m_{\text{бол}} = 5 \lg \frac{1}{q_0^2} [q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1)] + C_1, \quad (3.9.1)$$

$$m_{\text{бол}} = 5 \lg z + 1,086(1 - q_0)z + C_1, \quad z < 0,3, \quad (3.9.1a)$$

где

$$C_1 = M_{\text{бол}} \text{ (в момент испускания света)} - 45,06 - 5 \lg H_0; \quad (3.9.2)$$

$H_0$  — в единицах  $\text{сек}^{-1}$ .

Формулы (3.9.1) — (3.9.2) показывают, что для нахождения  $q_0$  и  $H_0$  достаточно измерить  $m_{\text{бол}}$  только у двух источников с известным  $M_{\text{бол}}$  (в момент испускания света). Но вся трудность решения космологической проблемы как раз и состоит в определении величины  $M_{\text{бол}}$  для какого-либо яркого источника, видимого издалека. В от-

существование такого «стандартного источника» (т. е. источника с известной светимостью) используют возможно большее количество источников со светимостью, известной лишь приближенно, и находящихся на разных от нас расстояниях.

Конкретно предполагается (это предположение проверяется наблюдениями, см. далее), что в различных скоплениях галактик

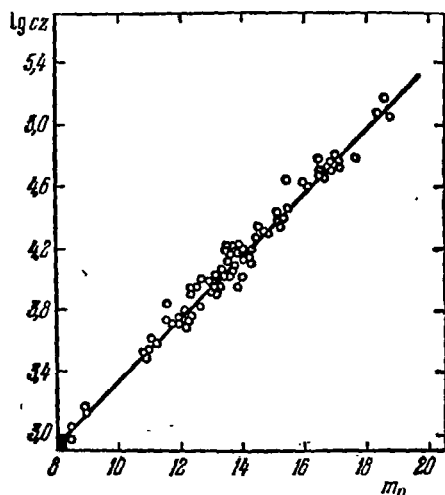


Рис. 18. Зависимость видимая звездная величина — красное смещение для ярчайших галактик скоплений. По оси ординат отложена величина  $\lg cz$ .

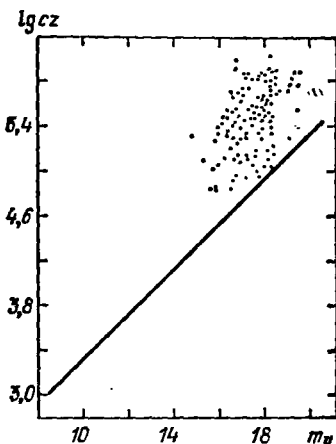


Рис. 19. Диаграмма красное смещение — видимая звездная величина для квазаров. Прямая линия взята с рис. 18.

ярчайшие члены скоплений имеют все одинаковую абсолютную звездную величину, и строится диаграмма видимая звездная величина — красное смещение ( $m - \lg z$ ) для таких объектов («диаграмма Хаббла»).

На рис. 18 изображена такая диаграмма для наиболее ярких галактик скоплений [по данным работы Сэндиджа (19726)]. Подобная диаграмма позволила Хабблу в 1929 г. установить закон красного смещения. В то время он располагал наблюдательными данными, относящимися к области, примерно соответствующей черному прямоугольнику в левом нижнем углу диаграммы. К настоящему времени наблюдательные возможности резко увеличились. Еще недавно казалось, что прогресс будет даже значительно большим. Надежды связывались с мощными источниками радиоизлучения, которые видны с помощью современных радиотелескопов на расстояниях больших, чем галактики. Однако, как было показано в §§ 7 и 8, сильный эволюционный эффект делает эти источники мало пригодными для решения космологических проблем. В прошлом десятилетии

тии были открыты квазары, которые по мощности оптического излучения на полтора-два порядка превосходят галактики. Однако и они оказались непригодными для решения космологической проблемы, так как в отличие от ярчайших галактик в скоплениях, которые действительно оказались приблизительно одной абсолютной величины  $M$ , квазары имеют огромный разброс в абсолютных звездных величинах и, по-видимому, сильный эволюционный эффект. Диаграмма ( $m - \lg z$ ) для квазаров, изображенная на рис. 19, не дает никакой определенной зависимости \*). Вернемся к диаграмме ( $m - \lg z$ ) для галактик.

Прежде чем идти дальше, заметим, что на диаграмме рис. 18 отложены не  $m_{\text{бол}}$ , а так называемые фотовизуальные звездные величины  $m_v$ , т. е. величины, полученные с помощью селективного приемника света и определяющие, таким образом, не полный поток света (как  $m_{\text{бол}}$ ), а только поток в определенном участке спектра. В них внесена поправка за счет того, что при больших красных смещениях  $z$  селективный приемник измеряет интенсивность в других частях спектра по сравнению с малыми  $z$ . Эта поправка (так называемая  $k$ -поправка) приводит все наблюдения к единому участку спектра (разумеется, спектр считается известным по исследованию ближайших галактик). Кроме того, звездные величины  $m_v$  исправлены на поглощение света в межзвездном пространстве нашей Галактики. В звездные величины галактик вносятся и другие поправки, на которых мы здесь не останавливаемся. Обзор этого вопроса читатель может найти в работе Пича (1972) (там же список литературы). Разумеется, формулы для фотовизуальных величин после внесения поправок имеют такой же вид, что и (3.9.1), (3.9.2). Мы будем использовать эти формулы, имея в виду указанные оговорки об астрономических коррекциях. Точки на диаграмме рис. 18 с малым разбросом лежат вдоль практически прямой линии, возможно немного искривленной в верхней части. Эта зависимость для галактик хорошо описывается формулами (3.9.1а) и (3.9.2) с  $M_{\text{бол}} = \text{const}$ . Член  $5 \lg z$  описывает прямую линию на диаграмме (при небольших  $z$  этот член главный), а второй член  $1,086 (1 - q_0)z$  мал по сравнению с первым и описывает небольшое искривление линии при больших  $z$ . Приведенная диаграмма доказывает, что исходные допущения правильны, по крайней мере в первом приближении. Напомним эти исходные допущения:

1. Мир галактик расширяется, и галактики удаляются от нас пропорционально расстоянию [линейность зависимости  $m$  от  $\lg z$  и тот факт, что коэффициент зависимости равен 5, как требует (3.9.1а)].

\*) Впрочем, в ряде работ выделяется и для квазаров класс объектов, для которых наблюдается зависимость ( $m - \lg z$ ); см. Сетти и Волтгер (1973), а также Бакалл, Хиллс (1973), Бэрбидж, О'Делл (1973).



2. Расширение происходит изотропно по разным направлениям (галактики из разных областей неба ложатся на одну и ту же линию диаграммы).

3. Абсолютные величины ярчайших галактик в скоплениях действительно примерно одинаковы (иначе получилась бы не линейная зависимость, а «облако», как на диаграмме для квазаров).

4. Эволюционный эффект не очень велик, иначе бы линия сильно искривлялась (подробнее см. ниже).

Для того чтобы определить  $H_0$  из наблюдений, нужно, согласно формулам (3.9.1а) и (3.9.2), знать абсолютную величину ярчайшей галактики какого-либо скопления. Тогда по линейной части диаграммы находится  $H_0$ . Линейная часть диаграммы, как уже было сказано, включает все слагаемые (3.9.1а), кроме члена  $1,086(1 - q_0)z$ , который мал при малых  $z$ . Этот член описывает небольшое искривление линии при больших  $z$  и в принципе дает возможность определить  $q_0$ .

Для решения первого вопроса — нахождения  $H_0$  — определяют  $M$  ярчайших галактик ближайших скоплений, например скопления в созвездии Девы. Мы очень кратко опишем здесь путь этого определения, отсылая за подробностями к обзору Сэндиджа (1962); новые данные приведены в статьях Симпозиума № 44 МАС [редактор Эванс (1972)] и цитированной там литературе.

Этот метод заключается в постепенном определении расстояний до все более удаленных объектов, пока не доходят до скопления Девы. Сначала находят абсолютные звездные величины звезд ближайших рассеянных звездных скоплений (как правило, обычно используется скопление Гиады). Для этого определяют расстояние до скопления, что делается следующим способом. Измерение перемещений отдельных звезд скопления на небе из-за их движения в пространстве вместе со скоплением позволяет определить угол  $\alpha$  между направлением от нас на скопление и направлением его движения в пространстве относительно Солнечной системы\*). Затем, используя лучевые скорости звезд  $V_{\text{луч}}$ , определяют скорость  $V_t$  перемещения звезд в картинной плоскости (в км/сек):  $V_t = V_{\text{луч}} \operatorname{tg} \alpha$ . Сравнивая эту скорость с угловыми перемещениями  $\beta$ , находят расстояние до скопления  $R = V_t / \beta$ . Оно оказывается около 40 пс ( $1,2 \cdot 10^{20}$  см). Зная расстояние и видимые величины звезд, можно определить абсолютную звездную величину звезд скопления, находящихся в стадии горения водорода (звезд «главной последовательности» диаграммы  $m$  — цвет). Абсолютные звездные величины звезд на главной последовательности зависят только от их цвета (спектрального класса) и после определения расстояния до Гиад могут считаться известными.

\*) Этот угол равен угловому расстоянию на небе между скоплением и точкой, где пересекаются линии направлений перемещения отдельных звезд скопления на небе.

Следующий шаг заключается в определении расстояний до других, более далеких скоплений путем сравнения видимых звездных величин звезд на главной последовательности в этих скоплениях и в Гиадах. Так можно найти расстояния до всех скоплений нашей Галактики, что позволяет определить абсолютные величины  $M$  некоторых периодических переменных звезд — цефеид, входящих в эти скопления. Цефеиды подчиняются замечательному соотношению период  $T$  — светимость  $M$ . Зная абсолютную величину  $M$  некоторых из цефеид, входящих в скопления, находят «нуль-пункт» зависимости  $T$  —  $M$ , т. е. какое  $M$  соответствует определенному  $T$ . Яркие цефеиды видны с больших расстояний; в частности, они видны и в одной из ближайших спиральных галактик — М-31 (Андромеда). Измеряя период цефеид в М-31, определяют их светимость  $M$  (по зависимости  $T$  —  $M$ ) и, сравнивая  $M$  с  $m$ , находят расстояние до М-31. К сожалению, цефеиды не видны в более далеких галактиках скопления в Деве, которое существенно дальше галактики в Андромеде. Приходится делать еще один шаг. В галактике М-31 видно много шаровых звездных скоплений. Знание расстояния до М-31 позволяет вычислить  $M$  шаровых скоплений. Их абсолютная величина оказывается  $M \approx -10^m,6$ . Шаровые скопления можно видеть в галактике М-87, входящей в скопление в Деве. Измеряя видимые величины шаровых скоплений в М-87 и зная величину  $M$  шаровых скоплений, находят расстояние до скопления Девы (около  $17 \times 10^6$  пс \*). Наконец, из этого расстояния и видимой величины ярчайшей галактики NGC 4472 находят величину  $M$  ярчайшей галактики. Она приблизительно равна  $M = -22,5^m$ .

Кроме указанного способа использования цефеид и шаровых скоплений в качестве индикатора расстояний до галактик используют другие яркие объекты с более или менее уверенно известными абсолютными величинами. Такими объектами, например, являются ярчайшие видимые звезды, новые и сверхновые звезды. Кроме того, используют линейные размеры районов ионизованного водорода (HII-области). Эти размеры довольно постоянны и поэтому также могут служить индикаторами расстояния.

Очевидно, что ошибки возможны на каждой ступени длинной лестницы, описанной выше. Поэтому  $H_0$  может считаться известной сейчас с точностью вряд ли лучшей, чем десятки процентов, а может быть, и с точностью не выше  $\pm 50\%$ . Оценки самого Хаббла в 1936 г. давали для  $H_0$  величину  $530 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ . Современные оценки Сэндиджа, Вокулера, Ван ден Берга и др. дают оценки между  $100 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$  и  $50 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$  и даже еще меньше (обзоры см. в уже упомянутом сборнике под редакцией Эванса). Новые данные приведены в цикле работ Сэндиджа (1972а, б, в, 1973а, б), Сэндиджа,

\*) Напомним, что для столь небольших по космологическим масштабам расстояний понятие расстояния имеет однозначный смысл, см. §§ 3, 5.

Таммана (1974а—е). Для конкретных численных оценок будет использоваться величина  $H_0 = 75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ . Но, по-видимому, наилучшее современное значение  $H_0 = 55 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ .

На первый взгляд общая тенденция имеет весьма «угрожающий» характер. Со времен первых определений  $H_0$  ее значение, получаемое из все более точных наблюдений, с течением времени только убывает. Общая причина убывания связана, с одной стороны, с тем, что по ошибке принимали в других галактиках более яркие объекты за более слабые (например, светящиеся облака газа за звезды), с другой стороны — с осознанием того факта, что на большом расстоянии, имея большое число объектов, при наличии статистического разброса мы выбираем более яркие [см. Тамман (1973а)].

Поэтому особенный интерес приобретает оценка величины  $H_0$  снизу. Интересное замечание по этому поводу сделал Пикельнер (1974). Он отмечает, что радиоактивные изотопы позволяют определить, когда в прошлом был период активного нуклеосинтеза в Галактике. Фаулер (1972) дает наиболее современное значение  $\tau = (11,7 \pm 2) \cdot 10^9 \text{ лет}$  для периода, отделяющего нашу эпоху от момента активного нуклеосинтеза в нашей Галактике; новый обзор см. Шрамм (1974).

Предположим, что эта величина того же порядка и для других галактик (практически  $\tau$  — это возраст галактик). Но в период нуклеосинтеза галактики должны быть во много раз ярче, чем в настоящее время [Парtridge, Pibls (1967a)]. Мы в настоящее время не видим таких сверхъярких галактик, значит, период, когда они были яркими, соответствует  $z > 1$ , чтобы красное смещение ослабило их яркость. Из условия  $\tau \approx 12 \cdot 10^9 \text{ лет}$  и  $z > 1$  с помощью (3.4.7) находим, что  $H_0 > 40\text{—}50 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ . При всей грубости рассуждений ценно то, что они дают нижний предел  $H_0$  и никак не связаны с длинными цепями выводов, необходимых для определения шкалы расстояний.

Возраст галактик  $\tau$  можно оценить еще, считая его приблизительно равным возрасту шаровых скоплений. Определение возраста последних  $t_{ш.с}$  основано на теории звезд главной последовательности. Ибен, Рут (1970) дают  $t_{ш.с} = (10 \pm 3) \cdot 10^9 \text{ лет}$ . Другие оценки возраста галактик см. Тэлбот и Арнет (1973а, б). По их данным,  $\tau \approx (18,6 \pm 5,7) \cdot 10^9 \text{ лет}$ .

Перейдем теперь к нахождению  $q_0$ . Как видно из формулы (3.9.1) или (3.9.1а),  $q_0$  описывает искривление зависимости ( $m - \lg z$ ), отклонение зависимости от прямой. Величина  $q_0$  определяется прямо из диаграммы и не требует знания шкалы внегалактических расстояний; тем не менее, как мы увидим, точность ее определения также очень невелика. По оценкам Сэндиджа (1972а), основанных на обработке данных рис. 18,

$$q_0 = 0,96 \pm 0,4 \text{ (дана вероятная ошибка)}. \quad (3.9.3)$$

На рис. 20 проведены линии, соответствующие зависимостям при разных  $q_0$ . Таким образом,  $q_0$  находится очень неуверенно. К этому надо добавить еще следующее. Как мы неоднократно упоминали выше, зависимость  $(m - \lg z)$  искривляется не только благодаря члену с  $q_0$ , но также еще из-за эволюционного эффекта, т. е. из-за того, что  $M$  в выражении (3.9.2) нельзя считать постоянной.

Перепишем формулу (3.9.1) с учетом эволюционного эффекта. Для этого воспользуемся уже полученным в § 7 выражением (3.7.10). Переходя к звездным величинам, находим

$$m_{\text{бол}} = 5 \lg z + 1,086 \left( 1 - q_0 - 0,92 \frac{\dot{M}_{\text{бол}}}{H_0} \right) z + C'_1. \quad (3.9.4)$$

Таким образом, величина (3.9.3), по существу, есть сумма второго и третьего слагаемых в круглых скобках (3.9.4). Теоретические оценки эволюции галактик [см. Сэндидж (1970), Спинард и Тейлор (1971), Тинсли (1968, 1972, 1973)] показывают, что третье слагаемое может быть столь же существенным, как и  $q_0$ . Для величины  $\dot{M}_0$  может быть очень приближенно принято значение

$$\dot{M}_0 \approx -0,05 (\pm 0,02) \cdot 10^{-9} \quad (\text{звездн. велич. / год}).$$

Поэтому о надежном определении  $q_0$  в настоящее время говорить не приходится \*).

Однако, несмотря на это, один важный вывод можно сделать. Согласно космологической теории «стационарного состояния», которая одно время усиленно защищалась Хойлом и некоторыми другими астрономами, Вселенная неизменна во времени. Это ведет к тому, что  $q_0 = -1$ , а  $\dot{M} \equiv 0$ . На рис. 20 приведена соответствующая кривая для  $q_0 = -1$ . Как подчеркивает Сэндидж, крайне невероятно, чтобы эта кривая соответствовала наблюдениям. Впрочем, теория «стацио-

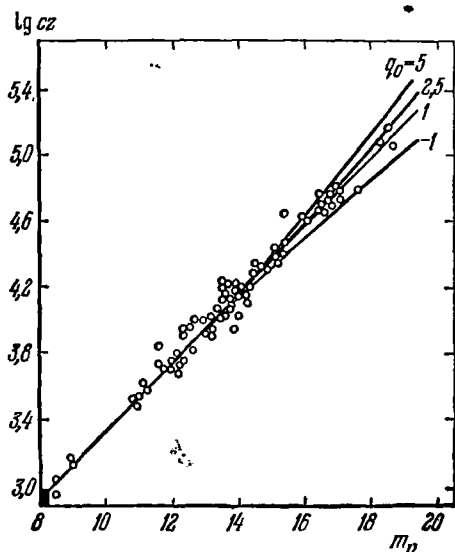


Рис. 20. Зависимость  $z - m_0$  для разных  $q_0$ . Значения  $q_0$  указаны у кривых.

\*) Эти определения могут быть отягощены также и селекционными ошибками наблюдений; см. Пич (1972).

нарного состояния» опровергается и доказательством эволюции радиоисточников, приведенным выше (§ 8).

Вопрос о прямом методе определения средней плотности вещества во Вселенной рассмотрен в § 11 гл. 14.

### § 10. Наблюдаемые величины во Вселенной, однородной лишь в среднем

Вселенная однородна в больших масштабах, включающих много галактик. Однако неоднородность распределения вещества во Вселенной в меньших масштабах очевидна: именно этой неоднородности мы обязаны существованием отдельных звезд, галактик, скоплений галактик. Влиянию неоднородности на динамику (геометрию и движение) мира и на распространение света посвящен третий раздел книги. Однако один частный вопрос общей проблемы неоднородности целесообразно изложить уже здесь; речь идет о неоднородности малого пространственного масштаба  $l$ , но большой амплитуды т. е. неоднородности с местной плотностью, во много раз отличающейся от средней.

Почему именно этот частный вопрос можно и нужно рассматривать в части, посвященной теории «строго» однородной Вселенной? Дело в том, что неоднородности малого масштаба практически не влияют на динамику Вселенной как целого и на красное смещение далеких объектов.

Совсем грубо можно считать, что закон изменения расстояния  $R$  между двумя объектами зависит от массы вещества в шаре диаметром  $R$ . Если  $R \gg l$ , то в этом шаре находится много «неоднородностей», их число  $N \approx (R/l)^3$  и отклонение плотности от средней мало \*).

Однако необходимо подробнее проследить за распространением того пучка лучей, который приносит энергию от далекого объекта (галактики, квазара) земному наблюдателю. На распространение этого пучка специфически влияют неоднородности, расположенные вблизи лучей, в частности вещество, оказывающееся внутри конуса лучей, принимаемых наблюдателем. Объем этого конуса ничтожно мал по сравнению с объемом шара диаметра  $R$ . Именно поэтому неоднородности, которые можно не учитывать в общей картине движения, оказываются существенными для некоторых наблюдаемых величин.

В частности, рассмотрение неоднородной задачи позволит глубже понять физический смысл того, что происходит в строго однородной Вселенной.

---

\*) Примитивная оценка для случайных неоднородностей есть  $\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$ ,

но в третьем разделе мы увидим, что отклонение от средней плотности может быть еще меньше,

В данном параграфе рассматривается влияние неоднородности Вселенной на угловой размер и видимую величину далеких объектов. Для однородной Вселенной эти величины уже получены нами в зависимости от расстояния или, точнее, от красного смещения. Оказывается, что для применимости этих формул нужно, чтобы однородность удовлетворяла требованиям более строгим, чем те, которые должны быть выполнены для справедливости закона расширения однородной модели.

Изложение в данном параграфе основано на нескольких советских работах: Зельдович (1964а), Дашевский, Зельдович (1964), Дашевский, Слыш (1965). Во время симпозиума в Бюракане (1966) американские астрономы сообщили, что соображения, аналогичные приведенным в указанных работах, высказывал Фейнман. Недавно подробные формулы привели Кантовский (1969), Дайер и Рёдер (1973).

Напомним замечательный факт: угол, под которым виден далекий объект, с увеличением расстояния проходит через минимум, при приближении к горизонту угол неограниченно возрастает (см. § 3 этой главы). Наглядно объяснить этот факт можно, рассматривая гравитационное фокусирующее действие на свет вещества, находящегося внутри конуса лучей, сходящихся в точку наблюдения  $O$ , от объекта  $AB$  (рис. 21, сверху). Речь идет об искривлении лучей того же происхождения, что и знаменитое отклонение лучей на  $1,75''$  около диска Солнца. Непосредственно видно, что искривление лучей  $OA$  и  $OB$  увеличивает угол между лучами в точке  $O$  при данном размере  $AB$ . При этом рассматривается действие вещества внутри конуса, которое отклоняет луч  $AO$  вниз (по ходу луча справа налево), а луч  $BO$  — вверх. Вещество, находящееся снаружи конуса  $OAB$ , при наличии осевой симметрии не влияет на угол  $\theta$ , как бы много этого вещества ни было \*).

Из приведенного наглядного объяснения непосредственно следует условие применимости формул для угла, относящихся к однородной Вселенной: нужно, чтобы плотность внутри конуса не отличалась от средней плотности. Если большая часть плотности связана с нейтрино, межгалактическим газом и пылью, то это условие может быть выполнено. Но рассмотрим противоположный случай: предположим, что все вещество сконцентрировано в отдельных галактиках (рис. 21, внизу). Тогда либо в конус попадает галактика целиком или

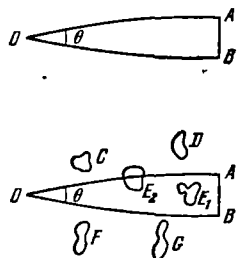


Рис. 21. Схема измерения углового размера  $\theta$  объекта  $AB$  в однородной Вселенной (вверху) и во Вселенной, состоящей из отдельных скоплений материи (внизу).

\*) Неоднородное распределение вещества вне конуса лучей также влияет на наблюдаемую величину. Расчеты эффекта проделаны Пенроузом (1966), Бертолли (1966), Ганном (1967).

частично ( $E_1$  или  $E_2$ ), либо в конусе нет ни одной галактики. Заметим, что в действительности мы наблюдаем чаще именно такие объекты  $AB$ , которые не закрыты по лучу зрения другими галактиками.

Все эффекты интересуют нас для далеких объектов: внутри сферы с центром в  $O$ , на которой лежит  $AB$ , находится огромное число галактик, и отклонение этого

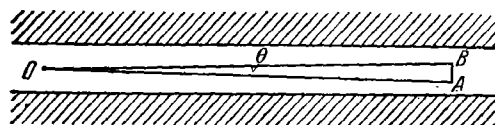


Рис. 22. Схема, поясняющая расчет углового размера объекта во Вселенной, однородной лишь в среднем. В незаштрихованной области плотность вещества равна нулю.

числа от среднего ничтожно. Однако если объект  $AB$  мал, то объем конуса  $OAB$  также мал; соответственно велика вероятность того, что плотность в конусе окажется отличной от средней и, в частности, что конус окажется пустым.

Угол в случае пустого конуса удалось рассчитать следующим приемом [Зельдович (1964a)]. Пространство, заполненное веществом с плотностью  $\rho = \bar{\rho}(t)$  вне цилиндра (рис. 22) и пустое ( $\rho = 0$ ) внутри него, можно представить как однородную Вселенную, на которую наложено возмущение  $\delta\rho = -\bar{\rho}(t)$  внутри цилиндра. Для однородной Вселенной задача распространения лучей решена точно, с учетом нестационарности Вселенной.

Возмущенная область мала, поэтому в ней применимо ньютоновское приближение для гравитационного потенциала. Поскольку мал угол  $\theta$ , то радиус цилиндра мал по сравнению с длиной  $OA$  и локально поле обладает цилиндрической симметрией. Для применимости теории возмущений нужно, чтобы угол поворота луча  $\Delta\theta$  был мал абсолютно,  $\Delta\theta \ll 1$ , но не обязательно мал по сравнению с углом  $\theta$  в однородной Вселенной. Отсылая за деталями расчета к цитированной выше статье Зельдовича, приводим результат для случая критической плотности \*), т. е.  $\rho = \rho_c$ ,  $\Omega = 1$ . Угол в зависимости от красного смещения в полностью однородной Вселенной дается выражением (см. § 3 этой главы).

$$\theta = \frac{IH}{c} [2(1 - \Delta)(1 - \sqrt{1 - \Delta})]^{-1} = \frac{IH}{cf(\Delta)}. \quad (3.10.1)$$

В случае пустого конуса оказывается

$$\theta_1 = \frac{IH}{c} \left\{ \frac{2}{5} [1 - (1 - \Delta)^{5/4}] \right\}^{-1} = \frac{IH}{cf_1(\Delta)}. \quad (3.10.2)$$

Кривые для функций  $f$  и  $f_1$  показаны на рис. 23, на этом же рисунке дана для сравнения кривая для функции  $f_0$ , соответствующая пол-

\*) Случаи  $\Omega > 1$  и  $\Omega < 1$  рассчитаны в работе Дашевского и Зельдовича (1964).

ностью однородной модели с  $\rho=0$  как внутри конуса лучей, так и вне его (модель Милна). Кривая  $f_1$  не имеет максимума. Это подтверждает качественные соображения о физической причине минимума угла  $\theta$  в полностью однородной Вселенной.

С другой стороны (в случае вещества, сосредоточенного в галактиках), кривую для  $\theta$  (3.10.1) следует рассматривать как среднюю. Для одних объектов — с пустым конусом — угол дается кривой  $\theta_1$  (3.10.2), для других, в конусе которых есть галактики (как  $E_1$  и  $E_2$  на рис. 21), угол гораздо больше  $\theta$ , вследствие того что эти галактики действуют как гравитационные линзы [согласно Цвикки (1959), см. также Климов (1963)].

В действительности между галактиками имеется материя. Повидимому, в основном это межгалактический газ. Плотность его предположительно оценивается в  $10^{-29}$ — $10^{-32}$  г/см<sup>3</sup>. Вероятно, газ распределен более или менее равномерно. Если это так, то этот газ всегда будет попадать в конус лучей. Тем же методом, что и выше, легко получить формулы для данного случая [Дашевский, Слыш (1965)]. Пусть плотность  $\rho^*$  межгалактической среды, распределенная равномерно, составляет долю  $\gamma$  всей плотности  $\rho$ , так что  $\rho^*=\gamma\rho$ . Давление газа пренебрежимо мало,  $\rho c^2 \gg P$ , поэтому полагаем  $P=0$ .

Тогда, как показывают вычисления, для  $\Omega=1$

$$\bar{\theta} = \frac{IH_0}{c\bar{f}(\Delta)}, \quad \bar{f} = \frac{2}{k} (1-\Delta)^{\frac{5-k}{4}} \left[ 1 - (1-\Delta)^{\frac{k}{4}} \right],$$

где  $k = \sqrt{25-24\gamma}$ . Это выражение имеет максимум при любых  $\gamma \neq 0$  и на горизонте обращается в нуль. Максимум расположен тем ближе к горизонту, чем меньшая доля вещества входит в равномерно распределенную межгалактическую среду.

Заметим, наконец, что все сказанное относится также к вычислению количества света, получаемого наблюдателем от далекого объекта. Количество света равно произведению яркости на телесный угол. Яркость объекта определяется его свойствами и красным смещением, а телесный угол пропорционален  $\theta^2$ . Поэтому в выражение видимой величины входит в случае объекта с пустым конусом поправочный множитель  $(\theta_1/\theta)^2$  или, соответственно,  $(\bar{\theta}/\theta)^2$ , если между

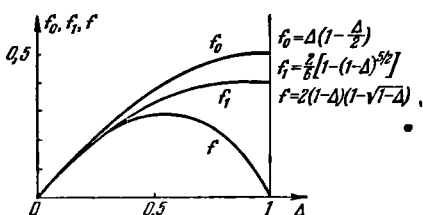


Рис. 23. Безразмерное расстояние, измеренное по угловым размерам объекта с известным диаметром, как функция красного смещения  $\Delta$ :  $f_0$  — для пустого мира;  $f$  — для однородной Вселенной со средней плотностью  $\Omega=1$ ;  $f_1$  — для неоднородной Вселенной со средней плотностью  $\Omega=1$ , но с плотностью, равной нулю в конусе лучей от объекта к наблюдателю.



галактиками есть газ. Такая поправка нужна и в том случае, если сами  $\theta$  и  $\theta_1$  так малы, что не разрешаются телескопом.

При определении  $q_0$  по кривой  $m - z$  эффект неоднородности несколько занижает наблюдаемое значение  $q_0$ . Теоретические кривые с учетом этого эффекта дают большее  $m$ , а сравнение теории с наблюдениями дает большее  $q_0$ . Количественная оценка эффекта весьма затруднительна.

### § 11. Кинетическое уравнение для фотонов

До сих пор для расчета наблюдаемых величин мы рассматривали распространение света от отдельных источников к наблюдателю. Однако для многих целей важно знать среднюю плотность излучения в пространстве от всех источников и его спектральное распределение. Речь идет о средней плотности излучения вдали от отдельных источников.

К вопросу о средней плотности излучения от отдельных источников можно подойти совсем иначе, не рассматривая распространение света от них к наблюдателю. В однородной и изотропной Вселенной излучение также должно быть в среднем однородным и изотропным. Следовательно, его можно характеризовать функцией двух переменных — частоты  $\omega$  и времени  $t$ . Число квантов в данном интервале частоты  $d\omega$  в единице объема есть

$$dn = \varphi(\omega, t) d\omega; \quad (3.11.1)$$

соответственно плотность энергии, приходящейся на  $d\omega$ ,

$$d\tilde{E}_1 = \hbar\omega dn = \hbar\omega\varphi(\omega, t) d\omega = \epsilon_v(\omega, t) d\omega. \quad (3.11.2)$$

В изотропном поле излучения обмен квантами между соседними объемами, очевидно, ничего не меняет, поскольку их спектр и плотность в любом месте одинаковы. Следовательно, возможен локальный подход к вычислению функции  $\varphi$ .

Составим дифференциальное уравнение в частных производных для  $\varphi(\omega, t)$ . Это уравнение является частным случаем кинетического уравнения для функции распределения частиц по координатам и скоростям (или импульсам). Такое уравнение оказывается весьма сложным в общем случае с учетом кривизны пространства и времени, а также влияния рассеяния, поглощения и испускания рассматриваемых частиц. Однако уравнение и его вывод становятся простыми для частного случая, когда метрика пространства-времени соответствует однородной и изотропной модели и частицы (в данном случае фотоны) также распределены в пространстве однородно, а в каждой точке скорости их изотропно распределены по направлениям. Из общих соображений ясно, что если в какой-то момент распределение обладает этими свойствами, то они не нарушатся и позже, так что все

время можно рассматривать функцию двух переменных  $\varphi(\omega, t)$  вместо функции семи \*) переменных  $r, p, t$  или  $r, n, \omega, t$ .

Далее, очевидно, что в изотропном случае рассеяние без изменения частоты не входит в уравнение. Пренебрежем сначала также поглощением и испусканием фотонов и будем учитывать только красное смещение.

Рассмотрим группу  $dN$  фотонов, находящихся в сопутствующем объеме  $V$  в интервале частот  $d\omega$ :

$$dN = V\varphi d\omega.$$

В ходе расширения число  $dN$  остается неизменным, если нет ни поглощения, ни испускания. Однако мы должны учесть изменение  $V$  и  $\omega$ . По общим правилам дифференциального исчисления имеем

$$\frac{dN}{dt} = 0 = \frac{d(V\varphi d\omega)}{dt} = \frac{\partial(V\varphi d\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(V\varphi d\omega)}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt}.$$

При этом

$$\frac{dV}{dt} = 3HV, \quad \frac{d\omega}{dt} = -H\omega.$$

Подставляя, получим уравнение \*\*)

$$Vd \ln \omega \frac{\partial(\varphi\omega)}{\partial t} + 3HV\varphi\omega d \ln \omega - H\omega Vd \ln \omega \frac{\partial(\varphi\omega)}{\partial \omega} = 0,$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2H\varphi - H\omega \frac{\partial\varphi}{\partial \omega} = 0. \quad (3.11.3)$$

Это уравнение упрощается, если ввести число заполнения фотонов  $n$ . Число заполнения определяется как отношение числа фотонов в данном элементе объема и интервале частоты (в общем случае — и в элементе телесного угла  $\Omega^*$ ) к числу отдельных собственных колебаний (их называют модами) электромагнитного поля. Число таких мод есть

$$d\mu = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} V dp_x dp_y dp_z = \frac{2Vp^2 dp d\Omega^*}{(2\pi\hbar)^3}.$$

В избранном случае, интегрируя по углу ( $\int d\Omega^* = 4\pi$ ), имеем

$$d\mu = \frac{V\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} = \frac{8\pi}{3} d\left(\frac{V}{\lambda^3}\right).$$

\*) Вектор положения  $r$  — три переменные, так же как и импульс  $p$ ; единичный вектор направления  $n$  соответствует двум переменным, так как  $p = \hbar\omega n/c$ .

\*\*) Удобно записать  $d\omega = \omega d \ln \omega$ , так как  $d \ln \omega$ , очевидно, не изменяется под действием красного смещения.

Итак, число заполнения  $n$  в изотропном случае определяется как

$$n = \frac{dN}{d\mu} = \frac{\pi^2 c^3 \varphi}{\omega^2}. \quad (3.11.4)$$

Каждую моду электромагнитных колебаний можно рассматривать как отдельный резонатор. При этом  $n$  есть номер возбужденного состояния этого резонатора; энергия резонатора может изменяться на целые кванты  $\hbar\omega$ , число заполнения  $n$  соответствует энергии  $n\hbar\omega$ .

Отметим (это недостаточно хорошо известно астрономам), что число  $n$  играет огромную роль во всей физике излучения: индуцированное (стимулированное) излучение в лазере отличается от спонтанного излучения множителем  $(n+1)$ . В термодинамически равновесном излучении

$$n = (e^{\hbar\omega/kT} - 1)^{-1}$$

(формула Планка). При сплошном спектре  $n$  статистически распределено по соседним модам и мы в действительности везде подразумеваем среднее значение  $n$ .

В ходе медленного расширения следует ожидать, что  $n$  сохраняется как адиабатический инвариант. И действительно, если в уравнение (3.11.3) подставить из (3.11.4)  $\varphi = \frac{n\omega^2}{\pi^2 c^3}$ , получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} - H\omega \frac{\partial n}{\partial \omega} = \frac{dn}{dt} \Big|_c = 0, \quad (3.11.5)$$

где  $\frac{d}{dt} \Big|_c$  берется вдоль характеристики, т. е. при условии

$$d\omega = -H\omega dt.$$

Итак, макроскопическое кинетическое уравнение согласуется с квантовыми представлениями о числе фотонов на моду и о номере квантового состояния, сохраняющихся в ходе расширения.

Вернемся к уравнению для  $\varphi$ . Добавляя в (3.11.3) вклад источников  $I(\omega, t)$ , получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -2H\varphi + H\omega \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + I(\omega, t). \quad (3.11.6)$$

Уравнение для спектральной плотности  $e_\nu(\omega, t)$  [см. формулу (3.11.2)] получим отсюда элементарной выкладкой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_\nu}{\partial t} &= -3He_\nu + H\omega \frac{\partial e_\nu}{\partial \omega} + \Phi(\omega, t) = \\ &= -4He_\nu + H \frac{\partial}{\partial \omega} e_\nu \omega + \Phi(\omega, t). \end{aligned} \quad (3.11.7)$$

Здесь  $I(\omega, t)$  и  $\Phi(\omega, t) = \hbar\omega I(\omega, t)$  — число квантов и энергия этих квантов, испускаемых звездами, находящимися в единице объ-

ема, за единицу времени и в единице частоты. По существу, ясно, что уравнение в частных производных (3.11.7) и метод сложения света, приходящего из разных слоев, равноценны и эквивалентны. Локальный подход, т. е. уравнение (3.11.7), полезен для выяснения общих свойств решения задачи о средней плотности излучения. Так, например, сразу видно, что рассеяние света (без поглощения и без изменения частоты) никак не влияет на спектр — изотропное поле излучения после рассеяния остается изотропным.

Для общей плотности энергии  $\epsilon$  получим, интегрируя (3.11.7) по  $\omega$ , уравнение

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -4H\epsilon(t) + Q(t), \quad (3.11.8)$$

где

$$\epsilon = \int_0^\infty \epsilon_v(\omega, t) d\omega, \quad Q = \int_0^\infty \Phi(\omega, t) d\omega.$$

Из уравнения (3.11.7) видно, что к данному решению этого уравнения с источниками света [т. е. с членом  $\Phi(\omega, t)$ ] всегда можно прибавить решение однородного уравнения (без  $\Phi$ , т. е. без источников). Таким решением является, в частности, планковское распределение

$$\epsilon_v(\omega, t) = \text{const} \cdot \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (3.11.9)$$

с температурой  $T$ , зависящей от времени по закону

$$\frac{dT}{dt} = -HT. \quad (3.11.10)$$

Это утверждение легко проверить подстановкой (3.11.9) в (3.11.7) при  $\Phi=0$ . Такой планковский спектр, полностью равновесный, т. е. с коэффициентом дилуции, равным 1, и с  $T_{пл}=2^\circ,7$ , наблюдается в настоящее время как следствие высокой температуры вещества на ранних этапах расширения (см. раздел II)\*). Грубую оценку плотности энергии одних источников излучения без учета излучения горячей модели можно получить из уравнения (3.11.8), полагая, что решение является квазистационарным, т. е. пренебрегая членом с  $\frac{d}{dt}$ .

\*) Из уравнения в характеристиках для  $n$  ясно, что любая функция, подобно сжимающаяся по оси частот, является решением уравнения без источников, т. е.

$$n = n\left(\frac{\omega}{\psi(t)}\right), \quad \psi = e^{-\int H dt}, \quad \frac{d\psi}{dt} = -H\psi, \quad \psi \sim (1+z)^{-1}.$$

Для любой функции т. е. любого вида спектра, полная плотность фотонов  $\int n\omega^3 d\omega$  меняется пропорционально  $(1+z)^{-3}$ , а плотность энергии меняется пропорционально  $(1+z)^{-4}$ .

Получим

$$-4H\varepsilon + Q = 0; \quad \varepsilon = \frac{Q}{4H}. \quad (3.11.11)$$

Аналогично в уравнении для спектральной плотности самое грубое приближение состоит в вычеркивании  $\frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial t}$  и  $\frac{\partial (\varepsilon_\nu \omega)}{\partial \omega}$ . Получим

$$\varepsilon_\nu = \frac{\Phi}{4H}. \quad (3.11.12)$$

Можно уточнить спектр: пренебрегая  $\frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial t}$ , но оставляя член  $\frac{\partial (\varepsilon_\nu \omega)}{\partial \omega}$ , получим

$$\varepsilon_\nu(\omega, t) = \frac{1}{H} \omega^3 \int_{\omega}^{\infty} \frac{\Phi(\omega', t)}{\omega'} d\omega'. \quad (3.11.13)$$

В стационарном приближении легко также построить решение при наличии в межгалактическом пространстве пыли, поглощающей свет звезд, нагревающейся при этом и испускающей свой тепловой спектр. Здесь, однако, мы на этом не останавливаемся.

Линейное дифференциальное уравнение для плотности излучения

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -4H(t)\varepsilon(t) + Q(t)$$

может быть решено точно. Ответ можно записать в виде квадратуры (определенного интеграла) при заданной функции  $Q(t)$ . При этом функция  $Q(t)$  сама войдет в ответ линейно, что отвечает физическому смыслу задачи: плотность излучения в данный момент  $t_0$  является суммой вкладов  $Q(\tau)d\tau$  излучения за каждый малый интервал времени от  $\tau$  до  $\tau + d\tau$ , где  $\tau < t$ . Каждый такой вклад преобразуется в ходе расширения от момента  $\tau$  до момента  $t_0$ .

Если выделить таким образом вклад источника  $Q$  за конечное время от  $t_1$  до  $t_0$ , то нужно еще добавить вклад плотности энергии, которая уже имелаась в момент  $t_1$ .

Легко проверить, что выражение

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = \varepsilon(t_0) = & \int_{t_1}^{t_0} Q(\tau) \exp \left[ -4 \int_{\tau}^{t_0} H(\theta) d\theta \right] d\tau + \varepsilon(t_1) \exp \left[ -4 \int_{t_1}^{t_0} H(\theta) d\theta \right], \end{aligned}$$

соответствующее этим идеям, действительно точно удовлетворяет уравнению. Для четкости переменные интегрирования и пределы обозначены разными буквами ( $t_0$ ,  $t_1$ ,  $\tau$ ,  $\theta$ ).

Экспоненты с интегралами имеют очень простой смысл. Так как

$H(t) = \frac{1}{a(t)} \frac{da}{dt}$ , где  $a$  есть радиус мира, то

$$\int_{\tau}^{t_0} H(\theta) d\theta = \ln \frac{a(t_0)}{a(\tau)}, \quad \exp \left[ -4 \int_{\tau}^{t_0} H(\theta) d\theta \right] = \left[ \frac{a(\tau)}{a(t_0)} \right]^4.$$

Плотность энергии, испущенной в момент  $\tau$  за время от  $\tau$  до  $t_0$ , падает, как четвертая степень радиуса или как  $V^{-4/3}$ , где  $V$  — объем, в полном соответствии с термодинамикой излучения. Отношение радиусов в моменты  $\tau$  и  $t_0$  связано с величиной красного смещения:

$$\frac{a(\tau)}{a(t_0)} = 1 - \Delta(\tau) = \frac{1}{1+z(\tau)}.$$

Удобно перейти к  $\Delta$  или  $z$  в качестве переменной интегрирования. При этом воспользуемся выражением (3.3.35), связывающим дифференциалы  $dt$  и  $d\Delta$  или  $dz$ . Получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \int_0^{\Delta_1} Q(\Delta) (1-\Delta)^4 \sqrt{\frac{1-\Delta}{1-\Delta\Omega}} d\Delta + \varepsilon_1 (1-\Delta_1)^4 = \\ &= \int_0^{z_1} Q(z) (1+z)^{-4} \frac{1}{(1+z)^2 \sqrt{1+\Omega z}} dz + \varepsilon_1 (1+z_1)^{-4}. \end{aligned}$$

Напомним, что  $Q$  есть мгновенная мощность излучения в единице физического пространства. Если же ввести мощность излучения, отнесенную к единице массы  $q^*$ , то нужно будет учесть, что  $Q = q^* \rho$ , а также

$$\rho = \rho_0 (1+z)^3 = \rho_0 (1-\Delta)^3,$$

т. е.

$$Q = q^* \rho_0 (1+z)^3 = q^* \rho_0 (1-\Delta)^3.$$

Иногда вводят еще  $Q_s$  — мощность излучения, отнесенную к единице сопутствующего пространства, причем определяют эту единицу так, чтобы она к настоящему времени  $t_0$  совпадала с физической единицей объема  $1 \text{ см}^3$ .

Очевидно, что  $Q_s = Q(1+z)^{-3} = Q(1-\Delta)^3$ . Соответственно

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \int_0^{\Delta_1} Q_s(\Delta) (1-\Delta) \sqrt{\frac{1-\Delta}{1-\Delta\Omega}} d\Delta + \varepsilon_1 (1-\Delta_1)^4 = \\ &= \int_0^{z_1} Q_s(z) (1+z)^{-1} \frac{1}{(1+z)^2 \sqrt{1+\Omega z}} dz + \varepsilon_1 (1+z_1)^{-4}. \end{aligned}$$

Предположение о том, что  $Q$ ,  $Q_*$ ,  $q^*$  зависят непосредственно именно от  $z$  или  $\Delta$ , а не от  $t$  и эта зависимость выражается простыми формулами, является вполне естественным, так как  $z$  и  $\Delta$  прямо связаны с плотностью вещества во Вселенной. Так, например, в наиболее простом предположении об отсутствии эволюции считают  $q^* = \text{const}$ ,  $Q_* = \text{const}$ ,  $Q \sim (1+z)^3 \sim (1-\Delta)^{-3}$ . В этом случае интеграл сходится, даже если распространить его до горизонта ( $\Delta=0$ ,  $z=\infty$ ). Именно это имеют в виду, когда говорят, что в теории расширяющейся Вселенной нет фотометрического парадокса [см., например, Ландау, Лифшиц (1973)].

Рассмотрим другой пример. Пусть Метагалактика заполнена ионизованной плазмой. Мощность ее излучения  $Q \sim n^2 T^{1/2}$ , где  $T$  — температура. При постоянной температуре  $Q \sim (1+z)^6 \sim (1-\Delta)^{-6}$ , интеграл расходится у горизонта \*).

В горячей модели Вселенной как раз и предполагается, что на ранней, дозвездной стадии вещество находится в состоянии полностью ионизованной, однородно распределенной плазмы. При этом определенная плотность излучения получается, очевидно, за счет того, что при высокой плотности имеет место термодинамическое равновесие между плазмой и излучением. Это значит, что излучение уравновешено поглощением света, которое не учитывалось выше. Впоследствии вещество стало нейтральным, оно перестало взаимодействовать со светом (см. следующий раздел), фотонный «газ» расширяется без взаимодействия с веществом. Вклад в среднюю плотность излучения от этой ранней стадии как раз и представляет собой планковский спектр, соответствующий 2,7 °К, о нем подробно говорится в следующем разделе.

Рассеяние, как уже отмечалось, не играет роли, если при этом не меняется частота и энергия света.

Для спектральной плотности  $\epsilon_\nu$  имеет место уравнение (3.11.7) в частных производных. Это уравнение можно решить тем же методом, переходя к  $\Delta$  или  $z$  в качестве переменной [Дорошкевич, Новиков (1964)]. В формальной теории закон изменения частоты в ходе красного смещения дает уравнение характеристик для уравнения в частных производных.

Решение для  $\epsilon_\nu$  было приведено выше [см. (3.8.3)] в связи с конкретным анализом спектра в области радиочастот. Там было показано, как с помощью  $\frac{dt}{dz}$  может быть записана в удобном виде оптическая толща для рассеяния света [см. (3.8.1)]. В этом же параграфе

---

\* ) Если учесть рост температуры с ростом плотности, расходимость только усилится. В области высоких температур, где  $P \approx \epsilon/3$ , меняется выражение  $dt$  через  $dz$  или  $d\Delta$ , что, однако, качественно не меняет все приводимые ниже выводы.

(§ 8) говорилось также о способе расчета средней плотности излучения. Обзор наблюдательных данных, а также некоторые конкретные результаты расчетов, выполненных с использованием формул данного параграфа, приведены в §§ 2 и 3 гл. 5.

## § 12. Однозначно ли объяснение красного смещения расширением Вселенной?

Идея стационарности Вселенной, как показывает исторический опыт, обладает большой привлекательностью, основанной, вероятно, на инерции мышления. Человек привык к малым скоростям. В пределах жизни человека и даже человечества не происходило заметных изменений в большинстве космических систем. Поэтому, когда появилось наблюдательное доказательство красного смещения спектральных линий, последовал ряд попыток дать объяснение смещения линий, отличное от доплер-эффекта. Многие авторы хотели бы избежать представления о доплер-эффекте и взаимном удалении галактик. Уже очень грандиозна картина расширяющейся Вселенной. Казалось гораздо привычнее и «спокойнее» представление о неэволюционирующей Вселенной. Отсюда многочисленные попытки отстоять стационарность Вселенной, дать какое-то иное объяснение «красному космологическому смещению». К сожалению, подобные попытки встречаются иногда еще и сегодня.

В этих объяснениях используется тот факт, что смещение именно красное. Если  $\rho > \rho_c$ , то через  $10^{10}$  лет красное смещение сменится фиолетовым; тогда эти объяснения отпадут автоматически. Но сейчас во всяком случае  $H > 0$ , смещение спектральных линий соответствует уменьшению энергии кванта, т. е. потере квантом части энергии на пути от далеких объектов до земного наблюдателя.

В связи с этим возникает вопрос: насколько однозначна интерпретация красного смещения как эффекта Доплера? Не может ли другая физическая причина вести к покраснению квантов света — фотонов? Первый вариант попытки объяснения основан на гравитационном красном смещении ОТО. В ОТО известно, что световые кванты краснеют, когда они распространяются из области большего гравитационного потенциала к меньшему. Например, краснеют кванты, идущие снизу вверх, у поверхности Земли. Этот эффект измерен в лаборатории. Кванты, движущиеся сверху вниз, становятся более фиолетовыми.

Однако эффект покраснения квантов в сильном поле тяготения никак не может объяснить космологическое красное смещение. Это ясно из рассмотрения, проведенного в § 5 этой главы. Во-первых, эффект чрезвычайно слаб в однородной Вселенной при современной плотности. Во-вторых, смещение пропорционально квадрату расстояния, а не первой степени, как это имеет место в законе Хаббла, и, в-третьих, самое важное, имеет другой знак — смещение



должно быть фиолетовым, а не красным! Действительно, это прямо видно из формулы (3.5.10).

Разумеется, гравитационное изменение частоты квантов учитывается в точных формулах теории космологического красного смещения, и формулы § 5 это наглядно демонстрируют. Однако это эффект второго порядка малости. Он во всяком случае не основной в красном смещении.

Часто для объяснения красного смещения высказывались идеи о «старении» квантов, о каком-то механизме потери энергии квантами по мере их распространения в пространстве. Возникли два варианта объяснения:

1. Квант по пути от источника до наблюдателя взаимодействует с межгалактическим веществом и отдает ему часть своей энергии.

Такое объяснение сразу опровергается, ибо взаимодействие должно носить характер рассеяния. Отдача энергии сопровождается передачей импульса. При этом, вообще говоря, должно меняться и направление кванта, что должно привести к размыванию изображения источника. Такого размывания на опыте нет.

2. Квант спонтанно распадается. Например, он испускает пару нейтрино — антинейтрино, отдавая им малую долю своей энергии. Согласно законам сохранения энергии и импульса квант может испускать только частицы с массой покоя, равной нулю, притом частицы, летящие параллельно направлению полета фотона.

Однако Бронштейн (1934) показал, что такой процесс, если бы он существовал, был бы давно замечен в лабораторных экспериментах. Бронштейн показал, что вероятность самопроизвольного распада кванта должна быть обратно пропорциональна частоте.

Вывод Бронштейна вытекает из следующих соображений. Вспомним известную зависимость для самопроизвольно распадающейся частицы, например  $\mu$ -мезона, между временем жизни и энергией.

Пусть  $T_0$  — время жизни покоящегося мезона. Тогда, если он движется со скоростью  $v$ , его время жизни  $T$  есть

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.12.1)$$

Энергия движущегося мезона есть

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.12.2)$$

где  $m_0$  — масса мезона.

Вероятность распада кванта обратно пропорциональна времени жизни,  $W = \frac{1}{T}$ , а энергия есть  $E = hv$ . Отсюда находим

$$EW = m_0 c^2 W_0 = \text{const}, \quad hv k' = \text{const}, \quad W = \frac{\text{const}'}{v}.$$

Это и есть формула Бронштейна. Согласно принципу лоренц-инвариантности эта формула универсальна и для мезонов и для фотонов.

Но если бы вероятность распада фотона действительно была обратно пропорциональна частоте, то особенно быстро распадались бы кванты радиоволн. Ничего подобного не наблюдается. Красное смещение волн в радиодиапазоне точно такое же, как и в оптическом. Это непосредственно проверено наблюдением радиолинии  $\lambda=21$  см у далеких галактик.

Несмотря на указанные соображения, конкретный вариант гипотезы старения квантов развивают в последнее время Пекер, Робертс и Вижье (1972). Они полагают, что фотоны теряют энергию при рассеянии на других фотонах. Для межгалактических объектов предполагается, что играет роль рассеяние на реликтовом излучении. Вижье ссылается на авторов, утверждающих, что лучи, проходящие возле солнечного диска, испытывают красное смещение, усиленное в соответствии с плотностью излучения при температуре Солнца.

Наблюдения эти лежат на пределе точности и потому недоказательны. С другой стороны, квантовая электродинамика отрицает возможность *такого* взаимодействия фотонов. Все без исключения предсказания квантовой электродинамики согласуются с опытом, и, следовательно, нельзя согласиться с гипотезой Вижье. Итак, нет никаких приемлемых объяснений красного смещения, кроме представления о расширяющейся Вселенной. Подчеркнем здесь еще раз, что, без измерения красного смещения, уже из уравнений механики следует, что однородное распределение вещества должно быть нестационарным (см. § 2 гл. 1), и красное смещение в спектрах галактик, являющееся эффектом Доплера, подтверждает это.

## ГЛАВА 4

### КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ

#### § 1. Отлична ли космологическая постоянная от нуля?

Основой теории тяготения является представление о возможности искривления реального пространства-времени (его римановой метрики).

Замечательно, что эта идея практически однозначно приводит к определенному виду уравнений ОТО при использовании только самых общих и естественных предположений о том, что теория в пределе переходит в специальную теорию относительности и ньютоновскую теорию тяготения.

Все же, как показал сам Эйнштейн в 1917 г. [см. Эйнштейн (1966)] существует одна возможность изменения ОТО — введение в ОТО параметра, который должен определяться из наблюдения или опыта. Этот параметр оказывается существенным лишь в масштабе всей Вселенной и потому получил название «космологическая постоянная». Ее обозначают  $\Lambda$ , размерность  $\Lambda$  —  $см^{-2}$ .

В принципе величину  $\Lambda$  можно было бы определить и достаточно точным лабораторным методом. Однако уже из размерности  $\Lambda$  видно, что связанные с этой величиной эффекты характеризуются безразмерным произведением  $\Lambda l^2$ , где  $l$  — характерная длина (размер экспериментального прибора или области наблюдения). Внегалактические, космологические наблюдения ограничивают значение  $\Lambda$  такой величиной ( $|\Lambda| \leq 10^{-55} см^{-2}$ ), при которой лабораторное ее определение становится безнадежным. Вопрос о  $\Lambda$  оказывается (как уже отмечено во введении) как раз той новой проблемой, которая возникает при переходе к гигантским масштабам Вселенной.

Перед тем как будут выписаны уравнения, остановимся кратко на истории вопроса (в этом месте неизбежны некоторые повторения сказанного во введении к книге) и некоторых принципиальных моментах.

Приступая к развитию космологии на базе ОТО, Эйнштейн считал желательным найти статическое решение с замкнутой геомет-

рий трехмерного пространства. Предполагалось, что статичность, т. е. независимость от времени, соответствует большому возрасту небесных тел (начиная с Земли, для которой уже был известен возраст в несколько миллиардов лет). Замкнутая модель считалась предпочтительной, как более соответствующая физическим идеям Маха — принципу Маха (см. об этом раздел V). В замкнутой модели содержится конечное количество вещества, и можно было предположить, что именно это вещество как-то выделяет локально инерциальную систему координат. Мах полагал, что инерция тела зависит от взаимодействия этого тела с остальным веществом; такая точка зрения более приемлема, если количество остального вещества ограничено.

Все исследования и расчеты предыдущих глав проделаны в предположении  $\Lambda=0$ . Среди этих решений нет статического решения, а замкнутый или открытый характер геометрии зависит от плотности вещества.

В 1917 г. Эйнштейн не располагал нестатическими решениями (они были получены Фридманом в 1922—1924 гг.). Однако прямая подстановка статической метрики  $g_{\mu\nu}$  для замкнутого мира в уравнения тяготения указывала, что уравнениям удовлетворить нельзя, если не видоизменить их. Оказалось, что как раз естественный способ изменения — введение  $\Lambda$  — позволяет удовлетворить уравнениям с помощью статических  $g_{\mu\nu}$  и, что особенно замечательно, такой статический мир автоматически оказывается замкнутым.казалось, что одни только очень общие принципы фиксируют вид уравнений тяготения вместе с  $\Lambda$ -членом и, что еще важнее, позволяют угадать строение Вселенной как замкнутого статического мира.

Однако в 20-х годах появились работы Фридмана, в которых было показано, что, во-первых, космологические уравнения ОТО (2.1.8) — (2.1.10) имеют решения и без  $\Lambda$ -члена (вопреки мнению Эйнштейна), но что эти решения должны быть нестатическими, а во-вторых, что и уравнения с  $\Lambda$ -членом могут давать и статические и нестатические решения. Все эти модели с  $\Lambda$ -членом могут быть и с замкнутым пространством и открытые. Статический мир с  $\Lambda$ -членом (автоматически являющийся замкнутым) оказался весьма вырожденным решением уравнений Эйнштейна. После краткого недоразумения Эйнштейн признал теоретическую корректность этих работ.

Вскоре, в 1929 г. (Фридман не дожил до этого времени), Хаббл объявил об открытии закона красного смещения, которое было истолковано как подтверждение эволюционирующей модели Вселенной. Весьма поучительно не только с научной, но и с точки зрения психологии научного творчества («падающего — толкни»), как одновременно отпали те доводы, которые приводились в пользу статической замкнутой модели. Стало ясно, что звезды расходуют ядерную энергию на излучение, так что они могут светить долго (Солнце  $\sim 10^{10}$  лет, очень массивные звезды —  $10^6$  лет), но не бесконечно

долго. Уже с этой точки зрения статическая модель не годится! К тому же выяснилось, что статическая модель неустойчива по отношению к малым возмущениям плотности.

Правда, одно время казалось, что модели без  $\Lambda$ -члена дают слишком короткую «шкалу времени» — времени от сингулярности до сегодняшнего дня — всего несколько миллиардов лет, так как постоянная Хаббла оценивалась тогда в  $500 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ . Время  $H_0^{-1}$  оказалось меньше даже возраста Земли! Поэтому считалось желательным введение  $\Lambda$ -члена, чтобы растянуть время расширения Вселенной. Однако в послевоенные годы выяснилось, что расстояния до галактик были сильно занижены. Пересмотр этого вопроса привел к значению  $H_0 \approx 75\text{—}50 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ , и противоречия с короткой шкалой отпали. Отпала и необходимость в  $\Lambda$ -члене.

Принцип Маха постепенно поблек и не может служить аргументом в пользу замкнутости Вселенной. Критический анализ основ классической физики, проделанный Махом, был психологически полезен для подготовки новых теорий. Однако СТО, как и ОТО, построенные на фундаменте (не на развалинах!) классической физики, оказались локальными теориями, теориями без дальнего действия, и идеи Маха о том, что инерция тел определяется далекими массами, в этих теориях не реализуются.

Эйнштейн после открытия Фридманом нестационарных решений заявил, что введение  $\Lambda$ -члена было ненужным осложнением теории, что нет данных, которые бы требовали введения  $\Lambda$ . Такую же точку зрения высказывают Ландау и Лифшиц (1973).

Нельзя, однако, отрицать, что этот подход является субъективным; астрономические данные не требовали  $\Lambda$ , отличного от нуля, но и не опровергали такой возможности. Это  $\Lambda \neq 0$  должно быть достаточно малым по модулю для того, чтобы теория не вступила в противоречие с данными о нашей окрестности до  $1000\text{—}1500 \text{ Мпс}$  [или  $(3\text{—}5) \cdot 10^9 \text{ лет}$  по шкале времени], и вместе с тем такое  $\Lambda$  может быть достаточно малым для того, чтобы радикально повлиять на строение и эволюцию Вселенной как целого.

Уже одного стремления к объективности и полноте должно быть хватить для того, чтобы теория с  $\Lambda \neq 0$  нашла место хотя бы петитом в приложении. Здоровые, спокойные решения часто принимают лишь под давлением чрезвычайных обстоятельств, в обстановке пожара и (или) наводнения и паники.

Роль факела сыграли квазары. В 1967 г. появились данные — статистическая их значимость до сих пор не ясна и, скорее всего, сводится к нулю — о концентрации квазаров при определенном значении красного смещения  $z=1,95$  [последний обзор с библиографией см. Бэрбидж и О'Делл (1973)]. Было выдвинуто объяснение этого в рамках космологической модели, длительное время «почти статической» при указанном  $z$  за счет космологической постоянной  $\Lambda \neq 0$  (см. стр. 131). Последовало бурное обсуждение доводов за и

против такого объяснения \*). Знание основных свойств теории с  $\Lambda \neq 0$  стало необходимым уже для того, чтобы понимать статьи, публикуемые в журналах. Мы считаем целесообразным привести здесь основные формулы, касающиеся однородных изотропных моделей с  $\Lambda$ -членом [см. также Зельдович (1967)]. Во всей остальной книге мы считаем  $\Lambda = 0$ .

## § 2. Космологические модели с $\Lambda$ -членом

Уравнения Эйнштейна при введении  $\Lambda$ -члена имеют следующий вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{\kappa}{c^2} T_{ik} + g_{ik} \Lambda$$

(обозначения см. § 1 гл. 2). Из этого выражения мы видим, что новый член эквивалентен дополнительному члену в тензоре энергии-импульса. Этот член дает плотность энергии

$$\epsilon_\Lambda = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \quad (4.2.1)$$

и давление

$$P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda = -\frac{c^4 \Lambda}{8\pi G}. \quad (4.2.2)$$

Можно ввести также плотность массы

$$\rho_\Lambda = \frac{\epsilon_\Lambda}{c^2} = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}. \quad (4.2.3)$$

Введенные величины не зависят от плотности частиц, поэтому можно говорить о  $\rho_\Lambda$ ,  $\epsilon_\Lambda$  и  $P_\Lambda$  как о плотности массы, плотности энергии и давлении пустого пространства, вакуума. Мы проанализируем влияние этих величин на поведение Вселенной в ньютоновской манере, как в гл. 1. Такой анализ позволит объяснить также, почему Эйнштейн назвал  $\Lambda$  «космологической» постоянной.

При этом, однако, будет учтено, что в уравнение для ускорения входит  $\epsilon + 3P$  [см. (1.6.2) и (2.1.8)], так что при  $\Lambda \neq 0$  в уравнение войдет комбинация

$$\epsilon_\Lambda + 3P_\Lambda = \epsilon_\Lambda - 3\epsilon_\Lambda = -2\epsilon_\Lambda = -\frac{c^4 \Lambda}{4\pi G}.$$

Далее, уравнение (1.6.5) для «кинетической энергии» будет написано сразу с тем значением константы, которое следует из ОТО [см. уравнение (2.1.9)], когда масштабный фактор выбран как радиус мира:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{4\pi G}{3c^2} a^2 (\epsilon + \epsilon_\Lambda) - \frac{kc^2}{2}. \quad (4.2.4)$$

\*) В этой же связи дискутировался и вопрос о соотношении ОТО (и, в частности, космологической постоянной) и теории элементарных частиц. Этот круг вопросов рассмотрен в ТТ и ЭЗ. В свете новых физических теорий мы коснемся этих вопросов в гл. 23.

При этом  $k=-1$  для гиперболической метрики [формула (2.3.2), открытый мир],  $k=1$  для сферической метрики [формула (2.2.6), замкнутый мир] и  $k=0$  для плоского евклидова мира [формула (2.5.2), где мы условились писать  $b$  вместо  $a$ ]. Здесь  $\epsilon$  и  $P$  без индексов относятся к обычной материи: звездам, межгалактическому газу, излучению; очевидно, что  $\epsilon > 0$ ,  $P > 0$ .

Отметим, что с трактовкой  $\epsilon_\Lambda$  и  $P_\Lambda$  как плотности энергии и давления вакуума полностью согласуется тот факт, что эти величины удовлетворяют закону сохранения энергии (первому началу термодинамики) в форме  $dE_\Lambda = d(\epsilon_\Lambda V) = -P_\Lambda dV$ , причем  $P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda = \text{const.}$  Как отмечено в ТТ и ЭЗ, значения  $\epsilon_\Lambda$  и  $P_\Lambda$  к тому же и лоренц-инвариантны, одинаковы во всех движущихся друг относительно друга координатных системах.

Вместо (2.1.8) и (2.1.9) мы теперь имеем

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3c^2} a (\epsilon + 3P + \epsilon_\Lambda + 3P_\Lambda) = -\frac{4\pi G}{3c^2} a (\epsilon + 3P - 2\epsilon_\Lambda), \quad (4.2.5)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{4\pi G}{3c^2} a^2 (\epsilon + \epsilon_\Lambda) - \frac{kc^2}{2}. \quad (4.2.6)$$

Наиболее важное свойство новых уравнений — возможность статического решения: если

$$\epsilon_\Lambda = \frac{\epsilon + 3P}{2}, \quad k = 1 = \frac{4\pi G}{c^4} a^2 (\epsilon + P), \quad (4.2.7)$$

то из (4.2.5) и (4.2.6) следует:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = 0, \quad \frac{da}{dt} = 0, \quad a = \text{const.} \quad (4.2.8)$$

Заметим, что статического решения не существует без космологического члена, так как материя имеет  $\epsilon > 0$ ,  $P > 0$ , что, согласно (4.2.5), несовместимо с  $\frac{d^2 a}{dt^2} = 0$ . В случае  $\Lambda \neq 0$  статическое решение получается благодаря отрицательному давлению  $P_\Lambda$ , которое превосходит положительное  $\epsilon_\Lambda$  в выражении  $\epsilon_\Lambda + 3P_\Lambda = \epsilon_\Lambda - 3\epsilon_\Lambda = -2\epsilon_\Lambda$ . Далее, очевидно, что статическое решение должно быть замкнутым: условие  $\frac{d^2 a}{dt^2} = 0$  дает  $\epsilon + 3P - 2\epsilon_\Lambda = 0$ , откуда  $\epsilon + \epsilon_\Lambda$  — величина в правой части уравнения (4.2.6) — получится определенно положительной,  $\epsilon + \epsilon_\Lambda = \epsilon + \frac{\epsilon + 3P}{2} = \frac{3}{2}(\epsilon + P)$ . [Предлагаемая трактовка

близко следует Бонди (1961).] Следовательно, если  $\left( \frac{da}{dt} \right)^2 = 0$ , то  $k=1$ , мир замкнут. Радиус его выражается через плотность и давление вещества. Такое решение, называемое космологической моделью Эйнштейна, реализует пожелания Эйнштейна — замкнутость и статичность Вселенной.

Обратимся к космологической модели с  $\Lambda \neq 0$ , предложенной недавно в связи с исследованием квазаров. Сначала Петросян, Солпитер и Шекерс (1967) ввели  $\Lambda$ , чтобы объяснить соотношение красное смещение — видимая величина для квазаров. Вскоре после этого Шкловский (1967) и Кардашев (1967) предложили космологическую модель с  $\Lambda$ , выбранной так, чтобы расширение имело длительную задержку на определенном радиусе. Одно время казалось, что имеются указания на концентрацию квазаров при определенном красном смещении  $z=1,95$ ; возможное объяснение заключается в том, что это смещение достигается при радиусе  $a$ , когда приближенно выполнены соотношения (4.2.7) и Вселенная длительно почти не расширяется. Таким образом, предлагается модель, которая в течение длительного времени весьма близка к статической модели Эйнштейна; следовательно, модель является замкнутой. Оказывается, что условие «плато» для функции  $a(t)$  при определенном  $z=1,95$  и сегодняшнее значение постоянной Хаббла  $H_0$  полностью определяют основные свойства модели. Значит,  $a_{\text{задержки}} = a_0/1,95$ . Связь между радиусом и красным смещением  $a_0/a = 1+z$ , полученная нами в гл. 3, сохраняется, очевидно, и при наличии  $\Lambda \neq 0$ . Ниже полагаем, что можно пренебречь давлением материи (в том числе давлением излучения, входящего в состав материи). Тогда плотность материи на время задержки  $\rho' = \rho_0(1+z)^3$ . После этого из (4.2.7) легко найдем основные характеристики модели.

Расчет дает (полагаем  $H_0 = 75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ ,  $\rho_c = 10^{-29} \text{ г/см}^3$ )

$$\rho_\Lambda = 1,3 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3, \quad \varepsilon_\Lambda = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ эрг/см}^3, \quad \Lambda = 2,6 \cdot 10^{-56} \text{ см}^{-2}. \quad (4.2.9)$$

Плотность обычной материи в этой модели в настоящее время  $\rho_0 = 10^{-30} \text{ г/см}^3$ , радиус мира  $a = 2 \cdot 10^{28} \text{ см}$ ; на плато  $\rho' = (1+1,95)^3 \rho_0 = 2,5 \cdot 10^{-28} \text{ г/см}^3$ ,  $a' = \frac{a_0}{1+1,95} = 0,75 \cdot 10^{28} \text{ см}$ . Длительность пребывания на плато можно принять любой. Эта длительность пропорциональна  $\ln \frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_0'}$  или  $\ln \frac{\Lambda}{\Lambda'' - \Lambda}$ , где величины с двумя штрихами суть значения параметров, дающие строго статическую модель. Кардашев принимает длительность порядка  $7 \cdot 10^{10} \text{ лет}$ , для чего нужно  $\frac{\rho_0 - \rho_0'}{\rho_0}$  порядка  $10^{-4}$ . Замкнутый мир с длительной задержкой расширения обладает своеобразной особенностью: за время задержки световой (или радио-) луч успевает несколько раз обойти всю Вселенную. За время, равное  $\frac{\pi a'}{c} = 2,6 \cdot 10^{10} \text{ сек}$ , луч приходит от антицентра, т. е. от точки, где  $r = \pi$  в метрике  $ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)[dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]$ . За вдвое большее время луч обходит весь мир и возвращается в точку испускания. Формально при  $r = \pi$  и  $r = 0$  происхо-



дит фокусировка лучей, угловое и болометрическое расстояния обращаются в нуль, поток энергии, принимаемый нами, сильно зависит от того, имеется ли близко от антиполюса (случайно) источник излучения (то же относится к источнику в далеком прошлом в том месте, где сейчас находится Галактика и где выбрано начало системы координат). В ряде работ обсуждаются причины, нарушающие точную фокусировку лучей, характерную для строго однородной и изотропной модели. Наблюдения не подтверждают фокусировки лучей. В целом концепция космологической модели с  $\Lambda \neq 0$  и плато для  $a(t)$  при  $z=1,95$  в настоящее время в значительной мере утратила свою привлекательность.

Теперь рассмотрим общую постановку задачи о динамике и геометрии моделей с  $\Lambda \neq 0$  с тем, чтобы классифицировать все типы решений. Для удобства сравнения с наблюдениями (реальными или будущими) предположим, что известны современные значения постоянной Хаббла  $H_0$  и плотности вещества  $\rho_0$ ; давлением вещества пренебрегаем. Пусть, далее, известна  $\rho_\Lambda$  или связанное с ней согласно уравнению (4.2.5) значение ускорения.

Характер решения уравнений (4.2.5), (4.2.6) зависит только от безразмерных величин; снова введем безразмерную плотность  $\Omega$  и безразмерное ускорение  $q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$ . До тех пор, пока рассматривалась теория с  $\Lambda=0$  при  $P=0$ , величины  $q_0=q(t_0)$  и  $\Omega$  были синонимами:  $q_0 = \frac{\Omega}{2}$ . Однако при  $\Lambda \neq 0$  из (4.2.5) найдем  $q_0 = \frac{\Omega}{2} - \frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3H_0^2}$ , так что разность  $\lambda \equiv \frac{\Omega}{2} - q_0 = \frac{\rho_\Lambda 8\pi G}{3H_0^2}$  характеризует  $\Lambda$ ; величина  $\lambda$  есть безразмерная (отнесенная к  $\rho_c$ ) плотность, соответствующая космологической постоянной, т. е.

$$\lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}.$$

Введем еще параметры  $x = \frac{1}{1+z} = \frac{a(t)}{a_0}$ ,  $\tau = tH_0$ , а также  $\alpha = a_0 \frac{H_0}{c}$  — безразмерный радиус мира в настоящий момент. Уравнение первого порядка

$$\frac{1}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{4\pi G a^2}{3} (\rho + \rho_\Lambda) - \frac{kc^2}{2} \quad (4.2.10)$$

преобразуем, деля на  $H_0^2 a_0^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{da}{a_0 H_0 dt} \right)^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \frac{4\pi G}{3H_0^2} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 \left[ \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \rho_\Lambda \right] - \frac{k}{2} \left( \frac{c}{a_0 H_0} \right)^2 = \\ &= x^2 \left[ \frac{\Omega}{2} \frac{1}{x^3} + \frac{\lambda}{2} \right] - \frac{k}{2\alpha^2}. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Полученное уравнение имеет вид закона сохранения энергии для движения материальной точки с координатой  $x$  в зависимости от времени  $\tau$  в потенциале, зависящем от  $x$ . Уравнение можно преобразовать, вводя  $q_0$  вместо  $\lambda$  и учитывая, что  $H_0$  характеризует скорость расширения в настоящий момент, когда  $x=1, \frac{da}{dt}\big|_{a=a_0} = H_0 a_0$ , откуда следует, что  $\frac{dx}{d\tau} = 1$  при  $x=1$ . Благодаря этому константа  $\alpha^{-2}$  не является независимой, а выражается из (4.2.11) через  $\Omega$  и  $\lambda$  или  $\Omega$  и  $q_0$ . Окончательно получим

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{\Omega}{x} + \lambda x^2 + 1 - \Omega - \lambda = \frac{\Omega}{x} + \left(\frac{\Omega}{2} - q_0\right)x^2 + 1 + q_0 - \frac{3}{2}\Omega. \quad (4.2.12)$$

В таком виде уравнение применимо ко всем трем вариантам геометрии (замкнутый, гиперболический, плоский мир). Решения, описывающие нашу Вселенную, проходят через точку  $x=1$ . Для получения всех детальных сведений о зависимости яркости и числа галактик от красного смещения нужно было бы интегрировать уравнение (4.2.12), а затем и уравнение распространения лучей:  $ds=0$ ,  $c dt = a(t)dr$ . Это и было сделано в ряде работ; см., например, Стейбелл и Рефсдал (1966). Получающиеся зависимости довольно сложны, особенно когда происходит многократное обегание Вселенной световыми лучами. Здесь, однако, можно ограничиться исследованием общего характера эволюции. Для этого достаточно построить кривые  $f(x)$ , где  $f(x)$  — правая часть выражения (4.2.12). Если  $f(x) > 0$  в интервале  $0 < x < 1$ , то движение от  $x=0, \tau=0$  до  $x=1, \tau=\tau_1$  происходило монотонно, в прошлом имела место сингулярность, эволюция качественно подобна эволюции мира с  $\Lambda=0$ , для которого функция  $f(x) = \frac{\Omega}{x} + 1 - \Omega$  и удовлетворяет условию  $f(x) > 0$  при  $x < 1$ . Назовем такую ситуацию вариантом I. Возможен, однако, и случай, когда в области  $x_1 < x < x_2$   $f(x) < 0$ . Это значит, что указанная область запрещена (энергетический барьер).

В этом случае в прошлом радиус Вселенной был бесконечен, Вселенная сначала сжималась от  $x=\infty$  до определенного  $x_2$ , а затем расширилась от  $x_2$  (отражение частицы от энергетического барьера) и в настоящее время находится в фазе расширения.

Такая ситуация (назовем ее вариантом II) вряд ли годится для описания нашей Вселенной: в ней нет сингулярности, нет периода большой плотности вещества. Между тем именно в период большой плотности естественно возникает равновесный спектр излучения (реликтовое излучение, РИ, см. далее); в варианте II спектр РИ необъясним \*).

\*) Чтобы остановка происходила при большой плотности, когда мог бы установиться равновесный спектр РИ, понадобилось бы большое значение  $\Lambda$ , несовместимое с наблюдениями.

Аналогично можно рассмотреть и будущее Вселенной. Оно зависит от поведения  $f(x)$  при  $x > 1$ . Если  $f(x) > 0$  при  $x > 1$ , то имеет место неограниченное расширение (вариант III). Если  $f(x) = 0$  при некоем  $x_3 > 1$ , то сегодняшнее состояние,  $x = 1, \frac{dx}{dt} = 1$ , приведет к расширению до  $x = x_3$ , которое затем сменится сжатием, причем сжатие дойдет до сингулярности,  $x = 0$  (вариант IV).

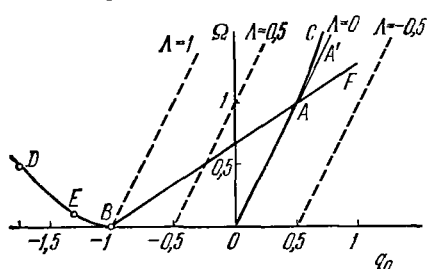


Рис. 24. Диаграмма  $q_0$ — $\Omega$  для космологических моделей с различными значениями  $\Lambda$ .

Вся информация о различных вариантах геометрии и эволюции при  $\Lambda \neq 0$  сведена на рис. 24. Координатами являются величины, в принципе (но, увы, не практически — сегодня по крайней мере) наблюдаемые по нашей близкой окрестности: параметр ускорения  $q_0$  и безразмерная плотность материи  $\Omega$ . Напомним, что давление обычной материи

считается пренебрежимо малым,  $q_0$  может быть и положительным, и отрицательным.

Линия  $OAA'$  соответствует  $\Lambda = 0$  — случаю, подробно рассмотренному ранее. Параллельные ей пунктирные линии соответствуют  $\Lambda = \text{const}$ :  $\Lambda > 0$  слева от  $OAA'$  и  $\Lambda < 0$  справа от  $OAA'$ . Линия  $BAF$  соответствует трехмерному плоскому миру ( $k=0$ ), ее уравнение

$$\Omega = \frac{2}{3} (1 + q_0). \quad (4.2.13)$$

Эта линия отделяет решения, соответствующие замкнутому миру (левее  $BAF$ ), от решений для открытого мира (правее  $BAF$ ).

Обратимся к различным типам эволюции. Линия  $BED$  отделяет два типа прошлого: правее  $BED$  (I) и левее  $BED$  (II). Модель Кардашева с длительной задержкой весьма близка к точке  $E$  (но чуть выше и правее). Наконец, линия  $OAC$  разделяет два типа будущего: левее  $OAC$  уравнения предсказывают неограниченное расширение — вариант III, правее  $OAC$  — вариант IV. В моделях без  $\Lambda$ -члена будущее и геометрический тип были связаны однозначно: замкнутый мир эволюционировал по типу IV, плоский или открытый — по типу III. Как видно из рис. 24, эта связь не имеет места в случае  $\Lambda \neq 0$ . Здесь имеется область, для которой мир геометрически (трехмерно) замкнут и тем не менее ему предстоит неограниченное расширение. В другой области, напротив, гиперболическому миру предстоит остановка и переход от расширения к сжатию в будущем.

Отметим в заключение любопытное частное решение, соответствующее точке  $B$ , — плоский мир без материи, с метрикой,

имеющей вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^{2H_0 t} (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

для чего нужно  $\lambda=1$ ,  $\Lambda = \frac{3H_0^2}{c^2} = 2 \cdot 10^{-56} \text{ см}^{-2}$ . Это — метрика так называемой стационарной Вселенной.

В этом варианте расширение происходит неограниченно во времени и в прошлом, и в будущем, мир не статичен, но стационарен в том смысле, что все его локальные свойства не зависят от времени \*). Буквально это решение неприменимо ко Вселенной с материей (когда  $\Omega \neq 0$ ,  $\rho \neq 0$ ), но оно вдохновляло некоторые попытки описания вечной стационарной Вселенной, которые, несмотря на отрицательное отношение к ним, мы рассмотрим позже, в разделе V.

---

\*) Формально, прибавляя к  $t$  константу и меняя масштаб безразмерных координат, мы возвращаемся к исходной ситуации. •

# ПРИЛОЖЕНИЕ К РАЗДЕЛУ I ПОЛУЗАМКНУТЫЕ МИРЫ И ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТРИКИ КРУСКАЛА

Замкнутый мир ( $k=1$ ) обладает рядом замечательных свойств. Например, полная энергия (масса) его тождественно равна нулю, полный электрический заряд также равен нулю [см. Ландау и Лифшиц (1973)]. Полезно

рассмотреть случай, когда однородное распределение вещества на некотором расстоянии от начала координат обрывается и дальше идет вакуум, т. е. рассмотреть изолированное тело. Это рассмотрение поможет понять свойства замкнутого мира. Для понимания этого приложения от читателя требуется знакомство с теорией сферического поля тяготения, метрикой Шварцшильда и координатами Крускала в этой метрике (см. ТТ и ЭЗ).

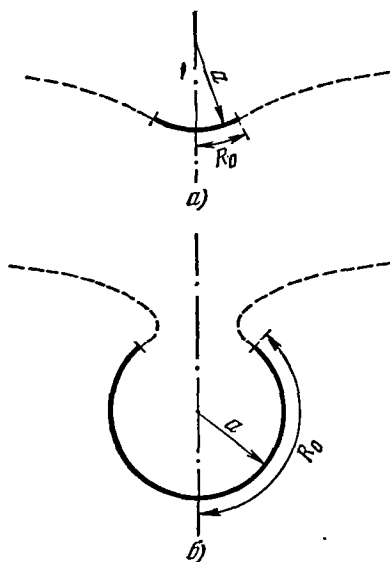
Для замкнутого мира есть момент наибольшего расширения, когда скорость деформации на мгновение равна нулю и вещество мгновенно покоится. Будем рассматривать этот момент  $t_m$  и для простоты ограничимся случаем пылевидного вещества без давления,  $P=0$ . Напомним (см. § 1 гл. I), что эволюция шара произвольного радиуса  $R_0$  и все его свойства никак не зависят от наличия или отсутствия окружающего вещества, которое не влияет гравитационно на вещество внутри шара.

Рассмотрим шар, представляющий часть замкнутого мира, и будем считать, что все внешнее вещество (вне радиуса  $R_0$ ) отсутствует, т. е. это шар в пустом пространстве. Вдали от шара поле слабое, и на бесконечности пространство евклидово. Вблизи шара искривление пространства зависит от силы гравитационного поля. При фиксированной плотности  $\rho$  сила поля зависит от размера шара. Пока радиус  $R_0$  шара мал кривизна пространства в нем не проявляется,

так как  $a = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}} \gg R_0$  (рис. 25).

Рис. 25. Вращение кривых вокруг вертикальной линии дает изображение двумерного аналога искривленного пространства для изолированного тела. Эти же поверхности являются пространственными поверхностями  $\theta=\pi/2$  в искривленном пространстве: а) радиус шара  $R_0$  много меньше радиуса кривизны пространства  $a$ , создаваемого веществом шара плотности  $\rho$ ; б) полузамкнутый мир,  $R_0 > \pi a/2$ .

Но если увеличивать радиус шара при фиксированной плотности, т. е. добавлять новые слои вещества, то влияние кривизны на геометрическую структуру



пространства внутри шара растет. Как мы видели в § 2 гл. 2, поверхность шара  $s = 4\pi a^2 \sin^2 r_0$ , где  $r_0$  — радиальная координата поверхности шара, а объем

$$V = 4\pi a^3 \left[ \frac{1}{2} r_0 - \frac{1}{4} \sin 2r_0 \right];$$

радиус шара  $R_0 = ar_0$ . Мы видим, что с ростом  $r_0$  отличие от формул евклидовой геометрии становится все больше.

Наконец, после увеличения радиуса до значений, больших  $R_0 = \pi/2$ , в геометрии внутренности шара появится характерная особенность, свойственная замкнутому миру: уменьшение площади сфер с их удалением от центра (т. е. с ростом  $r_0$ ), если они лежат за максимальной «экваториальной сферой»  $R_0 = \pi/2$ . Каковы свойства пространства вне такого шара, получившего название «полузамкнутого мира» [Клейн (1961), Зельдович (1962а), Новиков (1962, 1963, 1964а), Гаррисон, Торн, Вакано, Уилер (1965)]? Что представляет собой полузамкнутый мир для внешнего наблюдателя?

Внешнее гравитационное поле шара должно быть сферически-симметричным. Известно (см., например, ТТ и ЭЗ), что единственное сферическое поле тяготения описывается метрикой Шварцшильда и зависит только от одной константы — внешней гравитационной массы  $m$  (т. е. от полной энергии шара). Полная структура поля Шварцшильда описывается метрикой Крускала (см. § 14 гл. 3 ТТ и ЭЗ). Формулы для этой метрики приведены в конце данного приложения. Сейчас мы рассмотрим вопрос качественно.

Будем рассматривать шар в фиксированный момент наибольшего расширения  $t_m$  и будем менять только радиус шара  $r_0$  в этот момент, добавляя новые слои при фиксированной плотности, и, следовательно, будем менять массу шара. Чем больше масса, тем больше гравитационный радиус тела  $\tilde{r}_g$ . В конце приложения показано, что  $\tilde{r}_g = a_{\max} \sin^3 r_0$ , в то время как шварцшильдовский радиус  $\tilde{r}_{\max}$  поверхности шара в момент максимального расширения (определенный как  $\sqrt{s_{\max}/4\pi}$ ) есть, очевидно,  $\tilde{r}_{\max} = a_{\max} \sin r_0$ . Следовательно, отношение  $\tilde{r}_g/\tilde{r}_{\max} = \sin^2 r$  при малых  $r_0$  увеличивается по мере того, как в начальном условии задается шар все большего размера. Пока  $r_0 < \pi/2$ ,  $\tilde{r}_{\max} > \tilde{r}_g$  и полузамкнутости мира еще нет. Это еще «обычный» шар, качественно подобный шару в евклидовой геометрии. Теперь вспомним, что шар нестатичен. Его эволюция во времени определяется зависимостью  $a$  от  $t$ . Шар является частью модели Фридмана, и функция  $a = a(t)$  нам известна (см. рис. 1). Шар расширяется от точки, достигает максимума размеров при  $t_m$  и снова сжимается в точку. Но как протекает эволюция такого шара для внешнего наблюдателя? Пространство-время для всей эволюции такого шара показано на рис. 26. По вертикали — собственное время частиц, по горизонтали — лагранжева координата  $r$ , в пустоте система непрерывно продолжена свободными пробными частицами (подробнее см. § 14 гл. 3 ТТ и ЭЗ). Заштрихована область, занятая материей. Линии  $\tilde{r} = r_g$  — мировые линии гравитационного радиуса. Обычное пространство-время вдали от шара (евклидова бесконечность) находится справа, в области  $R_1$ . Эволюция шара протекает для внешнего наблюдателя следующим образом. Шар расширяется от бесконечной плотности и  $R_0 = 0$ ,  $\tilde{r} = 0$  (точка  $a$ ), выходит из-под своего гравита-

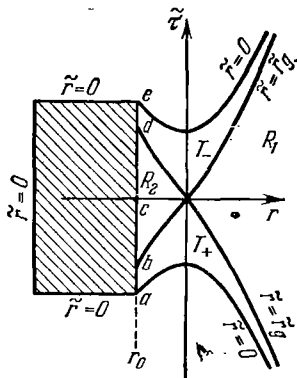


Рис. 26. Пространство-время полузамкнутого мира. Заштрихована область вещества шара.

ционного радиуса (в точке  $b$ ), достигает максимальных размеров  $\tilde{r}_{\max} = a_{\max} \sin r_0$  (в точке  $c$ ), снова сжимается и за конечное собственное время достигает гравитационного радиуса (в точке  $d$ ), а затем и  $R_0 = 0$  (в точке  $e$ ). Для внешнего наблюдателя подход к точке  $d$  растягивается на бесконечное время.

Если выбрать размеры шара так, что  $r_0 = \pi/2$ , то его энергии хватает как раз настолько, чтобы расширяться до  $\tilde{r}_{\max} = \tilde{r}_g$  и снова сжаться (см. рис. 26). Наконец, при  $r_0 > \pi/2$  мы имеем полузамкнутый мир. Поверхность шара (полузамкнутого мира) уже никогда не выходит из-под сферы Шварцшильда к внешнему наблюдателю, т. е. не выходит в область  $R_1$ . Однако поверхность шара выходит из  $T_+$ -области, из-под сферы Шварцшильда, но не к внешнему наблюдателю в правую  $R_1$ -область, а в левую  $R_2$ -область, достигает наибольшего размера  $\tilde{r}_{\max}$  и вновь сжимается. Вне полузамкнутого мира, в вакууме метрика является метрикой Крускала (см. § 14 гл. 3 ТТ и ЭЗ) с «горловиной» в пространстве (т. е. местом минимума площади поверхности сфер в фиксированный момент) (см. рис. 26). Размер «горловины» меняется с течением времени, она расширяется от точки, достигает максимума и вновь сужается к точке.

Из полузамкнутого мира внешний наблюдатель может получить информацию только о ранних стадиях расширения, когда поверхность шара находится еще в  $T_+$ -области (см. рис. 26).

Имеют ли полузамкнутые миры какое-либо отношение к реальности? Мы не знаем пока таких объектов [см. анализ в § 5 гл. 14 ТТ и ЭЗ; в последнее время этот вопрос рассматривал Марков (1973)]. Но, независимо от реальности их существования, рассмотрение свойств полузамкнутых миров имеет большой методический интерес. Особенно интересны внешние гравитационные проявления полузамкнутого мира.

Снова будем в момент максимального расширения  $t_m$  рассматривать все большие по размерам шары одной и той же плотности. Какова масса таких шаров? Гравитационная масса  $m$  статической (хотя бы только на момент) конфигурации меньше суммы масс  $M$  составляющих ее частиц из-за гравитационного дефекта масс, и эта масса  $m$  может быть измерена далеким наблюдателем по ее полной тяготения.

Гравитационную массу  $m$  можно выразить следующим образом. Используем определение гравитационного радиуса  $\tilde{r}_g = \frac{2Gm}{c^2}$ , приведенное выше соотношение  $\tilde{r}_g = a_{\max} \sin^3 r_0$  и следующее из (2.1.9) соотношение для плотности в момент максимального расширения:  $\rho = \frac{3c^2}{8\pi a_{\max}^2}$ . В итоге получим

$$m = \frac{c^2 \tilde{r}_g}{2G} = \frac{c^2 a_{\max} \sin^3 r_0}{2G} = \frac{4}{3} \pi \rho(t_m) a_{\max}^3 \sin^3 r_0. \quad (I.П.1)$$

Между тем, по определению, сумма масс покоя  $M$  дается формулой (на моменты  $t_m$ )

$$M = \rho(t_m) V_{\max} = 4\pi a_{\max}^3 \rho(t_m) \left( \frac{1}{2} r_0 - \frac{1}{4} \sin 2r_0 \right). \quad (I.П.2)$$

При малых размерах шара ( $r_0 \ll 1$ ) обе массы, естественно, совпадают, так как гравитационный дефект мал:

$$M = m = \frac{4}{3} \pi a_{\max}^3 r_0^3 \rho(t_m).$$

С ростом  $r_0$  сумма  $M$  масс составляющих частиц растет, как объем  $V$ , а гравитационная масса  $m$  растет медленнее из-за дефекта масс. Величина  $m$

достигает максимума при  $r_0 = \pi/2$ :

$$m_{\max} = \frac{4}{3} \pi a_{\max}^3 \rho(t_m) = \frac{2}{3\pi} M.$$

С дальнейшим ростом  $r_0$  масса  $m$  уменьшается. Добавление нового слоя вещества дает добавочный гравитационный дефект больший, чем собственная масса этого слоя. При  $r \rightarrow \pi$   $m \rightarrow 0$ . Таким образом, при стремлении конфигурации к замкнутой масса стремится к нулю. Кратко можно сказать, что масса замкнутого мира равна нулю\*). В таком мире гравитационный дефект равен самой собственной массе:

$$M = \rho V_{\text{полн}} = 2\pi^2 a_{\max}^3 \rho(t_m).$$

В замкнутом мире равен нулю и полный электрический заряд. Отличный от нуля полный заряд был бы возможен лишь в том случае, если бы были неверны уравнения Максвелла. Заряд является источником электрического поля. В евклидовом пространстве силовые линии электрического поля, выходя из заряда, либо стекают к заряду противоположного знака, либо уходят на бесконечность. В замкнутом мире бесконечности нет.

Зададимся произвольным распределением электрического поля  $\mathbf{E}$  в замкнутом мире и найдем соответствующую плотность заряда  $\rho_e$  по уравнению  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho_e$ . Всегда окажется, что полный заряд равен нулю,\* т. е.  $Z = \int \rho_e dV = 0$ , так как если нет бесконечности, то силовые линии, начи-

нающиеся на одном заряде, обязательно кончатся на другом заряде противоположного знака, нейтрализуя первый. Подробнее эти вопросы и анализ других свойств замкнутых и полузамкнутых миров см. Марков (1973).

В заключение приведем формулы для полузамкнутого мира [см. Новиков (1964a)], причем воспользуемся решением Толмена (см. § 13 гл. 3 ТТ и ЭЗ).

Интервал запишем в виде

$$ds^2 = \tilde{a}^2 [d\tau^2 - e^{\lambda(\tau, r)} (dr)^2 - \tilde{r}^2(\tau, r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (1.П.3)$$

где  $\tilde{a}$  — постоянная размерности длины, являющаяся масштабом, скорость света равна единице и все величины в скобках безразмерны. Решение Толмена имеет вид

$$e^{\lambda} = \frac{(\tilde{r}')^2}{1 + f(r)}, \quad \tau + \Phi(r) = \frac{1}{\tilde{f}(r)} \sqrt{f(r) \tilde{r}^2 + F(r) \tilde{r}} + \\ + \frac{F(r)}{[1 - f(r)]^{3/2}} \arcsin \sqrt{\frac{-f(r) \tilde{r}}{F(r)}}, \quad \tilde{a}^2 \frac{8\pi G}{c^2} \rho = \frac{F'(r)}{\tilde{r}' \tilde{r}^2}, \quad (1.П.4)$$

где  $f(r)$ ,  $F(r)$  и  $\Phi(r)$  — произвольные функции, определяемые условием задачи, штрих — производная по  $r$ . Пусть область, заполненная веществом (при  $r < r_0$ ), является частью однородной замкнутой модели. Тогда, переходя от выражения интервала (2.1.10) к (1.П.3), получим

$$\left. \begin{aligned} f(r) &= -\sin^2 r, \quad F(r) = \sin^2 r, \quad \Phi = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq r_0, \\ \tilde{a} &= a(t)_{\max} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho(t_m)}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.П.5)$$

\*) Иной подход к определению массы замкнутого мира с тем же результатом  $m=0$  см. Ландау и Лифшиц (1973, стр. 457).



Если  $\frac{\pi}{2} < r_0 < \pi$ , то вещество представляет собой полужамкнутый мир. Вне шара при  $r > r_0$  — вакуум. Для того чтобы сшить решение (1.П.5) с метрикой Крускала (см. § 14 гл. 3 ТТ и ЭЗ) для вакуума, надо при  $r > r_0$  положить

$$f = -[(r + C_1)^2 + C_2]^{-1} \sin^6 r_0, \\ F = \sin^3 r_0, \quad \Phi = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{(r + C_1)^2 + C_2}{\sin^4 r_0} \right]^{1/2},$$

где  $C_2 = \sin^6 r_0$ , а  $C_1$  очевидным образом выражается через  $r_0$  из условия непрерывности функций при  $r = r_0$ .

В § 14 гл. 3 ТТ и ЭЗ показано, что  $F\tilde{a} = \tilde{r}_g$ . Поэтому, используя выражение для  $\tilde{a}$  из (1.П.5), получаем окончательно  $\tilde{r}_g = a_{\max} \sin^3 r_0$ , где  $r_0$  — граница шара. Последнее выражение и приведено выше в тексте.



## Г Л А В А 5

### ВВЕДЕНИЕ

#### § 1. Вводные замечания и исторический обзор

В этом разделе рассматриваются физические процессы, протекавшие во Вселенной в прошлом в ходе ее расширения, в предположении, что геометрия и динамика эволюции Вселенной описываются однородной изотропной моделью.

Физические процессы, протекавшие в прошлом, зависят от состава вещества, заполнявшего Вселенную. Эти процессы протекают в условиях определенного закона расширения Вселенной (отчасти процессы сами влияют на закон расширения), подробно изученного в первом разделе, но полностью геометрией и динамикой отнюдь не определяются, а зависят еще от состава вещества.

В следующих главах изложение ведется применительно к тому составу, который со значительной уверенностью следует из современных экспериментальных данных. Важнейшим наблюдательным фактом, служащим для определения состава, является открытие так называемого реликтового электромагнитного излучения (РИ), — смысл названия будет разъяснен ниже. Наличие РИ приводит к картине Вселенной, в которой в среднем на один барион (протон или нейтрон, свободный или связанный в ядре) приходится около  $7 \cdot 10^7$  фотонов,  $\gamma/B \approx 7 \cdot 10^7$  \*). РИ имеет, по-видимому, равновесный спектр с  $T \approx 2,7^\circ\text{K}$ . Может ли это излучение возникнуть в каких-либо астрономических объектах? Несложный анализ, на котором мы остановимся далее в этом параграфе, показывает, что этого быть не могло, что излучение присутствовало во Вселенной всегда, начиная с самых ранних этапов расширения. Отсюда и название — реликтовое. Знания отношения  $\gamma/B \approx 7 \cdot 10^7$  оказывается достаточным для того, чтобы охарактеризовать состав вещества на каждом этапе расширения Вселенной; более детальные соотношения между количеством водорода и гелия, фотонами и нейтрино оказываются

\*) Значение этого отношения зависит от плотности вещества во Вселенной. Величина в тексте дана для  $\Omega=1$ . При  $\Omega=0,03$  было бы  $\gamma/B \approx 2 \cdot 10^9$ .

следствиями теории (при простейших дополнительных предположениях).

Дело в том, что наличие РИ свидетельствует о высокой температуре вещества в начале расширения («горячая Вселенная»), а при высокой температуре и плотности в начале расширения быстро происходили различные процессы превращения одних элементарных частиц и ядер в другие. Поэтому количества частиц различных сортов не являются независимыми, свободными переменными, они обусловлены закономерностями быстро происходящих процессов. Лишь одно число — отношение  $\gamma/V$  (оно находится из наблюдений) — должно быть задано \*).

На более специальном языке говорят, что в начальной стадии имеет место термодинамическое равновесие, для задания которого нужно знать удельную энтропию вещества, сохраняющуюся при медленном (равновесном, адиабатическом), по сравнению с протекающими процессами, расширении. Вторая термодинамическая переменная — плотность материи или удельный объем — плавно меняется в ходе расширения с течением времени; соответствующая зависимость от времени может считаться известной (см. раздел I). Теории равновесия при высоких температурах посвящена гл. 6. По мере понижения температуры реакции протекают все медленнее, и наконец достигаются условия, когда скорость протекания какого-либо процесса сравнивается со скоростью расширения, и результат процесса определяется его кинетикой. Наиболее важным процессом такого рода является нуклеосинтез на ранних стадиях расширения Вселенной; в космологических условиях, в дозвездном веществе можно ожидать превращения 25—30% барионов в гелий-4, тогда как 75—70% барионов оказываются в виде протонов.

По-видимому, такой результат не противоречит наблюдениям, что усиливает доверие к горячей модели в целом. Проблемы кинетики и, в частности, нуклеосинтеза обсуждаются в гл. 7. Здесь же, в гл. 5, общая ситуация излагается крайне схематизированно и более однозначно и определенно, чем это имеет место в действительности. В отношении многих немаловажных вопросов (например, существуют ли еще не открытые частицы типа нейтрино) нет ясности, и в детальном изложении приходится рассматривать целый ряд вариантов. Сопоставление полученных результатов с наблюдениями приводит подчас к выводам, интересным для теории элементарных частиц.

В гл. 9 рассматриваются процессы на той относительно поздней стадии расширения, когда «выжили» только фотоны, электроны и ядра, а также слабо взаимодействующие с веществом нейтрино (и гипотетические гравитоны). Исчезли за счет аннигиляции и

---

\*) Уточнение этого положения см. далее.

(или) распались антинуклоны, мезоны и позитроны, закончились ядерные реакции. На этой стадии рассмотрению подлежит взаимодействие фотонов с электронами, а конкретно — поглощение, испускание и рассеяние фотонов.

Нейтрино и гравитоны на этой стадии не исчезли, они присутствуют, но присутствуют «незримо» и не влияют на фотонные процессы. Существенно, что здесь, в этом разделе, рассматривается изотропное «по Фридману» расширение, без учета пространственной неоднородности, которая предполагается малой в ту эпоху, а к настоящему времени приводит к образованию галактик (см. об этом следующий раздел). Наблюдаемые свойства РИ согласуются с теми выводами, которые следуют из картины эволюции горячей Вселенной, т. е. *подтверждают* ее. Но поставим более острый вопрос: в какой мере исследование РИ *доказывает* теорию горячей Вселенной? И еще точнее: какую часть теории горячей Вселенной можно считать доказанной? Для ответа на эти вопросы весьма важны исследования, изложенные в гл. 7.

Взаимодействие РИ с электронами стерло бы отклонения (если таковые были) в распределении энергии в спектре РИ от равновесного, предсказываемого теорией горячей Вселенной, если эти отклонения имели место достаточно рано — при  $z > 10^6$  или  $10^5$ , т. е. при  $t < 0,3\text{—}30$  лет с начала расширения. Более поздние отклонения, связанные с процессами выделения энергии в веществе и меняющие спектр РИ, были бы обнаружены.

Были попытки объяснения РИ выделением энергии в отдельных небесных источниках [Парийский (1968), Бэрбидж (1971), Лайзер (1968)].

Интегральная плотность РИ  $\epsilon_{\text{рел}} = 4 \cdot 10^{-13}$  эрг/см<sup>3</sup> почти в 100 раз больше, чем интегральная плотность излучения источников (звезды галактик, радиогалактики, квазары), подсчитанная с учетом их вероятной эволюции в прошлом. РИ с большой точностью изотропно.

Если разделить плотность энергии  $\epsilon_{\text{рел}} = 4 \cdot 10^{-13}$  эрг/см<sup>3</sup> на плотность материи  $3 \cdot 10^{-31}$  г/см<sup>3</sup> (средняя плотность вещества, входящего в состав галактик, по данным Оорта), то получим  $\sim 10^{18}$  эрг/г. Таким образом, горение  $\approx 20\%$  всего водорода даст достаточно энергии, чтобы наполнить пространство излучением с температурой  $\sim 3^\circ$ . Однако мы знаем, что горение ядерного топлива в звездах дает спектр, очень далекий от трехградусного равновесного излучения, которое наблюдается, и угловое распределение излучения было бы дискретным, а не равномерным. Если горение имело место в далеком прошлом, то испущенное источниками высокотемпературное излучение может, в принципе, превратиться в низкотемпературное излучение, но из-за космологического расширения энергия уменьшается и требуется выделение энергии в прошлом больше разумного предела.

Наблюдаемое сейчас РИ можно попытаться объяснить выделением в прошлом энергии в празвездах только при очень невероятном соединении многих предположений. Так, надо предполагать высокую современную среднюю плотность вещества  $\rho_0 \geq 2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$ . Надо к тому же сделать предположение о выделении практически всей ядерной энергии всего вещества, излученной в гипотетических «празвездах» за короткий период в прошлом ( $t = 3 \cdot 10^6 \text{ лет}$ ), и далее о поглощении, а затем переизлучении света пылью, которая составляет не менее  $10^{-5}$  всего вещества по весу. Указанную возможность объяснения РИ можно считать совершенно невероятной [см. Зельдович, Новиков (1967а)].

Решающим экспериментом было бы измерение фона нейтрино, который, согласно горячей модели, должен иметь  $T \approx 2^\circ$  (см. далее гл. 7, § 1). Однако этот «эксперимент века» лежит пока далеко за рамками возможного \*).

При выделении ядерной энергии в «празвездах» образующиеся нейтрино имели бы, очевидно, неравновесный спектр, а их «термализация» невозможна, так как вещество для них прозрачно. Их плотность (число штук/см<sup>3</sup>) должна быть порядка плотности нуклонов, а современная энергия — сотые доли  $M\text{эв}$  \*\*). Попытки объяснения РИ как совокупности излучения радиоисточников [Парийский (1968), Бэрбидж (1971)] противоречат как статистике радиоисточников, так и соответствию спектра РИ планковскому спектру в исследованной длинноволновой области.

Итак, можно сказать, что общая картина горячей Вселенной прямо доказана наблюдениями для периода, начиная от нескольких лет, отсчитанных от сингулярности, до сегодняшнего дня, т. е. для периода  $10 \text{ лет} < t < 10^{10} \text{ лет}$  \*\*\*).

Излагаемая ниже классическая картина является зарядово-несимметричной. Предполагается, что в настоящее время во Вселенной представлены только барионы (вещество), но практически нет антибарионов (антивещества). Предполагается, что далекие галактики и межгалактический газ также состоят из вещества.

\*) Подобный эксперимент, обнаруживающий нейтрино с  $T \approx 2^\circ \text{К}$ , доказывал бы не только горячую модель, но одновременно и то, что расширение с первых же секунд протекало изотропно. Дело в том, что в случае анизотропной деформации на ранней стадии космологического расширения сегодняшний спектр реликтовых нейтрино может сильно отличаться от равновесного с  $T = 2^\circ$  [Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1967а—г)], см. раздел IV.

\*\*) Определение числа нейтрино позволило бы оценить выделившуюся энергию, а определение сегодняшней энергии нейтрино дало бы момент в прошлом, когда выделение энергии произошло, и показало бы, возможно ли таким образом объяснить фон.

\*\*\*) О возможности анизотропного начала расширения Вселенной и связанных с этим искажениях реликтового излучения см. раздел IV. Кроме того, в нарисованной картине не вполне выяснены процессы в период образования галактик, квазаров и т. п. — об этом см. раздел III.

В литературе встречается и противоположная точка зрения, согласно которой Вселенная в среднем зарядово-симметрична. Возможны различные варианты предположений о том, насколько удалены друг от друга области с веществом и антивеществом. Так, в одних вариантах теорий есть звезды из антивещества и в нашей Галактике. В других вариантах есть галактики и антигалактики в одном скоплении галактик, наконец, в третьих вариантах вещество и антивещество разделены на еще большее расстояние. Ниже приводятся аргументы, в силу которых зарядово-симметричная модель представляется нам не соответствующей действительности.

Авторам и защитникам симметричной теории [Клейн (1961), Альвен (1971), Омнес (1969, 1971 а — в), новые данные см. Лонгейр (1974)] нельзя отказать в логической последовательности и остроумии. С точки зрения законов физики, изученных в лаборатории, с точки зрения «естественности» и «здравого смысла» нельзя выбрать между симметричной и несимметричной теориями Вселенной.

Аргументы в пользу несимметричной теории существенно опираются на данные астрономических наблюдений (красное смещение, реликтовое излучение).

Защитники тех или иных неортодоксальных концепций хорошо усвоили тезис, согласно которому лучший способ защиты — это нападение. Бэрбидж, Хойл, Альвен подчеркивают «экзотичность», малую вероятность, «удивительность» классической модели с однородной и изотропной структурой и динамикой расширения в начальном сингулярном состоянии, с зарядовой несимметрией.

Этот упрек был бы справедлив, если бы теория горячей Вселенной была абстрактным творением «чистого разума». Но все дело в том, что эта картина в настоящее время (так было не всегда!) является необходимой с наблюдательной точки зрения. Неизбежность странного мира — формулировка писателя Данина, высказанная по другому поводу, но замечательно точно характеризующая космологию.

Вкратце остановимся на истории развития тех идей, которые в настоящее время объединяются в понятие горячей Вселенной.

Доказательство расширения Вселенной было дано примерно в то же время, когда возникла современная ядерная физика [работы Фридмана — 1922—1924 гг., открытие Резерфордом ядерных реакций в 1919 г., работы Хаббла — 1929 г., открытие нейтрона Чадвиком в 1932 г.]. Таким образом, почти одновременно возник вопрос о том, что же собой представляют вблизи сингулярности Вселенная и вещество, ее заполняющее, и возникли физические предпосылки для ответа на этот вопрос. Уже самое общее представление о сингулярности, о бесконечной плотности в начале расширения приводило к идее первичного дозвездного вещества более или менее однородного — в отличие от разнообразия строения и

состава звезд и других небесных тел сегодня. Появились звучные, но туманные формулировки: Вселенная была одним «первичным атомом», или — вся Вселенная была одним ядром или каплей ядерной жидкости [Леметр (1933)].

Дальнейший этап, когда возникла идея горячей Вселенной, является замечательным примером плодотворного развития теории, в возникновении которой существенную роль играла цепь ошибок.

Гамов (1948) поставил перед собой задачу космологического объяснения распространенности различных ядер и изотопов. Постановка этой задачи была связана с ошибочным значением постоянной Хаббла  $H \sim 500 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ , что соответствовало времени от момента сингулярности меньше чем  $2 \cdot 10^9 \text{ лет}$ . Но возраст Земли оценивается в  $4 \cdot 10^9 \text{ лет}$ ! Даже допуская ошибки в этих величинах, естественно было предположить, что Земля, так же как и Солнце, сконденсировалась одновременно из первичного дозвездного вещества и их химический состав определялся составом этого вещества. Не только водород и гелий — главные составные части звезд, в частности Солнца, но и все тяжелые ядра, вплоть до железа, свинца, урана, по гипотезе Гамова, получились в процессе реакций при расширении дозвездного первичного вещества.

Таблица распространенности различных элементов и изотопов обнаруживает общую закономерность: в природе преобладают изотопы с избытком нейтронов. Отсюда был сделан вывод о том, что в первичном веществе долго сохранялись свободные нейтроны (захват которых ядрами приводил к возникновению указанных изотопов), для этого нужна высокая температура. Так появилась идея горячей Вселенной.

С сегодняшней точки зрения, можно указать на ряд несоответствий. Постоянная Хаббла уменьшилась в 5—10 раз, время с начала расширения Вселенной оценивается в  $10^{10}$ — $2 \cdot 10^{10} \text{ лет}$ , Солнце есть звезда второго или третьего поколения. Сперва образовались звезды первого поколения, в массивных звездах первого поколения произошел нуклеосинтез тяжелых ядер (тяжелее He); при взрывах этих звезд тяжелые ядра рассеялись в галактическом газе, из которого конденсировались Солнце и Земля. Верно то, что для синтеза тяжелых ядер нужны и свободные нейтроны. Однако эти нейтроны появляются как на медленных, так и на взрывных этапах эволюции массивных звезд. С другой стороны, в первичном дозвездном веществе, несмотря на наличие свободных нейтронов, синтез тяжелых элементов не происходит. Не удастся «перескочить» барьер атомного веса 5: ядро  $\text{He}^4$  не присоединяет к себе нейтроны.

Тем не менее и Гамов и позднее Альфер и Херман (1953) полагали, что как-то (?) удастся преодолеть массовое число  $A=5$  и получить средние и тяжелые элементы периодической системы путем последовательного присоединения нейтронов и бета-распада. Пре-

обладание в природе элементов с избытком нейтронов рассматривалось как подтверждение теории. Из того факта, что уцелели изотопы с большим сечением захвата медленных нейтронов, был сделан вывод о том, что нуклеосинтез, захват нейтронов, шел при высокой температуре. Так получена оценка температуры излучения около  $6^{\circ}\text{K}$ !

Для всей логики развития теории существенно было предположение о малом возрасте Вселенной. Современные данные о постоянной Хаббла оставляют вполне достаточно времени для нуклеосинтеза средних и тяжелых элементов в звездах.

Таким образом, вопрос о нуклеосинтезе тяжелых элементов был поставлен незакономерно, и поэтому ответ теории горячей Вселенной на этот вопрос не совпадает с наблюдениями. Но теории имеют свою судьбу, их развитие не описывается прямолинейной схемой «вопрос — ответ». Анализ условий при высокой температуре в начале космологического расширения привел к выводу, что плотность массы ( $\rho_{\text{изл}} = \epsilon_{\text{изл}}/c^2$ ) лучистой энергии оказывается больше плотности обычной материи (РД-стадия, см. об этом введение к книге и следующую главу).

Эта необычная возможность, следующая из законов лабораторной физики, но не осуществимая в лаборатории \*), заворожала исследователей. Фотонная плазма, радиационно-доминированное состояние вещества, его свойства, механика, термодинамика — короче, возникла новая область! Разработка этой области и различных следствий из концепции горячей Вселенной приобрела самостоятельный интерес. Проблема нуклеосинтеза в начале космологического расширения была тем временем правильно решена трудами Хаяши (1950) и Ферми, Туркевича (1950). Расчет предсказывал следующий состав дозвездного вещества: водород 75—65%, гелий-4 25—35%. Но другого и не требуется — остальные элементы синтезируются в звездах. Заметим, что работа Ферми и Туркевича так и не опубликована, по-видимому, они пользовались данными о реакциях изотопов водорода, которые в то время не подлежали оглашению. Позднее рассматривались и следы других элементов:  $\text{D}$ ,  $\text{He}^3$ ,  $\text{Li}^6$ ,  $\text{Li}^7$ , образующихся в космологическом нуклеосинтезе.

Любопытно, что авторов горячей модели интересовали главным образом интегральные свойства реликтового излучения: плотность, давление, температура, но не его спектр. Основываясь на не слишком надежных соображениях, Гамов в 1956 г. дал оценку температуры РИ для настоящего времени  $\sim 5\text{--}6^{\circ}\text{K}$ .

Главным образом в целях самокритики отметим альтернативную гипотезу о «холодной Вселенной». Было известно [Пейерльс и др.

---

\*) Впрочем, в фокусе лазерного излучения в пикосекундных импульсах, может быть, удастся достичь такой ситуации.



(1952)1], что холодное сверхплотное вещество такого состава, с которым мы встречаемся в звездах (нейтронные и гиперонные звезды, см. ТТ и ЭЗ), при расширении дает только тяжелые ядра, водорода не остается. Такой вариант гипотезы «холодной Вселенной» резко противоречит наблюдаемой картине (известно, что водород составляет не меньше 60% всего вещества).

Однако, по замечанию Зельдовича (1962б), холодное вещество с избытком нейтрино в ходе расширения превратится в чистый водород. Для этого нужно только, чтобы в смеси  $p$ ,  $e^-$ ,  $\nu$  ферми-энергия холодных нейтрино все время превосходила ферми-энергию электронов.

В связи с этой гипотезой \*), а также в связи с вопросом о средней плотности электромагнитной энергии во Вселенной Дорошкевич и Новиков (1964) провели — по-видимому, впервые — полный расчет широкого спектра электромагнитного излучения в эволюционирующей Вселенной — от самых длинных радиоволн до ультрафиолета. На кривые, полученные сложением вкладов излучения радиоисточников и звезд, был наложен планковский спектр РИ, который должен наблюдаться в случае горячей Вселенной.

Впервые в этой работе отмечено, что в определенном участке спектра планковский спектр РИ на несколько порядков интенсивнее суммы излучения от источников. Стала ясна возможность решающего опыта наблюдения РИ, от которого зависит выбор между горячей и холодной моделями Вселенной. В работе Дорошкевича и Новикова впервые появилась двугорбая кривая (график спектра с двумя максимумами — один соответствует излучению звезд, второй — РИ), которая потом, уже после открытия РИ, долго украшала рекламы фирмы «Белл».

Дальнейшая история хорошо известна: Пензиас и Вилсон (1965) наткнулись на необъяснимый равномерный радишум на длине волны 7,3 см. В это время Дикке, Пиблс, Ролл и Вилкинсон (1965) готовили аппаратуру для измерения радиофона на длине волны 3 см с сознательным намерением проверить теорию горячей Вселенной и определить температуру реликтового излучения. Работая независимо от Дорошкевича и Новикова, они, очевидно, имели в это время сходные оценки \*\*). Узнав о результатах Пензиаса и Вилсона, Дикке и его группа немедленно интерпретировали эти результаты как подтверждение теории горячей Вселенной и назвали температуру РИ — около 3°K.

Дальнейшее развитие было бы неуместно излагать в рамках исторического обзора, так как последующие результаты подлежат систематическому изложению.

---

\*) Еще один пример полезной ошибки; как сказал поэт про рюмки: «То, что бьется нечаянно, — к счастью, то, что бьется нарочно, — не в счет».

\*\*) См. книгу Дикке (1970).

Здесь, для того чтобы дать завершенную картину, мы приведем лишь выводы: теория горячей Вселенной как теория огромного этапа эволюции Вселенной в настоящее время установлена окончательно. Решающим аргументом является существование и свойства РИ. Те уточнения, которые могут последовать (в силу того, что точность всех проделанных измерений не абсолютна), не изменят основного вывода о горячей Вселенной, а дадут информацию о деталях процессов, которые протекали в прошлом.

Поэтому уже сейчас ясно, что объяснять отклонения можно (и нужно) будет в рамках теории горячей Вселенной, с учетом небольшой неоднородности, образования галактик и квазаров и других аналогичных явлений. Нуклеосинтез (ситуация с которым не вполне ясна, так как не определена точно роль звезд в синтезе  $\text{He}$  и некоторых других элементов) не играет решающей роли в доказательстве теории горячей Вселенной, хотя то, что он дает результаты о количестве  $\text{He}^4$  (а также отчасти и  $\text{D}$ ), близкие к наблюдениям, несомненно является аргументом в ее пользу.

Сказанное не должно рассматриваться как догматизм. В рамках теории горячей Вселенной остается много невыясненных вопросов, которые, по мере разумения, мы будем отмечать ниже. Остаются глубокие, принципиальные нерешенные вопросы о природе сингулярности в начале расширения (см. разделы IV и V).

## § 2. Электромагнитное излучение во Вселенной: обзор наблюдений

Широкий обзор наблюдений всего спектра электромагнитного излучения во Вселенной — от радиоволн до гамма-лучей — служит хорошим введением в детальное изучение реликтового излучения, которое наиболее важно в космологии. Полный обзор электромагнитного излучения дали недавно Лонгейр и Сюняев (1971); мы используем их рисунки и таблицу. Нас интересует средняя плотность излучения вдали от тех или иных источников, поэтому все величины (интенсивность  $F$ , плотность энергии  $\epsilon$  и плотность квантов  $n_\nu$ ) экстраполированы на внегалактическое пространство, вклад нашей Галактики вычтен из наблюдательных данных.

Сравнивая рис. 27 и табл. II, следует помнить очевидные соотношения:

$$\epsilon = \frac{4\pi}{c} \int F d\nu = \frac{4\pi}{c} \int \nu F d \log \nu,$$

$$n_\nu = \frac{4\pi}{ch} \int \frac{F}{\nu} d\nu = \frac{4\pi}{ch} \int F d \log \nu.$$

Интегралы ( $\epsilon$ ,  $\eta$ ), данные в таблице, не равны площади под кривой на рис. 27 из-за логарифмической шкалы на рисунке; приблизи-

тельно для каждой области спектра  $\varepsilon = \alpha \frac{4\pi}{c} (\nu F)_{\max}$ ,  $n_\nu = \beta \frac{4\pi}{ch} F_{\max}$ , где  $\alpha, \beta$  порядка единицы \*).

Дадим краткое описание различных частей спектра.

Предполагается, что левое крыло обязано дискретным радиоисточникам. Основная часть его дается степенным законом  $F_\nu = A\nu^{-0,75}$ .

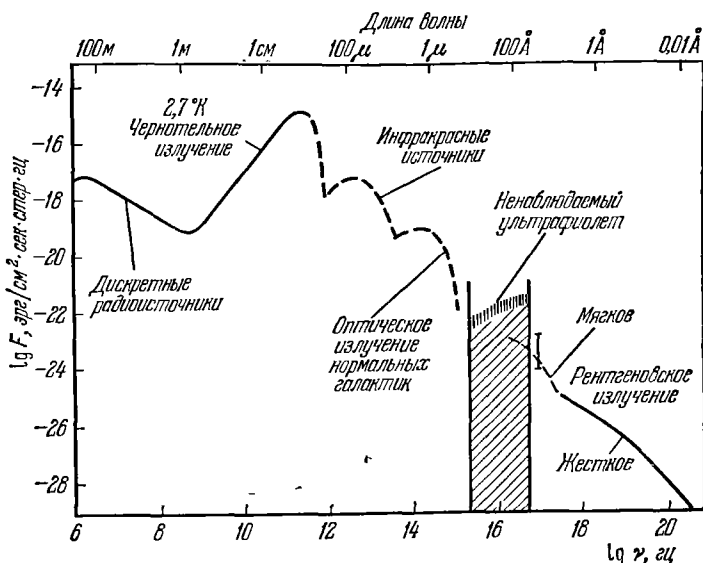


Рис. 27. Спектр электромагнитного излучения во Вселенной.

Принимая во внимание рэлей-джинсовскую формулу  $F_\nu = 2kT/\lambda^2$ , эти данные можно представить формулой для эффективной температуры:  $T_{\text{эфф}} \approx 3 \cdot 10^{-6} \lambda^{2,7}$  ( $\lambda$  в см). При  $\lambda = 168$  см,  $\nu = 178$  МГц  $T_{\text{эфф}} \approx 30^\circ\text{K}$  [см. Бридль (1967, 1968), Ребер (1968)]. На этой длине волны наша Галактика дает минимум  $T_{\text{эфф}} \approx 80^\circ\text{K}$  (в направлении, перпендикулярном плоскости Галактики; этот вклад исключается измерениями и вычислениями угловой зависимости галактического вклада). Каково происхождение внегалактической части радиоизлучения, составляющей  $T_{\text{эфф}} \approx 30^\circ\text{K}$ ? Более чем половину его дают дискретные источники, только малая часть их ( $\sim 5\%$ ) отождествлена с оптическими источниками. Остальное приписывается дискретным источникам, слишком слабым для современной аппаратуры и не наблюдаемым по отдельности. На длинноволновой части спектра наблюдается излом ( $\lambda > 100$  м).

\*) По астрономической традиции, пользуясь частотой  $\nu = c/\lambda$ , мы возвращаемся к неперечеркнутому  $h = 6,54 \cdot 10^{-27}$  см<sup>2</sup>·сек<sup>-1</sup>·г.

ТАБЛИЦА II

**Плотность энергии и числа квантов фонового излучения  
в различных диапазонах**

| Диапазон  | Плотность энергии<br>излучения $\epsilon$ ,<br>$\text{эв/см}^3$ | Плотность числа<br>фотонов $n_\gamma$ ,<br>$\text{см}^{-3}$ |
|---|---|---|
| 1а. Длинноволновое радиоизлучение                                       | $\sim 10^{-7}$  | $\sim 1$  |
| 1б. Реликтовое радиоизлучение   | 0,25  | 400   |
| 2. Инфракрасный   | $\sim 10^{-2}$  | $\sim 1$  |
| 3. Оптический   | $\sim 3 \cdot 10^{-3}$  | $\sim 10^{-3}$  |
| 4а. Мягкий рентгеновский ( $\mathcal{E} < 1 \text{ кэв}$ )              | $10^{-4} - 10^{-5}$   | $3 \cdot (10^{-7} - 10^{-8})$                               |
| 4б. Жесткий рентгеновский ( $\mathcal{E} > 1 \text{ кэв}$ )             | $10^{-4}$   | $3 \cdot 10^{-9}$   |
| 5а. Мягкое $\gamma$ -излучение ( $\mathcal{E} \sim 1 - 6 \text{ Мэв}$ ) | $\leq 10^{-5}$  | $\leq 3 \cdot 10^{-12}$                                     |
| 5б. Жесткое $\gamma$ -излучение ( $\mathcal{E} > 10 \text{ Мэв}$ )      | $< 10^{-5}$   | $< 10^{-12}$  |

Ионосфера, окружающая нашу Землю, отражает достаточно длинные радиоволны; измерения для таких волн выполнены с помощью спутников и межпланетных зондов вплоть до  $\lambda \sim 10^6 \text{ см}$ ,  $\nu = 0,4 \text{ Мгц}$  [см., например, Александер, Броун, Кларк, Стоун, Вебер (1969)]. Отчетливый максимум проявляется на частоте  $4 \text{ Мгц}$  ( $F_{\text{max}} \sim 10^{-17} \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер} \cdot \text{гц}$ ).

В следующем диапазоне,  $10^9 - 10^{12} \text{ гц}$ , доминирует реликтовое излучение. Оно сильно превышает все другие типы излучения, вместе взятые, как в плотности энергии, так и в плотности квантов (см. табл. II). Мы обсудим РИ отдельно в следующих параграфах.

Инфракрасная часть ( $10^{12} - 10^{14} \text{ гц}$ ) известна сегодня плохо, она показана на рис. 27 пунктирной линией. Приводимые оценки взяты из работы Лоу и Текера (1968). Ядро (центральная часть) нашей Галактики обладает высокой инфракрасной светимостью ( $\sim 10^8 L_\odot$  для  $\lambda \sim 100 \mu$ ). Недавняя теория объясняет это пылевым облаком, окружающим ядро. Оптическое излучение поглощается, пыль нагревается и переизлучает при  $T \leq 1000^\circ \text{К}$ . Светимость квазаров также часто имеет максимум в инфракрасной области. Как указал Шкловский (1965), инфракрасное излучение в квазарах и ядрах

галактик, возможно, лучше объясняется синхротронным излучением особых малых областей с сильным магнитным полем. Интересная гипотеза Бисноватого-Когана и Сюняева (1971) связывает инфракрасный максимум с коллективными механизмами в плазме около релятивистских объектов.

Измерения в оптической области трудны из-за фона, создаваемого рассеянным светом Солнца; наблюдения Роуча и Смита (1968) представляют скорее верхний предел внегалактического излучения.

Многие теоретики вычисляли спектр излучения галактик, предполагая постоянной плотность галактик в сопутствующем пространстве или делая некоторые предположения об эволюции. Результаты слабо чувствительны к космологическим моделям [см., например, Дорошкевич и Новиков (1964)]. Ярчайшие галактики наблюдаются вплоть до  $z < 0,5$ , поэтому вычисления основаны на экстраполяции в прошлое. Большинство звезд имеют массу  $M \leq 1M_{\odot}$ , они могут светить без заметной эволюции, оставаясь на главной последовательности, более чем  $10^{10}$  лет, поэтому «исчезновение» галактик как светящихся объектов невероятно. Следует предположить, что плотность галактик в прошлом была не больше, чем сейчас. Однако возможно, что в молодых галактиках процент очень ярких звезд больше, чем сейчас. Расчетные данные в табл. II и рис. 27 для этой области спектра взяты из работ Партриджа и Пиблса (1967 а, б). Наблюдаемый верхний предел в несколько раз выше.

Следует указать, что плотность энергии в оптическом диапазоне, о вычислении которой говорилось выше, а данные даны в табл. II и на рис. 27, составляет очень малую часть ядерной энергии материи. Даже принимая нижний предел для оценки плотности материи в  $3 \cdot 10^{-31}$  г/см<sup>3</sup> (плотность материи, входящей в галактики), получим, что если предположить превращение в звездах и других источниках 30% всего водорода в гелий, что составляет энерговыделение  $7,2 \cdot 10^{18}$  эрг/г, то выделившаяся энергия составит  $\epsilon_{\text{яд}} = 0,5$  эв/см<sup>3</sup>. Эта величина в 200 раз превышает оценку оптического фона. Поэтому нет никаких трудностей в объяснении оптического фона суммарным излучением всех галактик. Важны прямые наблюдения оптического фона; однако измерения яркости ночного неба трудны, так как мешает зодиакальный свет и свет звезд нашей Галактики. Последние измерения дают поток  $F_{\nu} < 10^{-19}$  эрг/см<sup>2</sup>·сек·стер·гц на волне 5300 Å [Роуч и Смит (1968)] и  $F_{\nu} < 10^{-20}$  эрг/см<sup>2</sup>·сек·стер·гц на 4100 Å [Либи (1969)], что соответствует  $\epsilon < 10^{-2}$  эв/см<sup>3</sup>.

Для ультрафиолетового излучения прямые измерения на космических ракетах [Курт, Сюняев (1967 а — в, 1970)] дают верхний предел  $F_{\nu} < 3 \cdot 10^{-21}$  эрг/см<sup>2</sup>·сек·стер·гц ( $1350 > \lambda > 1216$  Å). Измерения располагаются по обе стороны от линии Ly- $\alpha$  ( $1340 > \lambda > 1225$  Å  $1180 > \lambda > 1050$  Å), длина волны которой 1216 Å. Сама линия Ly- $\alpha$  преобладает в излучении газа в нашей Галактике, включая область вблизи Солнца. Данные для  $\lambda > 1216$  Å представляют большой ин-

интерес: межгалактический газ должен излучать Ly- $\alpha$ . Будучи сдвинутым космологическим красным смещением, это излучение попадает в интервал  $1340 > \lambda > 1225 \text{ \AA}$ . Цитированные измерения дают оценку для верхнего предела межгалактической плотности газа  $\Omega_{\text{газ}} = \rho/\rho_c < 4$ . Конечно, необходимы более точные измерения.

Излучение с длиной волны короче порога ионизации водорода ( $\lambda < 916 \text{ \AA}$ , Ly-континуум) сильно поглощается нейтральным водородом Галактики, и пока не существует способа прямого его измерения.

Сюняев (1969а, б) предложил остроумную оценку коротковолнового излучения с длиной волны меньше порога Ly-континуума по наблюдениям разреженных нейтральных водородных гало галактик и мостов между галактиками, причем наличие нейтрального водорода определяется по наблюдениям линии  $21 \text{ см}$ . Присутствие нейтрального водорода с низкой плотностью вокруг галактик несовместимо с большим ультрафиолетовым потоком в межгалактическом пространстве; так как нейтральный водород галактик наблюдается по линии  $\lambda = 21 \text{ см}$ , то это дает верхний предел потока в ультрафиолетовой области, показанный на рис. 27. Отсюда также следует, что межгалактического нагретого газа, дающего ультрафиолетовый поток, не может быть слишком много; соответствующая оценка  $\Omega_{\text{газ}} < 0,3$  \*).

Начиная с  $\lambda < 70 \text{ \AA}$ , Галактика становится достаточно прозрачной, так что коротковолновые рентгеновские лучи и  $\gamma$ -лучи измеряются непосредственно на ракетах и спутниках [см. обзор Лонгейра и Сюняева (1971)].

Если исключить около 150 известных дискретных рентгеновских источников, то фон будет изотропным (вариации в пределах 10%). По-видимому, он не объясняется тепловым излучением горячего межгалактического газа, так как спектр в жесткой области  $E > 1 \text{ кэВ}$  степенной,  $F \sim \nu^{-\alpha}$ , а не экспоненциальный,  $F \sim e^{-\beta \nu}$ . Имеются основания полагать, что рентгеновское и  $\gamma$ -излучение (или часть его) обязаны обратному комптоновскому рассеянию низкоэнергичных фотонов на релятивистских электронах [Фелтен, Моррисон (1966)]. Не решен вопрос, распределены ли эти электроны более или менее однородно в пространстве или, как полагают Лонгейр и Сюняев (1969а, в), они дают рентгеновское и  $\gamma$ -излучение прямо в окрестности источника электронов. В последнем случае квазиизотропный рентгеновский фон разобьется на много дискретных источников при улучшении углового разрешения. Детальное обсуждение относится скорее к физике космических лучей, чем к космологии. Мы вернемся к наиболее важному вкладу в электромагнитный спектр — реликтовому излучению.

\*) Эта оценка отнесена к  $H_0 = 75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ , при  $H_0 \leq 50 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$  результат менее определенный.

### § 3. Наблюдательное доказательство существования реликтового излучения

На рис. 28 и в табл. III \*) суммировано большинство измерений, выполненных к концу 1972 г. Они располагаются в таблице в порядке уменьшения длины волны.

В третьем столбце приведена так называемая антенная температура  $T_a$ , обычно используемая радиоастрономами. Эта

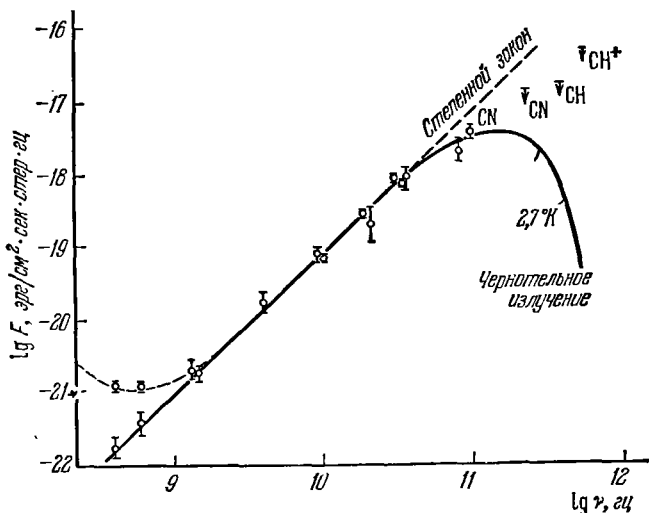


Рис. 28. Абсолютные измерения интенсивности реликтового излучения.

температура вычисляется по наблюдаемому потоку  $F_\lambda$  на данной длине волны по рэлей-джинсовской формуле:

$$F_\lambda = \frac{2kT_a}{\lambda^2} = \frac{2kT_a \nu^2}{c^2}. \quad (5.3.1)$$

Если поток излучения равновесный, то  $T_a$  соответствует истинной температуре излучения только при  $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ .

В четвертом столбце приведена термодинамическая температура, вычисленная по формуле Планка:

$$F_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Все цитированные измерения, за исключением № 16—18, выполнены на радиоастрономических инструментах. Наблюдения заклю-

\*) Большая часть данных таблицы взята из книги Пиблса (1971а).

ТАБЛИЦА III

## Наблюдение реликтового излучения

| №№<br>п/п | Длина<br>волны,<br>см | Антенная<br>температура,<br>°К | Термодина-<br>мическая<br>температура,<br>°К | Авторы   |
|-----------|-----------------------|--------------------------------|--|--|
| 1         | 73,5; 49              | $3,7 \pm 1,2$                  | $3,7 \pm 1,2$                                | Хоуэлл, Шейкшафт (1966)                            |
| 2         | 21,2                  | $3,2 \pm 1,0$                  | $3,2 \pm 1,0$                                | Пензиас, Вилсон (1967)                             |
| 3         | 20,9                  | $2,5 \pm 0,3$                  | $2,5 \pm 0,3$                                | Пелюченко, Станкевич (1969)                        |
| 4         | 20,7                  | $2,8 \pm 0,6$                  | $2,8 \pm 0,6$                                | Хоуэлл, Шейкшафт (1966)                            |
| 5         | 7,35                  | $3,0 \pm 1,0$                  | $3,1 \pm 1,0$                                | Пензиас, Вилсон (1965)                             |
| 6         | 3,2                   | $2,8 \pm 0,5$                  | $3,0 \pm 0,5$                                | Ролл, Вилкинсон (1966)                             |
| 7         | 3,2                   | $2,47^{+0,16}_{-0,21}$         | $2,69^{+0,16}_{-0,21}$                       | Стокс, Партридж, Вилкинсон (1967)                  |
| 8         | 1,58                  | $2,35^{+0,12}_{-0,17}$         | $2,78^{+0,12}_{-0,17}$                       | Стокс, Партридж, Вилкинсон (1967)                  |
| 9         | 1,50                  | $1,56 \pm 0,8$                 | $2,0 \pm 0,8$                                | Уэлч, Кичи, Торнтон, Уриксон (1967)                |
| 10        | 0,924                 | $2,44 \pm 0,26$                | $3,16 \pm 0,26$                              | Юинг, Бюрк, Стилиин (1967)                         |
| 11        | 0,856                 | $1,81^{+0,16}_{-0,21}$         | $2,56^{+0,17}_{-0,22}$                       | Вилкинсон (1967a)                                  |
| 12        | 0,82                  | $2,1 \pm 0,7$                  | $2,9 \pm 0,7$                                | Пузанов, Саломонович, Станкевич (1967)             |
| 13        | 0,358                 | $0,95 \pm 0,58$                | $2,4 \pm 0,7$                                | Кисляков, Чернышев, Лебский, Мальцев, Серов (1971) |
| 14        | 0,33                  | $0,89 \pm 0,32$                | $2,46^{+0,40}_{-0,44}$                       | Бойнтон, Стокс, Вилкинсон (1968)                   |
| 15        | 0,33                  | $1,01 \pm 0,20$                | $2,61 \pm 0,25$                              | Миллеа, Мак-Колл, Педерсон, Вернон (1971)          |
| 16        | 0,264                 | $1,2 \pm 0,4$                  | $3,2 \pm 0,5$                                | Филд, Хитчкок (1966a, б)                           |
| 17        | 0,264                 | $1,6 \pm 0,6$                  | $3,7 \pm 0,7$                                | Пеймберт (1968)                                    |
| 18        | 0,264                 | $0,93 \pm 0,11$                | $2,83 \pm 0,15$                              | Бортолот, Клаузер, Тадеуш (1969)                   |

чаются в измерении шума, возникающего в приемнике в результате потока РИ. Помехой являются все внутренние, а также атмосферные и галактические шумы. Аппаратура калибруется с помощью искусственной чернотельной полости при гелиевой температуре на входе антенны.

Галактический шум и фон от дискретных радиоисточников имеют падающий спектр (с различными спектральными индексами), поэтому для  $\lambda > 21$  см поправки велики. Соответствующие точки, показывающие поток от РИ и от источников, даны на рис. 28 в левой части, трудно расширить измерения к длинным волнам,  $\lambda > 80$  см.

На малых длинах волн сильны атмосферные шумы: при  $\lambda \approx 0,33$  см они достигают  $10-12^\circ\text{К}$ . Для еще более коротких длин волн приемник должен быть вынесен за пределы атмосферы. Измерения № 16—18 выполнены косвенным спектроскопическим методом с помощью оптических спектральных наблюдений линий меж-



звездного CN. Принцип этих наблюдений заключается в следующем. Молекулы с низколежащими уровнями возбуждения (обозначим энергию возбуждения через  $E_1$ ) в межзвездном пространстве возбуждаются РИ с частотой  $\nu_1 = E_1/h$ . В отсутствие столкновений равновесная концентрация возбужденных молекул и молекул на основном уровне есть  $n_1/n_0 = e^{-E_1/kT}$ , где  $T$  — эффективная температура возбуждающего излучения. Концентрации  $n_1$  и  $n_0$  определяются по наблюдениям оптических линий поглощения этих молекул.

Интересно отметить, что еще в 1941 г. Мак-Келлар (1941) отметил, что молекула CN в межзвездном газе наблюдается не только в основном состоянии, но и в возбужденном вращательном состоянии, что соответствовало температуре возбуждения  $\sim 2,3^\circ\text{K}$ . К этому выводу Мак-Келлар пришел, исследуя линии поглощения межзвездного газа в спектре звезды  $\xi$  Ophiuchi. Объяснение этого явления оставалось неясным. Только после открытия реликтового излучения Тадеуш и Клаузер (1966), Филд и Хитчкок (1966а, б) объяснили этот факт как возбуждение межзвездных молекул РИ. Затем аналогичный эффект был обнаружен в межзвездных линиях звезды  $\xi$  Persei, а затем Тадеуш с сотрудниками (см. № 18 в таблице) обнаружили его в спектрах 11 звезд в разных направлениях на небесной сфере. Это доказывает повсеместное действие возбуждающего фактора в Галактике, что укрепляет представление о том, что этим фактором является РИ. Для молекул CN и  $\text{CN}^+$ , а также для других уровней CN соответствующие возбужденные состояния не найдены, хотя основные состояния этих молекул наблюдаются. Поэтому можно дать лишь верхний предел температуры. Соответствующие пределы показаны на рис. 28 [Бортолот, Клаузер, Тадеуш (1969)]. Данные об интенсивности электромагнитного излучения в области длин волн около 1 мм были получены [Шивананден, Хоук, Харвит (1968), Хоук, Харвит (1969а, б)] с помощью полупроводниковых болометров на ракетах, поднимающихся на высоту более 100 км. Приемники были чувствительны к широкому диапазону длин волн — 0,4—1,3 мм. Измерения в течение нескольких полетов дали сенсационный результат: усредненный поток в этой области длин волн соответствует плотности энергии порядка  $10\text{—}20 \text{ эв/см}^2$ . Это значительно выше (примерно в 40 раз по плотности энергии) равновесного потока с  $T=2,7^\circ\text{K}$ . Кроме того, если этот поток распределен непрерывно в указанной области длин волн и приходит к нам из космического пространства (а не возникает в верхней атмосфере или в Солнечной системе), то измерения противоречат верхним пределам на поток в этой области, полученным с помощью межзвездных молекул. Измерения не обнаружили какой-либо анизотропии потока. Согласно с молекулярными измерениями можно добиться, предполагая, что избыточное излучение сосредоточено в узких линиях, не совпадающих с линиями молекул.

В последующих публикациях этой группы измеренное значение плотности энергии в этой области спектра варьировалось, оставаясь выше равновесного. Полный поток, во много раз превышающий равновесный, зарегистрировали также Мюльнер и Вейсс (1970) в опытах на баллонах в одном из спектральных интервалов в инфракрасной области. Эти результаты привлекли большое внимание: если бы они были верны, то теория горячей Вселенной нуждалась бы в существенных дополнениях. Были поставлены дальнейшие, более тщательные измерения. Блейр и др. (1971) из Лос-Аламосской лаборатории поместили на ракету аппаратуру, охлажденную сверхтекучим гелием до температуры  $T=1,7^\circ\text{K}$ . Они обнаружили поток, соответствующий температуре  $T=3,1^{+0,5}_{-2,0}^\circ\text{K}$ . Затем последовала новая серия опытов на баллонах Мюльнера и Вейсса (1973) с усовершенствованной аппаратурой, они получили  $T\approx 3^\circ\text{K}$ . Обзор наблюдательных данных по коротковолновой части спектра РИ приведен у Тадеуша (1972). Наконец, недавно объявлено о новом результате другой Лос-Аламосской группы, измерения которой в инфракрасной области спектра согласуются с планковским спектром с  $T=2,7^\circ\text{K}$ .

Вывод заключается в том, что первые измерения, давшие  $\epsilon_{\text{рел}} > \alpha T_{\text{р.-дж}}^4$ , полностью опровергнуты. Наиболее точные измерения не противоречат полностью равновесному спектру реликтового излучения. Этот результат является важной частью теории горячей Вселенной, он говорит о малости отклонений от идеализированной фридмановской картины эволюции, указывает на реликтовое происхождение излучения. Было бы весьма желательно увеличить точность опытов по определению плотности и спектра излучения. Малые отклонения от планковского спектра можно связать с тепловыми процессами в реальной Вселенной, в которой есть возмущения и образуются галактики. Трудность опытов уравнивается их принципиальным значением.

Учитывая трудности измерений в субмиллиметровой области, обратимся к более надежным длинноволновым наблюдениям ( $\lambda > 3 \text{ мм}$ ).

Квадратичная зависимость  $F$  от  $\nu$ , совместимая с рэлей-джинсовским законом, проявляет себя в постоянном значении антенной температуры  $T_a$ , приведенном в табл. III, вплоть до  $\lambda \approx 0,8 \text{ см}$ . Но один этот факт еще не доказывает равновесного, планковского спектра. Можно представить себе дилитированный спектр

$$F = \frac{1}{\alpha} F_{\text{равни}}(\alpha T)$$

с более высокой температурой  $\alpha/2,7^\circ$ ,  $\alpha > 1$ , удовлетворяющий в рэлей-джинсовской области той же зависимости. Существуют процессы (см. следующую главу), которые искажают планковский спектр, сохраняя закон  $F \sim \nu^2$  в длинноволновой области.

Поэтому точки  $\lambda \sim 0,33$  и  $0,264$  см (№ 14—18 в табл. III) представляют большой интерес. При  $\frac{h\nu}{kT} \sim 2$  планковский закон сильно отклоняется от экстраполированного закона Рэлея — Джинса  $\frac{F_{\text{пл}}}{F_{\text{р.дж}}} = \frac{1}{e^2 - 1} \cdot \frac{1}{2} = 0,315$  при  $\frac{h\nu}{kT} = 2$ . Авторы этих измерений заявляют, что их измерения несовместимы со степенным законом, но хорошо согласуются с равновесным.

Имеется другое доказательство того, что излучение в диапазоне  $50$  см —  $0,3$  см не вызвано дискретными источниками, а потому является первичным, реликтовым. Доказательство дается идеальной изотропией излучения, полной независимостью потока от направления, отсутствием любых временных или угловых вариаций ( $\frac{\Delta T}{T} < 10^{-3}$ ). Более детальный обзор наблюдательных данных о степени изотропии реликтового излучения дан в работе Партриджа (1973).

## Г Л А В А 6

### ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ В НАЧАЛЕ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ

#### § 1. Основные периоды в эволюции горячей Вселенной

Прежде чем приступить к детальному рассмотрению процессов в ходе расширения горячей Вселенной, попытаемся обрисовать общую картину эволюции.

Как мы видели в § 3 предыдущей главы, общая плотность энергии РИ сегодня составляет  $\epsilon_\gamma \approx 4 \cdot 10^{-13} \text{ эрг/см}^3$ . Это соответствует плотности массы  $\rho_\gamma \approx 4 \cdot 10^{-34} \text{ г/см}^3$ . Такая плотность много меньше средней плотности обычной материи (вещество в звездах, разреженном газе и т. п.), усредненной по всему объему, которая, как мы видели выше, не меньше, чем  $\rho_{\text{гал}} \approx 3 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$ . Итак, сегодня  $\rho_\gamma \ll \rho_{\text{гал}}$ , и тяготение, связанное с  $\rho_\gamma$ , не играет сегодня никакой роли в динамике расширения. Закон расширения сегодня определяется обычной материей с давлением, равным нулю,  $P=0$ , и, как показано в первом разделе, линейные масштабы изменяются по закону

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\Omega}{2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2. \quad (6.1.1)$$

Плотность обычного вещества меняется, как  $a^{-3}$ :

$$\rho_{\text{вещ}} \sim a^{-3}. \quad (6.1.2)$$

Плотность числа квантов РИ меняется по тому же закону,  $n_\gamma \sim a^{-3}$  (обоснование этого см. далее в этом параграфе), однако энергия каждого кванта  $E$  меняется, как  $a^{-1}$ , и поэтому плотность энергии РИ меняется, как  $a^{-4}$ :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\gamma &\sim E_\gamma n_\gamma \sim a^{-4}, \\ \rho_\gamma &= \frac{\epsilon_\gamma}{c^2} \sim a^{-4}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.3)$$

Из (6.1.2) и (6.1.3) следует:

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho_{\text{вещ}}} \approx 4 \cdot 10^{-5} \frac{a_0}{a} \frac{1}{\Omega}. \quad (6.1.4)$$

Если принять, что  $\Omega=1$ , т. е. что  $\rho_{\text{вещ}}|_{t_0}=10^{-29} \text{ г/см}^3$ , то

$$\frac{\rho_{\gamma}}{\rho_{\text{вещ}}} \approx 4 \cdot 10^{-5} \frac{a_0}{a}. \quad (6.1.5)$$

Таким образом, в прошлом, когда  $a \approx a_0 \cdot 4 \cdot 10^{-5}$ , тогда  $\rho_{\gamma} \approx \rho_{\text{вещ}} \approx 10^{-12} \text{ г/см}^3$  (при  $\Omega=1$ ), а в еще более раннюю эпоху

$$\rho_{\gamma} \gg \rho_{\text{вещ}}. \quad (6.1.6)$$

Эта ранняя эпоха, когда выполняется условие (6.1.6), носит название (радиационно-доминированной) (РД) стадии. На РД-стадии закон эволюции определяется тяготением ультрарелятивистского газа с  $P=\varepsilon/3$  и, согласно §§ 8 гл. 1,  $a \sim t^{1/2}$ . Температура излучения меняется на всех стадиях расширения, как  $a^{-1}$ :

$$T_{\gamma} \sim a^{-1}.$$

Следовательно, на ранних этапах расширения температура была велика (формулы см. в следующем параграфе).

Итак, на РД-стадии в начале космологического расширения господствовали огромные температуры, огромные плотности материи и при этом  $\rho_{\gamma} \gg \rho_{\text{вещ}}$ . Обычное вещество в этих условиях находилось в состоянии полностью ионизованной плазмы и было в термодинамическом равновесии с излучением (подробности см. в следующих параграфах и главах). Подчеркнем, что отношение  $n_{\gamma}/n_{\text{вещ}}$  все время практически не меняется в ходе расширения,  $n_{\gamma}/n_{\text{вещ}} \approx 10^8$ . На поздней стадии это обеспечивается сохранением фотонов РИ, которое не взаимодействует с веществом, на ранней стадии постоянство  $n_{\gamma}/n_{\text{вещ}}$  обеспечивается условием термодинамического равновесия.

Как показано в ТТ и ЭЗ, отношение  $n_{\gamma}/n_N$  ( $n_N=n_{\text{вещ}}$ ) характеризует удельную (на один нуклон) энтропию вещества  $s$ :

$$s = \frac{S}{kn_N} = \frac{4n_{\gamma}}{kn_N},$$

где  $S$  — энтропия единицы объема,  $k$  — постоянная Больцмана. Имея в виду применимость этой формулы и к очень ранней стадии эволюции, когда в горячем веществе есть также много пар частиц — античастиц, надо уточнить, что понимается под  $n_N$  и  $n_{\gamma}$ . Под  $n_N$  понимается избыток барионов над антибарионами, а под  $n_{\gamma}$  — сумма всех частиц и античастиц, имеющихся в веществе за счет его тепловой энергии (т. е. это  $\gamma$ ,  $\nu$ ,  $\bar{\nu}$ ,  $e^+$ ,  $e^-$  и т. д.). Для появления заметного количества таких пар частиц — античастиц необходимо, чтобы выполнялось условие  $kT \geq mc^2$ , где  $m$  — масса покоя частицы. Таким образом, например, электрон-позитронных пар много, когда  $T > 5 \cdot 10^6 \text{ К}$ . В еще более ранние моменты и, соответственно, при более высоких температурах в равновесии находятся еще более

тяжелые пары частиц и античастиц. (Подробно термодинамика вещества при больших температурах изложена в гл. 7 и 8 ТТ и ЭЗ.) Конечно, никакие сложные атомные ядра в этих условиях не могут существовать, они были бы моментально разбиты. Нуклоны существуют в виде нейтронов и протонов, постоянно превращающихся друг в друга \*). Количество частиц и античастиц каждого сорта (если выполнено условие  $kT > mc^2$ ) в единице объема примерно такое же, как и фотонов. Небольшое различие обусловлено только статистическими множителями, характеризующими сорта частиц. Таким образом, на каждый нуклон, присутствующий сегодня во Вселенной, в самую раннюю эпоху расширения, при  $T > 10^{13}$  °К, приходилось  $\approx 10^8$  нуклон-антинуклонных пар. С этой точки зрения сегодняшние нуклоны представляют собой результат малого избытка (всего на  $10^{-8}$ !) количества нуклонов над антинуклонами в той ранней стадии. Именно то, что этот удивительно малый избыток существовал, а не был в среднем строго равен нулю, подчеркивают Бэрбидж и др., говоря о «странности» зарядово-несимметричной модели.

Общую картину расширения горячей Вселенной принято делить на следующие эпохи, которые мы здесь лишь перечислим, а подробно опишем далее:

1. *Адронная стадия*:  $t \leq 10^{-8}$  сек,  $T > 10^{13}$  °К.

В равновесии в плазме, помимо нейтрино, мезонов, электрон-позитронных пар, имеется много нуклон-антинуклонных пар. Физика этой стадии рассматривается далее в этой главе.

2. *Лептонная стадия*:  $10^{-6}$  сек  $< t < 10$  сек,  $10^{13}$  °К  $< T < 5 \cdot 10^9$  °К.

Нуклон-антинуклонные пары аннигилировали \*\*), в равновесии в плазме находятся фотоны, нейтрино (в начале стадии мезоны, которые затем аннигилируют), электрон-позитронные пары и небольшая примесь нуклонов. К середине стадии процессы с нейтрино становятся медленными по сравнению с расширением. Нейтрино (сначала мюонные, а потом и электронные) перестают взаимодействовать с плазмой. Они движутся свободно, охлаждаясь из-за красного смещения, и остаются невзаимодействующими во все последующие эпохи до наших дней. В конце стадии происходит синтез ядер  $\text{He}^4$  (и небольшого количества других легких ядер), в это же время происходит аннигиляция пар  $e^+$ ,  $e^-$ . Процессы во время этой стадии разобраны в гл. 7.

3. *Эра фотонной (или радиационно-доминированной) плазмы*:  $10$  сек  $< t < 10^{12}$  сек,  $5 \cdot 10^9$  °К  $< T < 4 \cdot 10^8$  °К.

В равновесии находится плазма с излучением, нейтрино свободны. Об этом периоде см. гл. 8.

4. *Эра после рекомбинации водорода первичной плазмы.*

\*) А также в виде еще более короткоживущих частиц и «резонансов».

\*\*) Особая точка зрения Омнеса разобрана в § 3 этой главы.

Несколько позже  $t \geq 10^{12}$  сек, когда температура падает до 3—4 тысяч градусов, первичная плазма превращается в нейтральную и становится прозрачной для реликтового излучения. После этого становится возможным формирование отдельных небесных тел путем гравитационной неустойчивости из первоначально небольших флуктуаций плотности. Этот период и другие вопросы, связанные с проблемой образования небесных тел, рассматриваются в следующем разделе.

Гипотетические гравитоны, вероятно, присутствуют во все эпохи, но на всех этапах после «планковского» момента  $t \approx 10^{-43}$  сек они практически не взаимодействуют с остальными частицами. Здесь везде предполагаем справедливой однородную изотропную модель с самого начала космологического расширения. О возможных отклонениях от такой модели на ранних этапах расширения говорится в разделах IV, V. Кроме того, следуя ортодоксальной точке зрения, мы считаем, что нет сверхтяжелых гипотетических частиц, и полагаем массу нейтрино равной нулю. О возможных следствиях неортодоксальной теории см. в гл. 7.

## § 2. Космологическое расширение высокотемпературной плазмы и условия термодинамического равновесия

В горячей модели на длительной стадии плотность нуклонов и электронов мала по сравнению с плотностью квантов и других частиц с массой покоя, равной нулю. Электрон-позитронных пар много лишь тогда, когда температура больше массы покоя,  $kT > m_e c^2$  ( $T > 5 \cdot 10^9$  °K). Если выполнено это неравенство, то можно электроны и позитроны рассматривать как релятивистские частицы. То же относится и к более тяжелым частицам при соответственно еще более высокой температуре. Следовательно, приближенно имеет место соотношение \*)  $P = \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\rho c^2}{3}$ .

Для такого уравнения состояния закон расширения выведен в § 8 гл. 1. Он имеет вид

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2} = \frac{4,5 \cdot 10^5}{t^2} \text{ г/см}^3, \quad (6.2.1)$$

$$\varepsilon = \rho c^2 = \frac{4 \cdot 10^{26}}{t^2} \text{ эрг/см}^3. \quad (6.2.2)$$

Если бы газ состоял только из квантов электромагнитного поля, то мы имели бы

$$\varepsilon_{\text{изл}} = \sigma T^4, \quad \text{где } \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3} = 7,57 \cdot 10^{-15} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{град}^4}.$$

\*) При этом предполагается, что спектр масс ограничен, так что есть температура такая, что  $kT > M_m c^2$ , где  $M_m$  — максимальная масса. Предполагается также, что при этой температуре взаимодействие частиц между собой несущественно (об иной точке зрения, т. е. о теории Хэгедорна, см. § 4 этой главы).

С учетом того, что в равновесии есть различные сорта частиц, запишем:

$$\epsilon = \rho c^2 = \kappa \sigma T^4,$$

где  $\kappa$  — безразмерный коэффициент больше единицы. Получим

$$(kT)^4 = \frac{1}{\kappa} \frac{45}{32\pi^3} \frac{\hbar^3 c^3}{G t^2},$$

$$T (^{\circ}\text{K}) = t^{-1/2} \kappa^{-1/4} \cdot 1,5 \cdot 10^{10}; \quad t (\text{сек}) = \frac{2,25 \cdot 10^{20}}{T^2 \kappa^{1/2}}, \quad (6.2.3)$$

$$T (Mэв) = t^{-1/2} \kappa^{-1/4} \cdot 1,3; \quad t (\text{сек}) = \frac{1,7}{T_{Mэв}^2 \kappa^{1/2}}. \quad (6.2.4)$$

Наконец, для плотности всех сортов частиц получим, принимая во внимание, что средняя энергия частицы порядка  $3kT$ :

$$n = \frac{\epsilon}{3kT} = t^{-1/2} \kappa^{1/4} \cdot 0,01 \left( \frac{c}{\hbar G} \right)^{3/4} = t^{-1/2} \kappa^{1/4} \cdot 5 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}. \quad (6.2.5)$$

Как уже отмечалось раньше, при высокой температуре все частицы находятся в термодинамическом равновесии. В самом деле, для существования термодинамического равновесия необходимо, чтобы процессы, устанавливающие равновесие, шли быстрее, чем расширение плазмы. Точнее говоря, необходимо, чтобы время процесса, устанавливающего равновесие ( $\tau$ ), было много меньше характерного времени изменения параметров плазмы ( $\rho$ ,  $T$  и т. п.).

В изотропном решении  $\rho = \frac{\alpha}{G t^2}$ , где  $\alpha$  порядка единицы. Поэтому время, необходимое для изменения плотности от какого-либо значения  $\rho$  до  $\left(\frac{1}{e}\right)\rho \approx 0,4\rho$ , порядка  $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$ .

Таким образом,  $\Delta t$  порядка  $t$ . С другой стороны, время установления равновесия есть

$$\tau = \frac{1}{\sigma n v}, \quad (6.2.6)$$

где  $\sigma$  — сечение реакции,  $n$  — концентрация частиц,  $v$  — скорость их движения. При высоких температурах  $v \approx c$ . Величина  $n$  определяется по формуле (6.2.5):  $n = n_1 t^{-3/2}$  ( $n_1 = \text{const}$ ). Поэтому

$$\tau = \frac{t^{3/2}}{\sigma n_1 c}. \quad (6.2.7)$$

Для термодинамического равновесия необходимо:

$$\tau = \frac{t^{3/2}}{\sigma n_1 c} < \Delta t \approx t \quad (6.2.8)$$

или

$$\sigma > t^{1/2} n_1 c. \quad (6.2.9)$$



Поэтому термодинамическое равновесие имеет место при  $t \rightarrow 0$ , если только  $\sigma$  не уменьшается достаточно быстро с ростом энергии частиц. Можно надеяться, что условие (6.2.9) действительно выполняется. Так, например, не подлежит сомнению, что при высоких температурах число пар  $e^+$ ,  $e^-$  не отличается от равновесного. В самом деле, рассмотрим для примера момент, когда  $T=1 \text{ Мэв}$ ,  $t=1 \text{ сек}$ ,  $n_{e^+} \approx n_{e^-} \approx 10^{31} \text{ см}^{-3}$ . Сечение аннигиляции  $\sigma_1$  порядка  $10^{-24} \text{ см}^2$ , скорость частиц порядка скорости света; следовательно, время установления равновесия порядка

$$\tau = \frac{1}{\sigma_1 n c} = 10^{-17} \text{ сек.}$$

Итак,  $\tau$  ничтожно мало по сравнению с  $t=1 \text{ сек}$ . Полное равновесие  $e^+ + e^- \rightleftharpoons 2\gamma$  обеспечено. Точно так же обстоит дело и с установлением равновесия мюонных пар  $\mu^+$ ,  $\mu^-$ , а также мезонов и барионов всех сортов при соответствующих более высоких температурах.

Лишь вблизи самой сингулярности, при  $t \leq \left(\frac{\hbar c}{e^2}\right) t_{\text{пл}}$  (напомним, что  $t_{\text{пл}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 10^{-43} \text{ сек}$ ), условие установления равновесия может не выполняться для заряженных частиц и фотонов. Поскольку позже условие равновесия выполнено с огромным запасом, нельзя ожидать заметных отклонений от равновесия на этих более поздних этапах.

Ситуация не ясна для гравитонов (см. § 2 гл. 7). О границах областей, где выполняется условие термодинамического равновесия для тех или иных частиц, говорится далее, также в гл. 7. В данной главе в дальнейших параграфах мы рассмотрим адронную стадию расширения Вселенной, когда температура выше энергии покоя нуклонов и в равновесии находится много нуклон-antinуклонных пар.

### § 3. Адронная стадия эволюции Вселенной

При температуре, сравнимой с энергией покоя протона и нейтрона и выше,  $T \gtrsim m_p c^2 / k$ , количество нуклонов и антинуклонов в плазме становится порядка количества фотонов; соответствующие точные формулы можно найти у Ландау и Лифшица (1964), формулы с точностью до безразмерного численного коэффициента даны в предыдущем параграфе. Разность количества нуклонов и антинуклонов равна наблюдаемому в настоящее время количеству нуклонов, т. е. составляет около  $10^{-8}$  количества фотонов. Этот небольшой избыток нуклонов задается как начальное условие для того, чтобы после расширения плазмы, ее охлаждения и аннигиляции пар дать наблюдаемую сегодня картину Вселенной с реликтовым излучением. О попытках объяснения того, почему этот произвольный параметр

должен быть столь мал (или, иными словами, почему энтропия Вселенной столь велика), см. в разделе V. При высокой температуре эта разность  $N - \bar{N}$  мала по отношению к общему количеству нуклонов и антинуклонов, так что с достаточной точностью можно считать вещество зарядово-симметричным, нейтральным; к нему приложимы соотношения гл. 7 и 8 ТТ и ЭЗ.

Каково общее количество различных сортов частиц и античастиц?

Опыты на ускорителях доказывают существование большого числа так называемых «резонансов», т. е. элементарных частиц с чрезвычайно коротким временем жизни, порядка  $10^{-23}$  сек. Разумеется, такие частицы нельзя наблюдать классическими методами, прослеживая их траекторию от места образования до места распада. Существование этих частиц проявляется в том, что, например, при рассеянии  $\pi^+$  на  $p$  в сечении появляется максимум (резонанс) при определенной энергии. Этот максимум можно описать так, что происходит образование частицы  $\Delta^{++}$ , заряд которой вдвое больше заряда протона, по реакции  $p + \pi^+ = \Delta^{++}$ . Частица  $\Delta^{++}$  тут же распадается на  $p + \pi^+$ , так что наблюдается только рассеяние  $\pi^+$  на  $p$ . Детальное изучение позволяет определить не только массу и заряд, но и другие свойства, например спин, «резонанса» (например, для  $\Delta^{++}$  спин равен  $3/2$ ).

Долгоживущие (в том числе и стабильные) частицы образуют «семейства» — такие, например, как протон и нейтрон или три пиона:  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$ . Такие же семейства образуют и резонансы. Таблица различных резонансов содержит в настоящее время более 300 частиц. Эта таблица продолжает пополняться \*), и возможно, что расширение таблицы ограничено только мощностью ускорителей и точностью эксперимента. Существуют полуэмпирические теории, предсказывающие ряды сходных частиц с растущим спином и массой, квадрат которой линейно растет с ростом спина частицы. В теории горячего вещества существует направление — теория Хagedорна (см. следующий параграф), согласно которой все эти частицы можно рассматривать как независимые компоненты и прилагать к ним формулы статистической механики. Качественно результаты можно понять и без подробной теории, изложенной в ТТ и ЭЗ.

Дело сводится к тому, что в формулах

$$\varepsilon = \kappa T^4, \quad S = \kappa T^3 \frac{4}{3}, \quad (6.3.1)$$

где  $\kappa$  — число сортов частиц,  $S$  — энтропия, надо считать  $\kappa$  функцией температуры. Крайний случай соответствует тому, что  $\kappa \rightarrow \infty$

\*) В замечательном фильме Михаила Ромма «Девять дней одного года» стенгазета призывает открыть новую частицу в следующем квартале.

при  $T \rightarrow \Theta$ , где  $\Theta$  есть некая критическая температура \*). Давление оказывается меньше, чем для релятивистского газа,  $P < \varepsilon/3$ , а при  $\kappa \rightarrow \infty$   $P/\varepsilon \rightarrow 0$ . Следовательно, в предельном случае  $\kappa \rightarrow \infty$  закон космологического расширения оказывается соответствующим плоской модели с пылевидной материей:

$$a \sim t^{2/3}, \quad \varepsilon = \frac{c^2}{8\pi G t^2}. \quad (6.3.2)$$

Осуществляется ли такая картина? Представляется, что пренебрежение взаимодействием в рассматриваемой ситуации ни на чем не основано. Само существование большого числа резонансов, возможно, является указанием на то, что мы имеем дело с возбужденными состояниями нуклонов; может быть, барионы не элементарны, а состоят в свою очередь из каких-то «более элементарных» частиц. Тогда при высокой температуре статистическую физику надо прилагать к этим частицам.

Можно ожидать, что при достаточно высокой температуре  $kT > M_q c^2$  (где  $M_q$  — масса кварка, предполагается, что кварки гораздо тяжелее барионов, например,  $M_q = 30$  или  $50 M_p$ ) мы вернемся к простой формуле вида (6.3.1) с постоянным небольшим  $\kappa$ , а следовательно, и с  $P = \varepsilon/3$ . Отметим, не входя в существо дела, что Киржниц и Файнберг (1973) находят противоречие между теорией Хэгедорна и современной теорией поля. Вопросы, которые возникают в этой области, весьма сложны, они нуждаются в теоретическом и экспериментальном выяснении. Более того, не ясно, имеют ли эти вопросы точный смысл. Поясним сомнения конкретным примером: сильновзаимодействующие мезоны, возможно, представляют собой связанные системы барион — антибарион. Такая точка зрения была впервые высказана Ферми и Янгом в 1953 г. применительно к пионам. Позже была разработана классификация всех мезонов (частиц с нулевым барионным зарядом) как связанных состояний кварков и антикварков \*\*). В плотном горячем веществе, где присутствует большое число барионов и антибарионов, трудно отличить две частицы — барион и антибарион — от одного мезона.

Здесь нужно подчеркнуть, что трудности и сомнения относятся к возможности подсчета числа индивидуальных частиц, т. е., по существу, к использованию понятий статистической физики невзаимодействующих частиц. Не подлежит сомнению, однако, существование таких понятий, как плотность энергии, давление (эти

\*) Необходимое условие для этого заключается в том, чтобы число сортов частиц (умноженное на статистический вес каждой частицы) росло бы экспоненциально с массой: если  $\kappa^*(m) \sim e^{bm}$ , то предельная температура  $\Theta = c^2/b$ . Степенные множители при экспоненте не меняют этого основного результата.

\*\*) Группу мезонов с массой около  $2m_p$  (притом и больше, и меньше этой величины) И. Шапиро (1973) описывает как барион и антибарион, связанные ядерными силами.

величины входят в правую часть уравнений общей теории относительности). Несомненно, существуют и такие термодинамические величины, как температура и плотность энтропии.

Законы сохранения «зарядов», установленные при попарном взаимодействии частиц, должны иметь место и в плотном веществе. Отсюда следует существование плотности зарядов — барионного, электрического, лептонного — у плотного вещества \*).

В этом смысле неопределенность теории имеет только количественный характер. Важно отметить, что неопределенность в области больших температур, которые были в начале расширения Вселенной, при  $t < 10^{-6}$  сек,  $\rho > 10^{17}$  г/см<sup>3</sup>, почти не отражается на ситуации в последующем, при  $t > 10^6$  сек, благодаря быстрому установлению термодинамического равновесия \*\*).

Более важными для космологии могут оказаться гипотезы о взаимодействии барионов. В литературе высказаны две противоположные гипотезы. Согласно первой, существует отталкивание барионов друг от друга и притяжение барионов к антибарионам.

Предполагается, таким образом, что есть подобие электростатики, с той разницей, что: 1) роль электрического заряда играет барионный заряд и 2) радиус сил ограничен — вместо кулоновского потенциала  $\sim 1/r$  имеет место потенциал вида  $e^{-\mu r}/r$ , где  $\mu$  — химический потенциал. Такая теория получается в предположении, что существует нейтральное векторное поле, взаимодействующее с барионным зарядом, но отличающееся от электромагнитного тем, что кванты этого поля — вектоны — имеют большую массу покоя.

Эта гипотеза приводит [Зельдович (1961)] для холодного вещества к уравнению состояния ( $M$  — масса барионов)

$$e = Mc^2 \left[ n + \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^3 n^2 \right], \quad (6.3.3)$$

где  $n$  — плотность барионов, т. е. к так называемому предельно жесткому уравнению состояния. В этом уравнении не учтены ни сравнительно слабые «обычные» ядерные силы, ни ферми-энергия нуклонов. Однако если верно предположение об отталкивании, то эти неучтенные факторы действительно отступают на второй план в пределе при  $n \rightarrow \infty$ . В холодном веществе отталкивание может стать существенным (член  $\sim n^2$  в скобках) при

$$n \approx \left( \frac{Mc}{\hbar} \right)^3 = 10^{41} \frac{1}{\text{см}^3}, \quad \rho \approx 2M \left( \frac{Mc}{\hbar} \right)^3 \approx 4 \cdot 10^{17} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}. \quad (6.3.4)$$

\*) Гипотезы о возможности несохранения барионного заряда вблизи сингулярности обсуждаются в разделе V.

\*\*) Исключением является ситуация, возникающая в том случае, если при определенной температуре однородное вещество разделяется на две фазы — с избытком нуклонов и антинуклонов, согласно гипотезе Омнеса (см. ниже). В этом случае кинетика установления равновесия зависит от диффузионных процессов.

Если горячее вещество содержит избыток барионов, причем на один избыточный барион содержится  $\approx 10^8$  нейтральных частиц и нейтральных пар, то энергия отталкивания по-прежнему есть  $\varepsilon_{\text{отт}} = \frac{\hbar^2}{M^2 c} n^2$ , а тепловая энергия  $\varepsilon_{\text{тепл}} \approx N (\hbar c N^{1/3})$ , где  $N = sn$ , так что  $\varepsilon_{\text{тепл}} \approx \hbar c \cdot s^{1/3} n^{1/3}$ . Отсюда находим то  $n$ , начиная с которого отталкивание становится преобладающим:

$$\left. \begin{aligned} n &\approx s^2 \left( \frac{Mc}{\hbar} \right)^3 \approx 10^{57} \frac{1}{\text{см}^3}, \\ \rho &\approx s^4 \frac{M^4 c^3}{\hbar^3} \approx 10^{50} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.5)$$

При более высокой плотности уравнение состояния  $P = \varepsilon$  приведет к  $a \sim t^{1/3}$ . Приведенные выше выводы связаны с огромной экстраполяцией, и потому их никак нельзя считать надежными. С другой стороны, отметим, что характерная «планковская» плотность еще гораздо выше:  $\rho_{\text{пл}} = \frac{c^5}{G^2 \hbar} = 5 \cdot 10^{93} \text{ г/см}^3$ . Пока плотность меньше  $\rho_{\text{пл}}$ , можно пользоваться понятиями плотности и давления, даже если мы не умеем конкретно вычислять эти величины.

Противоположная гипотеза о взаимодействии барионов и антибарионов недавно выдвинута Омнесом (1969), см. также Омнес (1971а, б, в), критика дана в докладе Стейгмана (1973). Исходя из теоретического анализа взаимодействия, автор утверждает, что антинуклоны отталкиваются от нуклонов в определенной области энергий, а следовательно, и в определенном интервале температур, порядка сотни или сотен  $M\omega$ .

Составим, следуя Омнесу, уравнение для равновесной концентрации барионов  $x$  и антибарионов  $y$ . По-прежнему рассматриваем зарядово-симметричную систему, так что химические потенциалы равны нулю:  $\mu_x = \mu_y = 0$ . Энергия бариона содержит член, пропорциональный плотности антибарионов:

$$E_x = \sqrt{(Mc^2)^2 + p_x^2 c^2} + Ay; \quad (6.3.6)$$

соответственно

$$E_y = \sqrt{(Mc^2)^2 + p_y^2 c^2} + Ax. \quad (6.3.7)$$

Отсюда найдем в равновесии

$$\left. \begin{aligned} x &= B(T) e^{-Ay/kT}, \\ y &= B(T) e^{-Ax/kT}, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.8)$$

где  $B(T)$  — равновесная концентрация без учета отталкивания. Эта система уравнений всегда имеет симметричное решение  $x = y = \bar{C}(T)$ , где  $\bar{C}(T)$  — решение трансцендентного уравнения  $C = B e^{-AC/kT}$ . Однако если энергия взаимодействия на один нуклон больше теп-

ловой энергии, т. е. если  $AC/kT > 1$  в симметричном решении, то оказывается, что система двух уравнений имеет три решения:

$$x = y = C; \quad x_1 > C, \quad y_1 < C; \quad x_2 = y_1 < C, \quad y_2 = x_1 > C. \quad (6.3.9)$$

Физически это означает, что при высокой температуре отталкивание нуклонов и антинуклонов приводит к разделению зарядово-симметричного вещества на две фазы: фазу с преобладанием нуклонов и фазу с преобладанием антинуклонов. Локально-симметричное решение становится неустойчивым. Достаточно горячее (по оценке автора,  $T > 300 \text{ Мэв}$ ) вещество превращается в эмульсию, т. е. механическую смесь двух фаз; термодинамически выгодно образование больших капель, при этом уменьшается поверхностная энергия. Зарядовая симметрия соблюдается лишь в среднем для объема, содержащего много капель с избытком барионов и капель с избытком антибарионов. В ходе понижения температуры становится термодинамически выгодной одна однородная фаза, но для ее возникновения нужно, чтобы процесс диффузии выравнивал концентрации барионов и антибарионов. Омнес полагает, что образование на определенном этапе двух фаз может оказаться решающим для зарядово-симметричной космологии, обеспечивая разделение вещества и антивещества в астрономическом масштабе. К этой стороне дела мы обратимся в следующих разделах книги (см. гл. 23).

Наконец, существует предположение, что известные нам частицы — нуклоны, резонансы — не элементарны в том смысле, что они состоят из каких-то других элементарных частиц (Гелл-Манн, Цвейг). Несколько лет назад усиленно обсуждалась гипотеза кварков — трех типов частиц с барионным зарядом, равным  $1/3$ , и с электрическим зарядом  $+2/3e$  у одного типа и  $-1/3e$  у двух других типов кварков. Подразумевается, что в силу зарядовой симметрии существуют и антикварки с барионным зарядом  $-1/3$  и электрическим  $-2/3e$ ,  $+1/3e$ ,  $+1/3e$ .

Каждый барион, согласно кварковой гипотезе, состоит из трех кварков [вариант из четырех кварков и одного антикварка см. Зельдович, Сахаров (1966, 1967)]. Заряды подобраны таким образом, что электрический заряд бариона может иметь только целые значения. Мезоны в этой схеме представляют собой соединения кварка с антикварком.

Большой успех гипотезы был связан с тем, что различные частицы получали наглядное объяснение как различные комбинации кварков (разный набор частиц, разная взаимная ориентация спинов; спин кварка полагался равным  $1/2$ ).

Были предприняты поиски частиц с дробным зарядом на ускорителях, в космических лучах и, в виде малой примеси, в обычном веществе. При поисках кварков в обычном веществе большое значение имели предсказания, основанные на горячей модели Вселенной (см. § 4 гл. 7).

Поиски кварков не увенчались успехом; одновременно выявились и внутренние трудности теории кварков \*). Однако отвергнут лишь определенный вариант теории, согласно которой известные нам адроны являются составными, сложными частицами. В общем виде отвергнуть такую идею трудно, и недавно появились предположения о том, что адроны состоят из партонов (от латинского слова «parte» — часть). В теориях такого рода при достаточно высокой температуре обычные адроны распадутся, нужно рассматривать газ, состоящий из кварков — антикварков или партонов — антипартонов.

Ниже отдельные аспекты теории Хagedорна и теории Омнеса будут обсуждены более подробно. Здесь, в рамках общего обзора, можно констатировать большое разнообразие вариантов, а значит, и большую неопределенность наших знаний относительно состояния вещества при адронных и более высоких температурах.

Возникает естественный вопрос: если так велика неопределенность в прошлом, то может ли теория предсказать последующие стадии эволюции?

Здесь на помощь приходят законы сохранения: точные законы сохранения барионного заряда \*\*) и энергии и приближенный закон сохранения энтропии при медленном адиабатическом процессе. Задачу об эволюции мы решаем при известных значениях сохраняющихся величин. Эти значения получены из наблюдений, относящихся к современной эпохе; к сожалению, теоретически они не вычисляются.

Однако, как следствие того, что используются экспериментальные константы, основные черты сегодняшней ситуации и недавнего прошлого воспроизводятся точно \*\*\*).

Задачей теории остается определение отклонений от равновесного состояния. Конкретно, наиболее интересен вопрос о количестве антибарионов, остающихся к настоящему времени. Аналогично можно поставить вопрос о количестве кварков и антикварков или партонов и антипартонов.

Очевидно, что равновесное количество таких частиц при  $3^\circ\text{K}$  невообразимо мало. Таким образом, ответ зависит от кинетики

---

\*) Эти трудности специфичны для наиболее экономной модели с тремя сортами кварков: чтобы согласовать модель с систематикой известных частиц, приходилось предполагать, что кварки не подчиняются принципу Паули и статистике Ферми, несмотря на то что спин их равен  $1/2$ .

В варианте теории, развитом Боголюбовым и др. (1965), предполагается существование  $3 \times 3 = 9$  сортов кварков. В этом варианте при спине  $1/2$  кварки являются фермионами; кроме того, им можно приписать целый электрический заряд. Поэтому опыты, в которых не были найдены дробные заряды, не противоречат такому варианту теории. Любопытные геометрические модели частиц в такой теории в последнее время построил Долгов и др. (1974).

\*\*) Возможность отказа от точного сохранения барионного заряда будет рассмотрена в разделе V.

\*\*\*)) Это не относится к теории Омнеса, см. подстрочное примечание на стр. 167.

процесса исчезновения упомянутых частиц. При этом существенно, что рассматриваются частицы, которые сами по себе стабильны в вакууме.

Антипротон исчезает, только аннигилируя с протоном. Если кварки существуют, то один сорт кварков стабилен и исчезает, лишь столкнувшись с другим кварком (того же сорта или со своей античастицей). Таким образом, мы имеем дело с процессами, требующими столкновения двух частиц. Эти процессы становятся медленными при малой концентрации частиц.

В этих условиях выводы теории становятся устойчивыми, мало зависящими от неопределенностей теории адронного состояния; решающие, заключительные аккорды разыгрываются при более низкой температуре.

Общими для всех вариантов являются предположение о пространственной однородности Вселенной и задание плотности барионного заряда — иными словами, рассмотрение зарядово-несимметричной Вселенной.

Для того чтобы закончить изложение вопроса, перечислим уже здесь выводы расчетов, которые будут приведены далее, в §§ 3, 4 гл. 7.

1. Остаточная концентрация антинуклонов в зарядово-несимметричной теории необычайно мала (меньше  $e^{-100}$ ) уже в конце адронной стадии, при температуре  $\sim 1$  Мэв. Результат является естественным следствием того, что: а) мы имеем дело с сильным взаимодействием, сечение аннигиляции велико; б) избыток нуклонов обуславливает экспоненциальную малость количества антибарионов, когда рождение их прекращается, ибо они аннигилируют при встрече с нуклонами. Ситуация такая же, как сегодня в окружающем нас мире: антинуклонов и позитронов мало (меньше, чем их произвели космические лучи за космологическое время) потому, что они аннигилируют с избыточными, повсеместно присутствующими нуклонами.

2. Остаточная концентрация кварков оказывается сравнительно большой, порядка  $\sqrt{GM^2/\hbar c} \sim 10^{-18}$ , по отношению к фотонам. По отношению к обычным нуклонам концентрация кварков должна составлять около  $10^{-9}$ . Эта величина мала по сравнению с единицей, но достаточно велика, чтобы вдохновить экспериментаторов. Понятно, что расчет имеет смысл лишь в том случае, если кварки существуют. Но теперь, как утверждают экспериментаторы, можно сказать, что кварки не обнаружены в количестве  $10^{-15}$ — $10^{-20}$ , значит такие дробно-заряженные кварки не существуют.

3. При попытке рассмотреть пространственно-однородную зарядово-симметричную Вселенную получим для нуклонов задачу, подобную задаче о кварках. Получится и сходный ответ, т. е. концентрация порядка  $10^{-18}$  нуклонов на фотон.



Такой ответ противоречит наблюдениям \*), поэтому и приходится рассматривать зарядово-несимметричную однородную Вселенную. Особняком в этом отношении стоит уже упомянутая теория Омнеса.

Автор исходит из теории зарядово-симметричной Вселенной. Первоначальная однородность Вселенной спонтанно нарушается в микроскопическом масштабе: взаимодействие приводит к разделению однородного вещества на капли вещества и капли антивещества размерами порядка  $10^{-3}$  см в момент  $t=10^{-6}$  сек. В ходе понижения температуры тенденция к разделению вещества и антивещества исчезает; при низкой температуре происходит аннигиляция. Однако пространственное разделение вещества и антивещества существенно замедляет аннигиляцию. Ее скорость теперь лимитируется переносом нуклонов и антинуклонов к границе областей с избытком тех или иных частиц. Только на этой границе происходит аннигиляция \*\*).

Относительно дальнейшего существуют огромные качественные разногласия. Омнес полагает, что после аннигиляции в одних областях (порядка размера галактики) окажется избыток вещества — останется около  $10^{-8}$  нуклонов на один фотон; в других областях (того же порядка) столько же антинуклонов. Таким образом, по мнению Омнеса, зарядово-симметричная теория приводит к современной картине мира, состоящего из галактик и антигалактик. Его расчеты дают две характерные величины: отношение средней плотности нуклонов (и антинуклонов) к плотности фотонов и характерный размер области, заполненной веществом или антивеществом.

По нашему мнению, предположение Омнеса о разделении барионов и антибарионов на адронной стадии ведет к другим, более тривиальным выводам. Разделение происходит путем перемещения нуклонов и антинуклонов в малых масштабах.

При усреднении по большим объемам и массам возникающие отклонения от зарядовой симметрии гораздо меньше, чем предполагает Омнес. Последовательный расчет разделения и последующей аннигиляции приводит к гораздо меньшей остаточной концентрации нуклонов и антинуклонов. Таким образом, исчезает согласие между теорией и наблюдениями в важнейшем пункте — в отношении современной плотности нуклонов. Теория Омнеса предсказывает также, что аннигиляция затягивается, продолжаясь на протяжении радиационно-доминированной стадии и позже. Наблюдения не обнаруживают ожидаемых следствий затянувшейся аннигиля-

---

\*) Противоречие столь сильное, что мы не останавливаемся здесь на других трудностях.

\*\*) Нейтроны и антинейтроны диффундируют и аннигилируют быстрее, поэтому гелия образуется мало, к тому же гелий «разбивается» при аннигиляции. Таким образом, существенно меняются выводы, касающиеся нуклеосинтеза [см. Ривс (1973)].

ции. По совокупности мы полагаем, что зарядово-симметричная Вселенная и при учете фазового разделения не согласуется с наблюдениями и должна быть отвергнута.

Вернемся к концепции зарядово-несимметричной Вселенной, с избытком барионов на всем протяжении эволюции. На адронной стадии избыток барионов (будучи постоянным по абсолютной величине) оказывается относительно малым ввиду большого числа пар. Поэтому на адронной стадии остается без изменения картина разделения на нуклонную и антинуклонную фазы, если верна гипотеза Омнеса. При  $T=300 \text{ Мэв}$  зарядовая несимметрия проявится лишь в небольшом преобладании объема нуклонной фазы над объемом антинуклонной фазы \*).

Однако существенно изменяется картина аннигиляции:

По нашим оценкам, аннигиляция адронов закончится при температуре выше  $1 \text{ Мэв}$ , т. е. в условиях обилия электронов и позитронов. В таком случае спектр реликтового излучения полностью принимает равновесный вид. Современная плотность барионов останется равной начально заданному барионному заряду.

Было бы весьма интересно попытаться найти в современном мире какие-то следы фазового разделения на адронной стадии, в частности, в составе первичного вещества (большое количество осколков — дейтерия, гелия-3).

#### § 4. Теория Хагедорна

Краткий очерк теории Хагедорна (1965, 1969, 1973) дан в ТТ и ЭЗ. Для связности изложения напомним, что невзаимодействующие частицы («идеальный газ»), масса покоя которых равна  $m$  и статистический вес  $g$ , дают вклад в плотность энергии

$$\varepsilon = g\Psi(T, m) = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{E(p, m) d^3p}{\exp(E/T) \pm 1}. \quad (6.4.1)$$

Здесь температура выражена в энергетических единицах (константа Больцмана  $k \equiv 1$ ). Химический потенциал принят равным нулю, что всегда справедливо для нейтральных частиц, но справедливо и для заряженных частиц в симметричном случае, при равенстве числа частиц с положительными и отрицательными зарядами. Знак плюс (минус) в знаменателе соответствует фермионам (бозонам).

При наличии многих сортов независимых частиц необходимо взять сумму подобных выражений:

$$\varepsilon = \sum_i g_i \Psi(T, m_i). \quad (6.4.2)$$

\*) Богданова и Шапиро (1974) приводят веские доводы против исходного предположения Омнеса об отталкивании нуклонов и антинуклонов.

Если число слагаемых конечно и существует некая максимальная масса  $m_{\max}$ , то поведение  $\varepsilon(T)$  при больших  $T$  тривиально; при  $T > m_{\max} c^2$

$$\varepsilon = T^4 \sum \alpha_i g_i, \quad (6.4.3)$$

где  $\alpha_b = \frac{\pi^2}{30 \hbar^3 c^3}$  для бозонов и  $\alpha_f = \frac{7\pi^2}{240 \hbar^3 c^3}$  для фермионов.

Хагедорн рассматривает бесконечную последовательность типов частиц. Если массы бесконечного числа частиц ограничены,  $m_i < M$  при  $i \rightarrow \infty$ , то при любой конечной температуре теория предсказывает бесконечную плотность энергии:

$$\varepsilon = \sum g_i \Psi(T, m_i) > \sum g_i \Psi(T, M) = \Psi(T, M) \sum g_i = \infty. \quad (6.4.4)$$

Очевидно, такой вывод противоречит опыту; поэтому в теории Хагедорна рассматривается последовательность частиц с неограниченно возрастающей массой.

Асимптотически при большом  $m$  введем среднюю плотность числа частиц  $n(m)$ , так что число сортов частиц с массой в интервале между  $m$  и  $m+dm$  равно  $dN = n(m)dm$ . В формулы входит произведение плотности и среднего статистического веса,  $f(m) = g(m)n(m)$ . Заменяя сумму интегралом, получим

$$\varepsilon = \int \Psi(T, m) f(m) dm. \quad (6.4.5)$$

Возникает целый ряд изящных математических задач. Изящество их, несомненно, играло заметную роль в том большом числе теоретических работ, которые последовали за предложением Хагедорна. Найдем характер функции  $f(m)$ , приводящий к существованию верхнего предела температуры  $T$ , т. е. к тому, что  $\varepsilon \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow \Theta$ .

Очевидно, в этой ситуации главная часть интеграла приходится на область  $m > T$ , где асимптотически

$$\Psi(T, m) = a T^{3/2} m^{5/2} e^{-mc^2/T}. \quad (6.4.6)$$

Итак, какой должна быть  $f(m)$ , чтобы

$$\varepsilon = a T^{3/2} \int m^{5/2} e^{-mc^2/T} f(m) dm \rightarrow \infty$$

при  $T \rightarrow \Theta$ ? Очевидно, что главное условие  $f(m) \approx e^{mc^2/\Theta}$  или, точнее,  $f(m) = \varphi(m) e^{mc^2/\Theta}$ , где  $\varphi(m)$  — медленно меняющаяся функция. Тогда под интегралом появится  $\exp mc^2 \left( \frac{1}{\Theta} - \frac{1}{T} \right)$ . При  $T < \Theta$  эта экспонента убывает, интеграл сходится; при  $T > \Theta$  экспонента растет, интеграл расходится.

Итак, определен вид характеристической функции  $f(m)$ , при которой существует критическая, максимальная температура  $\Theta$ . Можно уточнять поведение  $\varepsilon(T)$  при  $T \rightarrow \Theta$  в зависимости от вида медленно меняющейся  $\varphi(m)$ .

Однако мы не будем заниматься этим математическим сладострастием и обратимся к физическим основам теории.

Совместимы ли те два предположения, на которых основана теория: 1) о невзаимодействующих частицах и 2) о неограниченном числе типов частиц?

Современная теория частиц не исключает такую ситуацию. Мы из опыта знаем о существовании электрона и мюона: обе эти частицы обладают электрическим зарядом и «слабым» взаимодействием (участвуют в бета-распаде и т. п. процессах). Взаимодействия эти

малы ( $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \ll 1$ ,  $\frac{g m_\mu c}{\hbar^3} \sim 10^{-7} \ll 1$ ). С точки зрения статистиче-

ской механики  $e$  и  $\mu$  действительно могут рассматриваться как невзаимодействующие частицы.

Современная теория не позволяет вычислить отношение масс  $m_\mu/m_e = 207$ . Само существование мюона рассматривается в теории как эмпирически установленный факт. Поэтому не исключено, что семейство электрон — мюон имеет продолжение в области еще больших масс (сверхтяжелый мюон и т. д.), труднообнаружимое на опыте, но входящее в статистические суммы. Однако представляется крайне неправдоподобным, чтобы число членов такого семейства было экспоненциально велико.

Автор теории — Хагедорн — вдохновляется экспериментальными данными по резонансам сильновзаимодействующих частиц. Здесь наблюдается закономерность: резонансы с данными зарядами (электрическим, барионным, странностью) ложатся на прямую в координатах  $S - M^2$ , где  $S$  — спин резонанса,  $M$  — его масса.

На такой траектории плотность уровней  $n(M) = \text{const} \cdot M$ , средний статистический вес  $2S+1 \sim M^2$ , функция  $f(m) \sim m^3$ , т. е. растет для данной траектории, но медленнее, чем экспонента. С увеличением массы могут начинаться новые траектории, соответствующие новым семействам частиц, с большим изотопическим спином.

В случае адронов возможность экспоненциального роста  $f(m)$  больше, чем в случае лептонов (электронов, мюонов). Однако здесь заведомо нельзя считать частицы невзаимодействующими в плотной горячей плазме.

Учет этого взаимодействия в статистической механике весьма затруднителен (с этим вопросом мы встречались при обсуждении теории Омнеса в предыдущем параграфе).

Рассмотрим систему, в которой, наряду с протонами и нейтронами, имеются пионы. При вычислении термодинамических величин, относящихся к такой системе, необходимо учитывать фазу

рассеяния пиона на протоне или нейтроне. Но резонанс (например, так называемый  $\Delta$ -3-3-резонанс) как раз и проявляется в определенном поведении сечения и фазы рассеяния.

Рассматривая отдельно а) пионы, взаимодействующие с нуклонами, и б) резонансы, мы совершили бы ошибку, учитывая одно и то же физическое явление дважды. Хагедорн считает, что существование предельной температуры подтверждается опытом.

При лобовых столкновениях энергичных элементарных частиц (в космических лучах или на наиболее мощных ускорителях) предполагается образование «огненного шара» — фэйрболла (fire—ball). Энергия выделяется в малом объеме, возникает термодинамически равновесная плазма.

Хагедорн отмечает, что импульс частиц \*), разлетающихся из огненного шара, соответствует температуре 160 Мэв, причем практически независимо от числа частиц, родившихся в данном столкновении, т. е. независимо от полной энергии столкновения.

Этот аргумент не убедителен, потому что наблюдаемые частицы, вероятно, вылетают не непосредственно из объема, в котором первично выделилась энергия. В ряде работ Ландау, Померанчука и их последователей рассматриваются стадии столкновения частиц: на первой стадии образуется сгусток плотной плазмы, затем эта плазма расширяется по законам гидродинамики, с сохранением полной энтропии и понижением температуры, и лишь на последней стадии, когда плотность плазмы становится достаточно малой, вылетают наблюдаемые частицы. Следовательно, 160 Мэв Хагедорна

есть та температура, при которой плазма становится прозрачной\*\*), происходит вылет частиц.

Современная теория поля (теория элементарных частиц) дает важный аргумент против теории Хагедорна. Рассмотрим поляризацию вакуума электромагнитным полем и связанную с ней нелинейность электродинамики, приводящую, в частности, к рассеянию света светом.

На языке диаграмм Фейнмана речь идет о процессах, соответствующих рис. 29, а, б, где входящие и выходящие волнистые линии соответствуют фотонам, а внутренняя замкнутая линия — тем или иным заряженным частицам. Диаграмма а) приводит к перенормировке заряда: наблюдаемый элементарный заряд  $e$  связан с «затравочным» зарядом

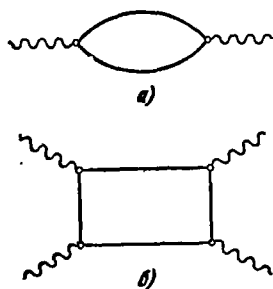


Рис. 29. Диаграммы Фейнмана для поляризации вакуума электромагнитным полем.

\*) Рассматривается компонента импульса, перпендикулярная направлению движения сталкивающихся частиц.

\*\*) Прозрачной для адронов и в масштабе порядка  $10^{-13}$  см.

$e_0$  выражением вида

$$e^2 = \frac{e_0^2}{1 + \gamma \frac{e_0^2}{\hbar c} \ln \frac{p_{\max}}{mc}}, \quad (6.4.7)$$

где  $\gamma$  — безразмерный множитель ( $\gamma = \frac{1}{3\pi}$ ),  $p_{\max}$  — максимальный импульс, к которому применима теория,  $m$  — масса частицы \*).

Диаграмма б) приводит к сечению рассеяния света на свете:

$$\sigma = \gamma_1 \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^4 \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^n \lambda^{2-n}, \quad (6.4.8)$$

где  $\lambda$  — длина волны. В настоящее время экспериментально проверены эффекты, зависящие от вклада электронов и позитронов. В действительности в формулах, соответствующих диаграммам а) и б), фигурируют суммы по всем заряженным частицам. Все члены сумм имеют одинаковый знак. Из очевидных фактов, что наблюдаемый заряд конечен (а не равен нулю), что конечно сечение рассеяния фотонов на фотонах, следует, что суммы сходятся; значит, число типов заряженных частиц конечно. Конечна также сумма  $\sum m_i^{-4}$ . Эти результаты противоречат тем предположениям, которые необходимы Хагедорну!

Строго говоря, соображения, связанные с поляризацией вакуума, относятся к заряженным частицам. Термодинамические свойства плазмы зависят одинаково от заряженных и от нейтральных частиц. Однако в случае адронов нельзя себе представить, чтобы число типов нейтральных частиц было бесконечно при конечном числе заряженных. Соображения, связанные с поляризацией вакуума, представляются веским доводом против теории Хагедорна; см. также упомянутую ранее работу Киржница и Файнберга (1973) с возражениями против теории Хагедорна.

## § 5. Концентрация нуклонов и антинуклонов в зарядово-несимметричной Вселенной при термодинамическом равновесии

Итак, в области высокой температуры существует значительная неопределенность, зависящая от наличия большой концентрации сильновзаимодействующих частиц — адронов. Именно учет их взаимодействия (сильного, как показывает само название этих частиц) является в настоящее время нерешенной задачей. При понижении температуры концентрации адронов убывают, и выводы теории становятся определенными и четкими. Когда концентрация

\*) Перенормировка заряда непосредственно ненаблюдаема, так как  $e_0$  неизвестен. Однако диаграмма а) дает также наблюдаемые малые отклонения от закона Кулона.

пар  $N\bar{N}$  (нуклон — антинуклон) становится сравнимой с избытком нуклонов, уже не безразлично, имеем ли мы дело с зарядово-симметричной или несимметричной моделью Вселенной.

Выпишем формулы ( $kT < mc^2$ ), опуская численные множители:

$$n_\gamma \sim \left( \frac{kT}{c\hbar} \right)^3, \quad (6.5.1)$$

$$n_N \cdot n_{\bar{N}} \sim \left( \frac{kT}{\hbar} \right)^3 \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^3 e^{-2mc^2/kT}. \quad (6.5.2)$$

Удобно рассматривать безразмерные величины:

$$r = \frac{n_N}{n_\gamma}, \quad \bar{r} = \frac{n_{\bar{N}}}{n_\gamma}, \quad \beta = r - \bar{r}, \quad \theta = \frac{kT}{mc^2} \approx T_{13} \text{ } ^\circ\text{K}$$

(напомним астрономический способ обозначения:  $T \cdot 10^{-13} = T_{13}$ ). В зарядово-симметричном мире  $\beta = 0$ . В зарядово-несимметричном мире  $\beta = \text{const} > 0$ ; постоянство  $\beta$  соответствует тому, что нуклоны (барионы) сохраняются и при расширении плотность барионного заряда падает в той же пропорции, что и плотность фотонов; по порядку величины  $\beta = 10^{-8}$ .

В новых переменных

$$r\bar{r} = \theta^{-3}e^{-2/\theta}, \quad r - \bar{r} = \beta.$$

Отсюда легко найти

$$r = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \theta^{-3}e^{-2/\theta}}, \quad \bar{r} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \theta^{-3}e^{-2/\theta}}.$$

Это решение верно везде. При  $\beta = 0$ , очевидно,  $r = \theta^{-3/2}e^{-1/\theta}$ . При  $\beta \neq 0$  нужно различать две области: при  $\theta > 0,04$  (число получено решением трансцендентного уравнения)

$$r \approx \bar{r} \approx \theta^{3/2}e^{-1/\theta} \gg \beta; \quad (6.5.3)$$

при  $\theta < 0,04$

$$r = \beta, \quad \bar{r} = \frac{\theta^2}{\beta} e^{-2/\theta} \ll \beta. \quad (6.5.4)$$

В рассматриваемой здесь области температур ( $T \leq 4 \cdot 10^{11}$  °K) равновесие может быть вычислено с удовлетворительной точностью, так как концентрация сильновзаимодействующих частиц невелика.

С другой стороны, кинетика аннигиляции и рождения пар  $N\bar{N}$  еще достаточно быстрая, так что равновесие действительно осуществляется. Лишь при более низкой температуре скорость аннигиляции оказывается недостаточной и концентрация антибарионов превышает равновесную. Однако эту кинетическую задачу мы рассмотрим отдельно (§ 3 гл. 7).

## Г Л А В А 7

### КИНЕТИКА ПРОЦЕССОВ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

#### § 1. Нейтрино в теории горячей Вселенной

На самых ранних стадиях расширения горячей Вселенной нейтрино находятся в термодинамическом равновесии с другими частицами. Как было отмечено в § 2 гл. 6, для равновесия необходимо, чтобы время реакции установления равновесия  $\tau$  было меньше времени  $t$ , прошедшего с начала космологического расширения. Рассмотрим это условие для электронных нейтрино.

Рождение электронных нейтрино и антинейтрино идет в основном по реакциям  $e^- + e^+ = \nu_e + \bar{\nu}_e$ . Ее сечение для релятивистских электронов и позитронов определяется формулой

$$\sigma_\nu \approx \frac{g^2 E^2}{\hbar^4 c^4}, \quad (7.1.1)$$

где  $g$  — константа слабого взаимодействия ( $\approx 10^{-49}$  эрг·см<sup>3</sup>),  $E$  — энергия частиц. Подставим вместо  $E$  по порядку величины  $kT$  и, используя зависимость (6.2.3) для  $T=T(t)$ , получим зависимость времени установления равновесия  $\tau$  от космологического времени  $t$ :

$$\tau = \frac{1}{\sigma_\nu n e} = \frac{G^{5/4} \hbar^{11/4}}{g^2 c^{1/4}} t^{5/2}. \quad (7.1.2)$$

Когда  $\tau$  становится больше  $t$ , нейтрино становятся свободными, их взаимодействие с другими частицами и между собой прекращается. Приравнявая  $\tau=t$ , находим этот момент  $t \approx 0,1$  сек. Эта оценка сделана с помощью выражений, в которых опущены численные безразмерные множители. Формула (7.1.2) приведена с той целью, чтобы показать, как входят в искомое выражение константы  $G$ ,  $g$  и другие.

Для более точной оценки можно выписать точные выражения. Мы воспользуемся выражением скорости перекачки энергии из  $e^+$ ,  $e^-$  в  $\nu$ ,  $\bar{\nu}$ , вычисленным Чиу (1961, 1964) (см. Зельдович, Новиков (1967 б), приложение к § 9 гл. 11) (в двух формулах ниже  $T$  в °К):

$$W = 4,6 \cdot 10^{-66} T^9 \text{ эрг/сек} \cdot \text{см}^3, \quad T > 3 \cdot 10^9,$$



и сравним его с равновесной плотностью энергии  $\nu$  и  $\bar{\nu}$ :

$$\varepsilon = 6,8 \cdot 10^{-15} T^4 \text{ эрг/см}^3,$$

откуда время установления равновесной плотности ( $T$  в Мэв)

$$\tau = \frac{\varepsilon}{W} = \frac{1,5 \cdot 10^{51}}{T^4 \text{ К}} = \frac{7}{T^5} \text{ сек.} \quad (7.1.3)$$

Используя связь  $T$  и  $t$  из (6.2.3) и приравнявая  $t = \tau$ , найдем [при  $\kappa = 4,5$  в формуле (6.2.3)]

$$T = 2 \text{ Мэв} = 4 m_e c^2, \quad t = 0,2 \text{ сек.} \quad (7.1.4)$$

Обозначим этот момент «отключения» электронных нейтрино от других частиц через  $t^*$ . Как мы увидим дальше в этом параграфе, для вывода о сегодняшней плотности нейтрино существенно, что равновесие между  $\nu$ ,  $\bar{\nu}$  и  $e^+$ ,  $e^-$  поддерживается лишь в тот период, когда  $T > m_e c^2$ .

Проведенный расчет относился к электронным нейтрино. Мюонные нейтрино рождаются в реакциях

$$\mu^+ + \mu^- = \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu; \quad \mu^+ = e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e, \quad \mu^- = e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e. \quad (7.1.5)$$

Время жизни мюона  $2 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$ . Отсюда следует, что время установления равновесия равно приблизительно  $2 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$ , когда  $T > m_\mu c^2$  и мюонов много; если же  $T < m_\mu c^2$  (момент времени, когда  $T = m_\mu c^2$ , есть  $t_\mu \approx 10^{-4} \text{ сек}$ ) и число мюонов уменьшается, то соответственно увеличивается время установления равновесия мюонных нейтрино:

$$\tau = 2 \cdot 10^{-6} e^{m_\mu c^2/T} \approx 2 \cdot 10^{-6} e^{10^6/T} \text{ Мэв.} \quad (7.1.6)$$

Приравнявая  $\tau = t$  и подставляя  $T = T(t)$  из (6.2.4), находим момент «отрыва» мюонных нейтрино от остальных частиц (момент прекращения реакций с мюонными нейтрино):

$$t \approx 0,01 \text{ сек}, \quad T \approx 12 \text{ Мэв}, \quad e^{-m_\mu c^2/T} \approx 10^{-4}. \quad (7.1.7)$$

Обозначим этот момент через  $t^{**}$ . В этот период  $t \approx 0,01 \text{ сек}$  равновесная концентрация мюонов уже много меньше концентрации других лептонов ( $\gamma$ ,  $e^\pm$ ,  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ ), так как  $t^{**} \gg t_\mu$  и играет роль множитель  $e^{-m_\mu c^2/T} \approx 10^{-4}$ . Рассмотрим некоторый момент времени  $t_1$ , который лежит между  $t_\mu$  и  $t^{**}$ :

$$10^{-4} \text{ сек} < t_1 < 10^{-2} \text{ сек.} \quad (7.1.8)$$

Обозначим температуру в момент  $t_1$  через  $T_1$ . В этот момент имеется полное термодинамическое равновесие всех типов лептонов, включая оба сорта нейтрино и антинейтрино. Из условия термодинами-

ческого равновесия можно написать равновесные плотности энергии для каждого вида частиц. При этом существенно, что  $m_\mu c^2 > T_1 > m_e c^2$ , и поэтому в равновесии концентрация электрон-позитронных пар будет примерно такая же, как и фотонов (отличается только статистическим множителем), а концентрация мюонов ничтожна. Соответствующие точные формулы можно найти у Ландау и Лифшица (1964). Выпишем эти соотношения для равновесной плотности энергий разных частиц на правом краю интервала (7.1.8):

$$e_\nu : e_{e^\pm} : e_{\nu_e} : e_{\nu_\mu} : \bar{e}_\mu : e_{\mu^\pm} = 1 : e_1 : \frac{7}{4} e_1 : \frac{7}{8} e_1 : \frac{7}{8} e_1 : 10^{-4} e_1, \quad (7.1.9)$$

где  $e_1 = \sigma T_1^4$ .

Количество остальных частиц пренебрежимо мало (о гравитонах речь пойдет ниже). Плотность барионов в этот момент обозначим  $\rho_1$ . Раньше этого периода в равновесии находятся все типы частиц; при более высокой температуре добавляются еще сильновзаимодействующие мезоны, барион-антибарионные пары. Равновесие между сильновзаимодействующими частицами, электромагнитными квантами и заряженными лептонами устанавливается практически мгновенно. Следовательно, выше  $T_1$  есть полное равновесие, ниже  $T_1$  — после момента  $t_1$  — наступает момент  $t^{**}$ , а затем и  $t^*$  и после этого нейтрино (как  $\nu_e$ , так и  $\nu_\mu$ ) не взаимодействуют с другими видами частиц и как бы отключаются от квантов и электронов.

Замечательно, что после отключения энергия нейтрино в ходе космологического расширения мало отличается от равновесной. Докажем это.

Пусть вещество является смесью нейтрино и квантов, не взаимодействующих между собой. Уравнение состояния квантов:

$$P_\nu = \frac{e_\nu}{3} = \frac{\rho_\nu c^2}{3}.$$

Рассмотрим некий объем  $V$ , расширяющийся подобно общему расширению Вселенной,  $V \sim a^3$ . Уравнение энергии квантов в этом объеме имеет вид

$$dE_\nu = d(e_\nu V) = -P_\nu dV = -\frac{e_\nu}{3} dV. \quad (7.1.10)$$

Из этого уравнения следует, что

$$e_\nu \sim V^{-1/3} \sim a^{-4}$$

— результат, известный из термодинамики лучистой энергии.

Для нейтрино может возникнуть сомнение: применимы ли понятие энергии внутри некоего объема и понятие давления, если нейтрино свободно, без столкновений проходят через объем и пересекают поверхность, его ограничивающую? Будем следить за отдельным нейтрино. Как и у всякой частицы, импульс его, измеренный

в сопутствующей системе в той точке, в которой оно в данный момент находится, уменьшается обратно пропорционально  $a$  (см. § 1 гл. 3):

$$\rho_\nu = \frac{E_\nu}{c} = \text{const} \cdot a^{-1}. \quad (7.1.11)$$

Общее число нейтрино в элементе сопутствующего объема сохраняется, поскольку они ни с чем не взаимодействуют, и, следовательно, их концентрация убывает:

$$n_\nu = \text{const} \cdot a^{-3}. \quad (7.1.12)$$

Отсюда плотность энергии нейтрино \*) уменьшается, как  $a^{-4}$ :

$$\varepsilon_\nu = n_\nu E_\nu = \text{const} \cdot a^{-4}. \quad (7.1.13)$$

Таким образом, закон убывания плотности энергии релятивистских частиц одинаков для взаимодействующих частиц с малым пробегом и для не взаимодействующих частиц.

Рассмотрение красного смещения отдельных частиц эквивалентно термодинамическому рассмотрению адиабатического расширения. Выше, в § 11 гл. 3, было подробно рассмотрено кинетическое уравнение фотонов в расширяющейся Вселенной и было показано, что равновесное распределение остается равновесным, меняется лишь параметр этого распределения, т. е. температура. Разумеется, сказанное там справедливо и для нейтрино. Выяснив закон расширения «отключенных» нейтрино, вернемся к процессам в расширяющейся плазме.

Теперь учтем тот факт, что уже после отключения от нейтрино кванты продолжают взаимодействовать с электронами и позитронами.

Нетрудно найти удельную энергию в момент  $T = T_1$  отдельно для нейтрино и отдельно для совокупности  $\gamma$ -квантов и пар:

$$\left. \begin{aligned} S(\gamma) + S(e^+, e^-) &= \frac{4}{3} \frac{\left( \sigma T_1^3 + \frac{7}{4} \sigma T_1^3 \right)}{\rho_1}, \\ S(\nu_e, \bar{\nu}_e) = S(\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu) &= \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{8} \frac{\sigma T_1^3}{\rho_1}. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.14)$$

В ходе расширения отдельно сохраняется часть энтропии, зависящая от нейтрино, и часть, зависящая от  $\gamma$  и  $e^+$ ,  $e^-$ . Однако между собой  $\gamma$  и  $e^\pm$  находятся в равновесии и обмениваются энергией и энтропией. В момент времени, когда  $T = m_e c^2 = 5 \cdot 10^9$  °К, т. е. при  $t \approx 10$  сек, электрон-позитронные пары аннигилируют, превращаясь в фотоны, энтропия, прежде заключенная в парах, переходит к фо-

\*) Для краткости мы говорим об энергии нейтрино, имея ввиду сумму энергий нейтрино и антинейтрино.

тонам. После этого расширение приводит (через десяток миллиардов лет!) к сегодняшней ситуации. Обозначая сегодняшнюю ситуацию индексом «0», получаем ( $S_1$  — энтропия в момент  $t_1$ )

$$\begin{aligned} S_0(\gamma) &= S_1(\gamma) + S_1(e^+, e^-), \quad \text{или} \quad \frac{4}{3} \frac{\sigma T_{0\gamma}^3}{\rho_0} = \frac{4}{3} \cdot \frac{11}{4} \frac{\sigma T_1^3}{\rho_1}, \\ S_0(\nu_e, \bar{\nu}_e) &= S_1(\nu_e, \bar{\nu}_e), \quad \text{или} \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{8} \frac{\sigma T_{0\nu}^3}{\rho_0} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{8} \frac{\sigma T_1^3}{\rho_1}, \\ S_0(\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu) &= S_1(\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu), \quad \text{или} \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{8} \frac{\sigma T_{0\nu}^3}{\rho_0} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{8} \frac{\sigma T_1^3}{\rho_1}. \end{aligned}$$

Здесь  $T_{0\gamma}$  и есть сегодняшняя температура  $2,7^\circ\text{K}$ ,  $\rho_0$  — предположительно  $10^{-29} \text{ г/см}^3$ . Независимо от численного значения  $\rho_0$ , из приведенных выше равенств следует для температуры обоих сортов нейтрино:

$$\left. \begin{aligned} T_{0\nu} &= \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{0\gamma} \approx 0,7 \cdot 2,7^\circ\text{K} \approx 2^\circ\text{K}, \\ \varepsilon_0(\nu_e, \bar{\nu}_e) &= \varepsilon_0(\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu) = \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} \varepsilon_0(\gamma) = 0,23 \varepsilon_0(\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (7.1.15)$$

Приведенный результат был получен Альфером и Херманом (1953), см. также Пиблс (1966а, б).

Итак, теория горячей Вселенной предсказывает наличие сегодня реликтового равновесного нейтринного излучения с  $T \approx 2^\circ\text{K}$ .

Экспериментальное обнаружение равновесного спектра нейтрино представляло бы огромный интерес. Если подтвердилось бы соотношение  $T_{0\nu} : T_{0\gamma}$  (7.1.15), то было бы получено доказательство правильности наших представлений о самых ранних стадиях расширения ( $T \approx 10^{10}^\circ\text{K}$ ,  $\rho_{\text{изл}} = 10^5 \text{ г/см}^3$ ). В принципе, по замечанию Сахарова, эксперимент мог бы быть основан на том, что присутствие нейтрино малых энергий меняет вид спектра электронов  $\beta$ -распада вблизи максимальной энергии. Однако, как отметил Понтекорво, аналогичное изменение вызывает наличие у нейтрино малой массы покоя. Опыт дает  $m_\nu < 100 \text{ эв}$ , космический фон содержит нейтрино с энергией порядка  $5 \cdot 10^{-4} \text{ эв}$ . Для их обнаружения нужно повысить точность опыта в  $10^6$  раз \*).

Исследование спектра фотонов позволяет проверить однородную изотропную горячую модель Вселенной вплоть до  $z$  около  $10^6$ , т. е.

\*) Любопытная ситуация возникает для мюонных нейтрино. Методы физики элементарных частиц позволяют определить их массу покоя лишь с очень малой точностью,  $m_\nu < 1,5 \text{ Мэв}/c^2$ . Однако из космологических соображений, из того факта, что в настоящее время должна сохраниться плотность мюонных нейтрино порядка  $200 \text{ штук/см}^3$ , и из максимально допустимой плотности всех видов вещества в Метагалактике можно получить значительно лучшую оценку:  $m_\nu < 500 \text{ эв}/c^2$  [Герштейн, Зельдович (1966)]. Позднее эту оценку проделали более точно Коусик и Мак-келланд (1972); при этом они пришли к выводу, что  $m_\nu < 8 \text{ эв}/c^2$  [см. по этому поводу Бергквист (1969, 1971, 1972), Шрум и Зиок (1971), Маркс (1973)].

начиная с момента около одного года после сингулярности (см. следующую главу).

Исследование спектра нейтрино и антинейтрино могло бы дать указания об отклонениях от классической модели на более ранней стадии, начиная с десятых долей секунды, т. е. с  $z \sim 10^{10}$ . Ниже, в разделе IV, посвященном анизотропным решениям, будут специально рассмотрены изменения плотности и спектра нейтрино в соответствующих космологических моделях.

Выше мы видели, что сравнительно ранний отрыв нейтрино от других частиц (прекращение взаимодействия) при изотропном космологическом расширении уменьшает сегодняшнюю энергию нейтрино по отношению к сегодняшней энергии квантов света РИ, поскольку на ранних стадиях энергия была распределена между большим числом сортов частиц.

Это рассуждение придает большую стабильность всей теоретической картине: если существуют какие-то неизвестные нам типы

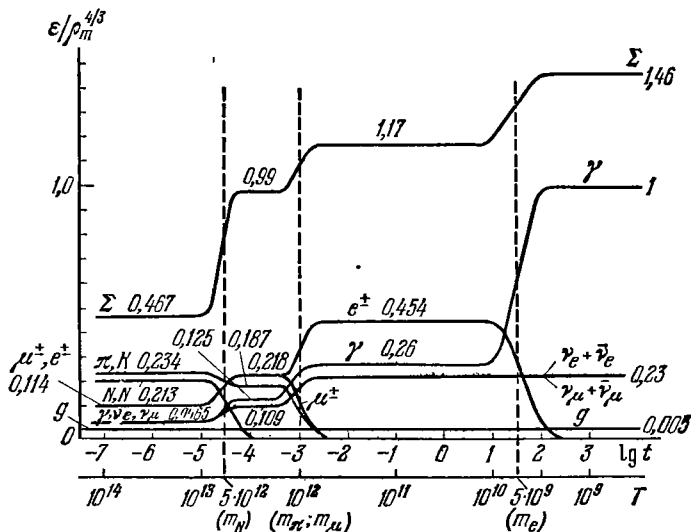


Рис. 30. Изменение  $\varepsilon/\rho_m^{4/3}$  для разных сортов частиц в расширяющейся горячей модели:  $\varepsilon$  — плотность энергии,  $\rho_m = m_{\text{нукл}} n$ , где  $m_{\text{нукл}}$  — масса покоя нуклона,  $n$  — концентрация избытка нуклонов;  $N$  и  $\bar{N}$  условно включают четыре вида барионов и четыре вида антибарионов,  $\Sigma$  — сумма для всех частиц, за единицу принято  $\varepsilon/\rho_m^{4/3}$  в настоящее время.

частиц, взаимодействующие с известными частицами еще слабее, чем нейтрино, то они отрываются еще раньше, а следовательно, вносят вклад в общую плотность энергии существенно меньший, чем нейтрино. В частности, по этой причине, по-видимому, ма-

дную роль играют гравитоны (о них подробнее см. следующий параграф).

Неизвестные сильновзаимодействующие частицы, очевидно, можно себе представить лишь в области больших масс — иначе они уже были бы открыты! Частным случаем таких неизвестных гипотетических частиц являются кварки. Такие тяжелые сильновзаимодействующие частицы меняют соотношение между  $T$  и  $\epsilon$  при  $T > mc^2$ , но к моменту, когда достигается  $T = T_1$ , они вымирают и никакого влияния на все дальнейшее не оказывают.

Частицы, способные к самопроизвольному распаду, после снижения температуры (т. е. когда прекращается их образование) исчезают по экспоненциальному закону в функции времени, и наблюдение реликтовых частиц такого рода невозможно.

Иначе обстоит дело в случае частиц, стабильных в вакууме и исчезающих только при взаимодействии с другими частицами. К таким частицам относятся антипротоны  $\bar{p}$ , позитроны  $e^+$  и, если кварки существуют, какой-то один сорт кварков (см. в конце главы оценку их концентрации). Общая картина изменения относительного содержания частиц в расширяющейся модели показана на рис. 30.

## § 2. Космологические гравитационные волны

Гравитационные волны отличаются от нейтрино тем, что их взаимодействие со всеми другими видами вещества еще слабее.

В настоящее время не вызывает сомнений, что следствием ОТО является существование гравитационных волн. Это убеждение не зависит от результатов опытов Вебера и аналогичных работ, вызванных его статьями (см. обзор в ТТ и ЭЗ). Квантование гравитационных волн является принципиально необходимой частью квантовой теории. Таким образом, появляется понятие гравитона — кванта гравитационной волны, несущего энергию  $\hbar\omega$ . Это понятие аналогично Максвелловой теории электромагнитного поля, электромагнитным волнам и фотонам.

Аналогия идет еще дальше: гравитоны, как и фотоны, имеют нулевую массу покоя, они поперечны и имеют два независимых состояния поляризации. В уравнениях Максвелла продольное (кулоновское) поле не квантуется; то же относится и к продольным компонентам гравитационного поля.

В полном термодинамическом равновесии плотность энергии гравитационного излучения равна плотности энергии электромагнитного излучения; равновесный спектр гравитонов подчиняется в точности той же формуле Планка.

В чем отличие гравитационного излучения от электромагнитного? Одно отличие принципиальное: гравитационное излучение представляет собой разновидность изменения метрики пространства и времени. Спрашивается, вправе ли мы рассматривать это излуче-

ние на фоне усредненной классической метрики? На этот вопрос дает ответ техника разделения метрики на плавно изменяющиеся и быстропеременные величины. В принципе (в связи с теорией псевдотензора энергии-импульса) идея восходит к «Теории поля» Ландау и Лифшица (1973), практически она реализована Айзаксоном (1968а, б), см. также ТТ и ЭЗ.

При квантовании существенно, что продольное гравитационное поле не квантуется, — это дает право рассматривать гравитоны на фоне классической, неквантованной, усредненной метрики.

Практическое, количественное отличие гравитационного излучения от электромагнитного состоит в том, что взаимодействие его с веществом исключительно мало, особенно на уровне элементарных частиц. Испускание электромагнитной волны пропорционально квадрату заряда,  $e^2$ ; это значит, что безразмерный множитель, характеризующий вероятность излучения,  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ . Пусть

происходит какой-то процесс с заряженной частицей, например ее отклонение при столкновении с другим зарядом. Вероятность того, что этот процесс сопровождается излучением одного фотона, равна вероятности безызлучательного процесса, умноженной на  $\alpha$ . Могут войти и другие множители —  $v/c$ ,  $r/\lambda$  — меньше единицы, но множитель  $1/137$  обязателен!

При излучении гравитационных волн (гравитонов) аналогичную роль играет множитель  $Gm^2/\hbar c$ . Это неудивительно, достаточно сравнить выражение кулоновской энергии двух зарядов  $e^2/r$  и гравитационной энергии двух масс  $Gm^2/r$ , чтобы убедиться, что  $Gm^2$  играет роль квадрата заряда,  $e^2$ . Величина  $Gm^2/\hbar c$  равна  $10^{-38}$  для двух протонов,  $10^{-44}$  для двух электронов. Малость этой величины приводит к тому, что излучение (а значит, и поглощение) гравитационных волн ничтожно мало. Поэтому в лаборатории тепловое гравитационное излучение не наблюдается. Очевидно, что в лаборатории при измерении теплового излучения черного тела внутри тела имеется равновесная плотность электромагнитного излучения, но нет ничего похожего на равновесную плотность гравитационного излучения. Мы всегда имеем дело с неполным термодинамическим равновесием.

При переходе к астрофизике, ко все большим пространственным масштабам, к большим плотностям и температурам, становится более существенным рождение и поглощение слабовзаимодействующих частиц.

В лабораторных опытах в тепловом излучении нет ни гравитонов, ни нейтрино и антинейтрино. В горячих звездах становится заметным испускание нейтрино и антинейтрино, но их концентрация мала по сравнению с равновесной, так как нейтрино свободно уходят из звезды. В звездах, подвергающихся коллапсу (превращающихся

в нейтронные звезды или черные дыры), в центре достигаются условия, когда длина пробега  $v$  и  $\bar{v}$  мала;  $v$  и  $\bar{v}$  уходят диффузионным образом, испытывая много столкновений, имеет место термодинамическое равновесие  $v$  и  $\bar{v}$  с горячим обычным веществом. Однако и в этих условиях взаимодействие гравитационных волн с веществом пренебрежимо мало, мала (по сравнению с равновесной, термодинамической) концентрация гравитонов и мала потеря энергии за счет излучения гравитонов.

Обратимся к космологической сингулярности горячей Вселенной. Будем рассматривать изотропно расширяющуюся, однородную горячую космологическую модель с конечным числом сортов частиц с массами покоя порядка барионной или меньше. Другими словами, идея Хагедорна не учитывается. Причины к тому рассматривались выше. При конечном числе сортов частиц на раннем этапе вещество можно считать ультрарелятивистским.

По порядку величины

$$e = cp \left( \frac{p}{\hbar} \right)^3 = \frac{1}{Gt^2},$$

$$p = \left( \frac{\hbar^3}{Gct^2} \right)^{1/4} = m_{\text{пл}} c \left( \frac{t_g}{t} \right)^{1/2} = mc \left( \frac{Gm^2}{\hbar c} \right)^{-1/4} \left( \frac{mc^2 t}{\hbar} \right)^{-1/4},$$

где  $m_{\text{пл}}$  — планковская масса,  $t_g$  — планковский момент времени. Газ, в котором есть множество барион-антибарионных пар, остается ультрарелятивистским вплоть до момента  $t \sim 10^{-6}$  сек. После этого момента барион-антибарионные пары аннигилируют, исчезают, в равновесии их нет. Легко убедиться, что уже задолго до этого момента заведомо пренебрежимо мал обмен энергией между обычным веществом и гравитонами, время реакций  $\tau \gg t$  и гравитоны полностью «заморожены». Температура таких не взаимодействующих гравитонов убывает в ходе расширения обратно пропорционально радиусу мира (подобно нейтрину после отключения) независимо от того, какова температура других видов частиц.

Установление равновесия между гравитонами и другими частицами могло бы произойти только на более ранней стадии ультрарелятивистской температуры. На этой стадии энергия и импульс частиц порядка  $T$  и  $T/c$ , т. е. соответственно гораздо больше  $mc^2$  и  $mc$ .

В уравнения ОТО входят энергия и импульс частиц. Поскольку речь идет о столкновениях частиц, их масса покоя не существенна, так как она мала по сравнению с полной энергией частицы. Отсюда следует, что вероятность испускания гравитона должна быть пропорциональна множителю  $GE^2/\hbar c^5$ . Этот множитель отличается от приводимого выше нерелятивистского выражения  $Gm^2/\hbar c$  тем, что произведена замена  $m$  на  $E/c^2$ .



Негравитационное взаимодействие частиц в ультрарелятивистском пределе дает сечение\*) взаимодействия порядка  $(\hbar/p)^2 = (\hbar c/E)^2$ . Следовательно, для сечения рождения одного гравитона получается оценка

$$\sigma_1 = \left( \frac{\hbar c}{E} \right)^2 \frac{GE^2}{\hbar c^3} = \frac{G}{\hbar c^3}. \quad (7.2.1)$$

Это сечение совпадает с квадратом «планковской длины»  $l_g \approx \sqrt{\frac{G}{\hbar c^3}}$ , т. е.  $\sigma_1 \approx l_g^2$ . Для рождения двух гравитонов

$$\sigma_2 = \left( \frac{\hbar c}{E} \right)^2 \left( \frac{GE^2}{\hbar c^3} \right)^2 = l_g^2 \frac{GE^2}{\hbar c}. \quad (7.2.2)$$

Подобно ситуации с испусканием пар  $\nu, \bar{\nu}$ , в ультрарелятивистской ситуации главную роль играет аннигиляция пар частица — античастица, а не рассеяние.

Здесь можно опереться на результаты пионерской работы Владимирова (1963), в которой точно, по всем правилам квантовой электродинамики, вычислены сечения аннигиляции  $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + g$  и  $e^- + e^+ \rightarrow 2g$ .

В ультрарелятивистском пределе ответ имеет вид

$$\sigma_1 = \frac{1}{3} \frac{e^2}{\hbar c} l_g^2, \quad \sigma_2 = \frac{\pi}{3} l_g^2 \frac{GE^2}{\hbar c}. \quad (7.2.3)$$

В первое выражение входит  $e$  — электрический заряд частицы; второе выражение справедливо для любых (заряженных или незаряженных) частиц. Конкретный численный множитель относится к аннигиляции частиц со спином  $1/2$ . При энергиях частиц меньше планковской, т. е. когда  $GE^2/\hbar c \ll 1$ , вероятность одногравитонного процесса больше.

Можно полагать, что для процесса

$$p + \bar{p} \rightarrow \text{адроны} + g \quad (7.2.4)$$

сечение в ультрарелятивистском пределе равно просто

$$\sigma_1 \approx \frac{G\hbar}{c^3} = l_g^2, \quad (7.2.5)$$

нет «малости», связанной с электромагнитным взаимодействием, как это было в (7.2.3).

\*) Если при этом происходит испускание фотона, появится дополнительный множитель  $e^2/\hbar c$ ; если есть внутренняя фотонная линия —  $(e^2/\hbar c)^2$ . Здесь специально подчеркнуто, что одногравитонное сечение в ультрарелятивистском случае не зависит ни от массы покоя, ни от энергии частиц.

С этими сведениями о вероятности рождения гравитонов попытаемся определить характерный момент отключения гравитонов  $t_1$  подобно тому, как это было сделано для нейтрино и антинейтрино. Ответ заранее очевиден из соображений размерности: в ультрарелятивистском режиме  $t_1 \approx t_g$ ; нет никакого другого характерного времени, кроме той величины, которую можно составить из  $G$ ,  $\hbar$ ,  $c$ .

Масса покоя частиц не входит в ответ, поскольку рассматривается ультрарелятивистский газ,  $E \gg mc^2$ . Взаимодействие частиц характеризуется безразмерным числом  $g^2/\hbar c$ , которое порядка единицы для сильного взаимодействия. В принципе в ответ может входить число сортов частиц; однако мы полагаем, что это число порядка единицы (не более 10 или 20), — именно в этом и заключается отказ от гипотезы Хагедорна. Наконец, есть безразмерные числа типа  $3/32\pi$  в формуле  $\rho = \frac{3}{32\pi G t^2}$  [см. (6.2.1)], безразмерное число в законе излучения Планка, в выражении сечения и т. д. Учет всех этих чисел и попытка «более точного» расчета носили бы иллюзорный характер.

В действительности мы имеем дело не с взаимодействием двух частиц  $p$  и  $\bar{p}$  в вакууме, а с чрезвычайно плотной плазмой, количественная теория которой не создана.

Вывод из размерностных соображений: установление равновесия не гарантировано, так как по грубому расчету  $t_1 \sim t_g$ , а мы условились считать  $t_g$  нижней границей по  $t$  применимости теории. Этот вывод не изменится, если в несколько раз изменится оценка  $t_1$ , так как неизвестно, лежит ли граница теории при  $t_g$ , при  $5t_g$  или  $0,2t_g$ . Практически одновременно с выходом нашей книги «Релятивистская астрофизика», где приведены эти оценки, появилась работа Матцнера (1968), в которой сделан противоположный вывод о том, что равновесие между гравитонами и другими частицами имеет место долго, вплоть до  $t = t_g \left( \frac{Gm^2}{\hbar c} \right)^{-1/2}$ . К этому выводу автор приходит из рассмотрения рассеяния адронов.

Опыт показывает, что при больших энергиях ( $E > mc^2$ ) сечение взаимодействия стремится к константе. Этот вывод согласуется и с современной теорией асимптотики рассеяния частиц.

Опыт и теория относятся к взаимодействию без испускания гравитона. Для того чтобы получить сечение испускания гравитона, автор домножает безгравитонное сечение на  $GE^2/\hbar c$ .

Как нам кажется, в этом месте допущена существенная ошибка.

Дело в том, что в асимптотике  $E/mc^2 \rightarrow \infty$  постоянное безгравитонное сечение связано с уменьшением угла рассеяния. Средний переданный поперечный импульс стремится к константе, а угол — отношение поперечного импульса к продольному — стремится к нулю. Вероятность излучения гравитонов (с энергией порядка продольной энергии) или классически рассчитанное гравитационное

излучение зависит именно от переданного импульса: рассеяние на малый угол соответственно даст малую амплитуду гравитационной волны. С учетом уменьшения угла Кобзарев и Пешков (1974) приходят к асимптотике эффективного сечения для гравитационного излучения  $\sigma = l_g^2$ , т. е. к выводу, который использован нами выше. Итак, в противоположность Матцнеру мы полагаем, что установление равновесия между гравитонами и другими частицами не обеспечено, так как характерное время совпадает с границей применимости теории. Фундаментальная теория допускает как возможность того, что плотность гравитонов меньше равновесной, так и возможность сверхравновесной плотности.

Равновесная плотность на ранней стадии привела бы к  $\epsilon_g \sim \sim 0,02 \epsilon_\gamma$  в настоящее время, с учетом того, что энтропия адронов в ходе охлаждения при исчезновении адрон-антиадронных пар перекачивается, передается фотонам, но не гравитонам. К этому выводу пришли Альфер и Херман (1953) по аналогии с рассуждениями, приведенными в предыдущем параграфе для нейтрино. Плотность гравитонов может быть намного меньше указанной, если энтропия горячей Вселенной возникла в результате каких-то процессов с адронами после  $t_g$ . Однако  $\epsilon_g \ll 0,02 \epsilon_\gamma$  не приведет к какому-либо изменению выводов, относящихся к нуклеосинтезу, росту возмущений, образованию галактик и т. п. В принципе возможна и другая картина: если энтропия зависит от спонтанного рождения частиц на ранней, анизотропной стадии расширения, то можно ожидать преимущественного рождения гравитонов, см. гл. 23.

До сих пор мы говорили исключительно о рождении гравитонов, но очевидно, что в ультрарелятивистском пределе сечения прямого и обратного процессов одинаковы. Значит, гравитоны в том случае, если их концентрация была сверхравновесной, частично передадут свою энергию (и энтропию) другим частицам, но все же останется сверхравновесный (по отношению к температуре других частиц) избыток гравитонов. О возможных пределах этого избытка гравитационного излучения можно судить косвенно по его влиянию на нуклеосинтез. Вывод (см. § 5 этой главы) состоит в том, что  $\epsilon_g < < 3\epsilon_\gamma$ . В настоящее время это дало бы  $\rho_g < 2 \cdot 10^{-33} \text{ г/см}^3$ ,  $\Omega_g < 2 \cdot 10^{-4}$ . Такой гравитонный фон никак не влияет на динамику Вселенной \*).

В РД-периоде высокая плотность гравитонов приведет к некоторым небольшим количественным изменениям скорости расширения, момента равенства  $\rho_{\text{вещ}} = \rho_\gamma + \rho_g$ , сдвинется и момент рекомбинации водорода. Однако качественные изменения не предвидятся, и поэтому в дальнейшем мы не будем учитывать эту возможность.

---

\*) Впрочем, он скажется на росте возмущений вскоре после рекомбинации; см. раздел III.

Гравитационные волны малой частоты (большой длины волны) следует рассматривать классически, без учета квантовых эффектов. Они взаимодействуют когерентно с большими объемами, заполненными материей. Систематический обзор разных аспектов гравитационного излучения выделен в отдельную главу (гл. 16).

### § 3. Антинуклоны в горячей плазме

В гл. 6 мы отмечали, что в самом начале космологического расширения в веществе было огромное количество пар нуклонов и антинуклонов, находящихся в термодинамическом равновесии. Как меняется их концентрация в ходе расширения? Проанализируем этот вопрос для двух вариантов теории: 1) полностью зарядово-симметричного мира и 2) зарядово-несимметричного мира. Мы увидим, что результаты анализа дают веские аргументы в пользу того, что реально имеет место второй вариант. Начнем анализ с первого варианта.

Итак, имеется полностью зарядово-симметричный мир, т. е. мир, в котором есть равное число нуклонов и антинуклонов (а также электронов и позитронов и т. д.) и концентрация их равномерна (т. е. идеи Омнеса не учитываются).

При достаточно высокой температуре (но все же ниже  $mc^2/k$ ,  $m$  — масса нуклона) их концентрация  $n$  определяется термодинамическим равновесием \*):

$$n \equiv n_N = n_{\bar{N}} = n_{\text{равн}} = \sqrt{\frac{2}{\pi^3}} \frac{m^{3/2} (kT)^{3/2}}{\hbar^3} e^{-mc^2/kT}, \quad kT < mc^2. \quad (7.3.1)$$

При еще больших температурах

$$n = \beta \left( \frac{kT}{\hbar} \right)^3, \quad kT > mc^2;$$

численное значение  $\beta$  зависит от числа рассматриваемых независимых сортов частиц.

Термодинамическое равновесие осуществляется за счет баланса между аннигиляцией при соударении нуклонов и антинуклонов и рождением пар.

В ходе расширения равновесная концентрация уменьшается, и при современной температуре  $\approx 3^\circ\text{K}$  она «астрономически» мала,  $\ll 10^{-10}$ . Однако в действительности скорость аннигиляции становится пренебрежимой раньше, происходит «закалка» и остается определенное неравновесное количество нуклонов и антинуклонов. Рассмотрим этот процесс. Сечение аннигиляции в интересующей

\*) Учен спин  $1/2$  нуклона;  $n_N$  есть сумма концентраций протонов и нейтронов,  $n_{\bar{N}}$  — антипротонов и антинейтронов.

нас области идет как  $\sigma_0 \frac{c}{v}$ , где  $v$  — скорость соударения, а  $\sigma_0$  — порядка  $10^{-26}$  см<sup>2</sup>. Отсюда получим уравнение изменения концентрации:

$$\frac{dn}{dt} = -\sigma_0 c n^2 + \psi(t) - \alpha n. \quad (7.3.2)$$

Здесь  $\psi(t)$  — функция, описывающая скорость рождения пар. Последний член  $-\alpha n$  учитывает изменение концентрации из-за космологического расширения ( $\alpha = 3H = \frac{3}{2t}$ ). Удобно параллельно с барионами рассматривать фотоны (более точно — сумму легких частиц  $e^+$ ,  $e^-$ ,  $\gamma$ ). Их концентрация  $n_\gamma$  подчиняется закону, описывающему изменение концентрации сохраняющихся частиц:

$$\frac{dn_\gamma}{dt} = -\alpha n_\gamma. \quad (7.3.3)$$

Введем отношение  $r = n/n_\gamma$ . Очевидно, уравнение для  $r$  не содержит эффекта космологического расширения; без аннигиляции и образования новых пар  $r$  будет постоянным. Действительно,

$$\frac{dr}{dt} = -\sigma_0 c n_\gamma r^2 + \frac{\psi}{n_\gamma}. \quad (7.3.4)$$

Введем  $r_{\text{равн}}$ : согласно предыдущему [см. (7.3.1)]

$$r_{\text{равн}} \approx \theta^{-3/2} e^{-1/\theta}, \quad \theta = \frac{kT}{mc^2} \ll 1. \quad (7.3.5)$$

Очевидно,

$$-\sigma_0 c n_\gamma r_{\text{равн}}^2 + \frac{\psi}{n_\gamma} \equiv 0, \quad (7.3.6)$$

так что уравнение для  $r$  может быть записано в виде

$$\frac{dr}{dt} = -\sigma_0 c n_\gamma (r^2 - r_{\text{равн}}^2). \quad (7.3.7)$$

В уравнении (7.3.7)  $n_\gamma$  и  $r_{\text{равн}}$  — известные функции  $\theta$ ;  $\theta$  зависит от  $t$ . Мы разделим весь интервал изменения времени  $0 < t < \infty$  на две части:  $t < t_1$ , где поддерживается приблизительное равновесие  $r - r_{\text{равн}} \ll r_{\text{равн}}$ , и  $t > t_1$ , где  $r \gg r_{\text{равн}}$ . Для нахождения характерного времени  $t_1$  мы подставим  $r = r_{\text{равн}}$  из (7.3.5) в левую часть уравнения (7.3.7), вычислим разность  $r - r_{\text{равн}}$  и потребуем выполнения условия  $r - r_{\text{равн}} \approx r_{\text{равн}}$ :

$$\frac{dr_{\text{равн}}}{dt} = -\sigma_0 c n_\gamma (r^2 - r_{\text{равн}}^2), \quad r - r_{\text{равн}} = \frac{1}{\sigma_0 c n_\gamma (r + r_{\text{равн}})} \left| \frac{dr_{\text{равн}}}{dt} \right|.$$

Условие  $r - r_{\text{равн}} \approx r_{\text{равн}}$  дает

$$\sigma_0 c n_{\gamma} 2 r_{\text{равн}} = \frac{1}{r_{\text{равн}}} \left| \frac{dr_{\text{равн}}}{dt} \right| = \left| \frac{d \ln r_{\text{равн}}}{dt} \right|. \quad (7.3.8)$$

С другой стороны, из (7.3.5) приближенно имеем

$$\ln r_{\text{равн}} \approx -\frac{1}{\theta}, \quad \theta \sim t^{-1/2}, \quad \left| \frac{d \ln r_{\text{равн}}}{dt} \right| = \frac{1}{2\theta t}. \quad (7.3.9)$$

Подставляя (7.3.9) в (7.3.8), получаем [помня, что (7.3.8) справедливо для  $t = t_1$ ]

$$4\sigma_0 c r_{\text{равн}} \theta_1 t_1 n_{\gamma 1} = 1. \quad (7.3.10)$$

Используя функции с численными значениями констант

$$t_1 = 10^{-6} \theta^{-2} \text{ сек}, \quad n_{\gamma 1} = 10^{41} \theta^3 \text{ см}^{-3}, \quad \sigma_0 = 2 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2$$

и имея в виду (7.3.5), получим уравнение для  $\theta_1$ :

$$e^{-1/\theta_1} = 5 \cdot 10^{-21} \theta_1^{-1/2}. \quad (7.3.11)$$

Это уравнение решается последовательными приближениями; экспонента зависит от  $\theta_1$  намного сильнее, чем  $\theta_1^{-1/2}$ . Поэтому мы начнем с произвольного  $\theta_1'$  в правой части, вычислим  $r_{\text{равн}}$  и соответствующее  $\theta_1''$ , подставим  $\theta_1''$  в правую часть уравнения и т. д. Получим

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{kT}{mc^2} \approx \frac{1}{45}, \quad T_1 \approx 21 \text{ Мэв}, \quad t_1 \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}, \\ r_1 &\approx r_{\text{равн.1}} \approx 10^{-17}, \quad \gamma_1 \approx 10^{36} \text{ см}^{-3}, \\ n_1 &\approx n_{\text{равн.1}} \approx 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}. \end{aligned} \quad (7.3.12)$$

Итак, в предположении зарядово-симметричной, однородной и изотропной горячей модели к моменту, когда нарушается термодинамическое равновесие, нуклоны и антинуклоны составляют долю  $10^{-17}$  от легких частиц. До этого момента  $N$  и  $\bar{N}$  следовали равновесию: при  $kT/mc^2 \gg 1$  их плотность была того же порядка, что и плотность легких частиц; в интервале  $1 > kT/mc^2 > 1/45$  плотность  $N$  и  $\bar{N}$  падала экспоненциально и к моменту  $kT/mc^2 = 1/45$  упала до  $2 \cdot 10^{-17}$  плотности легких частиц.

После указанного момента, т. е. при  $kT/mc^2 < 1/45$ ,  $t > 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$ , равновесное значение концентрации  $n_{\text{равн}}$  продолжает убывать экспоненциально, но равновесия в действительности нет и фактическая концентрация  $n$  падает медленнее. Поэтому  $n \gg n_{\text{равн}}$  и в уравнении для  $\frac{dn}{dt}$  можно пренебречь рождением новых пар  $N$  и  $\bar{N}$ . В уравнении остается только член, описывающий

аннигиляцию:

$$\frac{dr}{dt} = -\sigma_0 c n_{\gamma} r^2, \quad (7.3.13)$$

с начальными условиями, взятыми из рассмотрения предыдущей стадии:

$$t_1 = 2.5 \cdot 10^{-3}, \quad r_1 = 10^{-17}, \quad \sigma_0 c n_{\gamma 1} t_1 = \frac{1}{\theta_1}. \quad (7.3.14)$$

Это уравнение легко решается. Взяв  $\tau = t/t_1$ ,  $n_{\gamma} = n_{\gamma 1} \tau^{-3/2}$ , получим

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sigma_0 c n_{\gamma 1} \tau^{-3/2} t_1 r^2, \quad (7.3.15)$$

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{r_1}{1 + 2\sigma_0 c n_{\gamma 1} t_1 r_1 (1 - \tau^{-1/2})}, \\ r_{\infty} &= \frac{r_1}{1 + 2\sigma_0 c n_{\gamma 1} t_1 r_1} = \frac{r_1}{1 + 1/2\theta_1} = 0,04 r_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.16)$$

В пределе, при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt{t_1/t} \rightarrow 0$ , из-за аннигиляции количество нуклонов и антинуклонов падает в конечное число раз — в отношении  $(1 + 4\sigma_0 c t_1 n_1)^{-1} = 1 : 24$ .

Само расширение, очевидно, не меняет отношения числа нуклонов или антинуклонов к числу легких частиц, равного  $10^{-17}$  в момент  $t_1$ . Однако вследствие аннигиляции это отношение падает в 24 раза, т. е. до  $\sim 10^{-18}$ . Это падение происходит главным образом за время, в несколько раз большее, чем  $t_1$ , т. е. практически заканчивается в момент  $t \sim 2 \cdot 10^{-2}$  сек.

В этот момент кванты и пары  $e^+$ ,  $e^-$  составляют  $\sim 60\%$  всех легких частиц. Пары  $e^+$ ,  $e^-$  превращаются впоследствии в кванты. Значит, отношение числа  $N$  или  $\bar{N}$  к числу квантов в настоящее время в зарядово-симметричной Вселенной должно было бы составлять  $\sim 10^{-18}$ . Температуре реликтового излучения  $2,7^\circ\text{K}$  соответствует плотность квантов около  $400 \text{ см}^{-3}$ , что дает  $n_N = n_{\bar{N}} \cong 10^{-18} \text{ см}^{-3}$  и плотность  $\rho_N = \rho_{\bar{N}} \cong 10^{-39} \text{ э/см}^3$ . Эти малые значения являются доводом против гипотезы о зарядовой симметрии Вселенной. Однако перед обсуждением этих выводов поставим вопрос: чем физически обусловлено получение такого малого безразмерного числа  $r = n_N/n_{\gamma} \sim 10^{-18}$ ? Из каких безразмерных параметров задачи можно наглядно, хотя бы по порядку величины, получить это число без детального расчета, приведенного выше? Выяснение этих вопросов, даже после получения численного результата более точным способом, в высшей степени полезно. Только таким путем можно ясно понять смысл результата и область его применимости.

Нам надо определить концентрацию антинуклонов после «закалки». В ходе расширения и падения температуры равновесная концентрация антинуклонов начинает экспоненциально падать,

когда  $kT \approx mc^2$ . Ясно, что в силу экспоненциальной зависимости концентрации от температуры при  $kT \leq mc^2$  момент «закалки»  $t_1$  примерно определяется условием  $kT_1 = mc^2/\alpha$ , где число  $\alpha$  хотя и больше единицы, но порядка единицы. (В действительности, как было показано выше,  $\alpha = 45$ ; по ходу решения трансцендентного уравнения  $\alpha$  есть логарифм большой величины.)

Ясно, что таким способом можно только грубо определить  $T_1$ , а следовательно, и  $t_1$ . Идея заключается в том, что в очень грубом расчете можно заменять  $\alpha$  на единицу только там, где  $\alpha$  является множителем. Никак нельзя, однако, считать  $\alpha \sim 1$  в выражении для  $n_{\text{равн}}$ , где  $n_{\text{равн}} \sim e^{-\alpha}$ , так как экспонента очень чувствительна к  $\alpha$ . После того как момент «закалки» грубо найден, можно для определения  $n_1 \sim n_{\text{равн}}$  в этот момент использовать условие равенства времени установления равновесия и гидродинамического времени  $\sigma_0 c n_1 t_1 \approx 1$ . Используем порядки величин. Так, сечение дается выражением  $\sigma_0 \sim (\hbar/mc)^2$ . Как известно, величина  $\hbar/mc$  — комптоновская длина волны нуклона — характеризует по порядку величины также и радиус действия ядерных сил, поскольку массы нуклонов и мезонов одного порядка. Выразим гидродинамическое время (время расширения)  $t_1$  через  $\alpha$ . Согласно (6.2.1)

$$\rho_1 \approx \frac{1}{G t_1^2}.$$

С другой стороны, плотность массы выражается через температуру:

$$\rho_1 \approx \frac{kT_1}{c^2} \left( \frac{kT_1}{c\hbar} \right)^3.$$

Наконец, используем условие  $kT_1 = mc^2/\alpha$  и, приравнявая оба выражения для  $\rho_1$ , получаем выражение для  $t_1$ :

$$t_1 = \alpha^2 G^{-1/2} m^{-2} \hbar^{3/2} c^{-3/2}. \quad (7.3.17)$$

Теперь подставим эти выражения \*) в критерий закалки  $\sigma_0 c n_1 t_1 = 1$ . Получим

$$\left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2 c n_1 G^{-1/2} m^{-2} \hbar^{3/2} c^{-3/2} = 1, \quad n_1 = G^{1/2} m^4 c^{1/2} \hbar^{-7/2}. \quad (7.3.18)$$

Это выражение сравним с выражением для общего числа легких частиц (лептонов)

$$n_\gamma = \left( \frac{kT}{c\hbar} \right)^3 \approx \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^3. \quad (7.3.19)$$

Получим

$$r = \frac{n_1}{n_\gamma} = \sqrt{\frac{Gm^2}{\hbar c}}. \quad (7.3.20)$$

\*) В первом приближении здесь заменяем  $\alpha$  на 1 — в этом и состоит грубость расчета.



Величина  $Gm^2$  входит в выражение гравитационного взаимодействия протонов точно так же, как  $e^2$  — квадрат заряда — в выражение их электростатического взаимодействия. Таким образом,  $Gm^2/\hbar c$  — это гравитационный аналог знаменитой «постоянной тонкой структуры»  $e^2/\hbar c = 1/137$ . Численно  $Gm^2/\hbar c = 10^{-38}$ , что дает  $n_1/n_2 \sim 10^{-10}$  в замечательном (для такого грубого подхода) согласии с точным расчетом.

Итак, на вопрос о том, почему в горячей зарядово-симметричной модели остается мало нуклонов и антинуклонов, можно дать краткий ответ: это происходит потому, что малое их гравитационное взаимодействие.

Более подробно можно сказать, что число остающихся  $N$  и  $\bar{N}$  зависит от конкуренции между их аннигиляцией и общим расширением. Аннигиляция зависит от ядерного взаимодействия, которое порядка единицы, так как  $\sigma_0 \sim (\hbar/mc)^2$ . Расширение задается таким образом, чтобы кинетическая энергия расширения равнялась потенциальной энергии гравитационного взаимодействия (на ранней стадии расширения это всегда так; см. § 8 гл. 1). Именно вследствие этого условия скорость расширения  $\sim G^{-1/2}$  и та же величина,  $G^{-1/2}$ , входит в выражение  $n_1/n_2$ .

Расчет аннигиляции  $N$  и  $\bar{N}$  в ходе расширения, изложенный выше, впервые, по-видимому, сделан одним из авторов [Зельдович (1965b)]; в результате вкралась численная ошибка, исправленная выше. Расчет без ошибок приведен в связи с проблемой аннигиляции кварков (см. следующий параграф) в работе Зельдовича, Окуня, Пикельнера (1965). Наконец, аналогичные результаты для антинуклонов получены Чиу (1966).

Вернемся к космологическим выводам. В литературе неоднократно обсуждался вопрос о зарядово-симметричных моделях. Очевидной трудностью, которой выше мы совершенно не касались, является аннигиляция нуклонов и антинуклонов при образовании звезд и других небесных тел из разреженного газа.

В связи с этим усилия ряда авторов [Альвен, Клейн (1962), Альвен (1965)] были направлены на изобретение (весьма остроумных) механизмов, разделяющих протоны и антипротоны в газовом облаке при совместном действии гравитации и магнитного поля.

Из проделанных расчетов видно, что в однородной модели аннигиляция происходит на чрезвычайно ранней стадии, задолго до образования отдельных газовых облаков. Уже на этой стадии концентрация  $N$  и  $\bar{N}$  падает до величин, несовместимых с наблюдаемой в настоящее время плотностью обычного вещества; последующее разделение не поможет согласовать зарядово-симметричную модель с наблюдениями. Возможность разделения частиц и античастиц на ранней стадии при  $T \approx 300 \text{ Мэв}$  рассмотрена Омнесом;

принципы его теории проанализированы нами в предыдущей главе, а следствия для космологии см. ниже, в гл. 23, § 3.

В принципе можно представить себе Вселенную, зарядово-симметричную в среднем, за счет ее неоднородности. В начальном сингулярном состоянии предполагается избыток нуклонов в одних областях и избыток антинуклонов в других. По существу, для отдельной области ситуация не отличается от той модели откровенно несимметричного мира, которая в основном и рассматривается в данной книге. Если область больше охватываемой горизонтом, отличие в настоящее время принципиально ненаблюдаемо. Если области меньше, то могут быть наблюдаемы  $\gamma$ -кванты, рождающиеся на границе областей, где аннигиляция происходит и в настоящее время.

Расчет аннигиляции для межгалактического газа критической плотности дает величину, превосходящую наблюдаемый фон  $\gamma$ -квантов.

Если аннигиляция имеет место задолго до образования галактик,  $\gamma$ -кванты теряют свою энергию при комптоновском рассеянии, но энергия, инжектируемая в плазму, искажает планковский равновесный спектр. Эта сторона проблемы обсуждается в следующей главе.

Эта трудность отпадает, если принять, что межгалактического газа нет или что магнитные поля на границе между областями вещества и антивещества препятствуют смещению ионизованных газов.

Вряд ли нужно более конкретно обсуждать здесь все возможные варианты такого рода [см., например, Альвен (1965), интересный обзор см. Альвен (1971), Альвен, Эльвиус (1973)]. Стоит, быть может, лишь отметить, что неоднородная зарядово-симметричная в среднем модель не представляется эстетически предпочтительной по сравнению с однородной зарядово-несимметричной. Следует подчеркнуть, что зарядовая симметрия свойств частиц не требует зарядовой симметрии числа или плотности частиц в космологическом расширении.

Проблеме зарядовой симметрии частиц посвящен § 8 гл. 23.

Переходим теперь ко второму варианту — к теории зарядово-несимметричного мира.

В зарядово-несимметричном мире также можно поставить вопрос об остаточной концентрации антинуклонов, оставшихся от эпохи, когда температура была огромной,  $kT > mc^2$ , и было много нуклон-антинуклонных пар. Благодаря расширению здесь также возникает «закалка» антинуклонов и асимптотически получается конечное, не равное нулю, отношение  $\bar{r}_\infty = n_{\bar{N}}/n_\gamma$  при  $t \rightarrow \infty$ . Обозначим через  $r_0$  постоянное отношение избытка барионов над антибарионами к  $n_\gamma$ :  $r_0 = r - \bar{r}$ . Благодаря избытку барионов уравнение

для  $\bar{r}$  линейно, когда  $\bar{r} \ll r_0$ ,  $r \cong r_0$ :

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} = -\sigma_0 c n_\gamma r \bar{r} + \psi = -\sigma_0 c n_\gamma (r_0 \bar{r} - r_{\text{равн}}^2). \quad (7.3.21)$$

Величина  $r_0$  известна из современной ситуации (так как  $\bar{r} \ll r_0$ ):

$$r_0 \approx \frac{n_N}{n_\gamma} \approx 10^{-5} \cdot \frac{\Omega}{400} = 2,5 \cdot 10^{-8} \Omega. \quad (7.3.22)$$

Величина  $r_{\text{равн}}$ , как и прежде, есть равновесная плотность в зарядово-симметричном случае.

Уравнение (7.3.21) можно записать в виде  $\left(\bar{r}_{\text{равн}} = \frac{r_{\text{равн}}^2}{r_0}\right)$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = -\sigma_0 c n_\gamma r \left(\bar{r} - \frac{r_{\text{равн}}^2}{r}\right) \approx -\sigma_0 c n_\gamma r_0 (\bar{r} - \bar{r}_{\text{равн}}). \quad (7.3.23)$$

Выше сделано предположение  $r = r_0 + \bar{r} \approx r_0$ , так как в период, определяющий результат, как мы уже упомянули,  $\bar{r} \ll r_0$ . Введено также новое обозначение  $r_{\text{равн}}$  — равновесная концентрация антибарионов при данном избытке барионов. В интересующий период

$$\bar{r}_{\text{равн}} = \theta^{-2} e^{-2/\theta} 4 \cdot 10^7 \Omega^{-1}. \quad (7.3.24)$$

Процедура решения (7.3.23) та же, что и прежде: находится первый критический момент  $t_1$ , когда равновесие больше не поддерживается:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d\bar{r}_{\text{полн}}}{dt}\right)^{-1} = \theta_1 t_1 = (\sigma_0 c n_{\gamma 1} r_0)^{-1}. \quad (7.3.25)$$

Численно из этого уравнения получаем  $\theta_1 \cdot 10^{-6} \theta_1^{-2} = (2 \cdot 10^{-26} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{41} \theta_1^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-8} \Omega)^{-1}$ , т. е.

$$\theta_1 \approx 3 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1/4}. \quad (7.3.26)$$

При  $\Omega=1$  это дает  $T_1 = 3 \cdot 10^7$  °K,  $t_1 = 10^8$  сек. Соответствующая концентрация антибарионов после «закалки»:

$$(\bar{r}_{\text{равн}})_1 \approx e^{-10^8 \sqrt{\Omega}} \approx 10^{-3 \cdot 10^8 \sqrt{\Omega}}. \quad (7.3.27)$$

Из этих результатов видно, что во Вселенной с однородно распределенным избытком барионов равновесие для антибарионов поддерживается вплоть до очень низких температур ( $T_1 \approx 3 \cdot 10^7$  °K), соответствующая концентрация антибарионов невероятно мала — меньше чем один антибарион в характеристическом объеме  $(ct)^3$ , содержащем  $10^{87}$  фотонов!

С математической точки зрения это происходит потому, что избыток  $r_0$  не зависит от температуры, температура находится из

алгебраического уравнения без  $e^{-1/\theta}$ , но после этого температура подставляется в экспоненту.

Физически очевидно, что в зарядово-несимметричной модели количество первичных антибарионов пренебрежимо мало, после  $t > 0,01$  сек,  $T < 10$  Мэв,  $\theta < 0,01$   $\bar{r} = \bar{r}_{\text{равн}} < 10^{-70}$ . Таким образом, в рассматриваемой теории реликтовые антибарионы в нашу эпоху практически совершенно отсутствуют. Однако в нашу эпоху имеются антибарионы, получающиеся при взаимодействии космических лучей с обычным веществом; абсолютная их концентрация мала (около  $10^{-22}$  см $^{-3}$ ), но она значительно выше концентрации реликтовых антибарионов, о которых говорилось выше.

#### § 4. Реликтовые кварки в горячей модели

В соответствии с § 3 гл. 6 предположим, что существуют частицы (кварки) с барионным зарядом  $1/3$  и дробным электрическим зарядом. Отсюда следует, что возможно превращение одних кварков в другие путем  $\beta$ -распада; можно предположить, что стабилен  $q_1$  (если его масса меньше массы  $q_2$  и  $q_3$ ). Соответственно стабилен в таком случае и  $\bar{q}_1$ . Подчеркнем, что до сих пор ни в составе первичных космических лучей или продуктов их взаимодействия с ядрами, ни на ускорителях свободные кварки не наблюдались. Существование их в настоящее время является гипотезой, весьма привлекательной, но недоказанной, и все более подвергается сомнению.

Немалую роль в развитии этих сомнений сыграла, как мы сейчас увидим, и космология. Горячая модель Вселенной приводит к выводу о возможности заметной концентрации реликтовых кварков, покоящихся или прилипших к ядрам. В ряде стран ведутся эксперименты, направленные на обнаружение таких кварков в обычных веществах путем опытов такого же типа, как классические опыты Милликена по измерению заряда электрона.

В связи с этим анализ вопроса о равновесии и закалке кварков в горячей модели (в предположении, что верна гипотеза об их существовании) представляет астрофизический интерес. Если кварки будут обнаружены, то изучение их концентрации и распределения во Вселенной даст совершенно новые, весьма ценные данные о ее эволюции.

Итак, обозначая  $M_q$  массу кварка, мы должны ожидать, что при  $kT > Mc^2$  равновесная концентрация кварков и антикварков не отличается от концентрации всех других сортов частиц. По мере понижения температуры в ходе расширения концентрация убывает, как  $e^{-Mc^2/kT}$ . Вся теория закали кварков строится вполне аналогично теории закали нуклонов и антинуклонов в симметричной модели (см. предыдущий параграф).

Предполагается, что масса кварка в несколько раз больше массы нуклона. Поэтому равновесная концентрация вскоре становится ничтожно малой, меньше одного кварка на всю наблюдаемую Метагалактику при температуре порядка нескольких кэв. Однако задолго до этого наступает момент, когда скорость реакции, ведущей к установлению равновесия, становится слишком малой и происходит закалка остающихся  $q$  и  $\bar{q}$ , после чего их абсолютная концентрация (число в  $1 \text{ см}^3$ ) продолжает уменьшаться лишь за счет общего расширения, а отношение их концентрации к концентрации нуклонов  $n_N$ , т. е.  $n_q/n_N$ ,  $n_{\bar{q}}/n_N$ , стремится к постоянной величине.

Кварки сильно взаимодействуют между собой. Малая скорость реакции связана с тем, что для реакции с участием кварка нужно всегда не меньше двух  $q$  или пары  $q$  и  $\bar{q}$ . На первый взгляд кажется, что, поскольку барион  $B$  состоит из  $3q$ , необходимо тройное столкновение. В действительности энергетически вполне возможен процесс



(так как  $M_q > m_b$ ), и ясно, что двойные столкновения происходят чаще тройных. Пара  $q + \bar{q}$  аннигилирует, превращаясь в мезоны.

Обратное время бимолекулярной реакции уничтожения кварков дается выражением

$$\tau^{-1} = \sigma v (n_q + n_{\bar{q}}), \quad (7.4.2)$$

где  $\sigma$  — сечение реакции порядка  $(\hbar/Mc)^2 c/v$ ,  $v$  — скорость кварков.

Закалка кварков достигается при температуре более высокой, чем закалка антинуклонов, т. е. в период приближенной зарядовой симметрии по  $N$  и  $\bar{N}$  даже в зарядово-несимметричной модели. Поэтому с высокой точностью  $n_q \approx n_{\bar{q}}$ ,  $n_q - n_{\bar{q}} \ll n_q$ .

Реакция (7.4.1) способствует дальнейшему уменьшению разности  $n_q - n_{\bar{q}}$ , и в дальнейшем, запомнив этот вывод (который интересен сам по себе и, мы надеемся, с течением времени будет сопоставлен с наблюдениями, если кварки существуют), будем писать просто  $n_q$ . Итак, скорость реакции стремится к нулю при уменьшении  $n_q$ .

Напомним результаты предыдущего параграфа.

Для нахождения времени, при котором происходит закалка, скорость реакции установления равновесия нужно сравнить со скоростью расширения или со скоростью изменения равновесной концентрации (различие между соответствующими характерными временами не очень велико).

Итак, существует такое  $t_1$  (космологическое время, протекшее с момента  $\rho = \infty$ ) и соответствующее  $n_{q1}$ , при которых время про-

текания реакции  $\tau$  равно  $t_1$ ,  $\tau = t_1$ . Соответствующее отношение  $n_q/n_N$  после этого приблизительно (с точностью до численного коэффициента) сохраняется в ходе дальнейшего расширения, так как можно написать

$$\frac{d(n_q/n_N)}{dt} = -\sigma v \left( \frac{n_q}{n_N} \right)^2 n_N,$$

$$n_N \sim t^{-3/2}, \quad \int_{t_1}^{\infty} n_N dt \sim \int_{t_1}^{\infty} t^{-3/2} dt,$$

и интеграл в последнем равенстве сходится при  $t \rightarrow \infty$ ; условие начала закалки  $t_1$  обеспечивает, что  $n_q/n_N$  не сильно меняется.

Итак, условие закалки выделяет определенное значение  $n_{q1}$ . Равновесная концентрация  $n_{q, \text{равн}}$  экспоненциально зависит от массы кварков. Но если  $n_{q1} = n_{q, \text{равн}}$  задано, то это значит, что момент закалки  $t_1$  и температура  $T_1$ , при которой происходит закалка, сами подстраиваются к значению массы кварка  $M_q$ .  $kT = \frac{M_q c^2}{1/\pi \alpha}$ , где  $\alpha$  зависит от сечения  $\sigma$ , от скорости расширения и других факторов, но зависимость от этих факторов только логарифмическая. В результате получающееся  $n_{q1}$  уже не зависит экспоненциально от  $M_q$  — это и есть важнейший результат. Именно поэтому можно надеяться обнаружить реликтовые кварки — даже в том случае, если масса кварков велика и обнаружение кварков ядерно-физическими методами не удастся.

Повторяя теперь рассуждения предыдущего параграфа, приходим к формуле

$$\frac{n_{q1}}{n_{\bar{N}_1}} \approx \left( \frac{GM^2}{\hbar c} \right)^{1/2} \approx 10^{-10}.$$

Здесь  $n_{\bar{N}_1}$  есть концентрация всех видов частиц ( $\gamma$ ,  $e^+$ ,  $e^-$ ,  $\nu$ , ...) на момент закалки, численное значение дано для  $M_q$  порядка массы нуклона. Обсуждая вопрос об энтропии горячей модели, мы нашли (см. § 1 гл. 6)

$$\frac{n_N}{n_{\bar{N}}} \approx S^{-1} = \text{const} \approx 10^{-9},$$

где  $n_N$  — концентрация барионов. Отсюда находим (подставляя для момента закалки  $\frac{n_{N_1}}{n_{\bar{N}_1}} \approx 10^{-9}$ )

$$\frac{n_{q1}}{n_{N_1}} = \frac{10^{-10}}{10^{-9}} = 10^{-10}.$$

Это отношение после момента  $t_1$  практически не меняется и должно сохраниться к нашему времени.

Мы видим, что концентрация реликтовых кварков, отнесенная к барионам, пропорциональна удельной энтропии. Горячая модель предсказывает для первичного вещества  $\sim 10^{-10}$  кварков (и столько же антикварков) на один барион. Расчет не претендует на точность, но результат оказывается впечатляющим — ведь распространенность (кларк) золота (т. е.  $\text{Au}/\text{H}$ )  $\approx 10^{-12}$ , кларк радия  $\text{Ra}/\text{H} \approx 10^{-18}$ . Итак, если кварки существуют, то в природе — наверное, и в земной коре — они должны встречаться чаще, чем золото!

Изложенные результаты, относящиеся к закалке кварков, были получены в уже упомянутой работе Зельдовича, Окуня и Пикельнера (1965). Когда выполнялась эта работа, горячая модель еще не могла считаться полностью доказанной, поэтому в работе приведены как высокие цифры, относящиеся к горячей модели, так и низкие для холодной модели. Здесь мы приводим только расчет для горячей модели. В работе рассмотрен также вопрос о дальнейшей судьбе кварков, в частности об их прилипании к ядрам и выгорании в звездах.

Заметим, что благодаря зарядовой симметрии всегда остаются  $q$  и  $\bar{q}$  обоих знаков заряда. Если стабилен  $q$  с зарядом  $Z = +2e/3$ , то остается и реликтовый  $\bar{q}$  с  $Z = -2e/3$ . В противном случае остаются  $q$  с  $Z = -e/3$  и  $\bar{q}$  с  $Z = +e/3$ . На первый взгляд то, что  $n_q \approx n_{\bar{q}}$ , облегчает дальнейшее выгорание  $q$  и  $\bar{q}$  в веществе звезды: при столкновении  $q$  и  $\bar{q}$  нет кулоновского барьера. Однако в действительности, как отмечалось в этой же работе, отрицательные  $q$  или  $\bar{q}$  всегда стабилизируются прилипанием к ядрам! Поэтому наличие частиц с зарядами обоих знаков способствует выживанию отрицательных  $q$  или  $\bar{q}$  в звездах. Выгорание, по-видимому, не очень значительно. Очень труден вопрос о распределении кварков в ходе эволюции звезд и образования планет. По вопросу об экспериментальных методах поисков реликтовых кварков ограничимся указанием литературы: Бекки, Галлинаро, Морпурго (1965), Брагинский (1966), Чупка, Шиффер, Стевенс (1966), Брагинский и др. (1967, 1968), Пикельнер, Вайнштейн (1966).

Еще раз подчеркнем, что кварки пока так и не найдены и существование их как отдельных частиц (а не чего-то в виде возбуждений, аналогичных фононам в твердом теле, например) многими подвергается сильному сомнению. Вспомним, однако, замечания в гл. 5, § 3 о партонах или кварках с целым зарядом. Их экспериментальное обнаружение труднее. В настоящее время не ясно, доказывает ли эксперимент отсутствие в природе кварков с целым зарядом или нейтральных.

В самое последнее время, отчасти под влиянием космологических соображений, сформулирован вариант теории кварков, не требующий изменения законов сохранения.

Предполагается, что существуют три семейства кварков, по три кварка в каждом семействе. Эти три кварка называем по-прежнему  $p, n, \lambda$ . О разных семействах говорят, что они отличаются «цветом». По типографским соображениям будем отличать семейства индексом: первое семейство  $p_1, n_1, \lambda_1$ , второе  $p_2, n_2, \lambda_2$ , третье  $p_3, n_3, \lambda_3$ .

Барионы представляют собой белые комбинации цветных кварков: каждый барион состоит из одного кварка первого семейства, одного кварка второго семейства и одного антикварка третьего семейства. Тогда можно приписать каждому кварку (любому из девяти) единичный барионный заряд. Электрические заряды кварков в такой схеме могут быть целыми, например:

$p_1(+), n_1(+), \lambda_1(0); p_2(0), n_2(-), \lambda_2(-); p_3(+), n_3(0), \lambda_3(0)$ .  
В такой схеме, не нарушая принцип Паули, можно собрать барион из кварков с параллельными спинами, например:  $\Delta^{++} = (p_1, p_2, \bar{n}_3)$ , или  $\Delta^- = (n_1, n_2, \bar{p}_3)$ , или  $\Omega^- = (\lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_3)$ .

Все кварки могут быть нестабильными; можно предположить, что каждый из них способен распадаться, превращаясь в протон и лептоны при точном сохранении барионного и электрического заряда \*). В такой теории на ранней стадии горячей Вселенной, вблизи сингулярности, кварков много, но они полностью вымирают за счет экспоненциального распада к настоящему времени.

Теперь сформулируем вывод из десятилетнего развития гипотезы кварков. Косвенные данные о существовании кварков не дают уверенного ответа на вопрос об их стабильности. Предположим, что прямой лабораторный опыт докажет существование нового типа тяжелых стабильных частиц. Стабильность подразумевает абсолютный запрет на спонтанный распад одиночных частиц. Добавим еще условие: частицы не должны аннигилировать при встрече с протонами и электронами (таким образом, исключаем антипротон и позитрон). Аннигиляция при встрече двух новых тяжелых частиц не исключается.

Такой лабораторный опыт, такое — и только такое! — открытие будет иметь огромное значение для космологии. Теория горячей Вселенной предсказывает определенную остаточную концентрацию стабильных частиц. Сопоставление этого теоретического вывода с наблюдениями даст сведения об очень раннем этапе эволюции,  $z \sim 10^{13}$ , абсолютное время порядка  $10^{-6}$  сек.

## § 5. Нуклеосинтез в теории горячей Вселенной

В данном параграфе рассматриваются ядерные реакции, от которых зависит химический состав дозвездного вещества. Мы рассматриваем эти процессы в зарядово-несимметричном мире, каковы, по нашему мнению, является (по крайней мере) наблюдаемая

\*) Лептонные заряды кварков надо выбрать такими же, как у барионов.



часть Вселенной. В ходе космологического расширения после падения температуры ниже  $T_v < m_p c^2/k$  в плазме остаются только нуклоны (но не антинуклоны) в количестве  $\sim 10^{-9}$  от легких частиц. Нуклоны в дальнейшем вступают в ядерные реакции. Эти ядерные реакции заканчиваются, как мы увидим, примерно через 100 сек после начала расширения, при температуре в несколько десятков кэв ( $\sim 3 \cdot 10^8$  °К).

После этого химический состав остается неизменным на всем протяжении расширения радиационно-доминированной плазмы и позже, после рекомбинации и образования нейтральных атомов. Из вещества указанного состава образуются звезды первого поколения — предположительно в момент  $z \sim 10$  или 5, т. е. уже близко к нашей эре.

Только в звездах после вторичного сжатия вещества до высокой плотности и температуры начинается новый этап ядерных реакций.

Первые попытки осмысливания химического состава Вселенной основывались на идее термодинамического равновесия. Отметим здесь пионерские работы Харкинса (1917), Толмена (1922), Покровского, Корсунского (1931), Сузуки (1931). Сама постановка вопроса об условиях образования элементов заслуживает высокой оценки. Эта идея представляла собой смелое применение в космологии достижений ядерной физики, понятий о взаимных превращениях.

Однако уже вскоре выяснилось, что нельзя подобрать такие плотность и температуру вещества, при которых наблюдаемый состав Вселенной был бы равновесным.

Гамову (1946) принадлежит заслуга эволюционной постановки задачи. В расширяющейся Вселенной существенно кинетика процессов.

Выше мы видели (гл. 6), что поддержание равновесия имеет место для быстрых процессов. Почему ядерные реакции оказались медленными, почему для них существенна кинетика? Дело в том, что ядерные процессы состоят: а) из превращений нейтронов в протоны и обратно, что связано с испусканием и захватом лептонов ( $e^+$ ,  $e^-$ ,  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$ ) и слабым взаимодействием; б) из бинарных реакций ядер типа  $p+p=D+\gamma$ ,  $D+D=He^3+p$  и т. п. Но эти реакции идут относительно медленно, так как мало отношение плотности барионов к плотности фотонов.

Как уже отмечалось в гл. 5, ранняя история проблемы нуклеосинтеза изобилует ошибками.

Первоначально Гамов предполагал, что нуклоны при очень большой плотности находились в состоянии нейтронов, а затем происходил их радиоактивный распад. В неопубликованной работе Ферми и Туркевича рассматривались ядерные реакции соединения нейтронов с протонами и следующие за ними. Позже Хаяши (1950)

заметил, что при высокой температуре (выше  $2 \text{ Мэв}$ , т. е.  $T > 20 \cdot 10^9 \text{ }^\circ\text{К}$ ) электроны, позитроны, нейтрино и антинейтрино горячей плазмы вызывают весьма быстрое превращение нейтронов в протоны и обратно по реакциям \*)



Поэтому при высокой температуре, независимо от выбора начального состояния, устанавливается термодинамическое равновесие:

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\Delta mc^2/T}, \quad (7.5.2)$$

где  $\Delta m$  есть разность масс нейтрона и протона ( $\Delta mc^2 = 1,28 \text{ Мэв}$ ), и, конечно, нет никаких сложных ядер. Так, например, в момент  $t = 0,01 \text{ сек}$ , когда температура равна  $9,5 \text{ Мэв}$ , время установления равновесия порядка  $2 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$ , равновесное соотношение  $n : p = 0,47 : 0,53$ . При понижении температуры равновесная концентрация падает, но уменьшается и скорость процессов (7.5.1). Как и другие процессы, становящиеся медленными на некоторой стадии расширения (см. §§ 1—4), данный процесс распадается на две стадии: в первой стадии  $n = n_{\text{равн}}$ ; к концу этой стадии происходит закалка, т. е. реакции уже слишком медленны для поддержания равновесия; во второй стадии оставшиеся нейтроны медленно распадаются без участия плазмы с полупериодом  $11 \text{ мин}$ , известным из лабораторных опытов \*\*).

Приведем количественный расчет.

Расчеты Хаяши (1950) были чрезвычайно сложны, а предположки их не вполне соответствуют современным сведениям о нейтрино и бета-процессах. Существенное уточнение дано в работе Альфера и Хермана (1953). Эти расчеты были повторены Якубовым и изложены в работе Зельдовича (1965 г.). Концентрации  $n$  и  $p$  удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn_n}{dt} &= -a(t) n_n + b(t) n_p, \\ \frac{dn_p}{dt} &= -b(t) n_p + a(t) n_n; \end{aligned} \right\} \quad (7.5.3)$$

более поздние работы — см. Пиблс (1966а, б), Вагонер, Фаулер, Хойл (1967), Вагонер (1973), Ривс, Аудуз, Фаулер, Шрамм (1973). Коэффициенты  $a$  и  $b$ , выражающие скорость протекания реакций,

\*) Везде далее рассматриваются только электронные нейтрино, индекс «е» опускаем.

\*\*) Современное значение среднего времени жизни нейтрона  $918 \pm 14 \text{ сек}$ , время полураспада получим, умножая на  $\ln 2$ .

зависят от температуры, но температура как функция времени известна. Количество нуклонов ничтожно по сравнению с количеством легких частиц в плазме, поэтому реакции  $p$  и  $\bar{p}$  не оказывают никакого обратного влияния на концентрации  $e^-$ ,  $e^+$ ,  $\nu$ ,  $\bar{\nu}$  и, следовательно, не влияют на функции  $a$  и  $b$ ; уравнения линейны.

При вычислениях  $a$  и  $b$  принимается во внимание принцип Паули. Движением протонов и нейтронов можно пренебречь. Распределения  $e^-$ ,  $e^+$ ,  $\nu$ ,  $\bar{\nu}$  в импульсном пространстве даются известными выражениями статистики Ферми:

$$\left. \begin{aligned} g(e^-) &= \frac{1}{e^{-E/kT} + 1}, & g(\nu) &= \frac{1}{e^{-E/kT} + 1}, \\ E_e &= \sqrt{c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4}, & E_\nu &= c p_\nu. \end{aligned} \right\} \quad (7.5.4)$$

Здесь  $p_e$  и  $p_\nu$  — импульсы частиц (не путать с обозначением протона —  $p$ !). Скорость реакции  $p \rightarrow n$  есть

$$a = A \left[ \iint g(p_\nu) [1 - g(p_{e^+})] \delta(E_\nu - \Delta mc^2 - E_{e^+}) d^3 p_\nu d^3 p_{e^+} + \right. \\ \left. + \iint g(p_{e^-}) [1 - g(p_{\bar{\nu}})] \delta(E_{e^-} - \Delta mc^2 - E_{\bar{\nu}}) d^3 p_{e^-} d^3 p_{\bar{\nu}} \right], \quad (7.5.5)$$

где первый член — для  $\nu + p = n + e^+$ , второй — для  $e^- + p = n + \bar{\nu}$ . Множители в квадратных скобках  $[1 - g]$  учитывают число вакансий в импульсном пространстве — реакция запрещена, если конечное состояние  $e^+$  или  $\bar{\nu}$  уже занято. Дельта-функции учитывают закон сохранения энергии, только электроны и антинейтрино с достаточно большой энергией ( $E_{e^-} > \Delta mc^2$ ,  $E_{\bar{\nu}} > \Delta mc^2 + m_e c^2$ ) вызывают реакцию. Благодаря  $\delta$ -функции шестикратный интеграл по  $d^3 p_1 d^3 p_2$  сводится к пятикратному, и поэтому в пределе, когда рассматриваемые энергии намного больше, чем  $m_e c^2$  и  $\Delta mc^2$ , интегралы пропорциональны  $(p)^5 \sim E^5$ . Постоянная  $A$  пропорциональна квадрату константы слабого взаимодействия, ее можно выразить через вероятность распада свободного нейтрона. Всегда имеет место термодинамическое тождество (с учетом всех процессов)

$$b(t) = e^{-\Delta mc^2/T} a(t) = e^{-1,35 V T} a(t).$$

При высокой температуре, т. е. малом  $t$ ,

$$a = b = \text{const} \cdot T^5 = \text{const} \cdot t^{-5/2} = 4 \cdot 10^{-6} T_9^5; \quad (7.5.6)$$

здесь  $T_9 = T / 10^9$ .

При низкой температуре

$$a(t) \rightarrow W = 10^{-3} \text{ сек}^{-1} \quad \text{при} \quad t \gg 1 \text{ сек}, \quad (7.5.7)$$

где  $W$  — вероятность распада свободного нейтрона. Пользуясь тождеством  $n_n + n_p = 1$ , вместо двух уравнений (7.5.3) получим одно:

$$\frac{dn_n}{dt} = b - (a + b) n_n, \quad (7.5.8)$$

решение которого легко написать:

$$n_n(t) = \int_0^t b(\tau) e^{-\int_{\tau}^t (a+b) d\tau'} d\tau. \quad (7.5.9)$$

Введем теперь следующее обозначение:

$$a+b = f+W,$$

причем при больших  $t$  функция  $f \rightarrow 0$ , так как  $a \rightarrow W$ ,  $b \rightarrow 0$ . Асимптотическое выражение  $n_n(t)$  при  $t \gg 1$  имеет вид

$$n_n(t) = n_{n*} e^{-Wt}, \quad (7.5.10)$$

где величина

$$n_{n*} = \int_0^t b(\tau) \exp \left[ W\tau - \int_{\tau}^{\infty} f d\tau' \right] d\tau *$$

имеет смысл концентрации нейтронов  $\frac{n_n}{n_n + n_p}$  после того, как произошла закалка. Кривые  $n_n(t)$  и  $n_{n_{равн}}(t)$  показаны на рис. 31.

Вычисленное таким образом значение  $n_{n*}$  по современным данным оказалось равным 0,165 и численно мало отличается от результата Хаяши (1950). Грубую оценку  $n_{n*}$  можно, конечно, сделать и без столь детальных расчетов, а используя тот же метод, к которому мы уже неоднократно прибегали в предыдущих параграфах для определения момента прекращения реакций взаимодействия. Действительно, реакции прекращаются и происходит закалка при условии [см. (6.2.8)]

$$t = \tau, \quad (7.5.11)$$

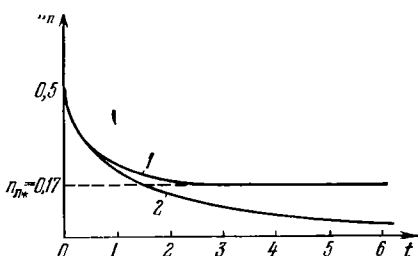


Рис. 31. Концентрация нейтронов в горячей модели: кривая 1 — реальная концентрация, кривая 2 — равновесная концентрация.

где  $t$  — время с начала расширения (6.2.3), а  $\tau$  — длительность протекания реакции. В нашем случае, согласно (7.5.6),

$$\tau \approx 10^6 T_9^{-5} \text{ сек.} \quad (7.5.12)$$

\*) Подынтегральное выражение резко падает при  $t > 1$  и снова возрастает лишь при  $t > 10\,000$ . Поэтому определение  $n_{n*}$  не зависит от конкретного выбора  $t$ , если  $100 < t < 10\,000$ . При  $t \rightarrow 0$   $b(t) \rightarrow \infty$ , так же как и  $f(t)$ ; экспонента обращается в нуль быстрее, чем  $b(t)$ ; в целом подынтегральное выражение стремится к нулю при  $t \rightarrow 0$ .

Подставляя (7.5.12) и (6.2.3) в (7.5.11), находим температуру закали. Коэффициент  $\kappa$  берем  $\approx 4$ ; это значение получается, если учитывать только известные сорта элементарных частиц и не предполагать существование гипотетических неизвестных частиц (см. об этом далее, в конце параграфа). Тогда для температуры закали получаем

$$(T_0)_* \approx 10, \quad T \approx 0,9 \text{ Мэв.} \quad (7.5.13)$$

Теперь, подставляя это  $(T_0)_*$  в (7.5.2), находим  $\left(\frac{n_n}{n_p}\right)_*$  на момент закали:

$$\left(\frac{n_n}{n_p}\right)_* = e^{-\Delta mc^2/T_*} \approx e^{-1.5} \approx 0,2 \quad (7.5.14)$$

или (используя тождество  $n_n + n_p = 1$ )

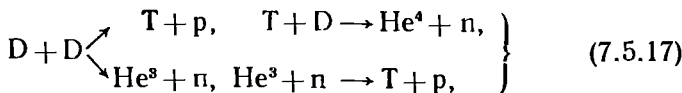
$$\left(\frac{n_n}{n_n + n_p}\right)_* \equiv n_{n*} \approx 0,17 \quad (7.5.15)$$

в согласии с точным вычислением.

На следующей стадии процесса при  $t \approx 100 \text{ сек}$  происходит соединение нейтрона и протона в дейтон:



за которым следует цепочка термоядерных реакций:



в результате чего образуется  $He^4$ .

Ядро дейтерия представляет собой «энтропийный барьер» на пути образования  $He^4$ . При температуре выше 100 кэв равновесное содержание дейтерия ничтожно; это значит, что с образованием дейтерия успешно конкурирует фотораспад  $\gamma + D \rightarrow p + n$ . Процесс образования  $He^4$  требует ряда двойных столкновений\*), поэтому

\*) Любопытно, что прямое соединение  $D + D = He^4 + \gamma$  имеет совершенно ничтожное сечение в силу ряда запретов.

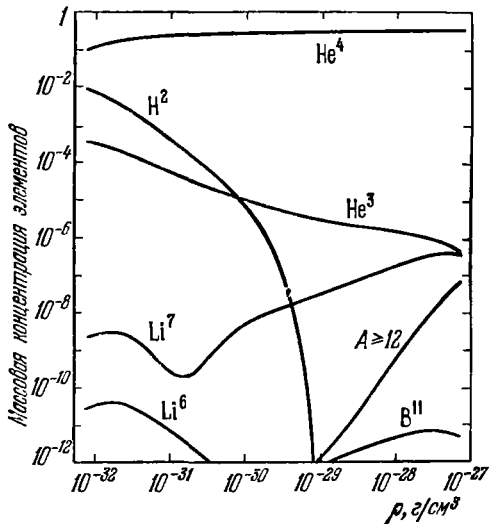


Рис. 32. Относительная распространенность химических элементов, синтезированных в начале космологического расширения. Параметром является сегодняшнее значение плотности вещества,  $H^2 \equiv D$ .

он представлен тем сильнее, чем выше плотность барионов при данной температуре, т. е. чем меньше удельная энтропия. При малой энтропии все нейтроны превращаются в  $\text{He}^4$ , следовательно, получится  $\sim 33\%$   $\text{He}^4$ ,  $\sim 67\%$  водорода. Мерой энтропии является отношение  $T^3/\rho$ , где  $\rho$  — плотность обычного вещества. На диаграмме рис. 32 приведены результаты расчетов Вагонера, Фаулера, Хойла (1967), пересмотренные Вагонером (1973), для температуры реликтового излучения  $T=2,7^\circ\text{K}$  и для разных значений сегодняшней плотности  $\rho_0$  с учетом того, что истинное значение плотности  $\rho_0$  известно ненадежно. При вычислении концентрации  $\text{He}^3$

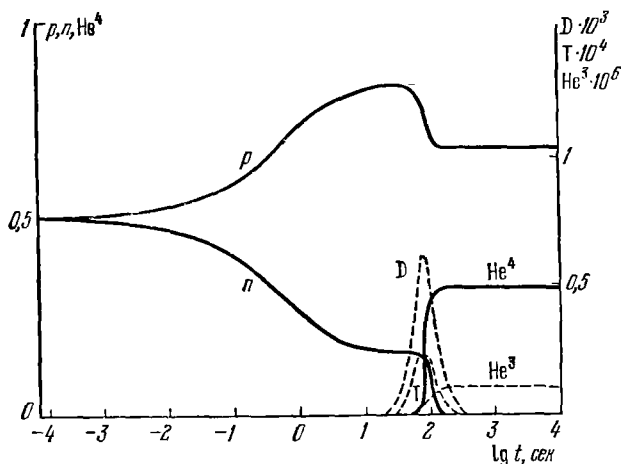


Рис. 33. Изменение вследствие ядерных реакций содержания протонов, нейтронов, дейтерия, гелия-4, гелия-3 и трития в расширяющейся горячей модели. Правая шкала — только для D, T,  $\text{He}^3$ .

и  $\text{Li}^7$  они учли, что образовавшиеся в ходе реакций T и  $\text{Be}^7$  путем  $\beta$ -распада переходят соответственно в  $\text{He}^3$  и  $\text{Li}^7$ .

Общая картина изменения с течением времени содержания  $\rho$ ,  $n$ , D,  $\text{He}^4$ ,  $\text{He}^3$  и T вследствие ядерных реакций в горячей модели при  $T^3/\rho \approx 3 \cdot 10^{30}$  (т.е.  $T=2,7^\circ\text{K}$ ,  $\rho_0=6 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3$ ) дана на рис. 33 по расчетам Дорошкевича и Сюняева. Вопрос о фактическом содержании гелия и других легких элементов в дозвездном веществе разбирается в следующем параграфе.

Резюмируем ситуацию. Каковы посылки и возможные слабые пункты расчета? Прежде всего, ненадежно известна сегодняшняя плотность материи  $\rho_0$  или обратно пропорциональная ей (опять же сегодняшняя) энтропия  $T^3/\rho_0$ . Величина  $T^3/\rho$  практически не меняется со временем, возможная область изменения  $\rho_0$ : от  $3 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$  до  $3 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$ . Уравнение для слабого взаимодействия  $n \leftrightarrow \bar{n} + e^- + \bar{\nu}_e$

и закалка не зависят от  $\rho_0/T_0^3$ . Последующие ядерные реакции зависят от  $\rho_0/T_0^3$ , но, к счастью, в интересующей нас области  $3 \cdot 10^{-31} < \rho_0 < 3 \cdot 10^{-28}$  эта зависимость не очень существенна для основного продукта,  $\text{He}^4$  и для остающегося водорода. Предсказываемые значения концентрации  $\text{He}^4$ :  $25\% < \text{He}^4 < 29\%$ . Количества  $\text{D}$ ,  $\text{He}^3$ ,  $\text{Li}^7$  очень сильно зависят от  $\rho_0/T_0^3$ , но они очень малы абсолютно. Вопрос о содержании их в небесных телах и о синтезе их в современный период изложен в следующем параграфе.

Резюме проведенного выше исследования ядерных реакций в космологии таково: очень грубо можно сказать, что почти все нейтроны, выжившие в результате первой стадии после заковки, переходят в ядра  $\text{He}^4$  в период ядерного синтеза  $t \approx 30-300$  сек; весовая концентрация  $\text{He}^4$  в дозвездном веществе в первом приближении равна удвоенному весу нейтронов, оставшихся после заковки:

$$Y \approx \left( \frac{2n_n}{n_n + n_p} \right)_{\text{заковки}}. \quad (7.5.18)$$

Напомним, что мы условились считать  $n_n + n_p = 1$ , поэтому  $Y = 2n_{n*}$ . Подставив сюда значение  $n_{n*} \approx 0,165$ , полученное выше, находим

$$Y \approx 0,33. \quad (7.5.19)$$

Это, по существу, максимальное количество гелия, которое может получиться. Действительное значение  $Y$  несколько меньше, но формула (7.5.18) достаточно хороша для приближенной оценки.

Таким образом, решающее влияние на исход ядерного синтеза имеет отношение  $\left( \frac{n_n}{n_n + n_p} \right)_* \equiv n_{n*}$  на момент заковки. В какой степени устойчиво значение  $n_{n*}$  при изменении различных параметров модели? Выше отмечалось, что  $n_{n*}$  не зависит от  $\rho_0/T_0^3$ , так как уравнения (7.5.3) линейны, взаимодействием нейтронов и протонов между собой можно пренебречь при  $T > 1$  Мэв.

Но  $n_{n*}$  зависит от скорости расширения плазмы, точнее, от скорости изменения температуры со временем. Это сразу видно из формулы (7.5.11), где слева стоит  $t(T)$  — время от начала расширения, совпадающее с временем изменения параметров плазмы. Выше при определении температуры заковки мы использовали в качестве  $t(T)$  формулу (6.2.3) с коэффициентом  $\kappa \approx 4$ . Этот коэффициент зависит от числа сортов элементарных частиц, существующих в плазме к данному моменту. Коэффициент  $\kappa$  учитывает только известные частицы. Шварцман (1969) указал, что предположение о сильном увеличении  $\kappa$  меняет выводы о химическом составе

первичного вещества. Такое увеличение в принципе возможно, если имеется много неизвестных слабо (или сверхслабо) взаимодействующих (и потому неоткрытых) частиц. Такие частицы не могут иметь массу покоя, отличную от нуля. Действительно, в этом случае при расширении Вселенной отношение их плотности к плотности обычной материи не изменилось бы и их наличие сегодня в большом числе означало бы сильное превышение средней плотности этих частиц над плотностью известных форм материи, а это невозможно (см. обсуждение вопроса о массе мюонных нейтрино в сноске на стр. 183).

Но безмассовые частицы (типа нейтрино или гравитонов) не могут быть исключены таким рассуждением (см. далее). Подчеркнем еще раз, что гипотетические частицы не участвуют прямо в реакциях, приводящих к синтезу элементов, а влияют на них косвенно, меняя динамику расширения плазмы. Для оценки влияния этих частиц на исход ядерных реакций воспользуемся формулами (7.5.11) и (7.5.18). Обозначим через  $\mu$  отношение общей плотности материи, включая плотность неизвестных частиц ( $\gamma, e^+, e^-, \nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$ ) в термодинамическом равновесии \*):

$$\mu \equiv \frac{\rho_{\text{общ}}}{\rho_{\text{изв. частиц}}} \approx \frac{\kappa}{\kappa_0}, \quad (7.5.20)$$

где  $\kappa_0 \approx 4$  — значение  $\kappa$  для известных частиц. С помощью (6.2.3) находим

$$t \approx \frac{10^3}{T_9^2 \mu^{1/2}} \quad (7.5.21)$$

и из (7.5.12), (7.5.11) и (7.5.21) получаем

$$(T_9)_* = 10\mu^{1/2}, \quad \left(\frac{n_n}{n_p}\right)_* = e^{-1.5\mu^{-1/2}}, \quad (7.5.22)$$

$$Y \approx 2n_{*} = \frac{2(n_n/n_p)_*}{1 + (n_n/n_p)_*} = f(\mu). \quad (7.5.23)$$

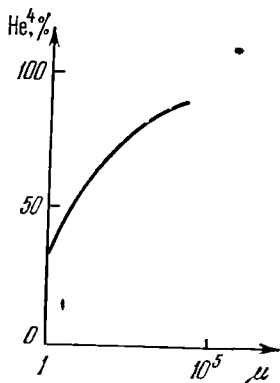


Рис. 34. Количество синтезированного гелия в зависимости от количества неизвестных слабодействующих частиц.

Кривая на рис. 34 показывает  $Y$  в зависимости от  $\mu$ . Значение  $\mu > 4$  невозможно, так как это дает  $Y > 50\%$ , что заведомо исключается наблюдениями.

Подчеркнем, что приведенные рассуждения дают гораздо более сильные ограничения на  $\mu$ , чем сравнение постоянной Хаббла для

\*) Разность  $\rho_{\text{общ.}} - \rho_{\text{изв. частиц}}$  включает не только плотность неизвестных безмассовых частиц, но также и плотность мюонных нейтрино и антинейтрино, если имеется большой избыток одних или других по сравнению с их равновесной концентрацией, и — прежде всего — плотность сверхравновесных гравитонов.



сегодняшнего дня с возрастом Земли. Последняя оценка приводит лишь к неравенству  $\mu < 10^5$  [Зельдович, Смородинский (1961)] \*).

Итак, изменение параметра  $\kappa$  приводит к изменению  $n_{n*}$ . На это же значение  $n_{n*}$  может сильно влиять возможный избыток электронных нейтрино или антинейтрино. На это обратил внимание Фаулер (1970). До сих пор мы предполагали отсутствие лептонного

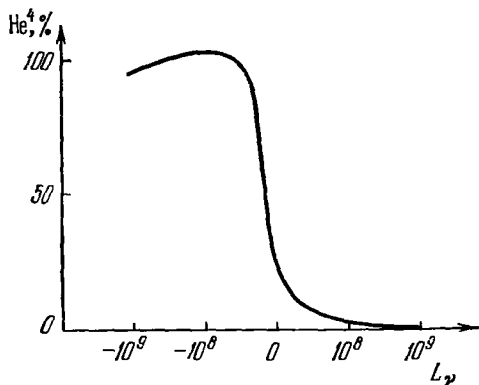


Рис. 35. Количество синтезированного гелия в зависимости от удельного лептонного заряда Вселенной.

заряда и считали количество нейтрино равным количеству антинейтрино. Если отказаться от такого требования, то на стадии заковки избыток электронных нейтрино или антинейтрино приведет через реакции (7.5.1) к изменению равновесной концентрации нейтронов и протонов, изменится формула (7.5.2). Вторичным эффектом является влияние наличия избытка частиц на динамику расширения и, следовательно, на момент заковки, что было рассмотрено выше.

В ходе космологического расширения химический потенциал нейтрино изменяется, как температура. Обозначим  $\varphi = \mu_\nu/kT$ . Тогда приблизительно справедливы соотношения

$$n_{\bar{\nu}} = bT^3 e^{-\varphi}, \quad n_\nu = bT^3 (1 + \varphi)^3; \quad (7.5.24)$$

для отношения  $n_{\bar{\nu}}/n_\nu$  имеем

$$\frac{n_{\bar{\nu}}}{n_\nu} = (1 + \varphi)^{-3} e^{-\varphi}. \quad (7.5.25)$$

Вместо формулы (7.5.2) теперь имеем

$$\left(\frac{n_n}{n_p}\right)_{\text{равн}} = e^{-\Delta mc^2/kT - \varphi} \quad (7.5.26)$$

вместо (7.5.14)

$$\left(\frac{n_n}{n_p}\right)_* = e^{-\Delta mc^2/kT_* - \varphi}. \quad (7.5.27)$$

\*) Отметим, что громадное увеличение плотности энергии безмассовых частиц ( $\mu \gg 1$ ) может привести к такому темпу расширения, что не успевают пройти реакции образования  $\text{He}^4$  на втором этапе (7.5.16), (7.5.17) и его количество будет малым. Но в этом случае должно быть  $\mu \gg 10^5$  и частицы сильно бы влияли и на современную скорость расширения Вселенной, а это несовместимо с оценками времени жизни Земли и постоянной Хаббла.

Таким образом,  $Y$  зависит, вообще говоря, и от  $\kappa$  и от  $\varphi$ , причем если  $\varphi > 1,6$ , то  $Y$  будет меньше 30% при любом  $\kappa$ !

На рис. 35 показана зависимость  $Y$  от удельного лептонного заряда  $L_\nu = \frac{n_{\bar{\nu}} - n_\nu}{n_B}$  для  $\kappa=4$ , т. е.  $\mu=1$ . Сильный избыток анти-

нейтрино ведет к  $Y \approx 1$  и противоречит наблюдениям, сильный избыток нейтрино ведет к  $Y \approx 0$ .

Предположение  $\varphi \neq 0$  ведет к наличию избытка нейтрино или антинейтрино и для сегодняшнего дня, но избыток, достаточный для существенного изменения  $Y$ , конечно, еще слишком мал для обнаружения его какими-либо сегодняшними средствами.

### § 6. Сравнение наблюдательных данных о распространенности легких элементов во Вселенной с предсказаниями теории

Что говорят наблюдения о распространенности химических элементов во Вселенной? Подтверждают ли они предсказания теории горячей Вселенной?

Прежде всего, ясно, что, даже зная химический состав космических объектов в настоящее время, еще нельзя сравнивать непосредственно эти данные с космологической теорией, так как химические элементы могут синтезироваться (и разрушаться тоже) в течение эволюции небесных тел — например, в звездах или при взаимодействии космических лучей с межзвездным веществом. Поэтому необходимо проанализировать вопрос об эволюции распространенности химических элементов со временем и только после этого сравнить теорию с наблюдениями. Мы начнем с того, что приведем данные о распространенности химических элементов, затем проанализируем возможности синтеза или разрушения элементов в разных процессах и, наконец, сделаем заключение о химическом составе дозвездного вещества, из которого формировались первые объекты. Прекрасный обзор этого вопроса дан в работе Ривса, Аудуза, Фаулера и Шрамма (1973), которой мы, главным образом, придерживаемся в дальнейшем изложении (там же подробная библиография).

Мы будем говорить только о легких элементах, ибо, как уже неоднократно отмечалось выше, синтез тяжелых элементов (углерода и тяжелее) может быть полностью объяснен процессами, происходящими в ходе эволюции звезд [см. Труран и Камерон (1971)], и последующими выбросами газа из них. В космологическом нуклеосинтезе количество образующихся элементов тяжелее бора ничтожно.

Ниже приводится табл. IV наблюдательных данных, взятая из цитируемой работы. В ней дается относительная концентрация

ТАБЛИЦА IV

| Относительная концентрация по числу атомов | Межзвездный газ  | Звезды   | Солнце                       | Планетная система   |
|--|--|--|------------------------------|---|
| D/H  | $\{ < 7 \cdot 10^{-8}$<br>$\sim 6 \cdot 10^{-8} ** \}$ | $< 6 \cdot 10^{-4}$  | $< 5 \cdot 10^{-6}$          | $\{ 1,5 \cdot 10^{-4} **** \}$<br>$\{ (2,9-7,5) \cdot 10^{-5} ***** \}$ |
| He <sup>3</sup> /He <sup>4</sup>           | $< 5 \cdot 10^{-4}$                                    | —  | $(4 \pm 2) \cdot 10^{-4}$    | $(1 \pm 0,5) \cdot 10^{-4}$   |
| He <sup>4</sup> /H                         | $0,11 \pm 0,03$  | $\approx 0,10$   | $\approx 0,08$ —<br>$— 0,10$ | —   |
| Li/H                                       | $\approx 10^{-9}$                                      | $\{ < 10^{-12}$ —<br>$— 4 \cdot 10^{-9} ** \}$<br>$10^{-7} *** \}$ | $\approx 10^{-11}$           | $1,2 \cdot 10^{-9}$   |
| Li <sup>7</sup> /Li <sup>6</sup>           | —  | $> 10$   | $> 20$                       | $12,5 \pm 0,2$  |
| Be/H                                       | $\approx 10^{-9}$                                      | $< 10^{-12}$ —<br>$— 5 \cdot 10^{-11} **** \}$                     | $\approx 10^{-11}$           | $2 \cdot 10^{-11}$  |
| B/H  | —  | —  | $< 3 \cdot 10^{-10}$         | $3 \cdot 10^{-10}$ — $3 \cdot 10^{-9}$                                  |
| B <sup>11</sup> /B <sup>10</sup>           | —  | —  | —                            | $4 \pm 0,5$   |

\*) Данные Вилсона и др. (1973) по наблюдениям молекул HCN и DCN. Рогерсон и Йорк (1973) по линиям поглощения межзвездного нейтрального H и D дают D/H  $\approx 14 \cdot 10^{-8}$ .

\*\*) Концентрация сильно меняется у звезд разного типа и возраста.

\*\*\*) В некоторых красных гигантах.

\*\*\*\*) Для Земли и метеоритов.

\*\*\*\*\*) Атмосфера Юпитера.

элементов по числу атомов, а не по весу (которую мы обозначаем через  $Y$ ), как в предыдущем параграфе.

Мы начнем обсуждение с He<sup>4</sup>, который является вторым по распространенности (после H) элементом Вселенной. Вопрос о He<sup>4</sup> проанализирован в обзоре Сирла и Сэргента (1972).

Содержание He<sup>4</sup> может быть уверенно определено внутри молодых звезд, в звездных атмосферах и в межзвездном газе.

Теория строения звезд предсказывает определенные соотношения для зависимостей между массой, радиусом и светимостью молодых звезд. Содержание гелия входит в эти зависимости как параметр. Сравнение теории с наблюдениями дает концентрацию He<sup>4</sup>. В звездных атмосферах и межзвездном газе концентрация He<sup>4</sup> определяется спектроскопически с использованием теории возбуждения и ионизации He<sup>4</sup>.

Оказалось, что, за малым исключением (см. далее), массовая концентрация гелия \*) всегда лежит в пределах

$$0,26 < Y < 0,32. \quad (7.6.1)$$

\*) Напомним связь между массовой концентрацией гелия  $Y$  и отношением числа атомов He<sup>4</sup>/H : He<sup>4</sup>/H =  $Y/4(1-Y)$ . Здесь использован тот факт, что остальных элементов во Вселенной пренебрежимо мало.

Это относится и к распространенности  $\text{He}^4$  в ближайших галактиках, где гелий наблюдается по эмиссионным линиям ионизованного газа.

Теперь об исключениях. Атмосферы некоторых звезд (таких, например, как Сеп А) крайне бедны гелием. Подобных звезд очень немного, и все они показывают сильные аномалии в содержании не только гелия, но и других элементов. По-видимому, какие-то процессы на поверхности таких звезд резко исказили их поверхностный химический состав.

Мог ли весь наблюдаемый  $\text{He}^4$  синтезироваться в ходе эволюции звезд первых поколений, которые затем выбрасывали обогащенный гелием газ в пространство и из этого «загрязненного» гелием газа образовывались на более поздней стадии современные объекты? Тщательный анализ показывает, что это вряд ли возможно. Наиболее убедительно против такой возможности говорит анализ диаграмм светимость — спектральный класс для старых звездных скоплений. Характер диаграмм этих скоплений зависит от возраста и начального содержания гелия в звездах. Оказывается, что это начальное содержание  $\text{He}^4$  у наиболее старых (и поэтому бедных металлами) звезд нашей Галактики около  $Y \approx 0,3$ .

Сирл и Сэржент (1972) и Ривс и др. (1973) приходят к выводу, что содержание  $\text{He}^4$  в дозвездном веществе было, вероятно, примерно таким же, как и сегодняшнее, т. е. около  $Y \approx 0,3$ .

Содержание D в веществе, из которого образовывалась Солнечная система, можно оценить, исследуя количество  $\text{He}^3$  на Солнце. Дело в том, что на Солнце D, захватывая протон, превращается в  $\text{He}^3$ . Таким образом, количество  $\text{He}^3$  дает верхний предел количества D в досолнечном веществе. Оценки дают

$$D/H \approx (2,5 \pm 1) \cdot 10^{-5}. \quad (7.6.2)$$

С другой стороны, содержание D в атмосфере Юпитера оценивается в  $D/H \approx (2,9 - 7,5) \cdot 10^{-5}$ . Верхние пределы распространенности D в других космических объектах даны в табл. IV.

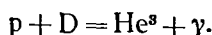
Однако распространенность молекул с H и D находится в отношении, существенно отличающемся от отношения распространенности атомов H и D. Квантовая механика учит, что потенциальная кривая  $U(r)$ , характеризующая силовое поле, в котором движется ядро (протон или дейтон), одинакова, например, в молекулах HCN и DCN. Однако при одинаковом  $U(r)$ , очевидно, частота колебаний H в  $\sqrt{2}$  раз больше частоты колебаний D. Значит, больше и нулевая энергия колебаний  $\hbar\omega/2$ . Поэтому молекула HCN имеет в основном состоянии больше энергии, чем молекула DCN. Как следствие, распространенность молекул HCN относительно меньше:

$$\frac{[\text{HCN}]}{[\text{H}]} : \frac{[\text{DCN}]}{[\text{D}]} = e^{-\frac{\hbar\omega_{\text{H}}}{2kT} + \frac{\hbar\omega_{\text{D}}}{2kT}} = e^{-\frac{(\sqrt{2}-1)\hbar\omega_{\text{D}}}{2kT}}.$$

При низкой температуре оказывается

$$\frac{[\text{DCN}]}{[\text{HCN}]} \gg \frac{[\text{D}]}{[\text{H}]}.$$

Синтез дейтерия идет в огромных масштабах в звездах главной последовательности: процесс  $p + p = D + e^+ + \nu$  является первым шагом водородного цикла в звездах. Однако образующийся дейтерий тут же сгорает по реакции



Обе реакции имеют одинаковый кулоновский барьер, различие масс невелико, поэтому температурная зависимость обеих реакций отличается мало:  $e^{-15,6T_7^{-1/2}}$  для первой реакции и  $e^{-17,2T_7^{-1/2}}$  для второй. Но первая реакция включает слабое взаимодействие, поэтому ее скорость в  $3 \cdot 10^{16}$  раз меньше скорости второй реакции. В уравнении ( $n_D$  — концентрация дейтерия,  $n_H$  — концентрация водорода)

$$\frac{dn_D}{dt} = k_1 \rho n_H^2 - k_2 \rho n_H n_D$$

$k_2 = 3 \cdot 10^{16} k_1$  и в стационарном состоянии

$$\frac{n_D}{n_H} = \frac{n_D}{n_p} = 3 \cdot 10^{-17}$$

(независимо от плотности и практически независимо от температуры).

При  $\rho = 100 \text{ г/см}^3$  и  $T_7 = 1$   $k_2 \rho n_H = (6 \text{ сек})^{-1}$  — дейтерий выгорает мгновенно.

При температуре  $7 \cdot 10^8 \text{ К}$  и плотности водорода  $1 \text{ г/см}^3$  дейтерий все еще выгорает за время  $10^6 \text{ лет}$ . Поэтому в звездах выгорание дейтерия с превращением его в  $\text{He}^3$  в огромной степени преобладает над образованием дейтерия. Таким образом, обычно считается, что D не может синтезироваться в заметных количествах ни в каких процессах в галактиках, а также в сверхмассивных объектах, если таковые имеются. Дейтерий может только разрушаться, как это имеет место, например, на Солнце. Поэтому считается, что весь D надо объяснять его синтезом в начале расширения горячей Вселенной.

Однако недавно Хойл и Фаулер (1973) высказали предположение, что D может синтезироваться при движении полурелятивистских  $\alpha$ -частиц сквозь ионизованный водород. Такие процессы могут возникать, например, при взрывах сверхновых или сверхмассивных звезд. Авторы приходят к заключению, что даже весь D мог в принципе быть синтезирован в таких процессах.

Несколько замечаний о других легких элементах. В принципе весь  $\text{He}^3$  может быть синтезирован уже после образования галактик в процессах, происходящих в звездах. Наконец,  $\text{Li}^6$ ,  $\text{Be}^9$ ,  $\text{B}^{10}$ ,

а также, вероятно,  $B^{11}$  и существенная часть  $Li^7$  объясняются процессами взаимодействия космических лучей с веществом.

Итак, вероятно, только распространенность  $He^4$  и отчасти D может служить для оценки их содержания в дозвездном веществе, т. е. для сравнения теории синтеза элементов в горячей Вселенной с наблюдениями [обзор происхождения легких элементов см. Ривс (1974)].

Соответствующие массовые (а не по числу атомов, как в табл. IV) содержания  $He^4$  и D в звездном веществе [см. (7.6.1) и (7.6.2)] суть

$$Y \approx 0,3, \quad (7.6.3)$$

$$Z_D \approx 5 \cdot 10^{-5}. \quad (7.6.4)$$

Какие можно сделать из этого выводы?

Прежде всего, величина  $Y$  очень близка к тому, что предсказывает теория в простейшем, наиболее естественном случае без неизвестных частиц и без заметного лептонного заряда (см. предыдущий параграф). Надо подчеркнуть, что эта величина мало чувствительна к вариациям сегодняшнего значения средней плотности во Вселенной (см. рис. 32). Это совпадение теории и наблюдений служит веским аргументом в пользу правильности теории.

Значение  $Z_D \approx 5 \cdot 10^{-5}$  может получиться при синтезе D в начале космологического расширения только в том случае, если сегодняшняя плотность  $\rho_0$  имеет минимальное допустимое значение  $\rho_0 \approx 3 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$ , равное усредненной плотности материи, входящей в галактики. Если это так, то межгалактического газа с заметной плотностью (существенно большей плотности вещества в галактиках и достаточной, например, для того, чтобы замкнуть мир) быть не должно. Однако надо помнить, что значение  $Z_D$  для дозвездного вещества известно не очень надежно.

Полагая, что наблюдаемый дейтерий имеет космологическое происхождение, Ривс и др. (1973) делают важные выводы. Дело в том, что концентрация дейтерия сильно зависит от плотности вещества (см. рис. 32). Уменьшение концентрации D с ростом  $\rho$  связано с тем, что дейтерий сильнее выгорает (по реакции  $D+D$  в космологических условиях) при большей плотности.

Наблюденная концентрация дейтерия свидетельствует в пользу  $\Omega \approx 0,1$ . В настоящее время надежность этого утверждения невелика, однако направление исследований является чрезвычайно важным и многообещающим. В работе Хойла и Фаулера (1973) ставится вопрос о том, не может ли часть дейтерия (или весь дейтерий) образоваться при взрывах сверхновых звезд, в ударных волнах, распространяющихся в межзвездном газе. В этой работе есть слабые места: структура ударной волны рассматривается упрощенно, без учета плазменных эффектов, не рассматриваются другие ядерные реакции (кроме образования D).

Возражения против гипотезы Хойла и Фаулера даны в работе Эпштейна, Арнета и Шрамма (1974). Они показали, что при образовании D одновременно образовалось бы много Li, что противоречит наблюдениям.

Дискуссия не закончена, авторы данной книги надеются, что в итоге укрепится и уточнится теория космологического происхождения дейтерия.

В заключение отметим, что наблюдаемое в данное время обилие D [Рогерсон, Йорк (1973)], вероятно, даже значительно меньше, чем в дозвездном веществе, так как межзвездное вещество в значительной части должно было пройти через стадию звезд. По оценкам Трурана и Камерона (1971) отношение D/H уменьшилось в 6 раз по сравнению с первоначальным. В однородной модели такое D/H соответствует, как мы уже упоминали,  $\Omega < 1$ . Это, возможно, противоречит определениям  $\Omega$  (см. § 11 гл. 14). Возможное объяснение см. Зельдович (1975а).

Итак, можно сказать, что теория ядерного синтеза в космологии подтверждается наблюдениями, хотя последние еще слишком грубы, чтобы на их основе делать более тонкие выводы о параметрах космологической модели.

## Г Л А В А 8

### РАДИАЦИОННО-ДОМИНИРОВАННАЯ ПЛАЗМА И РЕЛИКТОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ \*)

#### § 1. Введение и общий обзор

Мы приступаем к описанию последних, наиболее близких к настоящему времени этапов эволюции Вселенной.

На первом этапе (РД — радиационно-доминированная плазма) пространство заполнено фотонами с небольшой примесью электронов, протонов и ядер гелия. Этот этап начинается после аннигиляции позитронов и заканчивается рекомбинацией водорода:  $e^- + p = H$ . На втором этапе пространство заполнено фотонами и нейтральными атомами  $H I$  и  $He I$ .

В соответствии с общим планом книги мы рассматриваем здесь эволюцию идеализированной однородной модели Вселенной, откладывая рассмотрение возмущений однородности до следующего раздела.

Насколько такое рассмотрение соответствует действительности? Ответ зависит как от предположений о возмущениях, так и от рассматриваемого момента времени.

В настоящее время заведомо возмущения отнюдь не малы и физическое состояние вещества не имеет ничего общего с предсказаниями строго однородной модели.

С другой стороны, свободный пробег фотонов реликтового излучения велик и поэтому РИ с хорошей точностью остается однородным и изотропным (как показывают наблюдения) даже при наличии сильных неоднородностей в распределении обычного вещества.

Поэтому влияние возмущений на РИ можно частично рассмотреть в рамках однородной модели.

Возмущения — например, вкрапления антивещества или пекулярные движения вещества на фоне общего расширения — можно рассматривать как источники энергии. Выделяется энергия аннигиляции, или кинетическая энергия упорядоченного движения превращается в тепло.

Эти источники энергии неоднородно распределены в пространстве, однако в силу быстрого перемешивания фотонов эта неодно-

---

\*) Эта глава написана совместно с Р. А. Сюняевым.



родность не существенна. Изменение спектра РИ можно рассматривать так, как будто выделение энергии происходит повсеместно, с одинаковой интенсивностью в каждой точке. Это приближение будет рассмотрено ниже. Итак, рассматриваем период  $t > 10^3$  сек,  $z < 10^8$ , после окончания ядерных реакций и аннигиляции  $e^+$ .

На первый взгляд этот период не интересен, потому что рассматривается однородная Вселенная. Нужно попросить читателя быть терпеливым и не уснуть на следующих двух страницах, после которых рассматриваются некоторые современные и интересные вопросы.

В совершенно однородной Вселенной этот период характеризуется монотонным падением температуры от  $\sim 3 \cdot 10^8$  °К до современных 2,7 °К. Эти температуры даются для излучения, спектр которого все время имеет равновесную планковскую форму.

Вначале ядра и электроны совсем не связаны друг с другом, но позднее из-за охлаждения происходит рекомбинация. В первом приближении она определяется термодинамическим равновесием.

Вместо того, чтобы брать время в качестве независимой переменной, мы предпочитаем пользоваться соответствующим красным смещением  $z$ , связанным с температурой по формуле  $T = (1+z) \cdot 2,7$  °К \*). Итак, при  $T \sim 16\,000$  °К будет следующий состав: 50% He III, 50% He II по отношению ко всему He и 100% H II по отношению ко всему водороду; при  $T \sim 7000$ ° уже будет 50% He II, 50% He I и 0% He III, 100% H II.

Наиболее интересен момент, когда  $T = 4000$  °К,  $z = 1500$ . В этот момент состав таков: 100% He I, 50% H II, 50% H I.

Все вычисления проводятся по хорошо известной формуле Саха (см. § 2 этой главы). Эта формула предсказывает быстрое исчезновение H II и свободных электронов. В равновесии при  $T = 3000$  °К,  $z = 1100$  остается 0,1% H II и свободных электронов и 99,9% нейтрального H I (и, конечно, 100% He I).

Поведение нейтрального газа сильно отличается от поведения ионизованного. Взаимодействие вещества и излучения поддерживается свободными электронами. Без них нейтральный газ практически не взаимодействует с излучением.

При расширении нейтральный газ охлаждается с показателем адиабаты  $5/3$  (вместо  $4/3$  для излучения), и для нашего времени простое вычисление дало бы температуру вещества, равную 0,003 °К при  $z = 0$  (сегодня), что явно не соответствует действительности. Вещество, входящее в звезды, имеет температуру выше  $10^6$  °К. Газ в галактиках частично входит в холодные облака с  $T \sim 100$  °К. Но в пространстве между галактиками заведомо нет холодного нейтрального водорода.

\*) Связь  $z$  и  $t$  зависит от величин плотности и постоянной Хаббла, см. § 4 гл. 3.

Рекомбинация очень важна для роста возмущений и для peculiarных движений вещества; до рекомбинации излучение влияло на эти процессы, сильно препятствуя им (эти вопросы полностью разобраны в следующих главах).

Форма спектра излучения имеет в настоящее время равновесный вид не столько из-за того, что процессы, ведущие к равновесию, сильны, а скорее из-за того, что в однородной Вселенной нет процессов, вызывающих отклонение от равновесия.

Есть только одно исключение, обсуждаемое далее, в § 2 этой главы, а именно процесс рекомбинации водорода.

Детальные вычисления показывают, что рекомбинация отстает от равновесия. Первое очевидное следствие — это конечная концентрация протонов и электронов — порядка  $10^{-2}$ — $10^{-3}\%$  — при низкой температуре, тогда как равновесная концентрация должна быть пренебрежимо малой. Положение подобно ситуации в теории аннигиляции кварков или антибарионов (см. предыдущий раздел). Менее очевидно заметное искажение спектра излучения из-за рекомбинации в высокочастотной области  $h\nu/kT > 30$ , что на сегодняшний день соответствует  $\nu > 1,5 \cdot 10^{12}$  гц,  $\lambda < 0,02$  см. Интенсивность излучения возрастает в несколько раз по сравнению с планковской при  $T = 2,7$  °К.

Это неожиданно, так как общая концентрация протонов и электронов в  $10^8$  раз меньше, чем концентрация фотонов. Однако с результатом можно примириться, если учесть, что относительно большое возрастание интенсивности излучения происходит только в той области спектра, которая содержит очень малую часть фотонов ( $10^{-10}$  от всех фотонов имеют  $h\nu > 30 kT$ ). Нет большой надежды, что это предсказание теории будет проверено наблюдениями, потому что есть много источников фонового излучения с  $h\nu/kT \gg 1$ ; главным образом это излучение ядер галактик и пыли (последнее является наиболее сильным в области  $\lambda < 300 \mu$ ). В этой же области много излучают квазары. Есть также и другие процессы, ведущие к искажению высокочастотной области спектра.

Теория совершенно однородной Вселенной ведет к картине холодного однородно распределенного атомарного водорода, поглощающего в равновесное излучение.

Эта скучная картина очень далека от наблюдаемого мира, состоящего из звезд, галактик, квазаров, с активными процессами ядерного горения, гравитационным взаимодействием, с крупномасштабными движениями и взрывами, ведущими к излучению радиоволн, света, рентгеновских и космических лучей.

Мы понимаем, что вся эта активность — это результат начальной неоднородности, ведущей к возникновению астрономических объектов. На ранних стадиях эволюции можно предполагать другие типы источников энергии: 1) неоднородное распределение антибарионов, ведущее к задержке аннигиляции, — аннигиляция

происходит неравновесно, или же 2) неоднородности общего распределения плотности, вызывающие звуковые и ударные волны.

В литературе рассматриваются вихревые (турбулентные) движения РД-плазмы; существуют, наконец, однородные анизотропные космологические модели; превращение их в изотропную модель также сопровождается выделением энергии, точнее, ростом энтропии.

Как отмечено вначале, применительно к воздействию на излучение большая часть рассматриваемых проблем может быть заключена в рамки однородной теории, даже если источники энергии возникают в результате неоднородностей.

Когда энергия рассеивается в окружающем пространстве (в форме излучения, космических лучей или ударных волн), она распределяется однородно за сравнительно короткое время. Превращения одного вида энергии в другие рассматриваются в рамках однородной теории.

Некоторые источники энергии вначале дают энергию свободным электронам — прямо или после ионизации нейтральных атомов. Теоретическая основа всего дальнейшего обсуждения — это взаимодействие плазмы с излучением. Мы имеем дело с очень разреженной плазмой. Излучение и поглощение фотонов вследствие  $p^+e^-$ - и  $\alpha e^-$ -столкновений менее важно, чем комптон-эффект — рассеяние фотонов на электронах. Поэтому § 3 этой главы посвящен изложению общей теории распределения по скоростям электронов, находящихся в произвольном поле излучения. Показано, что электроны имеют максвелловское распределение с определенной температурой. Потом мы рассмотрим кинетическое уравнение для фотонов, считая, что рассеяние происходит на максвелловских электронах. Эта теория развилась главным образом на основе работ Компанейца (1956) и Веймана (1965); см. § 4 и обзор Зельдовича (19756).

Переходя к реальной космологии, мы можем ожидать три различных ситуации.

1) Энергия выделяется очень рано ( $z > 10^8$ ), концентрация электронов (и позитронов) достаточно высока, чтобы создать новое равновесие, неотличимое от начального, начинающегося при  $z = \infty$ .

Такова ситуация с аннигиляцией  $e^+$  и  $e^-$ : энтропия излучения возрастает ( $S_\gamma$  после аннигиляции  $= S_\gamma + S_{e^+} + S_{e^-}$  до нее), но спектр остается планковским.

2) Энергия выделяется в интервале  $10^4 < z < 10^8$ . Вклад рассеяния достаточно большой, чтобы создать равновесие, но новые фотоны рождаются недостаточно быстро. Температура электронов всегда несколько больше, чем температура излучения. Ясно, что рассеяние перераспределяет фотоны по спектру, но не изменяет их концентрации. Следовательно, в этом случае достигается только ограниченное равновесие с данной плотностью квантов. Это ведет

(см. § 5) к бозе-эйнштейновскому спектру

$$F_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2 (e^{(h\nu + \mu)/kT} - 1)} \quad (8.1.1)$$

(заметим, что в экспоненте  $\mu > 0!$ ) вместо настоящего планковского спектра

$$F_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2 (e^{h\nu/kT} - 1)}. \quad (8.1.2)$$

Отклонения от формулы Планка наиболее резко выражены в рэлей-джинсовской части ( $h\nu < kT$ ). Эта область спектра реликтового излучения сегодня изучена лучше всего, и существующими методами такие отклонения не были обнаружены. Такой результат дает верхний предел на раннее выделение энергии.

3) Энергия выделяется при  $z < 1500$ , т. е. после рекомбинации. Газ быстро ионизируется вторично. Для ионизации водородной плазмы электронными ударами требуется температура электронов выше, чем  $10^4$  °К, что много больше температуры реликтового излучения в то время. Вследствие малой плотности электронов и малого числа рассеяний равновесие не успевает установиться. Кинетическое уравнение для фотонов предсказывает определенные искажения спектра, главным образом при  $h\nu > 2kT$ . Экспериментальные данные в этой части спектра долгое время были противоречивы. В настоящее время нет указаний на искажение, но точность еще мала. Эти вопросы обсуждаются в § 6.

Общее заключение §§ 4—6 сводится к следующему.

В первое время после открытия реликтового излучения вопрос не был изучен детально и полагали, что излучение должно быть в точности планковским. Теперь стало ясно, что отклонения от спектра (не найденные, впрочем, в настоящее время) не противоречат горячей модели Вселенной; скорее, они могут дать добавочную информацию о физических процессах и балансе энергии.

Физические условия в межгалактическом газе (и в газе вне скоплений галактик) представляют явный интерес. Исследование излучения этого газа необходимо для оценок плотности диффузного вещества во Вселенной. Этот вопрос рассмотрен в § 7.

Хорошо известно, что концентрация нейтрального газа (H I) пренебрежимо мала.

Для далеких квазаров ( $z > 2$ ) линия Ly- $\alpha$  приходится на область длин волн ( $\lambda = (1+z)\lambda_0 > 3600$  Å), проходящих свободно через атмосферу Земли. Изучение спектров квазаров говорит об отсутствии атомов нейтрального водорода — его концентрация оказывается  $< 10^{-11}$  см $^{-3}$ . С меньшей точностью те же выводы делаются по радиоастрономическим наблюдениям (линия H I с  $\lambda = 21$  см).

В теоретической работе Гинзбурга и Озерного (1965) показано, что космические лучи могут ионизовать и нагревать межгалакти-

ческий газ. Потери энергии газом и скорость рекомбинации при современных условиях ( $\rho < 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>) малы, так что полная ионизация очень вероятна.

Излучение полностью ионизованного водорода (и, возможно, также гелия), составляющего межгалактический газ, исследовалось во многих работах. Есть два неизвестных параметра — плотность газа и его температура. При высокой температуре преобладает рентгеновское излучение, а при более низкой — ультрафиолетовые эмиссионные линии. Непрерывное распределение газа в пространстве с учетом красного смещения делает линии эмиссии подобными широким полосам.

Есть также непрерывное радиоизлучение с плоским спектром, сильно отличающимся от планковского.

Детальный анализ наблюдений, проведенный Сюняевым (1969б), приводит к заключению, что плотность газа меньше, чем  $0,3 - 0,2\rho_c$  ( $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 2 \cdot 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup> при  $H_0 = 100$  км/сек·Мпс). В дальнейшем мы будем использовать уже известный нам параметр  $\Omega = \rho/\rho_c$ .

Эти выводы основываются на измерениях Курта ультрафиолетового фона на советских космических зондах и на анализе Сюняевым разреженного водородного гало Галактики, являющегося очень чувствительным детектором жесткого ультрафиолетового и мягкого рентгеновского излучения [см. Курт, Сюняев (1967а, б), Сюняев (1969б)].

В этом цикле работ был сделан очень принципиальный вывод о том, что Вселенная, вероятно, является открытой, гиперболической (см. гл. 2).

За истекшие годы исходный факт, касающийся оценки ионизирующего излучения, падающего на галактики, остался в силе. Возможно, что, прослеживая более тщательно гало в области малой плотности  $H\text{ I}$ , удастся даже снизить верхний предел потока излучения.

Однако конечный вывод, касающийся открытой Вселенной, в настоящее время под вопросом в связи с пересмотром значения постоянной Хаббла. В оригинальной работе Сюняева (1969б) расчеты проделаны применительно к  $H = 100$  км/сек·Мпс. Если же принять другое крайнее значение, встречающееся в литературе в настоящее время,  $H = 50$  км/сек·Мпс, то критическая плотность окажется в четыре раза меньше. Поэтому рассмотрение гало галактик не исключает плоскую модель Вселенной, в которой основная масса вещества находится в виде полностью ионизованного разреженного газа, более или менее равномерно распределенного между скоплениями галактик.

В следующем § 8 исследуется вопрос о периоде эволюции Вселенной после рекомбинации водорода и до появления активных

источников энергии, нагревающих газ и могущих ионизовать его. Этот период носит название периода нейтрального водорода. Однако различные гипотетические причины могут задержать рекомбинацию плазмы и наступление периода нейтрального водорода. Какие наблюдения могут помочь установить, был ли в действительности период нейтрального водорода? Оказывается, здесь чрезвычайно важно радиоизлучение ионизованного газа. Анализ этих вопросов и посвящен восьмой параграф.

Наконец, в последнем § 9 рассматривается вопрос, стоящий особняком, — о взаимодействии космических лучей с общим фоном излучения и, в первую очередь, с реликтовым излучением, составляющим подавляющую долю в усредненной плотности энергии.

Потери энергии космическими лучами ограничивают максимальную энергию частиц, составляющих космические лучи; это ограничение зависит от возраста частицы. В период 1969—1971 гг. ракетные опыты давали в 20—100 раз завышенную полную плотность реликтового излучения. Наблюдение космических лучей с энергией до  $10^{22}$  эв было известным противовесом ракетным опытам.

В настоящее время противоречие в значительной мере снято после опытов Лос-Аламосской группы и других наблюдений, см. § 3 гл. 5.

Другой вывод состоит в том, что космические лучи являются молодой составной частью Вселенной, они не могут иметь реликтовое происхождение. Сильный обмен энергией между заряженными частицами и фотонами в прошлом (ср. гл. 6) исключает большие энергии заряженных частиц в РД-плазме на ранних этапах, до рекомбинации.

## § 2. Рекомбинационное равновесие и кинетика

Запишем равновесную формулу Саха:

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{g_e g_i}{g_a} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{I}{kT}\right); \quad (8.2.1)$$

для  $p + e^- \rightleftharpoons H$  энергия ионизации  $I = 13,6$  эв, так что  $I/k = 158\,000$  °К; статистические веса сокращаются,  $\frac{g_e g_i}{g_a} = 1$ ; для указанной реакции заменяем индексы «i» на «p», «a» на H. Численно получаем

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = 2,4 \cdot 10^{15} T^{3/2} \exp\left(-\frac{158\,000}{T}\right). \quad (8.2.2)$$

Введем степень ионизации  $\alpha = \frac{n_p}{n_p + n_H}$ . Плотность выражается

через температуру формулой  $n = \text{const} \cdot T^3$ . На сегодняшний день  $n = 10^{-6} \Omega \text{ см}^{-3}$  ( $T = 2,7^\circ \text{K}$ ) и, следовательно,  $n = n_p + n_n = 5 \cdot 10^{-7} \Omega T^3$ . Таким образом,

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = 4,8 \cdot 10^{21} \Omega^{-1} T^{-3/2} \exp\left(-\frac{158000}{T}\right). \quad (8.2.3)$$

В табл. V даны значения равновесной  $\alpha(T)$  для  $\Omega=1$  и  $\Omega=1/40$ ,  $H_0=100 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$  (в пересчете на  $H=75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$  это соответствует  $\Omega=2$  и  $\Omega=1/20$ ).

Равновесная степень ионизации

ТАБЛИЦА V

| $T$                      | 5000   | 4500  | 4000 | 3500  | 000    | 2500              |
|--------------------------|--------|-------|------|-------|--------|-------------------|
| $\alpha (\Omega = 1)$    | 0,996  | 0,9   | 0,3  | 0,027 | 0,0007 | $10^{-6}$         |
| $\alpha (\Omega = 1/40)$ | 0,9999 | 0,997 | 0,85 | 0,17  | 0,004  | $8 \cdot 10^{-6}$ |

Процесс рекомбинации рассматривали Зельдович, Курт, Сюняев (1968), Пиблс (1968), Сюняев, Зельдович (1970a).

В космологических условиях основную роль в поддержании ионизационного равновесия играют процессы фотоионизации  $\text{H} + \gamma = \text{p} + \text{e}^-$  и обратный процесс рекомбинации с излучением фотона,  $\text{p} + \text{e}^- = \text{H} + \gamma$ . Формула Саха, естественно, не зависит от механизма установления равновесия, она имеет тот же вид, что и в плотном газе, где происходит ударная ионизация и рекомбинация тройным ударом,  $\text{H} + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{p} + \text{e}^- + \text{e}^-$ .

Однако в космологических условиях для выполнения формулы Саха необходимо, чтобы спектр излучения был равновесным, планковским.

Кинетика установления равновесия и приближение фактических концентраций к равновесию определяются двумя факторами: 1) скоростью ионизации и рекомбинации и 2) отклонениями спектра от равновесного, планковского. Расчет показывает, что при планковском спектре излучения равновесие, соответствующее табл. V, имеет место вплоть до  $\alpha \sim 3 \cdot 10^{-4}$  при  $\Omega=1$  и  $\alpha \sim 10^{-3}$  при  $\Omega=1/40$ ,  $H_0=100 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ .

Запишем условие поддержания равновесия. Обозначим через  $\omega$  вероятность рекомбинации ( $\text{сек}^{-1}$ ),  $\tau$  — время изменения в  $e$  раз равновесной концентрации,  $[e^-]$  — концентрацию электронов. Очевидно, что

$$\omega = a_{\text{полн}} [e^-] = a_{\text{полн}} \alpha n_{\text{p}+\text{H}},$$

где  $a_{\text{полн}}$  — усредненная по максвелловскому распределению константа рекомбинации,  $a_{\text{полн}} = 4 \cdot 10^{-13} \sqrt{\frac{10^4}{T}} \text{ см}^3/\text{сек}$  [см. Каплан, Пикельнер (1963)]. Далее,  $\tau = t \frac{3kT}{I}$ , где  $t$  — космологическое время, поскольку

$$\alpha^2 \sim e^{-I/kT}, \quad T \sim z \sim t^{-2/3},$$

$$\tau^{-1} = \frac{d \ln \alpha}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{I}{kT} \frac{d \ln T}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{I}{kT} \frac{1}{t}.$$

Условие поддержания равновесия имеет вид

$$\omega\tau = a_{\text{полн}} \alpha n_{\text{p}+\text{H}} t \frac{3kT}{I} = 1. \quad (8.2.4)$$

Однако в действительности еще раньше сам процесс рекомбинации заметно меняет спектр излучения как раз в той области (в коротковолновой его части), которая участвует в обратном процессе фотоионизации и влияет на концентрации  $[e^-]$  и  $[p]$ .

Общее число фотонов весьма велико, и, следовательно, изменение спектра может коснуться лишь малой части фотонов. Но при прямой рекомбинации на основной (1S) уровень и в самом деле испускаются фотоны с энергией больше  $I$ . Так как рекомбинация происходит при  $kT \ll I$ , то число таких фотонов в равновесии, пропорциональное  $\exp(-I/kT)$ , оказывается малым, меньше числа электронов и протонов при данной температуре.

Важная для процесса часть спектра действительно существенно изменится вследствие рекомбинации в предположении, что рекомбинация происходит прямо на основной уровень, и, в свою очередь, это изменение спектра вызовет сдвиг (увеличение) концентрации электронов и протонов.

Каскадная рекомбинация, в принципе, смягчает отклонения, если вместо одного большого фотона получается много маленьких.

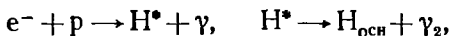
Однако в случае водорода радиационная рекомбинация неизбежно дает один фотон с энергией не меньше Ly- $\alpha$ , т. е. с энергией не меньше  $3/4 I$  на один образовавшийся атом в основном состоянии; поэтому эффект задержки рекомбинации остается.

Кинетика определяется тем, что рекомбинация на возбужденные уровни атома водорода  $\text{H}^*$ ,  $\text{H}^{**}$  происходит легко, так же как и ионизация возбужденных атомов. Равновесие  $\gamma + \text{H}^* \rightleftharpoons \text{p} + e^-$ ,  $\gamma + \text{H}^* \rightleftharpoons \text{H}^{**}$  поддерживается в течение долгого времени. Для этих процессов нужны фотоны с энергией  $I/4 = 3,5 \text{ эв}$  или меньше, которых достаточно много в рассматриваемый период времени. Избавление от энергии возбуждения, соответствующей линии Ly- $\alpha$  ( $3/4 I \approx 10,2 \text{ эв}$ ) или даже большей, — это трудный шаг.

Если рекомбинация происходит прямо на основной уровень  $e^- + \text{p} \rightarrow \text{H}_{\text{осн}} + \gamma$ , то фотоны имеют  $E > I$  и немедленно ионизуют



другие нейтральные атомы. Даже в каскадных процессах



где  $H_{\text{осн}}$  — атом водорода в основном состоянии, энергия  $E_{\gamma_2} \geq 3/4 I$  и, следовательно,  $\gamma_2$  поглощается атомом в основном состоянии, образуя при этом возбужденный  $H^*$ , который легко ионизуется основной частью излучения.

Для рассмотрения этого вопроса введем  $\beta$  — сумму концентраций свободных протонов, возбужденных атомов и энергичных \*) фотонов  $\gamma^*$ , нормированную на общую концентрацию протонов и атомов водорода:

$$\beta = \frac{p + H^* + \gamma^*}{p + H^* + H_{\text{осн}}} = \frac{p + H^* + \gamma^*}{N_{\text{полн}}}. \quad (8.2.5)$$

Между различными компонентами, из которых состоит  $\beta$ , поддерживается термодинамическое равновесие:

$$\left. \begin{aligned} p &= e^-, \quad \frac{pe^-}{H_{2p}} = \frac{1}{3} \cdot 2,4 \cdot 10^{15} T^{3/2} \exp\left(-\frac{39\,400}{T}\right), \\ \frac{H_n}{H_{2p}} &= \frac{g_n}{g_{2p}} \exp\left(-\frac{E_n - E_{2p}}{kT}\right). \end{aligned} \right\} \quad (8.2.6)$$

Здесь и далее под буквами, обозначающими частицы, подразумевается концентрация данных частиц, число 39 400 в экспоненте есть  $I/4k$ .  $\gamma^*$  в грубом приближении дается интегралом от функции Планка:

$$\gamma^* = \int_{E_2}^{\infty} p(\nu, T_{\text{эфф}}) d\nu, \quad (8.2.7)$$

где

$$p(\nu, T_{\text{эфф}}) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \left( \exp \frac{h\nu}{kT_{\text{эфф}}} - 1 \right)^{-1},$$

а  $T_{\text{эфф}}$  определяется \*\*) формулой

$$\frac{H_{2p}}{H_{\text{осн}}} = \frac{g_{2p}}{g_{\text{осн}}} \exp\left(-\frac{E_{2p} - E_{\text{осн}}}{kT_{\text{эфф}}}\right) = 3 \exp\left(-\frac{118\,000}{T_{\text{эфф}}}\right). \quad (8.2.8)$$

На поздних этапах  $T_{\text{эфф}}$  несколько больше, чем  $T$ . Важно, что в  $\beta$  свободные протоны являются наиболее обильными по сравнению с другими компонентами. Например, если мы зададимся полным

\*) Энергичным называем фотон с энергией большей или равной  $Ly-\alpha$ , т. е.  $3/4 I$ .

\*\*) Исключив  $T_{\text{эфф}}$  из формул, мы могли бы получить выражение типа закона действующих масс  $\frac{pe^-}{H_{\text{осн}}\gamma^*} = f_1(T)$  или  $\frac{H_{2p}}{H_{\text{осн}}\gamma^*} = f_2(T)$ .

равновесием,  $T_{эфф} = T$ , и выберем  $\Omega = 1$  для  $\alpha = 0,1$ , то получим следующие концентрации \*):

$$\begin{aligned} N_{осн} &= 2,5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}, & p = e^- &= 2,5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}, \\ \gamma_{полн} &= 10^{12} \text{ см}^{-3}, & \gamma^* &= 20 \text{ см}^{-3}, \\ N_{2p} &= 2 \cdot 10^{-9} \text{ см}^{-3}, & N^* &= \sum_{n=2}^{n_m} N_n = 3 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-3}. \end{aligned}$$

Формула (8.2.7) может считаться определением  $T_{эфф}$ , тогда (8.2.8) есть физическое утверждение: отношение  $N_{2p}/N_{осн}$  зависит от количества энергичных фотонов, но не от всего спектра. Заметим, что  $\gamma_{полн} \gg p$ ,  $e^-$ ,  $N_{осн}$ , но  $\gamma^* \ll p$ ,  $e^-$ ,  $N_{осн}$ . Следовательно, в последующем можно отождествить степень ионизации с переменной  $\beta$ ,  $\alpha \approx \beta$ .

В кинетических уравнениях для  $p/N_{полн}$ ,  $N^*/N_{полн}$ ,  $\gamma^*/N_{полн}$ , взятых отдельно друг от друга, есть большое число быстрых процессов, как, например,  $e^- + p \rightleftharpoons N^* + \gamma$ ,  $N_{2p} \rightleftharpoons N_{осн} + \gamma^*$  и другие, которые сокращаются, когда мы переходим к уравнению для суммы  $\beta$ , — это как раз и есть причина введения  $\beta$ . Эта сумма уменьшается только из-за двух процессов: 1) красное смещение из-за расширения Вселенной, преобразующее энергичные фотоны ( $\gamma^*$ ) в фотоны ( $\gamma$ ), которые уже не могут возбудить нормальный водород; 2) двухфотонный распад метастабильного  $2S$ -состояния [Киппер (1950), Спитцер, Гринштейн (1951)]. Скорость этого процесса  $W_{2S} \sim 8 \text{ сек}^{-1}$ .

Следовательно,

$$\frac{d\beta}{dt} = - \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| \frac{\gamma^*}{\Delta \nu H_{полн}} - W_{2S} \frac{N_{2S} - N_{2S, \text{равн}}}{N_{полн}}. \quad (8.2.9)$$

В этом уравнении  $N_{2S}$  и  $\gamma^*$  выражены через  $\beta$  с помощью условий равновесия;  $N_{2S, \text{равн}}$  равно  $N_{осн} \exp\left(-\frac{117000}{T}\right)$ . Введение  $W_{2S}$ ,  $N_{2S, \text{равн}}$  в правую часть уравнения описывает обратный процесс  $N_{осн} + 2\gamma \rightarrow N_{2S}$ .

Первый член в (8.2.9), описывающий красное смещение, относительно мал. Наконец, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= - W_{2S} \frac{(2\pi\hbar)^3}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} N_{полн} \exp\left(\frac{1}{4kT}\right) (\alpha^2 - \alpha_{\text{равн}}^2) = \\ &= -2 \cdot 10^{-21} \Omega T^{3/2} e^{39400/T} (\alpha^2 - \alpha_{\text{равн}}^2). \end{aligned} \quad (8.2.10)$$

Отличие  $\alpha$  и  $\alpha_{\text{равн}}$  мало при высокой температуре  $T > 4000^\circ \text{К}$  и  $\alpha > 0,5$ . Позднее  $\alpha \gg \alpha_{\text{равн}}$ , так что в скобках  $\alpha_{\text{равн}}$  можно пренебречь; в этот период имеет силу приближенная формула [Сюняев,

\*) При вычислении  $N^*$  мы находили верхний предел главного квантового числа по формуле Инглиса — Теллера  $n_m \approx 10^3 \text{ Н}^{-1/2}$ , учитывающей слияние уровней вследствие штарк-эффекта на водороде.

Зельдович (1970а), см. также Лонгейр, Сюняев (1969б)]

$$\alpha = \frac{1,6 \cdot 10^7}{T \Omega^{1/2}} \exp \left( -\frac{39\,400}{T} \right). \quad (8.2.11)$$

Наконец, при  $T < 2400$  °К уже больше нет равновесия между  $p$ ,  $e^-$  и  $H_{25}$ . Результаты собраны в табл. VI для  $\Omega=1$  (сравните с таблицей для  $\alpha_{\text{равн}}$ ). Вычисление дает  $\alpha \rightarrow 5 \cdot 10^{-5}$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow 0$ . При малых температурах ( $T < 200$  °К) с точки зрения термодинамики возможен процесс  $H I + e^- \rightarrow H^- + \gamma$  и дальше  $H^- + H \rightarrow H_2 + e^-$ . Даже при более высоких температурах (но все же  $< 1000$  °К) молекула  $H_2$  термодинамически устойчива. Но кинетика образования  $H^-$  и  $H_2$  столь медленна, что в однородной Вселенной при

ТАБЛИЦА VI  
Степень ионизации при уменьшении  $T$

| $T$                   | 5000  | 4500  | 4000 | 3500 | 3000   | 2500              | 2000      | 1500              |
|-----------------------|-------|-------|------|------|--------|-------------------|-----------|-------------------|
| $\alpha (\Omega = 1)$ | 0,996 | 0,924 | 0,40 | 0,07 | 0,0098 | $9 \cdot 10^{-4}$ | $10^{-4}$ | $5 \cdot 10^{-5}$ |

ее низких плотностях они не образуются. Этот вопрос снова возникнет позднее в связи с образованием галактик. Рекомбинация водорода ведет к избытку коротковолновых фотонов по отношению к планковскому спектру. В табл. VII даны некоторые точки (подробности см. в оригинальных работах, упомянутых выше).

ТАБЛИЦА VII  
Избыток коротковолновых фотонов по отношению к планковскому спектру

| $\lambda$                | 200                | 1500               |
|--------------------------|--------------------|--------------------|
| $h\nu/kT$                | 27                 | 36                 |
| $F_{\nu, \text{равн}}$   | $10^{-22}$         | $3 \cdot 10^{-26}$ |
| $F_{\nu, \text{вычисл}}$ | $2 \cdot 10^{-22}$ | $5 \cdot 10^{-24}$ |

Этот эффект относительно велик в области, где абсолютные потоки малы, т. е. мал как равновесный поток  $F_{\nu, \text{равн}}$ , так и вычисленный — принимая во внимание рекомбинацию — поток  $F_{\nu, \text{вычисл}}$ . Длины волн в таблице приведены в микронах, потоки излучения  $F_{\nu}$  — в  $\text{эрг/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер} \cdot \text{гц}$  для настоящего времени.

### § 3. Взаимодействие электронов и излучения в разреженной плазме

В идеальной строго однородной модели Вселенной рекомбинация происходит так, как это описано в предыдущем параграфе; при  $z < 600$ ,  $T < 1600$  °К наступает закалка, т. е. достигается остаточная степень ионизации  $\alpha_{\infty} \sim 10^{-4}$  или  $10^{-5}$  (в зависимости от  $\Omega$ ). При этом температура слабоионизованного газа следует за температурой излучения (благодаря обмену энергией при комптоновском рассеянии) вплоть до  $z \sim 150$ ,  $T \sim 400$  °К. В последующем теплообмен становится слишком слабым, газ остывает адиабатически,  $T \sim (1+z)^2$ , что даст к сегодняшнему дню  $z = 0$ ,  $T_0 = \frac{400}{150^2} = 2 \cdot 10^{-2}$  °К.

Эта идеализированная картина сильнее всего отличается от действительности. Значительная часть газа в действительности превращается в галактики, звезды, квазары и т. п. плотные тела. Оставшийся газ нагревается и ионизируется. Ионизованный газ при этом уже не находится в равновесии с реликтовым излучением, температура которого низка.

В данном параграфе рассматриваются процессы, ведущие к охлаждению плазмы, находящейся в поле более холодного излучения, и находится энергия, необходимая для поддержания плазмы при высокой температуре.

В частности, при каждой заданной температуре плазмы подсчитывается соответствующая стационарная степень ионизации газа. Формула Саха в данном случае неприменима, ионизация происходит за счет электронных ударов, а рекомбинация — с испусканием фотонов. Для  $10^5 < T < 10^6$  °К степень ионизации не зависит от плотности и описывается формулой Эльверта

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{q_{II}}{a_{\text{полн}}} \approx 10^{\frac{6kT}{I}} e^{-I/kT} = 6T e^{-158\,000/T} \text{ °К.}$$

Аналогичные формулы имеют место для He II и He III (с заменой 158 000 на 286 000 и 632 000 соответственно).

Эта формула дает практически полную ионизацию водорода при  $10^5$  и  $10^6$  °К, но малую ( $\sim 10^{-2}$ ) ионизацию при  $10^4$  °К, в отличие от формулы Саха.

Главными процессами в полностью ионизованной нерелятивистской плазме ( $4000 \text{ °К} < T < 10^6 \text{ °К}$ ), взаимодействующей с мягкими фотонами ( $h\nu < 0,1 \text{ МэВ}$ ), являются:

- 1) тормозное излучение и поглощение;
- 2) комптоновское рассеяние излучения;
- 3) рекомбинационное излучение и фотоионизация.

Скорость излучения энергии тормозными процессами  $e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma$  характеризуется дифференциальным сечением

излучения фотона в интервале энергии  $E, E+dE$ :

$$d\sigma = \frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6 g(E)}{m_e c^3 E_0 E} dE, \quad (8.3.1)$$

где  $g(E)=1$  для  $E \gg \frac{\sqrt{2} E_0^{3/2} h}{\pi Z e^2 \sqrt{m}}$ ,  $g(E)=0$  для  $E > E_0$ ,

$$g(E) = \ln \frac{2 \sqrt{2} E_0^{3/2} h}{1,78 \pi Z e^2 \sqrt{m} E} \quad \text{для} \quad E \ll \frac{\sqrt{2} E_0^{3/2} h}{\pi Z e^2 \sqrt{m}}.$$

Здесь  $E_0$  — энергия электрона,  $Z$  — заряд ядра. Число фотонов, рождающихся в единицу времени, пропорционально интегралу  $\int \frac{d\sigma}{dE} dE$ , который расходится из-за излучения множества мягких фотонов, возникающих при прохождении электрона вдалеке от протона. Однако в энергетический баланс входит среднее сечение, определяемое иной формулой. Большой смысл имеет величина

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{E_0} \int E \frac{d\sigma}{dE} dE = \frac{16\pi^2 Z^2 e^6 \bar{g}}{3 \sqrt{3} m_e c^3 E_0^2}. \quad (8.3.2)$$

Эта величина  $\bar{\sigma}$  определяет скорость потери энергии электронами с данной начальной энергией  $E_0$ . Для максвелловского распределения электронов и однозарядных ионов (протонов)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -n_e n_p \bar{\sigma} v E_0 = 1,43 \cdot 10^{-21} \bar{g} \sqrt{T} n_e n_p \text{ эрг/см}^3 \cdot \text{сек}, \quad (8.3.3)$$

где  $g \approx 0,8$ ,  $v$  — скорость.

Введем характерное время  $\tau$  потери энергии при тормозном [свободно-свободном (free-free по-английски)] излучении:

$$\tau_{ff} = \frac{3nkT}{d\varepsilon/dt} = 3,6 \cdot 10^{11} \frac{\sqrt{T}}{n_p} \text{ сек}. \quad (8.3.4)$$

Выше мы рассматривали только тормозное излучение; такой расчет относится к оптически тонкой плазме, т. е. к условиям, когда фотоны немедленно уходят из плазмы.

В противоположном случае, когда в рассматриваемом объеме излучение находится в равновесии, соответствующем температуре  $T_\gamma$ , а электроны холодные, преобладает тормозное поглощение, электроны нагреваются. Очевидно, что при равенстве температуры электронов и излучения имеет место равновесие и обмен энергией прекращается. С учетом тормозного поглощения приблизительно

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{T_\gamma - T_e}{\tau_{ff}}, \quad (8.3.5)$$

причем в выражение  $\tau_{ff}$  входит именно  $T_e$ , а не  $T_\gamma$ .

Перейдем к рассмотрению другого процесса, существенного при наличии фотонов. Комptonовское рассеяние фотонов имеет сечение, не зависящее от частоты (томсоновское сечение в нерелятивистском пределе):

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 6,65 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2. \quad (8.3.6)$$

Угловая зависимость — слабая и симметричная ( $\theta$  — угол рассеяния,  $\Omega$  — телесный угол):

$$d\sigma_T = \text{const} \cdot (1 + \cos^2 \theta) d\Omega. \quad (8.3.7)$$

Рассмотрим среднюю силу, действующую на покоящийся электрон в неизотропном поле излучения, т. е. с интенсивностью, зависящей от направления.

Излучение с направлением  $\mathbf{n}$  несет в этом направлении поток энергии  $\Phi \mathbf{n}$  и поток количества движения  $\Phi \mathbf{n}/c$ . Величина  $\Phi$  имеет размерность  $\text{эрг/см}^2 \cdot \text{сек}$ .

Рассеянное излучение, в силу симметрии закона рассеяния, имеет нулевое количество движения. Количество движения, отдаваемое в единицу времени электрону, т. е. сила, действующая на электрон, есть  $\mathbf{f} = \Phi \mathbf{n} \sigma_T / c$ . Переходя от отдельного пучка к распределению излучения по углам, получим \*)

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma_T}{c} \int \Phi(\mathbf{n}) \mathbf{n} d\Omega.$$

Это выражение можно сопоставить с выражением потока энергии в произвольном поле излучения

$$\mathbf{q} = \int \Phi(\mathbf{n}) \mathbf{n} d\Omega. \quad (8.3.8)$$

Следовательно,

$$\mathbf{f} = q \frac{\sigma_T}{c} \text{ **).} \quad (8.3.9)$$

Поставим теперь несколько иную задачу, характерную для космологии: изотропное, равновесное, покоящееся в среднем излучение (поток энергии равен нулю) заполняет пространство. В этом пространстве движется электрон со скоростью  $\mathbf{u}$ ,  $|\mathbf{u}| \ll c$ .

Какая сила действует на электрон?

Сведем задачу к предыдущей, переходя в систему координат, в которой электрон покоится.

\*) При этом мы меняем обозначения, под интегралом  $\Phi$  имеет размерность  $\text{эрг/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер}$ .

\*\*) Ниже будет показано, что сила содержит также слагаемое, пропорциональное квадрату потока излучения. Здесь рассматриваем малые  $q$  и этим эффектом пренебрегаем.

Поток энергии в лоренц-преобразованной системе координат равен  $q = -\frac{4}{3}\epsilon_\gamma u$ , где  $\epsilon_\gamma$  — плотность энергии излучения. Минус означает, что в системе покоя электрона поток направлен навстречу движению электрона в изотропном поле. Множитель  $\frac{4}{3}$  появляется потому, что к потоку энергии в собственном смысле  $\epsilon_\gamma u$  добавляется работа давления  $u p = -u \frac{1}{3} \epsilon_\gamma$ .

Этот множитель  $\frac{4}{3}$  появляется и при формальном лоренц-преобразовании тензора энергии-импульса  $T_{ik}$  по правилам тензорного анализа. Квадратом скорости  $u^2/c^2$  при этом пренебрегаем. Итак, средняя сила и соответствующее ускорение суть

$$f = m \frac{du}{dt} = q \frac{\sigma_T}{c} = -\frac{4}{3} \sigma_T \epsilon_\gamma \frac{u}{c}. \quad (8.3.10)$$

Можно ввести время затухания скорости; удобнее, однако, умножив обе части равенства на  $u$ , написать уравнение для кинетической энергии электрона.

Электроны, имеющие кинетическую энергию  $E$ , теряют ее из-за столкновений с фотонами со скоростью

$$\frac{dE}{dt} = -u m_e \frac{du}{dt} = -\frac{8}{3} E \frac{\sigma_T \epsilon_\gamma}{m_e c}. \quad (8.3.11)$$

Здесь  $\epsilon$  — плотность энергии поля излучения.

Характерное время потери энергии из-за комптоновского рассеяния есть

$$\tau_K = \frac{3m_e c}{8\sigma_T \epsilon}. \quad (8.3.12)$$

Закон убывания энергии, выписанный выше, неточен: энергия электрона падает не до нуля, а до тепловой энергии, соответствующей равенству температуры электронов и температуры излучения. Следовательно, точное уравнение имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\frac{3}{2} k T_\gamma - E}{\tau_K}. \quad (8.3.13)$$

Физическая причина заключается в том, что в поле излучения электрон испытывает хаотическую силу, увеличивающую его энергию при случайных актах рассеяния фотонов, наряду со средней тормозящей силой. Простая формула (8.3.13) относится к электрону в поле равновесного планковского излучения.

Наконец, роль третьего процесса (см. перечисление в начале § 3) — процесса рекомбинации и излучения линий велика при низких температурах. При  $T = 10^4$  °К излучение в рекомбинационном континууме и линиях приблизительно в 100 раз сильнее, чем истинное тормозное.

ТАБЛИЦА VIII

Характерные времена основных процессов в ионизованной космологической плазме

| $z$                                     | 0                         | 30                                   | 1000                                 |
|---|---------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $\epsilon_\gamma$ , эрг/см <sup>3</sup> | $4 \cdot 10^{-13}$        | $4 \cdot 10^{-7}$                    | 0,4                                  |
| $n_e$ , см <sup>-3</sup>                | $6 \cdot 10^{-6}$         | 0,2                                  | $6 \cdot 10^3$                       |
| $t$ , сек                               | $4 \cdot 10^{17}$         | $2,4 \cdot 10^{15}$                  | $1,3 \cdot 10^{13}$                  |
| $T = 10^5$ °K                           | $\tau_k$                  | $4 \cdot 10^{13}$                    | $4 \cdot 10^7$                       |
|   | $\tau_{ff}$               | $6 \cdot 10^{14}$                    | $2 \cdot 10^{10}$                    |
|   | $\tau_{fb}(\tau_{fb}(H))$ | $7 \cdot 10^{13}(2 \cdot 10^{14})$   | $2 \cdot 10^9(6 \cdot 10^9)$         |
|   | $\tau_{bb}(\tau_{bb}(H))$ | $10^{13}(2 \cdot 10^{14})$           | $4 \cdot 10^8(7 \cdot 10^9)$         |
|   | $\tau_{ee}$               | $1,5 \cdot 10^6$                     | 50                                   |
| $T = 10^6$ °K                           | $\tau_k$                  | $4 \cdot 10^{13}$                    | $4 \cdot 10^7$                       |
|   | $\tau_{ff}$               | $6 \cdot 10^{19}$                    | $6 \cdot 10^{10}$                    |
|   | $\tau_{fb}(\tau_{fb}(H))$ | $8 \cdot 10^{19}(2 \cdot 10^{20})$   | $8 \cdot 10^{10}(2,5 \cdot 10^{11})$ |
|   | $\tau_{bb}(\tau_{bb}(H))$ | $2 \cdot 10^{20}(1,5 \cdot 10^{21})$ | $2 \cdot 10^{11}(1,5 \cdot 10^{12})$ |
|   | $\tau_{ee}$               | $1,5 \cdot 10^{12}$                  | $1,5 \cdot 10^3$                     |

Время обмена энергией между электронами дается формулой

$$\tau_{ee} = (\sigma_{ee} n_e v)^{-1} = n_e^{-1} \sqrt{\frac{m}{kT_e}} \left( \frac{e^2}{kT_e} \right)^{-2} (\pi \ln \Lambda)^{-1}; \quad (8.3.14)$$

$\ln \Lambda$  учитывает далекие столкновения [см. Спитцер (1962)] и имеет величину порядка 30.

Для примера сравним  $\tau_{ff}$ ,  $\tau_k$  и  $\tau_{ee}$  при  $\Omega=1$  и разных  $z$ ; рассмотрено вещество, содержащее 30% He<sup>4</sup> по весу (табл. VIII). При этом  $\tau_k$  не зависит от  $\Omega$ , тогда как  $\tau_{ff}$  и  $\tau_{ee}$  обратно пропорциональны  $\Omega$ .

В табл. VIII разные столбцы отвечают разным  $z$ . В первых трех строчках приведены:  $\epsilon_\gamma$  — плотность энергии реликтового излучения,  $n_e$  — плотность электронов для  $\Omega=1$ ,  $H_0=75$  км/сек·Мпс и при полной ионизации,  $t$  — время от начала космологического расширения. Далее приводятся характерные времена в секундах для различных значений температуры электронов  $T_e=10^6$  и  $10^5$  °K. Помимо  $\tau_k$ ,  $\tau_{ff}$  и  $\tau_{ee}$  приведены также характерные времена свободносвязанных  $\tau_{fb}$  и связанно-связанных  $\tau_{bb}$  переходов. В скобках даны соответствующие времена для чисто водородной (без гелия) плазмы.

Таблица показывает, что электронные столкновения наиболее быстрые. Обмен энергией между электронами ведет к максвелловскому распределению по энергиям отдельных электронов. Но эти столкновения не меняют общей энергии электронов и, следова-



тельно, параметр максвелловского распределения — температура электронов — определяется другими процессами. Потери энергии были вычислены выше для того, чтобы дать порядок величины времени релаксации электронов.

Обратно, по величине времени релаксации можно найти величину подкачки энергии, необходимую для поддержания высокой температуры электронов (во много раз превышающей температуру излучения):

$$Q \text{ эрг/см}^3 = \epsilon_p \sum \frac{1}{\tau} = 3nkT \left( \frac{1}{\tau_k} + \frac{1}{\tau_{ff}} + \frac{1}{\tau_{fb}} + \frac{1}{\tau_{bb}} + \frac{1}{t} \right).$$

В эту формулу не входит  $\tau_{ee}$ , поскольку взаимодействие электронов между собой перераспределяет их энергию, но не меняет ее. С другой стороны, введено  $1/t$  (точнее, надо ввести  $2H^{-1}$ , где  $H$  — мгновенное значение хаббловской константы), так как космологическое расширение также снижает температуру плазмы, поскольку оно адиабатическое.

Итак, главным в каждом случае является тот процесс, для которого  $\tau$  минимально. При отсутствии источников энергии температура плазмы падает не до нуля, а до температуры излучения  $T_\gamma$ .

Для случаев, представленных в таблице, при этом произойдет рекомбинация и изменятся все параметры. Однако вопрос о стационарной температуре электронов представляет принципиальный интерес, особенно для более высокой температуры излучения. Если поле излучения равновесное, планковское с температурой  $\theta$ , то стационарная температура  $T_{ст}$  тождественно равна  $\theta$ .

В начале развития квантовой теории гиганты, подобные Эйнштейну, доказывали, что излучение как раз поддерживает нерелятивистские частицы в броуновском движении с соответствующей кинетической энергией \*). Теперь мы считаем это само собой разумеющимся и интересуемся более сложной ситуацией: какова будет электронная температура в произвольном (не планковском) поле излучения? Ответ для тормозных процессов дается легко. Обозначим спектральный объемный коэффициент излучения плазмы через  $Q(\nu, T_e)$ . Определяя  $Q$ , предполагаем, что плазма оптически тонкая и никакая радиация извне не приходит. Если теперь плазма находится в поле излучения, характеризуемого спектральной интенсивностью  $F_\nu \left( \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер} \cdot \text{Гц}} \right)$ , то

$$\frac{d\epsilon}{dt} = - \int Q(\nu, T_e) \left[ 1 - \frac{F(\nu)}{F_{\text{равн}}(\nu, T_e)} \right] d\nu, \quad (8.3.15)$$

\*) Тем самым подтверждалась квантовая картина и наличие импульса у фотона.

где  $F_{\text{равн}}(\nu, T_e)$  — равновесный поток, соответствующий электронной температуре  $T_e$ :

$$F_{\text{равн}}(\nu, T_e) = \frac{2h\nu^3}{c^2} (e^{h\nu/kT_e} - 1)^{-1}, \quad (8.3.16)$$

и электронная температура определяется из условия  $\frac{de}{dt} = 0$ .

Ясно, что если  $F_\nu = F_{\text{равн}}(\nu, \theta)$ , то  $T_e = \theta$ , независимо от детального вида  $Q$ , благодаря тому, что  $1 - \frac{F(\theta)}{F(T_e)} \equiv 0$  при  $T_e = \theta$ . Если  $F \neq F_{\text{равн}}$ , ответ должен быть найден численно. Важно, что на малых частотах  $F_{\text{равн}} \sim \nu^2$ ,  $Q \sim \lg\left(\frac{kT}{h\nu}\right)$  и, следовательно,  $F(\nu)$  входит в интервал с весом  $\nu^{-2} \lg\left(\frac{kT}{h\nu}\right)$ , который велик на малых частотах; значит, именно интенсивность на малых частотах определяет электронную температуру. Проблема легко обобщается на случай внешнего источника энергии (космические лучи, плазменные колебания), который должен быть расположен в правой части уравнения для  $\frac{de}{dt}$ .

В общем случае неравновесного  $F(\nu)$  тормозные процессы сами по себе не должны вести к максвелловскому распределению электронов, но столкновения электронов друг с другом «максвеллизуют» их. Проблема взаимодействия электронов с излучением из-за рассеяния (в пределе при низкой плотности  $n_e$ ) более сложна. Она была рассмотрена Драйцером (1964). Ответ для электронной температуры в неравновесном (но изотропном!) поле излучения был дан полностью Пейро (1968), Зельдовичем и Левичем (1970). Она имеет вид

$$T_e = \frac{c^2}{8k} \frac{\int F(\nu) \left[ F(\nu) + \frac{2h\nu^3}{c^2} \right] \frac{d\nu}{\nu^2}}{\int F(\nu) d\nu}. \quad (8.3.17)$$

Формула лучше выглядит, если вместо потока ввести число заполнения фотонами фазового пространства:

$$kT_e = \frac{h^2 \int n(\nu) [n(\nu) + 1] \nu^4 d\nu}{4h \int n(\nu) \nu^3 d\nu}. \quad (8.3.18)$$

Знаменатель пропорционален  $\epsilon$  — общей плотности энергии излучения, потому что он характеризует комптоновские потери энергии у электрона. Интеграл в числителе — это скорость приобретения энергии. Выражение для набора энергии появится еще раз в следующем параграфе. Отметим необычную форму числителя. Он содержит  $F^2/\nu^3$ . Следовательно, если  $F \sim \nu^\alpha$ ,  $\alpha < 0,5$ , то интеграл

расходится; малый поток энергии на длинных волнах очень важен для электронов, даже если этот поток пренебрежимо мал в полном потоке энергии. Из второй формулы можно видеть, что на длинных волнах (малых  $\nu$ ) важен индуцированный комптон-эффект. Индуцированные процессы появляются потому, что фотоны являются бозе-частицами, и вероятность перехода в определенное состояние зависит, как  $n+1$ , от числа  $n$  фотонов, которые уже есть в этом состоянии \*).

Классическая модель индуцированного рассеяния, нагревающего электроны, состоит в том, что электромагнитная волна (1) заставляет электрон колебаться:  $m\ddot{x} = e\mathcal{E}_1 e^{i\omega t}$ ,  $\dot{x} = -i \frac{e}{m\omega} \mathcal{E}_1$ . Другая волна (2) действует на электрон с силой Лоренца благодаря своему магнитному полю:  $f = \frac{e}{c} [\dot{x}, \mathcal{H}_2] = \frac{e^2}{cm\omega} [\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_2]$ . Важно, что  $\mathcal{H}_1$  — магнитное поле первой волны — имеет ту же фазу, как и  $\mathcal{E}_1$ , так что  $\dot{x}$  сдвинут на  $90^\circ$  по отношению к  $\mathcal{H}_1$ ,  $[\nu, \mathcal{H}_1] = 0$ . В волнах с одним направлением распространения эффекта нет. Нужно, чтобы вторая волна имела другое направление. В хаотическом поле квадраты отдельных толчков силы складываются, так что чистый набор энергии пропорционален  $\frac{\mathcal{E}_1^2 \mathcal{H}_2^2}{\omega^2}$ , что дает для изотропного излучения  $F \sim \mathcal{E}^2 \sim \mathcal{H}^2$ . Слагаемое с  $\hbar$  исчезает при классическом рассмотрении. Для планковского спектра снова получается тождество  $T_e = T_\gamma$ . Важный вывод состоит в том, что комптоновское рассеяние ведет к максвелловскому распределению даже без электронных столкновений,  $e + e' = e'' + e'''$ . Очевидно, что электронные столкновения ничему не повредят. Комптоновский нагрев электронов важен не только в космологии, но также и для поведения плазмы в окрестности квазаров и пульсаров [подробности см. у Левича и Сюняева (1971)]; влияние индуцированного комптоновского рассеяния на спектры радиоисточников рассматривается в работе Сюняева (1971).

Из сравнения характерных времен  $\tau_k$ ,  $\tau_{ff}$  с космологическим временем  $t$  (см. табл. VIII) мы видим, что комптоновское рассеяние важно для электронов при  $z > 10$ . После этого момента электроны уже практически не взаимодействуют с излучением; их температура с этого времени и в настоящее время зависит от нагрева ударными волнами и космическими лучами и охлаждения из-за адиабатического расширения, связанного с общим расширением Вселенной. Последние процессы рассмотрены Гинзбургом и Озерным (1965). Характерное время адиабатического расширения есть  $t_{\text{косм}}$  (оно приведено в табл. VIII в третьей строчке). При малых  $z$  это время наименьшее, что и означает, что процесс стал главным.

\*) В равновесном нерелятивистском случае для планковского спектра и  $kT_\gamma \ll mc^2$  индуцированные процессы малы.

## § 4. Влияние электронов на спектр излучения

Из предыдущего параграфа мы видим, что комптоновское рассеяние — наиболее важный процесс для электронов при  $z \geq 1000$ , как раз там, где плазма полностью ионизована. Очевидно, он также важен и для фотонов.

В первом приближении рассеяние на покоящемся электроне не меняет частоты фотона, но более точно  $\nu'$  (частота после рассеяния) немного меньше, чем  $\nu$ ; среднее понижение частоты равно

$\frac{\nu' - \nu}{\nu} = -\frac{h\nu}{mc^2}$ . Если же электрон движется вначале со скоростью  $u$ , то эффект Доплера заставляет частоту рассеиваемого фотона меняться в пределах  $\frac{|\nu' - \nu|}{\nu} \leq \frac{v}{c}$ . Рассеяние на движущихся

электронах ведет к диффузии фотонов по оси частот. Принимая во внимание точное распределение по углам и индуцированное рассеяние, можно получить следующее уравнение для спектра фотонов, взаимодействующих с максвелловскими электронами (фотоны характеризуются числом заполнения  $n(\nu, t)$ , т. е. распределение их по направлениям предполагается изотропным):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\sigma_T n_e}{m_e c} \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \nu^4 \left[ hn(n+1) + kT_e \frac{\partial n}{\partial \nu} \right]. \quad (8.4.1)$$

Мы исследуем некоторые свойства этого уравнения, выведенного Компанейцем (1956) и Вейманом (1965) и рассматриваемого в ряде статей Зельдовича и Сюняева (1969), Сюняева и Зельдовича (1969, 1970б, в), Илларионова, Сюняева (1974 а, б). Уравнение можно переписать в безразмерных переменных  $x' = \frac{h\nu}{kT_e}$ ,  $dy = \sigma_T n_e \frac{kT_e}{m_e c^2} c dt$  [ниже предполагается, что  $T_e$  не зависит от времени, обобщение на  $T_e = T_e(t)$  производится легко]:

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x'^2} \frac{\partial}{\partial x'} x'^4 \left[ n(n+1) + \frac{\partial n}{\partial x'} \right]. \quad (8.4.2)$$

Легко проверить, что планковское равновесное  $n$ , т. е.  $n = (e^{x'} - 1)^{-1}$ , дает  $\frac{\partial n}{\partial y} = 0$ . Но то же самое будет и в случае бозе-эйнштейновского

распределения:  $n = \frac{1}{e^{x' + \mu/kT} - 1}$ .

Другое достаточно очевидное свойство — это сохранение общего числа фотонов:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \int n \nu^3 d\nu = \int \frac{dn}{dt} \nu^3 d\nu = 0. \quad (8.4.3)$$

Скорость изменения плотности энергии излучения дается формулой

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d}{dt} ah \int n \nu^3 d\nu = \frac{4kT_e}{m_e c} \sigma_T n_e ah \int n \nu^3 d\nu - \frac{\sigma_T n_e}{m_e c} ah^2 \int n(n+1) \nu^4 d\nu, \quad (8.4.4)$$

где  $a = \frac{8\pi}{c^3}$ . Увеличение энергии излучения в единице объема равно энергии, отдаваемой электронами в этом объеме. Если электроны не имеют других источников энергии, то их температура стационарна, только если  $\frac{de}{dt} = 0$ . Это нам снова дает формулу (8.3.18).

Кинетическое уравнение для распределения фотонов было написано без учета расширения. Расширение учитывается заменой  $\frac{\partial n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + H\nu \frac{\partial n}{\partial \nu}$  (где  $H$  — постоянная Хаббла), в левой части уравнения. Без комптоновского рассеяния  $n$  сохраняется для «краснеющей» при расширении частоты,  $\frac{d\nu}{dt} = -H\nu$ . Простое преобразование дает другой путь для учета расширения. Мы введем идеальную температуру излучения, зависящую от времени по закону красного смещения:  $T_{\text{ов}}(t) = T_0(1+z)$ , где  $T_0$  — сегодняшняя температура,  $z=0$ ,  $T_0 = T_{\text{ов}}(0) = 2,7^\circ\text{К}$ . Определим  $x = \frac{h\nu}{kT_{\text{ов}}}$ . Уравнение для  $n(x, t)$  будет

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\sigma_T n_e k T_{\text{ов}}(t)}{m_e c} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left[ n(n+1) + \frac{T_e}{T_{\text{ов}}} \frac{\partial n}{\partial x} \right]. \quad (8.4.5)$$

Если  $T_e = T_{\text{ов}}$ , тогда равновесное  $n = \frac{1}{e^x - 1}$  оказывается точным решением, хотя  $n$ , как функция от  $\nu$  и  $t$ , зависит от времени потому, что  $T_{\text{ов}}$  зависит от времени. Это решение самосогласованно, так как  $T_e = T_{\text{ов}}$  — это также решение для температуры электронов, если никакой энергии в системе не выделяется.

Теперь мы обсудим вопрос о выделении энергии на разных этапах.

## § 5. Раннее выделение энергии и квазиравновесие

Представим себе какие-то локальные мелкомасштабные возмущения идеальной, однородной, изотропной космологической модели на стадии радиационно-доминированной плазмы. Примерами таких возмущений могут быть акустические волны, распространяющиеся по РД-плазме, или островки плазмы, состоящей из антивещества и фотонов, окруженные нормальной плазмой из вещества и фотонов. Эти возмущения исчезают: акустические волны затухают за счет вязкости, антивещество аннигилирует. Исчезновение возмущений сопровождается выделением энергии. Плотность энергии РД-плазмы, т. е. величина  $\epsilon_\gamma$ , увеличивается.

В замкнутом теплонепроницаемом сосуде постоянного объема конечный результат был бы очевиден. Возникло бы новое термодинамическое равновесие, соответствующее новому, увеличенному значению  $\epsilon_\gamma$ .

Однако в эволюционирующем, расширяющемся мире равновесие может и не успеть установиться. В момент рекомбинации взаимодействие излучения с электронами прекращается, между собой фотоны практически не взаимодействуют, так что замораживается то состояние излучения и тот спектр, которые получаются к моменту рекомбинации. Принято говорить, что происходит закалка спектра. Необходимо проследить последовательность изменения спектра с течением времени после выделения энергии. В зависимости от того, в какой момент произошло выделение энергии, момент закалики спектра застанет излучение на той или иной стадии. Отметим, что само по себе общее космологическое расширение меняет спектр, оставляя его форму, т. е. оставляет неравновесный спектр неравновесным. Подробно это было рассмотрено ранее (см. § 11 гл. 3). Однако вследствие расширения время взаимодействия излучения и электронов становится конечным. В теорию входят интегралы вида  $\int n_e dt$ ,  $\int n_e T_e dt$ ,  $\int n_e^2(T) dt$ . Так как  $n_e \sim t^{-3/2}$ ,  $T_e \sim t^{-1/2}$  (см. § 2 гл. 6), значения этих интегралов зависят наиболее сильно от нижнего предела интегрирования, т. е. от момента выделения энергии (или соответствующего красного смещения  $z$ ), а не от верхнего предела — момента рекомбинации.

Итак, рассмотрим последовательность событий во время и после выделения энергии. Предполагаем, что до выделения энергии спектр был равновесным.

Конечным результатом аннигиляции являются быстрые электроны. Рассеяние равновесного излучения на таких электронах дает смещенный (чаще вверх, чем вниз, по температуре) планковский спектр. Получающийся при этом результирующий спектр можно представить как суперпозицию планковских спектров с различными температурами:

$$F(\nu) = \int P(\nu, T) R(T) dT, \quad (8.5.1)$$

где  $P(\nu, T)$  — истинно равновесный планковский спектр, соответствующий температуре  $T$ ,  $R$  — взвешивающая функция [Зельдович, Илларионов, Сюняев (1972)].

Рассмотрим акустические волны. В РД-плазме происходит движение, и градиент скорости не мал, на макроскопическом языке вязкость плазмы вызывает затухание движения. С микроскопической точки зрения наблюдатель, «оседлавший» какой-нибудь электрон плазмы, «видит» в различных направлениях излучение с различным — синим или красным — смещением, т. е. видит излучение разной температуры.

Рассеяние на электронах перемешивает излучение, приходящее под разными углами.

После затухания макроскопического движения излучение становится изотропным, спектр его не зависит от направления. Однако

этот спектр оказывается не равновесным, а снова описывается суперпозицией планковских спектров [см. формулу (8.5.1)].

Такой вид спектра является универсальным для первой стадии после выделения энергии. Время, необходимое для получения такого спектра, есть время, необходимое для томсоновского рассеяния, порядка  $\tau_{\text{тс}} = \frac{1}{(\sigma T^4 n_e c)}$ , поскольку каждый акт рассеяния меняет направление фотона в среднем на  $\pi/2$ , уменьшает анизотропию вдвое.

Мы полагаем, что до выделения энергии было планковское распределение с температурой  $T_1$ . Это соответствует формально

$$R(T) = \delta(T - T_1), \quad \text{т. е.} \quad \int R(T) dT = 1.$$

При выделении энергии сохраняется плотность фотонов

$$N = a \int T^3 R(T) dT, \quad (8.5.2)$$

где

$$a = \frac{8\pi}{c^3} \left(\frac{k}{h}\right)^3 \pi^2 \cdot 0,244, \quad (8.5.3)$$

а также сохраняется величина

$$\int R(T) dT = 1.$$

Плотность энергии выражается величиной

$$\epsilon_\gamma = \sigma \int T^4 R(T) dT, \quad \sigma = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15}. \quad (8.5.4)$$

Спектральная плотность энергии излучения в области низкой частоты дается формулой Рэля — Джинса:

$$\epsilon_\gamma(\nu) = f \nu^2 T_{\text{р.-дж}}, \quad f = \frac{8\pi k}{c^3}, \quad (8.5.5)$$

где  $T_{\text{р.-дж}} = \int T R(T) dT$ .

Можно показать, что при сохранении  $N$  и  $\int R(T) dT$  увеличение  $\epsilon_\gamma$  сопровождается понижением  $T_{\text{р.-дж}}$ : выделение энергии сопровождается перекачкой фотонов из низкочастотной в высокочастотную область. При этом, если

$$\epsilon'_\gamma = \epsilon_\gamma (1 + \delta) = \sigma T_1^4 (1 + \delta),$$

то

$$T_{\text{р.-дж}} = T_1 \left(1 - \frac{\delta}{2}\right); \quad (8.5.6)$$

здесь  $\delta$  — относительная величина выделившейся энергии. Получающийся спектр показан на рис. 36 пунктиром. Сплошная линия представляет собой планковский спектр, соответствующий  $T_1$ , приведенный для сравнения.

С учетом расширения в формулы вместо  $T_1$  нужно подставить  $T_1 \frac{1+z}{1+z_0}$ , т. е. ту температуру, которая к данному моменту (данному  $z$ ) получилась бы в невозмущенном случае.

Изменение спектра, показанное на рис. 36, очень трудно обнаружить — для этого необходимы точные измерения в двух областях — рэлей-джинсовской ( $h\nu < kT$ ) и вблизи максимума ( $h\nu > 2kT$ ). Однако дальнейшие процессы, происходящие в РД-плазме, дают гораздо более яркие изменения спектра.

Дело в том, что пунктирный спектр не является термодинамически равновесным. Электроны, входящие в состав РД-плазмы, чувствуют эту неравновесность лучше, чем наши спектральные приборы. По формулам предыдущего параграфа можно рассчитать ту температуру, которую приобретут электроны, взаимодействующие с излучением, спектр которого задан суперпозицией планковских функций.

В хорошем приближении

$$T_e \approx \frac{\int T^3 R dT}{\int T^4 R dT}. \quad (8.5.7)$$

Расчет дает (для малого  $\delta$ )

$$T_e \approx T_1 \left(1 + \frac{3\delta}{2}\right) \approx T_{p. \text{дж}} (1 + 2\delta). \quad (8.5.8)$$

Электроны горячее, чем низкочастотное излучение (левее звездочки на рис. 36), и холоднее, чем высокочастотное излучение. Яркостная температура излучения вдоль пунктирной кривой не постоянна, она растет вправо. Происходят два типа процессов:

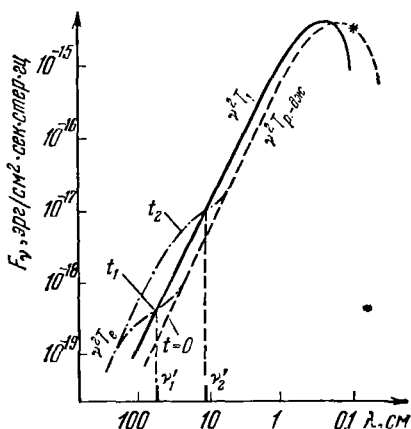


Рис. 36. Эволюция во времени  $0 < t_1 < t_2$  спектра излучения (вначале, при  $t=0$ , спектр был суперпозицией планковских функций) за счет тормозного излучения плазмы с температурой  $T_e > T_{p. \text{дж}}$ . Для сравнения приведен планковский спектр излучения с температурой  $T_1$  до выделения энергии.



а) тормозные; б) изменение частоты при рассеянии. Тормозное излучение и поглощение в РД-плазме интегрально (по всему спектру) мало, однако в области низких частот его роль возрастает. В самом деле, спектр тормозного излучения плоский (не зависит

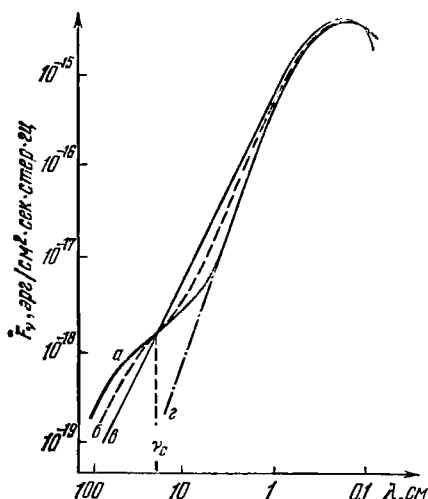


Рис. 37. «Замывание» бозе-эйнштейновских искажений спектра излучения вследствие совместного действия комптоновских и тормозных процессов. Химический потенциал излучения падает вдоль последовательности кривых  $a \rightarrow b \rightarrow c$  ( $\mu_a > \mu_b > \mu_c$ ). Кривая  $b$  соответствует конечному планковскому равновесному спектру. Кривая  $c$  — бозе-эйнштейновский спектр, построенный с учетом только комптоновских процессов и соответствующий тому же химическому потенциалу, что и кривая  $a$ .

от  $\nu$ ), а рэлей-джинсовский спектр  $F_\nu \sim \nu^2$ , поэтому время достижения равновесия пропорционально  $\nu^2$ . Всегда есть такая область  $\nu < \nu'$ , в которой достигается равновесие, соответствующее  $T_e$ , это  $\nu$  растет с течением времени. На рис. 36 схематически показана эволюция спектра за счет тормозных процессов. Возникает вторая рэлей-джинсовская область при  $\nu < \nu'_2$ . Ступенька, на которой происходит переход, с течением времени передвигается вправо (от  $\nu'_1$  к  $\nu'_2$ ). Малость тормозного излучения проявляется в том, что  $\nu'$  никогда не достигает максимума планковской кривой, всегда  $h\nu' \ll kT$ . Всегда остается существенная область спектра, в которой рассеяние, с учетом изменения частоты фотонов (а не тормозные процессы), является главным.

В предельном случае, полностью пренебрегая тормозными процессами, поставим задачу о равновесном спектре излучения при фиксированной плотности фотонов. Ответ дается обобщенной формулой Бозе — Эйнштейна

на с положительным химическим потенциалом:

$$n = \left[ \exp \frac{(h\nu + \mu)}{kT_e} - 1 \right]^{-1}. \quad (8.5.9)$$

Легко убедиться, подставляя это  $n$  в уравнение (8.4.1), что  $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ , т. е. действительно достигнуто равновесие по процессам рассеяния. Спектр (8.5.9) весьма сильно отличается от планковского в области  $h\nu < \mu$ , асимптотически  $F_\nu = \text{const} \cdot \nu^3 (e^{\mu/kT} - 1)^{-1}$  вместо  $F_\nu \sim \nu^2$  т. е. меняется степень  $\nu$ . Спектр (8.5.9) показан на рис. 37, кривая  $z$ .

Величину  $\mu$  легко выразить через выделение энергии. Интегрируя по спектру, найдем

$$\left. \begin{aligned} N &= \text{const} \cdot T^3 \left( 1 - 1,37 \frac{\mu}{kT} \right), \\ \epsilon &= \text{const} \cdot T^4 \left( 1 - 1,11 \frac{\mu}{kT} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8.5.10)$$

Отсюда при  $N = \text{const} = N_1$ ,  $\epsilon'_\gamma = \epsilon_\gamma (1 + \delta)$  получим

$$\left. \begin{aligned} T &= T_1 (1 + 0,64\delta), \\ \mu &= 1,4kT_1\delta. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.11)$$

В действительности на спектр влияют оба механизма одновременно: и тормозное излучение, и перераспределение фотонов при рассеянии. В результате получается спектр, показанный на рис. 37 (кривая *a*), со своеобразным провалом выше определенной частоты  $\nu_c$ .

При меньшей частоте имеет место равновесие, поддерживаемое тормозным излучением и поглощением. В переходной области  $\nu \sim \nu_c$  фотоны диффундируют в сторону повышения частоты. При  $\nu > \nu_c$  имеет место бозе-эйнштейновское равновесие с химическим потенциалом. С течением времени в период, когда выделение энергии прекратилось, происходит уменьшение химического потенциала вследствие притока в область  $\nu > \nu_c$  фотонов, рожденных с частотой  $\nu < \nu_c$ . При этом сама величина  $\nu_c$  практически остается постоянной. Уменьшается глубина провала, т. е. происходит «замывание» искажений спектра (рис. 37, кривая *b*), и спектр приближается к истинно равновесному планковскому (кривая *в*) с новой энергией и температурой:

$$\epsilon'_\gamma = \epsilon_\gamma (1 + \delta) = \sigma T'^4, \quad T' = T_s \left( 1 + \frac{\delta}{4} \right). \quad (8.5.12)$$

Подробный расчет всех деталей изложен в работах Сюняева, Зельдовича (1970б), Илларионова, Сюняева (1974 а, б).

Здесь ограничимся результатами.

1) Наибольшие искажения в спектре приходятся на область  $h\nu < kT$ , т. е. на рэлей-джинсовскую часть спектра; соответствующая длина волны слабо зависит от момента выделения энергии и от количества выделившейся энергии  $\delta\epsilon_\gamma$  и определяется плотностью электронов, т. е. выражается через  $\Omega$ ,  $\lambda_m = 2,5\Omega^{-1/2}$  см:

$$\lambda_m = 2,5 \text{ см при } \Omega = 1; \quad \lambda_m = 8,5 \text{ см при } \Omega = 1/4 \quad (8.5.13)$$

( $\Omega$  отнесено к  $H = 75 \text{ км/сек} \cdot \text{Mpc}$ ).

2) Чувствительность спектра к выделению энергии существенно зависит от момента выделения. Максимальная чувствительность весьма велика: чтобы получить безразмерное отклонение  $\alpha$  от рэлей-джинсовского закона при  $\lambda = \lambda_m$ , нужно, чтобы химический

потенциал составлял  $\mu = 1,7\alpha h\nu_m$ , где  $\nu_m = c/\lambda_m$ . При этом безразмерное выделение энергии  $\delta$  (отнесенное к плотности энергии  $\epsilon_\gamma$  в момент выделения)

$$\delta = 1,2\alpha \frac{h\nu_m}{kT} = 0,25\Omega^{1/4}\alpha, \quad (8.5.14)$$

т. е.  $\delta = 0,25\alpha$  при  $\Omega = 1$  или  $0,013\alpha$  при  $\Omega = 1/45$ .

3) В настоящее время наблюдения не обнаруживают отклонений от рэлей-джинсовского закона в длинноволновой части спектра. Консервативная оценка точности измерений дает  $\alpha < 0,1$ , что соответствует  $\delta < 0,025$  при  $\Omega = 1$ ,  $\delta < 10^{-3}$  при  $\Omega = 1/45$ . Эти ограничения весьма сильны и существенно влияют на выбор возможных типов возмущений и спектра возмущений однородной изотропной Вселенной.

4) Наиболее «опасным», дающим наибольшие изменения спектра  $\alpha$  при данном выделении энергии  $\delta$ , является период  $z$  в пределах  $2,7 \cdot 10^4 \Omega^{-1/2} < z < 1,2 \cdot 10^5 \Omega^{-1/2}$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} 2,7 \cdot 10^4 < z < 1,2 \cdot 10^5 & \text{ для } \Omega = 1, \\ 1,8 \cdot 10^5 < z < 1,2 \cdot 10^7 & \text{ для } \Omega = 1/45. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.15)$$

При более позднем выделении энергии время эволюции спектра недостаточно для выработки отклонений от рэлей-джинсовского закона. Позднее выделение энергии (в частности, после периода РД-плазмы, т. е. после рекомбинации) специально рассматривается в следующем параграфе.

Более раннее выделение энергии при  $z$  больше указанного выше приводит к тому, что успевает произойти некоторое «замывание» отклонений.

Илларионов и Сюняев (1974б) показали, что при наблюдаемых параметрах Вселенной не успевают существенно уменьшиться даже искажения, возникшие при  $z \approx 10^8$ .

5) При большом выделении энергии «замывание» происходит медленно. Количество фотонов, которое должно поставить тормозное излучение для восстановления истинного равновесия, пропорционально  $\delta$ , скорость излучения слабо зависит от  $\delta$ . Время установления равновесия пропорционально  $\delta/\delta_{\min}$ , где  $\delta_{\min}$  — минимальное  $\delta$ , различимое при наблюдении, а не  $\ln \delta/\delta_{\min}$ , как это было бы в линейной теории.

При  $\delta \sim 1$  отклонения в спектре, соответствующие  $\alpha \sim 0,1$ , могут быть замечены вплоть до  $z \sim 10^7 \Omega^{-4}$ . Это дает  $z = 10^7$  для  $\Omega = 1$ ,  $z = 10^{10}$  для  $\Omega = 0,2$ . Но при  $z = 10^9$  уже количество электрон-позитронных пар во много раз превышает современное количество электронов в единице сопутствующего объема. Поэтому реально максимальное  $z$  достигает  $10^8$  при  $\Omega = 0,7$  и не растет при дальнейшем уменьшении  $\Omega$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ К § 5

## Когда возникло реликтовое излучение?

Подробное исследование эволюции спектра приводит к выводам, важным для теории горячей Вселенной. Впервые получен ответ на простой вопрос: когда возникло равновесное реликтовое излучение? Из приведенных чисел следует, что равновесное излучение уже существовало при  $z$  больше  $10^7$ — $10^8$  (для двух вариантов  $\Omega$ ), иначе при сильном отклонении от равновесия оно не было бы равновесным сегодня.

Из теории однородной Вселенной вытекает, что были периоды, когда энергия из других форм превращалась в излучение. Наиболее поздний момент такого рода связан с аннигиляцией электронов и позитронов. Можно ли надеяться на обнаружение отклонений в спектре, связанных с этим периодом?

Выделение энергии велико: в интервале от  $T = m_e c^2$  до  $T = 0,1 m_e c^2$  (соответственно  $2 \cdot 10^9 > z > 2 \cdot 10^8$ ) аннигиляция более чем удваивает энергию излучения. Затем энергосвечение быстро падает и составляет  $\delta = 3 \cdot 10^{-3}$  в интервале  $2 \cdot 10^8 > z > 10^8$ , далее  $\delta = 2 \cdot 10^{-7}$  для  $10^8 > z > 5 \cdot 10^7$  и  $\delta = 10^{-24}$  для всего остающегося интервала  $5 \cdot 10^7 > z$ .

Однако большие значения  $\delta$  не могут быть обнаружены ни при каком  $\Omega$  именно потому, что избыточные электроны и позитроны участвуют в «замыкании» спектра.

Выделение энергии при ядерных реакциях (образовании  $\text{He}^4$ ) происходит в момент  $t \sim 100$  сек,  $T \sim 100$  кэв,  $z \sim 4 \cdot 10^8$ . Энергия порядка  $28$  Мэв на ядро  $\text{He}^4$  в пересчете на один нуклон, с учетом образования 30%  $\text{He}^4$ , даст около  $3$  Мэв, что соответствует весьма малому  $\delta \sim 3 \cdot 10^{-7} \Omega$ .

С учетом того, что в этот момент еще остаются позитроны и электроны, выделение ядерной энергии не может дать заметного искажения сегодняшнего спектра.

## § 6. Позднее энергосвечение

Этот случай был рассмотрен в уже цитированной работе Зельдовича и Сюняева (1969). Если энергия выделяется на поздней стадии, уже после рекомбинации, тогда снова происходит ионизация. Температура электронов возрастает до величины определенно большей, чем  $10^4$  °К. Температура излучения падает от  $4000$  °К в начале рекомбинации до современных  $2,7$  °К. Для поздней стадии характерно, что  $T_e \gg T_\gamma$  (вместо  $T_e - T_\gamma \ll T_\gamma$  в § 5). В основном уравнении (8.4.5) остается член, умноженный на  $T_e/T_{0\gamma}$ , а другой  $n(n+1)$ , отбрасывается из-за малости. И, наконец, мы получаем линейное уравнение \*)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\sigma_T n_e c k T_e}{m_e c^2} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (8.6.1)$$

Введем снова (см. стр. 239) безразмерную величину  $y$  такую, что

$$dy = \frac{\sigma_T n_e k T_e}{m_e c} dt = \frac{k T_e}{m_e c^2} d\tau_T,$$

\*) Здесь  $x$  отнесено к начальной температуре излучения или, с учетом расширения, — к  $T_0(1+z)$ ; при этом  $T_0$  определяется как температура излучения сегодня, если бы не было энергосвечения. Таким образом, мы допускаем, что  $T_0 \neq 2,7$  °К.

где  $d\tau_t = \sigma_t n_e c dt$ ,  $\tau_t$  — оптическая толщина. После интегрирования будет

$$y = \int_{t_1}^t \frac{kT_e(t)}{m_e c^2} d\tau_t, \quad \tau_t = \tau_t(t), \quad (8.6.2)$$

где в момент  $t_1$  температура электронов увеличивается из-за выделения энергии; уравнение неприменимо, когда  $T_e \approx T_\gamma$ .

Сегодняшний спектр (при  $t=t_0$ ) зависит только от величины  $y_0$ , получающейся от интегрирования до  $t=t_0$ . Различные функции  $T_e(t)$  дают тот же самый конечный спектр, если для них одинаковы величины  $y_0$ . Эта зависимость от одного параметра делает предсказание более уверенным и облегчает сравнение с наблюдениями. Мы интересуемся в первую очередь современным спектром, соответствующим  $y_0$ ; дальше в тексте опускаем нулевой индекс у  $y_0$ . Решение уравнения (8.6.1) имеет вид

$$n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} \int_0^\infty n(\xi, 0) \exp \left[ -\frac{\left( \ln \frac{x}{\xi} + 3y \right)^2}{4y} \right] \frac{d\xi}{\xi}. \quad (8.6.3)$$

Основные свойства решения:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int n(x, y) x^2 dx = \int n(x, 0) x^2 dx = \text{const}, \\ \varepsilon &= \int n(x, y) x^3 dx = e^{4y} \int n(x, 0) x^3 dx = \varepsilon_0 e^{4y}. \end{aligned} \right\} \quad (8.6.4)$$

Решение (8.6.3) громоздко; в последующем мы предполагаем равновесный начальный спектр  $n(x, 0) = (e^x - 1)^{-1}$ , пренебрегая случаем, когда энергия выделяется и позже и раньше. Для  $x \ll 1$   $n(x, 0) = \frac{1}{x}$ . Положив  $n = \frac{f(y)}{x}$ , получаем  $f = e^{-2y}$ , так что  $n(x, y) = \frac{e^{-2y}}{x}$ ,  $x \ll 1$ .

Условие  $x \ll 1$  справедливо для длинноволновой части спектра. Если  $n(x, y) < n(x, 0)$ , это значит, что наблюдатели измеряют величину температуры более низкую:

$$T_{p-дж} = T_0 e^{-2y}. \quad (8.6.5)$$

Мы уже знаем, что  $T_{p-дж} = 2,7$  °К. Следовательно, для того чтобы сравнить теорию с наблюдениями, нам нужно для любого выбранного  $y$  взять соответственно температуру  $T_0 y = T_{p-дж} e^{2y} = 2,7$  °К  $\cdot e^{2y}$ . На рис. 38 показаны кривые для некоторых величин  $y$ ; все они соответствуют  $T_{p-дж} = 2,7$  °К. Для  $y=0$  кривая является равновесной планковской, другие кривые совпадают на левом конце, но идут выше, чем планковская, на коротких волнах. Общая

плотность энергии дается выражением

$$\varepsilon_\gamma = \sigma T_{\text{р.-дж}}^4 e^{4y} = \sigma T_{\text{р.-дж}}^4 e^{12y} = 4 \cdot 10^{-13} e^{12y} \text{ эрг/см}^3. \quad (8.6.6)$$

Выделение энергии равняется

$$\varepsilon_\gamma - \varepsilon_{0\gamma} = \sigma T_{\text{р.-дж}}^4 (e^{12y} - e^{8y}). \quad (8.6.7)$$

На один грамм вещества это дает

$$\Delta\varepsilon = \frac{4 \cdot 10^{-13} (e^{12y} - e^{8y})}{10^{-29} \Omega} = 4 \cdot 10^{16} \Omega^{-1} (e^{12y} - e^{8y}) \text{ эрг/г}. \quad (8.6.8)$$

Но энергия излучения на единицу массы уменьшается при

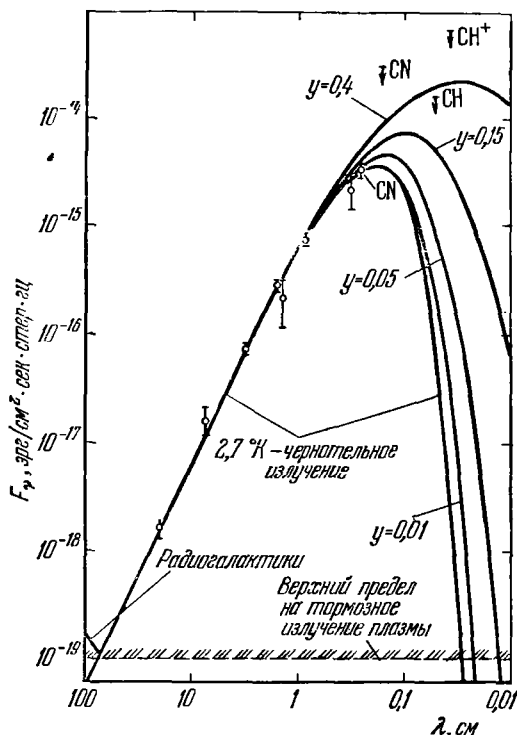


Рис. 38. Возможные искажения спектра реликтового излучения при комптон-эффекте на горячих электронах. На кривую реликтового излучения нанесены существующие экспериментальные точки.

расширению, как  $1+z$ . Следовательно, энергия, выделенная веществом и отнесенная к единице массы, равна

$$\delta\varepsilon = 4 \cdot 10^{16} \Omega^{-1} (1+z) (e^{12y} - e^{8y}) \text{ эрг/г}, \quad (8.6.9)$$

где  $\bar{z}$  — красное смещение, при котором происходит выделение энергии и обмен энергией между электронами и фотонами. Оптическая толщина  $\tau_r$  дается выражением ( $\alpha$  — отношение плотности ионизованного газа к общей плотности)

$$d\tau_r = \sigma_r n_e c dt = \frac{0,05\alpha\Omega(1+z)dz}{\sqrt{1+\Omega z}} \approx 0,05\Omega^{1/2}z^{1/2}dz. \quad (8.6.10)$$

Последняя формула справедлива для  $\alpha=1$ ,  $z > \Omega^{-1}$ . Температура газа ограничивается,  $T_e < 10^8(1+z)$  °K, данными по рентгеновскому фону (см. § 2 гл. 5). Взяв верхний предел, мы получаем  $dy = 0,7 \times 10^{-6}\Omega^{1/2}z^{1/2}dz$ ,

$$y = 3 \cdot 10^{-6}\Omega^{1/2}z^{3/2}. \quad (8.6.11)$$

Таким образом, в принципе, подставляя  $\Omega=1$  и  $z=1000$ , можно получить и очень большое  $y=100$ , не вступая в противоречие с рентгеновскими измерениями. В действительности величина  $y$  ограничена с одной стороны запасом энергии вещества, с другой — измерениями РИ. Подставим в (8.6.9)  $\delta\epsilon_1=10^{19}$  эрг/г, что соответствует ядерной энергии, и  $\delta\epsilon_2=10^{21}$  эрг/г, что соответствует полной энергии покоя вещества, и решим совместно (8.6.9) и (8.6.11) при  $\Omega=1$ . Получим  $z_1=75$ ,  $y_1=0,16$ ,  $e^{12y}=7$  в первом случае и  $z_2=112$ ,  $y_2=0,4$ ,  $e^{12y}=125$  во втором случае. Таковы максимальные значения  $y$  (от которого зависит искажение спектра) и увеличения общей энергии РИ, допустимые по закону сохранения энергии, в предположении полного сгорания водорода или аннигиляции вещества и антивещества в количестве, равном количеству оставшегося вещества.

Перед обсуждением экспериментальных данных об искажении спектра РИ изложим изящный способ описания спектра излучения, получающегося в результате такого искажения.

Нетрудно убедиться, что решение уравнения (8.6.1) при начальном спектре  $n_0(x)$  можно записать в виде суперпозиции смещенных спектров того же вида:

$$n(x, t) = \int n_0\left(\frac{x}{\varphi}\right) R(\varphi, t) d\varphi. \quad (8.6.12)$$

В частности, для начального планковского спектра получим суперпозицию планковских спектров. Результат этот представляется естественным: изменение спектра происходит вследствие рассеяния на электронах, имеющих большие тепловые скорости, т. е., в сущности, вследствие доплер-эффекта, при котором планковское распределение остается планковским, но меняется температура излучения.

Итак,

$$n(x, y) = \int P\left(\frac{v}{T}\right) R(T, y) dT, \quad (8.6.13)$$

где

$$P\left(\frac{\nu}{T}\right) = \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}.$$

Уравнение для  $R(T, y)$ , эквивалентное уравнению (8.6.1), имеет вид \*)

$$\frac{\partial R}{\partial y} = T^{-3} \frac{\partial}{\partial T} T^4 \frac{\partial TR}{\partial T}. \quad (8.6.14)$$

Польза от перехода к уравнению для  $R$  заключается в том, что упрощаются начальные условия:  $R(T, y=0) = \delta(T-T_0)$ . Функция  $R$  обращается в нуль на обоих краях области: при  $T=\infty$  и  $T=0$ .

Благодаря этому легко усмотреть два закона сохранения:

$$\left. \begin{aligned} \int T^3 R(T, y) dT &= \text{const}, \\ \int R(T, y) dT &= \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (8.6.15)$$

Первый интеграл имеет очевидный смысл числа фотонов в единице объема \*\*). Сохранение второго интеграла означает, что не происходит диллюция («разбавление») равновесного излучения. Для  $n$  соответствующий интеграл есть  $\int \frac{n}{\nu} d\nu$ , но такое выражение расходится для планковского спектра; поэтому до рассмотрения суперпозиций спектров второй интеграл не был известен. Для  $\delta$ -образного начального условия нетрудно написать общее решение:

$$R(T, y) = \frac{1}{T_0 \sqrt{4\pi y}} \exp \left[ 4y - \frac{1}{4y} \left( \ln \frac{T}{T_0} + 5y \right)^2 \right]. \quad (8.6.16)$$

Легко убедиться в справедливости сделанных ранее выводов:

$$\left. \begin{aligned} T_{p.-дж} &= \int TR dT = T_0 e^{-2y}, \\ \varepsilon &= \int T^4 R dT = \varepsilon_0 e^{4y} = \text{const} \cdot T_{p.-дж}^4 e^{12y}. \end{aligned} \right\} \quad (8.6.17)$$

Вернемся к физическим следствиям нагрева электронов.

Другим следствием позднего выделения энергии и связанного с ним нагрева электронов является тормозное излучение газа. Однако это излучение существенно зависит от того, как менялась со временем температура электронов, и уже не определяется одним только параметром  $y$ . При высокой температуре электронов в близ-

\*) Оно получается подстановкой интеграла в уравнение (8.6.1) и многократным интегрированием по частям.

\*\*) С учетом общекосмологического расширения  $N = (1+z)^3 \int T^3 R dT$  сохраняется число фотонов в единице сопутствующего объема.



кое к нам время они дадут вклад в рентгеновский фон Вселенной. Наблюдения фона дают ограничение  $T_e < 10^8 (1+z)$  °K. С другой стороны, при температуре электронов, ненамного превышающей температуру излучения после рекомбинации, когда плотность

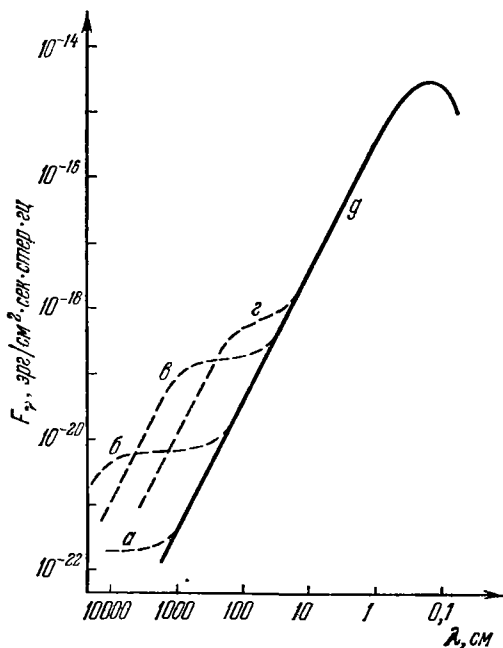


Рис. 39. Результирующий спектр реликтового излучения, искаженный комптоновским рассеянием ( $y \approx 0,1$ ) на горячих электронах плазмы и добавочным излучением, образованным в горячей плазме, температура которой поддерживается на постоянном уровне в некотором интервале красных смещений: а)  $T_e = 10^8$  °K,  $1394 < z < 1400$ ; б)  $T_e = 10^7$  °K,  $1340 < z < 1400$ ; в)  $T_e = 10^6$  °K,  $700 < z < 1400$ ; д)  $10^6$  °K,  $700 < z < 1400$  (в последнем случае комптоновские искажения малы и соответствуют параметру  $y \approx 0,01$ ); д) неискаженный планковский спектр.

$e^{12y} \approx 3$ ,  $y \approx 0,1$ . Соответствующее выделение энергии на грамм вещества в настоящее время равно  $4\Omega^{-1} 10^{16}$  эрг/г. Для того чтобы получить нужное  $y$ , при выделении энергии сразу после рекомбинации при  $\Omega = 0,4$  нужно поддерживать  $T = 10^8$  °K в интервале  $1400 > z > 1394$ , или  $10^7$  °K в интервале  $1400 > z > 1340$ , или  $10^6$  °K в интервале  $1400 > z > 700$ . Общие затраты энергии при этом меняются от одного случая к другому мало, они составляют  $1,4 \cdot 10^{20}$  эрг/г, что в 14 раз

велика (например,  $T_e = 10^4$  °K от  $z = 1400$  до  $z = 300$ ), возникает тормозное излучение, которое к настоящему времени сместится в область длинных радиоволн и в этой области исказит рэлей-джинсовскую часть спектра РИ.

Обратимся к наблюдениям РИ, результаты которых собраны в § 3 гл. 5.

В рэлей-джинсовской части, в области длин волн  $60$  см —  $0,5$  см, отклонения от  $T_{р.-дж} = 2,7$  °K не превышают 5 или 10%.

Общая плотность излучения известна плохо. Не подтвердились работы, в которых получалось определенное отклонение от равновесного спектра. Однако и та последняя работа [Блейр и др. (1971)], которая согласуется с равновесным спектром, дает болометрическую температуру  $3,1^{+0,5}_{-2}$  °K; значит, не исключена на верхнем пределе  $T = 3,6$  °K с плотностью энергии в три раза больше равновесной при  $T = 2,7$  °K.

Если принять за истину верхний предел, получим

больше ядерной энергии или — при другом механизме — соответствует превращению в тепло кинетической энергии движения со скоростью  $1,2 \cdot 10^{10} \text{ см/сек} = 0,4 \text{ с}$ .

Однако перечисленные случаи дают различную интенсивность длинноволнового излучения (рис. 39). Поэтому длительный, но слабый нагрев газа ( $10^6 \text{ }^\circ\text{K}$  до  $z=700$ ) противоречит наблюдательным данным \*). Остается неисключенным вариант горячего газа ( $T=10^7 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $1400 > z > 1340$  или  $T=10^8 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $1400 > z > 1394$ ) с  $y=0,1$ , в котором энергия реликтового излучения почти наполовину приобретена на поздней стадии при  $z < 1400$ .

Не означает ли такой вариант замаскированного отказа от горячей модели Вселенной? Не следует ли отсюда, что наблюдательные данные не доказывают первичного происхождения так называемого реликтового излучения? Чтобы ответить на эти вопросы, нужно уточнить понятие горячей Вселенной. В этом понятии главное — утверждение, что был период термодинамического равновесия с высокой температурой или, точнее, с большой безразмерной энтропией.

Но это утверждение уже доказано наблюдательными данными в длинноволновой (рэлей-джинсовской) области спектра независимо от того, что дает уточнение общей плотности излучения при болометрических измерениях в максимуме спектра.

Горячие электроны на поздней стадии могут изменить полную энергию излучения, но при этом они оставляют неизменной рэлей-джинсовскую зависимость  $F_\nu \sim \nu^3$ . Значит, до нагрева электронов спектр был равновесным — Вселенная была горячей, что и требовалось доказать.

Измерения полной плотности излучения необходимы, точность их нужно довести приблизительно до 10%. Эти измерения дадут важные сведения об эволюции после  $z=1400$ , после общей рекомбинации. Болометрические измерения очень трудны, в настоящее время приемники имеют широкий угол зрения.

В перспективе необычайно интересны одновременные измерения на двух длинах волн,  $h\nu < kT_\gamma$  и  $h\nu \geq 3kT_\gamma$ , с хорошим угловым разрешением — порядка 0,01 радиана или лучше. Такие измерения дают возможность отличить пространственную неоднородность температуры от искажений спектра.

При пространственной неоднородности флуктуации излучения во всех областях спектра коррелированы — имеют одинаковый знак в каждом элементе телесного угла. При искажении спектра облаками горячих электронов происходит увеличение интенсивности коротких волн и снижение интенсивности длинных волн, флуктуации антикоррелированы.

\*) Принимая  $\Omega=1$ , получим более сильное тормозное излучение по сравнению с  $\Omega=0,4$ .

До настоящего времени измерения ведутся только в области длинных волн, и флуктуации не обнаружены, даются лишь верхние границы  $\frac{\Delta F}{F} \sim 10^{-4}$ . Это значит, что и в области коротких волн нельзя рассчитывать на большие флуктуации, откуда видна трудность экспериментов. Косвенно данные по длинным волнам указывают на то, что отдача энергии от электронов излучению, по-видимому, мала, меньше, чем предел, следующий из современных болометрических наблюдений.

## § 7. Излучение межгалактического газа и его плотность

Во введении было указано на практически полное отсутствие нейтрального газа в межгалактической среде и на трудность исследования излучения горячего ионизованного межгалактического газа\*). Полное излучение такого газа в расчете на один электрон как функция температуры дается на рис. 40. Одна кривая соответствует чистому водороду, другая — 70% H и 30% He. Характерный

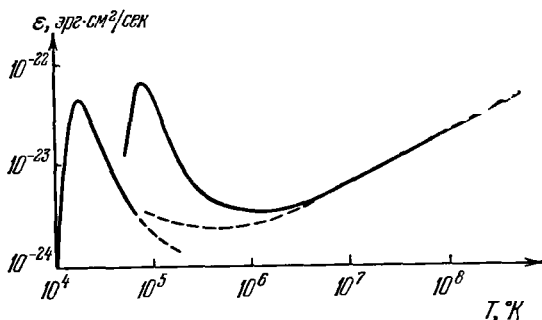


Рис. 40. Зависимость излучения энергии гелиево-водородной плазмой от температуры. По оси ординат отложено излучение энергии плазмой, содержащей 30% He по весу.

максимум при  $2 \cdot 10^4$  °K возникает главным образом из-за эмиссии линий водорода, максимум при  $T \sim 8 \cdot 10^4$  °K возникает из-за эмиссии линии He II ( $\lambda = 304$  Å). При температуре более высокой, чем этот максимум, большая часть энергии излучается тормозным механизмом со спектром который приближенно описывается выражением

$$F_\nu \sim e^{-h\nu/kT} g(\nu). \quad (8.7.1)$$

\*) Здесь, по «историческим» причинам, расчеты приводятся для  $H = 100$  км/сек  $\times$  Мпс,  $\rho_c = 2 \cdot 10^{-28}$  г/см³. В конце параграфа мы обсудим, как меняются выводы, если  $H = 50$  км/сек. Мпс.

При других плотностях излучение меняется пропорционально  $\rho_{\text{газ}}^2$ . Подробные вычисления были проделаны Гоулдом, Рамсеєм (1966), Вейманом (1967), Дорошкевичем, Сюняевым (1969).

Используем наблюдения далеких квазаров для того, чтобы оценить возможное количество нейтрального водорода в межгалактическом газе. Если бы нейтральный водород присутствовал в заметных количествах, то он давал бы поглощение в спектрах квазаров, соответствующее линии  $L_{\alpha}$ . Так как поглощающие атомы расположены на всем пути от квазара к нам и имеют поэтому разную хаббловскую скорость удаления, то из-за эффекта Доплера линия поглощения в спектре растягивается в полосу. Достаточно иметь плотность нейтральных атомов  $n_H \approx 10^{-10} \text{ см}^{-3}$ , чтобы квазары с  $z \approx 2$  образовали полосу поглощения с ослаблением непрерывного спектра в несколько раз. Отсутствие подобных полос в спектрах квазаров \*) дает верхний предел на  $n_H$ , и если считать, что межгалактического газа много, то надо предполагать, что он имеет высокую температуру и поэтому ионизован.

Температура газа при  $z \approx 2$  должна быть высокой; чтобы объяснить отсутствие нейтрального водорода \*\*), необходимо, чтобы  $T > 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$  [Ганин, Петерсон (1965)]. Рассмотрим энергетический баланс. При  $z < 2$  и  $\Omega < 1/3$  охлаждение происходит главным образом из-за адиабатического расширения, следовательно, даже без нового выделения энергии

$$T_{\text{газ}} > 10^6 \left( \frac{1+z}{3} \right)^2 \text{ }^\circ\text{K}.$$

На рис. 41 показано, какой процесс дает главный вклад в охлаждение газа в зависимости от  $T$  и  $z$ .

С температурой, вычисленной выше, поток, образующийся в газе с  $\Omega = 1$  и падающий на Галактику, дается на рис. 42. Вычисления сделаны Дорошкевичем и Сюняевым (1969), см. Лонгейр и Сюняев (1971). Измерения Роуча и Смита (1968), сделанные в оптическом диапазоне, дают верхний предел на межгалактический фон ( $< 10^{-19} \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер} \cdot \text{гц}$ ). Он включает в себя фон от нашей Галактики и Солнечной системы (зодиакальный свет). Но даже если этот фон устранить, то фон от далеких галактик ( $0,5 < z < 2$ ),

\*) В настоящее время наблюдаются квазары с  $z \approx 3,5$ . Полосы поглощения в их спектрах не обнаружены.

\*\*) Грубая оценка может быть сделана по формуле Эльверта  $\frac{n_p}{n_H} \approx 10^6 \frac{kT}{I} \exp \left( -\frac{I}{kT} \right)$  для ионизации ударом и рекомбинации с излучением. Температура, которая нужна, может быть ниже, если часть ионизации происходит из-за ультрафиолета, излучаемого гелием раньше, при  $z \approx 2$ . В действительности вычисления были сделаны из рассмотрения кинетики ионизации и рекомбинации и с более точными сечениями. При малой плотности газа существенную роль может играть ионизация газа излучением, и вывод о высокой температуре становится не столь обязательным.

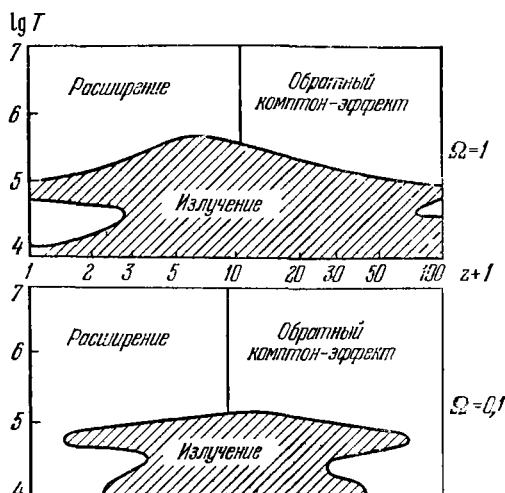


Рис. 41. На плоскости  $\lg T, z$  указаны области, в которых потери энергии определяются излучением плазмы. Кривые построены для двух значений  $\Omega$ . Видно, что при больших  $z$  доминируют комптоновские потери.

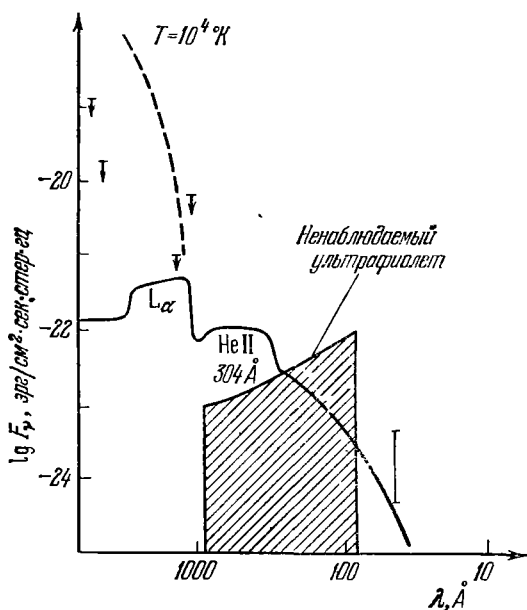


Рис. 42. Спектр излучения межгалактического газа. Данные наблюдений изображены стрелками (верхние пределы потока) и отрезком вертикальной линии, указывающим пределы ошибок.

неразличимых в лучшие телескопы, все-таки даст много больше, чем межгалактический газ.

Следовательно, измерения должны быть сделаны не в оптическом, а в ультрафиолетовом диапазоне, где спектр звезд намного слабее. Для этого нужно вывести приемник за пределы атмосферы, что и сделал Курт; см. Курт, Сюняев (1967а, б; 1970). Измерения Курта были сделаны в интервале 1225—1350 Å при помощи счетчиков на спутнике. В этом диапазоне фон много слабее. Эта область спектра пропускается нейтральным водородом нашей Галактики. Эксперимент был выполнен с помощью ионизационных счетчиков без антисовпадений, поэтому космические лучи давали вклад в фон. Результат для ультрафиолетового потока  $F_v < 10^{-21}$  эрг/см<sup>2</sup>·сек·стер·гц [Курт, Сюняев (1967а, б; 1970)], что соответствует  $\Omega_{\text{газ}} < 4$ . Результат не очень значительный, но этот метод можно улучшить. Косвенный подход [Сюняев (1969б)] дает более определенные результаты.

Дело в том, что наблюдение излучения атомарного водорода с длиной волны 21 см дает распределение нейтрального водорода внутри и вокруг галактик, включая и нашу. Известно, что гало H I часто простирается далеко от центра галактики и имеет очень малую плотность ( $n \sim 3 \cdot 10^{-3} - 10^{-2}$  см<sup>-3</sup>). В некоторых случаях имеются мосты между соседними галактиками, также тонкие и разреженные. Сюняев отметил, что такой нейтральный водород очень чувствителен к ионизации ультрафиолетовым излучением ( $h\nu > I$ ). Поток излучения должен быть достаточно слабым; для того чтобы установить верхнюю границу потока, нужно потребовать время существования водородного гало и облаков не меньше чем  $10^7$  лет, что дает  $F_v < 10^{-23}$  эрг/см<sup>2</sup>·сек·стер·гц при  $\nu > I/h = 3 \cdot 10^{15}$ .

Вместе с вычислениями излучения межгалактического газа это дает строгий предел на плотность межгалактического газа  $\Omega < 0,3 - 0,2$  (0,3 для чистого H, 0,2 для 70% H и 30% He).

Этот результат служил сильным аргументом в пользу открытой модели Вселенной. Другие слагаемые плотности (галактики, излучение, нейтрино и другие слабовзаимодействующие частицы) дают вклад гораздо меньше единицы. Именно горячий, полностью ионизованный межгалактический газ (точнее, газ между скоплениями галактик) труднее всего поддается наблюдению.

Однако намечающееся снижение постоянной Хаббла, к сожалению, делает этот результат менее определенным. При данном  $\Omega_{\text{газ}}$  плотность пропорциональна  $H^2$ , тормозное излучение единицы объема  $\sim r^2 \sim H^4$ , эффективная длина, с которой приходит излучение, порядка  $c/H$ . Окончательно при заданной температуре излучение пропорционально  $\sim \Omega_{\text{газ}}^2 H^3$ , значит, при данной измеренной величине излучения величина  $\Omega_{\text{газ}} \sim H^{-3/2}$ . Снижение  $H$  в два раза — со 100 км/сек·Mpc до 50 км/сек·Mpc — приводит к увеличению  $\Omega_{\text{газ}}$  в три раза, т. е. до 0,9 для чистого водорода или 0,6

для 70% H+30% He. Напомним, что мы имеем дело с верхними пределами; уточнение наблюдений и теории может снизить эти величины. Однако сегодня отличие 0,6 от 1 слишком мало для того, чтобы уверенно делать выводы об открытой модели Вселенной. В этой связи отсылаем читателя к косвенным соображениям, связанным с рождением галактик и возмущениями однородности Вселенной (§ 6 гл. 9).

Вернемся к излучению газа. Рассмотрим газ, находящийся внутри скоплений галактик. Этот газ, по-видимому, гравитационно связан и лишь медленно и незначительно вытекает в пространство между скоплениями. К тому же аккреция компенсирует отток газа.

Обозначим через  $\Omega_{\text{ск}}$  плотность газа скоплений галактик, деленную на общий объем пространства, приходящийся на каждое скопление.

Измерения на 21 см показывают, что нейтральный водород в скоплениях практически отсутствует;  $n_{\text{H}} < 10^{-7} \text{ см}^{-3}$  в скоплениях соответствует средней  $n_{\text{H}} \sim 10^{-9} \text{ см}^{-3}$ , т. е.  $\Omega_{\text{ск}}(\text{H I}) < 10^{-4}$ .

Обратимся к вопросу об ионизованном газе в скоплениях. Объем внутри скопления, деленный на полный объем пространства Вселенной, приходящийся на одно скопление, обозначим через  $\alpha^*$ . По-видимому, приблизительно  $\alpha^* \sim 10^{-2}$ . Действительная плотность газа в скоплениях  $\Omega_{\text{ск}}(\alpha^*)^{-1}$ . Излучение пропорционально квадрату плотности ионизованного газа и занимаемому им объему,  $(\Omega_{\text{ск}}(\alpha^*)^{-1})^2 \alpha^* = \Omega_{\text{ск}}^2(\alpha^*)^{-1}$ .

Следовательно, общая плотность ионизованного газа, оцененная по его излучению, даже меньше, если газ сконцентрирован в скоплениях, чем если бы он был однородно распределен.

Возвращаясь к межгалактическому газу, мы должны рассмотреть случай, когда температура выше чем  $10^7 \text{ }^\circ\text{K}$ . В этом случае излучение в видимой области и ультрафиолете уменьшается ( $\sim T^{-1/2}$ ), но комптоновские потери на реликтовом излучении и рентгеновское излучение увеличиваются.

Измерение рентгеновского фона дает  $F_{\nu} < 5 \cdot 10^{-27} \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек-стер-гц}$  на  $\lambda \sim 50 \text{ \AA}$  [Бойер, Филд, Мах (1968), Генри и др. (1968), Баннер и др. (1969)]. Легко показать, что температура газа выше чем  $10^6 (1+z) \text{ }^\circ\text{K}$  противоречит этим экспериментам. Чтобы быть точным, коэффициент  $10^6$  дается для  $\Omega_{\text{газ}} = 1$ ; при меньших  $\Omega_{\text{газ}}$  температура может быть несколько выше. Зависимость оказывается слабой: для больших  $h\nu$   $F_{\nu} \sim \Omega^{1/2} e^{-h\nu/kT}$ , значит, для данного  $F_{\nu}$  температура зависит логарифмически от  $\Omega$ .

Наблюдения со спутника «Ухуру» привели к обнаружению мощного рентгеновского излучения от ряда скоплений галактик. Спектр рентгеновского излучения, по-видимому, свидетельствует о том, что оно рождается в оптически тонком горячем газе. Так, например,

рентгеновские наблюдения скопления галактик Сота лучше всего объясняются присутствием в этом скоплении горячего,  $T \sim 10^8$  °К, межгалактического газа с плотностью порядка  $10^{-3}$  см $^{-3}$ . При этом полная масса газа в скоплении превышает суммарную массу галактик, входящих в скопление, но в несколько раз меньше вириальной, т. е. недостаточна для стабилизации скопления. Дисперсия скоростей галактик в этом скоплении составляет  $\sim 1500$  км/сек. Отметим, что это значение соответствует ( $v^2/2 \sim kT/m_p$ ) наблюдаемой температуре газа в скоплении ( $T \sim 10^8$  °К). Следовательно, можно представить себе, что движение газа со скоростью галактик в общем гравитационном поле скопления при столкновении газовых облаков как раз и дает наблюдаемую температуру.

Отметим также, что в радиодиапазоне излучение горячего газа очень мало. Гораздо более сильны комптоновские искажения спектра реликтового излучения при взаимодействии его с горячим газом в скоплении. Средняя энергия фотонов при этом повышается, рэлей-джинсовская температура излучения падает. Соответственно при наблюдениях в сантиметровом диапазоне длин волн реликтовое излучение в направлении на скопление галактик с горячим газом должно иметь яркостную температуру ниже, чем в других направлениях:

$$\frac{\Delta T}{T} = -2\sigma_T N_e l \frac{kT_e}{m_e c^2},$$

где  $l$  — размер скопления [Сюняев, Зельдович (1970а; 1972б)]. По-видимому, этот эффект наблюден Парийским (1972).

## § 8. Радиоизлучение ионизованного межгалактического газа и период нейтрального водорода

В § 2 мы рассчитали процесс рекомбинации. Если отсутствуют источники энергии, то после рекомбинации начинается период нейтрального водорода. Он будет продолжаться до тех пор, пока уже в эпоху, близкую к нашей, источники энергии, связанные с возникающими объектами, ионизуют газ. Мы будем обозначать красное смещение, соответствующее моменту ионизации нейтрального газа какими-либо процессами, через  $z_{\text{ион}}$ , а рекомбинации —  $z_{\text{рек}}$ . Однако картина может быть более сложной. В §§ 5, 6 рассматривалась картина межгалактического газа и выделение энергии. Возникает вопрос о том, будет ли это выделение энергии мешать рекомбинации. Наши знания о ранних процессах, в которых может выделяться энергия, недостаточны. Вопрос об энергетическом балансе газа, о его рекомбинации и ионизации, тесно связан с теорией возникновения современной структуры — галактик, их скоплений и т. д.; см. об этом следующий раздел. В так называемой теории адиабатических или энтропийных возмущений, растущих вследствие гравитационной неустойчивости, возмущения (см. §§ 2, 8



гл. 14) в момент рекомбинации весьма малы,  $\delta\rho/\rho \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ . Такие возмущения плотности и соответствующая им скорость движения приводят к образованию ударных волн и ионизации газа при  $z < 10$ . В момент рекомбинации эти возмущения никак не нарушают картину эволюции однородной плазмы, развитую выше.

В вихревой теории начальные скорости значительны, порядка 0,1–0,01 с, столкновения сверхзвуковых потоков и ионизация газа происходят не позже, чем при  $z \sim 100$  (см. § 9 гл. 14).

Наконец, в зарядово-симметричных теориях выделение энергии при аннигиляции может полностью предотвратить рекомбинацию. Весьма важно найти все следствия тех или иных предположений о фактическом ходе рекомбинации. В этой связи радиоизлучение ионизованного газа крайне важно [Сюняев (1968)]. Было упомянуто (см. § 5), что тормозное излучение имеет плоский спектр в области частот  $\nu < kT/h$  а общая мощность  $\sim \sqrt{T}$ .

Радиоизлучение на низких частотах пропорционально  $T^{-1/2}$ ; следовательно, если кто-то захочет исследовать все возможные области температуры газа, то нижний предел температуры будет даваться сравнением вычисленного радиоизлучения с наблюдениями. Верхний предел температуры может быть найден из рентгеновского излучения газа или из вычислений энергии, которая требуется для того, чтобы компенсировать тепловые потери.

Наиболее подходящие для исследований длины волн находятся из условия минимума интенсивности суммы реликтового излучения и излучения всех дискретных источников. Пересечение графиков спектров РИ и дискретных источников имеет место при  $\lambda \sim 50$  см; при этом значении  $\lambda$  поток с плоским спектром в наблюдениях незаметен, и потому из наблюдений можно дать верхний предел

$$F_{ff} < 10^{-19} \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер} \cdot \text{гц} \quad (8.8.1)$$

для тормозного излучения, обозначаемого индексами *ff* (free-free).

Более тщательно проводя измерения, выбирая направления, где источников нет, можно значительно увеличить длину волны и снизить соответствующий предел  $F_{ff}^{\text{набл}}$ . Прямые вычисления дают \*)

$$\begin{aligned} F_{ff} &= 5 \cdot 10^{-20} \Omega^2 \int_0^{z_l} \frac{1+z}{\sqrt{1+\Omega z}} T e^{-1/2} (z) dz \approx \\ &\approx 5 \cdot 10^{-20} \Omega^{3/2} \int_0^{z_l} z^{1/2} T e^{-1/2} (z) dz < F_v^{\text{набл}}. \end{aligned} \quad (8.8.2)$$

\*) Мы применяем формулу для интегрального поля излучения, даваемого однородно распределенными эволюционирующими источниками. Излучательная способность единицы сопутствующего объема горячего газа (см. § 3 этой главы)  $\epsilon_{ff}(\nu) = 5,44 \cdot 10^{-39} g T_e^{1/2} \exp(-h\nu/kT_e) n_e^2 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер} \cdot \text{гц}$ ;  $\Omega$  отнесено к  $H = 100 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ , определение  $g$  дано на стр. 232. Спектр излучения в радиообласти считаем плоским,  $F_{ff}$  не зависит от  $\nu$  при малых  $\nu$ .

Взятое само по себе это условие может выполняться и при  $z_i = z_r = 1400$ , т. е. согласуется и с отсутствием рекомбинации, так как этот интеграл может быть сделан сколь угодно малым при увеличении  $T(z)$ . Действительно, это условие выполняется, если  $z_i = 1400$  и  $\Omega = 1$ ,  $T_i = 6 \cdot 10^8 \text{ }^\circ\text{K} = \text{const}$  или если  $\Omega = 1/40$ ,  $T_i = 10^4 \text{ }^\circ\text{K} = \text{const}$ .

Мы предполагаем, что при больших  $z$ , которые наиболее важны в интеграле, большая часть материи находится в виде газа,  $\Omega_{\text{газ}} \approx \Omega$ .

Но есть и другие условия, которые противоречат высокой температуре. Одно из них: энергетические потери газа (при комптоновском взаимодействии с реликтовым излучением, см. § 3) не могут превышать запас полной ядерной энергии вещества  $W \text{ эрг/г}$ . Это условие дает

$$\int_0^{z_i} \frac{(1+z)^2}{V_{1+\Omega z}} T_e(z) dz < 10^{-6} W. \quad (8.8.3)$$

Условие (8.8.3) слабо зависит от  $\Omega$ . Есть и другое условие, ограничивающее высокую температуру газа: искажения реликтового спектра, характеризуемые параметром  $y$  (§ 6), не должны превышать определенного предела. Основываясь на результатах Блейра и др. (1971), можно взять  $y < 0,1$  (см. § 6 этой главы). Неопределенность экспериментальных данных слабо влияет на конечные результаты. После подстановки численных величин условие принимает вид

$$\Omega \int_0^{z_i} \frac{1+z}{V_{1+\Omega z}} T_e(z) dz < 9 \cdot 10^{10} y. \quad (8.8.4)$$

Эта формула основывается на наблюдениях и не использует априорных предположений, в отличие от предыдущего условия (8.8.3).

При составлении условий (8.8.2)—(8.8.4) мы предполагали  $T_e \gg T_r$ ; эти формулы верны только для периода, когда  $z < 1500$ ,  $T_e > 4000 \text{ }^\circ\text{K}$  (газ ионизован). Если же  $4000 > T_e > T_r$ , то газ состоит главным образом из нейтральных атомов. Поставим теперь математический вопрос: как лучше всего использовать два неравенства типа

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{z_i} T_e^{-1/2}(z) f(z) dz &< a, \\ \int_0^{z_i} T_e(z) g(z) dz &< b \end{aligned} \right\} \quad (8.8.5)$$

для определения максимума  $z_i$ , совместимого с обоими этими условиями? Функции  $f$  и  $g$  известны из теории,  $a$  и  $b$  даны наблюдениями,

$z_i$  дает момент вторичной ионизации газа (газ нейтрален при  $1400 > z > z_i$  и ионизован при  $z_i > z > 0$ ).

Проблема состоит в выборе  $T_e(z)$ . Предлагается взять линейную комбинацию двух уравнений с положительными коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$ , которые мы определим позже:

$$\int \left( \frac{\alpha}{\sqrt{T}} f + \beta T g \right) dz < \alpha a + \beta b. \quad (8.8.6)$$

Для любого  $z$  выбираем  $T(z)$ , минимизируя выражение в скобках (8.8.6). Обозначим это выражение через  $B$  и найдем его минимум:

$$B = \frac{\alpha}{\sqrt{T}} f + \beta T g = \min.$$

Соответствующее  $T$  равно

$$T = \left( \frac{\alpha f}{2\beta g} \right)^{2/3} \quad (8.8.7)$$

и

$$B_{\min} = 2^{-1/3} 3 \alpha^{2/3} \beta^{1/3} f^{2/3} g^{1/3}.$$

Подставляя  $B_{\min}$  в (8.8.6), получаем

$$\int B_{\min} dz < \int B dz < \alpha a + \beta b,$$

$$1,8 \alpha^{2/3} \beta^{1/3} \int f^{2/3} g^{1/3} dz = 1,8 \alpha^{2/3} \beta^{1/3} \psi(z_i) < \alpha a + \beta b,$$

т. е.

$$\psi(z_i) < 0,55 \frac{\alpha a + \beta b}{\alpha^{2/3} \beta^{1/3}}, \quad (8.8.8)$$

где функция  $\psi$  определяется интегралом, приведенным выше. Теперь выбирается отношение  $\alpha/\beta$ , минимизирующее правую часть выражения (8.8.8):  $\alpha/\beta = 2b/a$ . При этом выборе  $\alpha/\beta$  получим из (8.8.8)

$$\psi(z_i) < a^{1/3} b^{2/3}, \quad (8.8.9)$$

откуда находится верхний предел на  $z_i$ . Этот способ, примененный к неравенствам (8.8.2), (8.8.3) [Сюняев (1968)], дает

$$z_i < 1,1 \cdot 10^8 (F_v^4 W^2 \Omega^{-5})^{1/11} = 250 \Omega^{-5/11}. \quad (8.8.10)$$

Численное значение  $z_i$  дано для максимального выделения энергии  $W = 2 \cdot 10^{18}$  эрг/г — около половины ядерной энергии газа.

Другой подход, основанный на оценке искажения спектра (8.8.2), (8.8.4) [Зельдович, Сюняев (1969)], дает (при  $y < 0,1$ )

$$z_i < 1,3 \cdot 10^{11} F_v^{4/5} y^{1/5} \Omega^{-1/5} < 300 \Omega^{-1/5}. \quad (8.8.11)$$

Мы видим, что для  $\Omega=1$  в самом худшем случае должно быть  $z_i < 300$ . Следовательно, в течение периода  $1500 > z > 300$  газ был нейтрален.

Итак, вывод из всего сказанного в этом параграфе заключается в том, что период нейтрального водорода действительно был в прошлой истории Вселенной и должен был кончиться в прошлом. Действительно, представление о вторичной ионизации, происходящей при  $z < 300$ , неизбежно следует из отсутствия нейтрального водорода в нашу эпоху. Однако напомним, что сделанные выводы относятся к  $\Omega=1$ . Менее очевидна ситуация с  $\Omega < 1/10$  и при  $H = 50$  км/сек·Мпс.

В этом случае ограничения недостаточны для того, чтобы быть совершенно уверенным в существовании периода нейтрального водорода. Формулы, приведенные выше, показывают, как дальнейшие измерения смогут помочь в разрешении этой проблемы.

## § 9. Взаимодействие космических лучей с излучением

Космические лучи, которые проводят огромное время в межзвездном или межгалактическом пространстве, взаимодействуют с частицами и полями, заполняющими это пространство [Гинзбург, Сыроватский (1963)]. После открытия реликтового излучения в ряде работ было обсуждено взаимодействие космических лучей с реликтовыми фотонами. Краткое изложение основных результатов дается ниже. Подробнее см. Березинский (1970), Хаякава (1973, 1974), Озерной, Розенталь, Прилуцкий (1973).

1. *Взаимодействие электронов космических лучей с излучением.* Торможение релятивистских электронов \*),  $E \gg m_e c^2$ , дается формулой

$$\frac{dE}{dt} = -\alpha \left( \frac{E}{m_e c^2} \right)^2 \epsilon, \quad (8.9.1)$$

где  $\alpha = 2,7 \cdot 10^{-14}$  см<sup>3</sup>/сек,  $\epsilon$  — полная плотность энергии электромагнитного поля. Она включает энергию магнитного поля  $\epsilon_{\text{магн}} = \mathcal{H}^2/8\pi$  и энергию излучения  $\epsilon_{\text{изл}}$ , которая, в свою очередь, состоит из энергии излучения звезд  $\epsilon_{\text{изл.зв}}$  и энергии реликтового излучения  $\epsilon_{\text{рел.изл}}$ . Последняя равна  $4 \cdot 10^{-13}$  эрг/см<sup>3</sup> для планковского спектра при 2,7°К. Если  $\mathcal{H} = 10^{-6}$  гс, то  $\epsilon_{\text{магн}} = 4 \cdot 10^{-14}$  эрг/см<sup>3</sup> — пренебрежимо мала, но для  $\mathcal{H} = 10^{-5}$  гс  $\epsilon_{\text{магн}} = 4 \cdot 10^{-12}$  эрг/см<sup>3</sup> — уже больше, чем  $\epsilon_{\text{рел.изл}}$ . Внутри Галактики  $\epsilon_{\text{изл.зв}} = 10^{-12}$  эрг/см<sup>3</sup>. Вне ее  $\epsilon_{\text{изл.зв}}$  порядка  $10^{-14}$  эрг/см<sup>3</sup> — много меньше, чем  $\epsilon_{\text{рел.изл}}$ .

\*) При этом существенно, что в системе покоя электрона энергия фотонов меньше  $m_e c^2$ , так что сечение рассеяния томсоновское, без большой поправки от перехода к формуле Клейна — Нишины — Тамма. Это ограничивает  $E_e < 10^{15}$  эв.

Уравнение (8.9.1) легко интегрируется:

$$E = \frac{E_0}{1 + \frac{\alpha E_0 \epsilon t}{(m_e c^2)^2}} < \frac{(m_e c^2)^2}{\alpha t \epsilon}. \quad (8.9.2)$$

Для каждого  $\epsilon$ ,  $t$  дается верхний предел на энергию. Взяв  $t \sim 10^8$  лет или  $10^6$  лет и  $\epsilon = 4 \cdot 10^{-13}$  эрг/см<sup>3</sup> или  $4 \cdot 10^{-11}$  эрг/см<sup>3</sup>, получаем следующую таблицу.

ТАБЛИЦА IX

Верхний предел энергии  $E$ 

| $\epsilon$ , эрг/см <sup>3</sup> | $t = 10^8$ лет                      | $t = 10^6$ лет                     |
|----------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| $4 \cdot 10^{-13}$               | $E = 2 \cdot 10^{-2}$ эрг = 12 Гэв  | $E = 2$ эрг = 1200 Гэв             |
| $4 \cdot 10^{-11}$               | $E = 2 \cdot 10^{-4}$ эрг = 120 Мэв | $E = 2 \cdot 10^{-2}$ эрг = 12 Гэв |

Энергия, которая отбирается от электронов, зависит только от общей плотности излучения  $\epsilon$ . Но форма, в которую эта энергия преобразуется, зависит от структуры электромагнитного поля. В случае статического магнитного поля  $\mathcal{H} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$  гс синхротронное излучение происходит с частотой (в максимуме)

$$\nu \approx 1,2 \cdot 10^8 \left( \frac{E}{m_e c^2} \right)^2 \mathcal{H} \text{ гц}. \quad (8.9.3)$$

Взаимодействие электронов с фотонами дает фотоны с энергией порядка

$$E_\phi = \frac{4}{3} E_e \left( \frac{E}{m_e c^2} \right)^2.$$

Этот процесс предлагается в качестве источника фонового рентгеновского излучения. Нужно указать, что все оценки сильно зависят от ситуации в коротковолновой области спектра реликтового излучения (см. § 6). Если бы сильное отличие от равновесного спектра с 2,7°К подтвердилось, то потери были бы много больше, и электроны в нашей Галактике, взаимодействуя с излучением, могли бы дать существенную часть рентгеновского фона. Однако последние измерения говорят в пользу  $\epsilon \sim 4 \cdot 10^{-13}$  эрг/см<sup>3</sup>, так что более вероятно, что рентгеновский фон обусловлен внегалактическими источниками.

2. *Взаимодействие гамма-лучей с излучением.* Фотон-фотонное взаимодействие, несомненно, существует как следствие современной электродинамики, но сечение очень мало. Другое дело, если может происходить рождение пар  $e^+e^-$ . Этот процесс обратен аннигиляции на лету, его сечение порядка  $10^{-24}$  см<sup>2</sup>.

Чтобы вычислить нужную энергию, вспомним, что  $E^2 - c^2 p^2 = M^2 c^4$ , где  $M$  — масса покоя системы. Применим это соотношение к двум фотонам с энергией  $E_1$  и  $E_2$  и импульсами  $p_1$  и  $p_2$  в нашей системе координат (индекс «1» употребляется для  $\gamma$ -кванта, «2» — для реликтового фотона,  $E_1 = c|p_1|$ ,  $E_2 = c|p_2|$ ).

Полная энергия будет  $E_1 + E_2$ , а полный импульс

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos \theta};$$

таким образом,

$$M^2 c^4 = 2E_1 E_2 \sqrt{1 - \cos \theta}.$$

Если рождается пара, то  $Mc^2 > 2m_e c^2$ . Следовательно, необходимо  $E_1 E_2 > m_e^2 c^4$ . Взяв  $E_2 = 4kT_0 = 10^{-3}$  эв, мы получим  $E_1 > 2,5 \cdot 10^{14}$  эв. Гашение  $\gamma$ -лучей более энергичных, чем предел в  $2,5 \cdot 10^5$  Гэв, очень резкое. Используя концентрацию реликтовых фотонов  $\sim 400 \text{ см}^{-3}$  и сечение  $10^{-24} \text{ см}^2$ , находим время жизни надпорогового  $\gamma$ -кванта:  $t \sim \frac{1}{n\sigma} \sim 10^{11} \text{ сек} \sim 10^4 \text{ лет}$ .

Экспериментальная ситуация не ясна. Не наблюдаются  $\gamma$ -кванты с энергией  $E \sim 10^5$  Гэв, но мягких  $\gamma$ -квантов тоже мало, так что неизвестно, есть ли излом, предсказанный в районе  $2,5 \cdot 10^5$  Гэв.

3. *Взаимодействие тяжелых частиц, космических протонов и ядер с излучением.* Прямое электромагнитное взаимодействие такого же типа, как и для электронов, уменьшается в  $(M/m_e)^2 \approx 4 \cdot 10^6$  раз и, следовательно, пренебрежимо мало. Но, когда энергия фотона в системе покоя тяжелых частиц достаточно велика, имеют место новые процессы:

а) рождение пар в поле частицы:  $\gamma + p \rightarrow e^+ + e^- + p$ ; порог  $E_\gamma \sim 1 \text{ Мэв}$ .

б) фотоядерные процессы, ведущие к возбуждению или развалу ядра;

в) рождение пионов  $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$  или  $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$   $E_\gamma \sim 140 \text{ Мэв}$  или выше для более тяжелых.

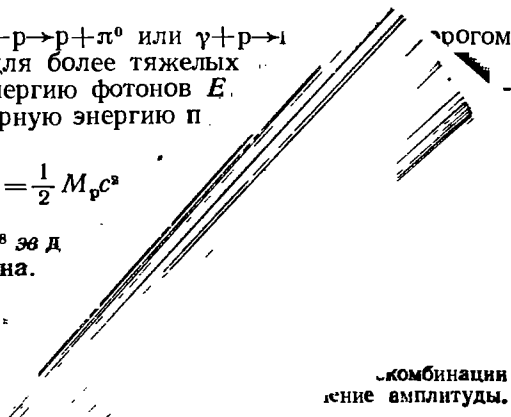
Взяв лабораторную энергию фотонов  $E$ , вычислить нужную лабораторную энергию  $p$  (для рождения частицы):

$$E = \frac{1}{2} M_p c^2$$

Это дает  $E = 10^9 M_p c^2 = 10^{18}$  эв для рождения пиона. атомному весу.

Оказывается, что не так трудно, как  $10^{22}$  эв.

Космические лучи с энергией нашей Галактикой,



комбинация  
амплитуды.

удержать их; в теории рассматриваются космические лучи внегалактического происхождения с возрастом порядка  $10^9$ — $10^{10}$  лет.

Подробное предсказание спектра космических лучей зависит от окончательных результатов измерения плотности энергии реликтового излучения. Путь для примирения существования космических лучей с большой энергией ( $>10^{20}$  эв) с большой плотностью излучения дается в цитированной работе Березинского, Зацепина (1969); по их представлению, такие космические лучи рождаются недалеко от наблюдателя из нейтрино с  $E > 10^{20}$  эв; нейтрино же не теряет энергии при движении. Обратная проблема — взаимодействие космических лучей с реликтовыми нейтрино — обсуждалась Качаровым (1965). Плотность нейтрино во Вселенной можно ограничить по их гравитационному влиянию на расширение Вселенной [Зельдович, Смородинский (1961)]; из этой оценки следует, что их слабое взаимодействие с космическими лучами не существенно.

При обсуждении взаимодействия космических лучей, проведенном выше, предполагалось, что космические лучи инжектируются в течение времени  $T$  порядка возраста нашей Галактики, т. е. около половины космологического времени. Если время взаимодействия больше, чем вышеупомянутое, то взаимодействие не существенно. Если же время взаимодействия  $t_{вз}$  короче, то концентрация космических лучей уменьшается в отношении  $t_{вз}/T$ . Если  $t_{вз}$  зависит от энергии, то характеристическое значение  $E_{характ}$ , при котором  $t_{вз}(E_{характ}) = T$ , должно давать излом в спектре космических лучей. Не нужно знать эволюцию температуры и плотности энергии фона, потому что  $T$  короче, чем космологическое время. Для заряженных частиц в космических лучах, задерживаемых галактическим магнитным полем, нельзя объяснить адиабатические потери импульса и энергии хаббловским расширением, потому что Галактика не расширяется.

Наконец, в последнее время выдвигается предположение о том, что самые энергичные частицы космических лучей рождаются близко, например в пульсаре Крабовидной туманности. Тогда возраст их мал и противоречия, связанные с потерей энергии, снимаются, но такие частицы должны приходить всегда из одного и того же участка неба.

Исследование космических лучей максимальной энергии необыкновенно увлекательно \*), но и очень трудно вследствие редкости событий. Нужно набрать достаточное число событий, чтобы проверить энергию и определить, нарушается ли изотропия.

\*) На основе данных о таких частицах делались даже предположения об ограниченной справедливости преобразования Лоренца [см. о таких попытках в статье Киржница (1973)]. По нашему мнению, такие предположения необоснованны.

Недавно было рассмотрено гипотетическое догалактическое космическое излучение и выдвинуто предположение, что  $\gamma$ -лучи являются остатками от аннигиляции антиматерии. В совершенно однородной Вселенной с однородно распределенным превышением барионов над антибарионами аннигиляция завершается при  $z \gg 10^{10}$  (см. § 3 гл. 7). При огромной плотности в этот период устанавливается полное равновесие. Следовательно, аннигиляция является значительным источником  $\gamma$ -лучей, только если она задерживается; возможная причина задержки — это неоднородное распределение материи и антиматерии. Детальная теория неоднородной аннигиляции откладывается до раздела V, где будет рассмотрена неоднородная Вселенная. Здесь мы обсудим проблему распространения  $\gamma$ -лучей.

Прежде всего, температура барионов и антибарионов низка по сравнению с  $M_p c^2$ , идет аннигиляция практически покоящихся частиц. Первичные продукты состоят главным образом из мезонов, но они короткоживущие, так что выживают только  $\gamma$ -лучи и нейтрино. Энергия  $\gamma$ -лучей составляет  $1/3$  от общей; их спектр имеет максимум вблизи  $200 \text{ Мэв}$ , верхний предел энергии  $940 \text{ Мэв}$ . Если аннигиляция проходит при некотором  $z$ , энергия  $\gamma$ -лучей, которые избежали взаимодействия, на сегодня в  $z$  раз меньше первичной. Стекер (1969), на основе результатов Ветте и др. (1970 \*), обращает внимание на горб в спектре  $\gamma$ -лучей около  $1\text{--}6 \text{ Мэв}$  (сегодня). Он приписывает его распаду  $\pi^0$ -мезонов, проходившему при  $z \sim 100$ . Аронс и Мак-Кри (1969) рассмотрели распространение энергичных  $\gamma$ -лучей с учетом их взаимодействия с плазмой и с учетом изменения энергии  $\gamma$ -лучей и плотности плазмы в ходе расширения Вселенной.

Когда энергия  $\gamma$ -фотонов больше, чем  $m_e c^2$ , сечение рассеяния уменьшается по сравнению с томсоновским \*\*).

Приблизительно

$$\sigma = \sigma_T \frac{m_e c^2}{E} \ln \frac{E}{m_e c^2}, \quad (8.9.5)$$

$$E > m_e c^2,$$

т. е. жесткие  $\gamma$ -кванты рассеиваются слабее. Но при некоторой

\*) Наблюдения ленинградских астрофизиков [Голенецкий и Мазец (1971)] показали, что данные группы Ветте о  $\gamma$ -фоне в области  $h\nu \sim 1 \text{ Мэв}$  сильно завышены.

\*\*) Второй важный факт для чистого томсоновского рассеяния заключается в том, что частота не меняется (когда  $h\nu \ll m_e c^2$ ). Следовательно, рассеяние не меняет мягкой части спектра, проинтегрированного по углу; если велика толщина, то замазываются только дискретные источники. Напротив, если  $h\nu \gg m_e c^2$ , потери энергии фотонов велики; в других процессах фотон уничтожается полностью.



энергии рождение пар на ядрах  $\gamma + (A, Z) = e^+ + e^- + (A, Z)$  становится более важным, чем рассеяние на электронах. Для водорода этот порог лежит вблизи 100 Мэв. Результат вычислений таков, что сейчас могут быть зарегистрированы только те  $\gamma$ -кванты с  $E_\gamma > 1$  Мэв, которые образовались при  $z < 100$ .

Полезно сравнить это обсуждение с косвенным методом обнаружения аннигиляции из-за выделения энергии и искажений в спектре. Этот метод будет работать вплоть до  $z \approx 10^8$  в широких пределах. Правда, здесь не будет специфических особенностей; любой процесс выделения энергии даст искажения спектра. Только обнаружение  $\gamma$ -квантов и измерение их спектра и углового распределения будет прямым указанием на аннигиляцию. Существующие же данные не убедительны.

# ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В КОСМОЛОГИИ И ОБРАЗОВАНИЕ ГАЛАКТИК



## ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о структуре Вселенной, включающий описание галактик и скоплений галактик, является одним из центральных в современной космологии.

Идеализированная картина строго однородной и изотропной Вселенной, изложенная в первых двух разделах, безусловно отражает реальную действительность, но отнюдь не всю действительность, а именно, эта картина не описывает возникновение галактик и их скоплений.

Идейные основы теории однородной Вселенной (включая теорию горячей Вселенной) с достаточной полнотой были сформулированы более 20 лет назад. Последние 10 лет принесли наблюдательные подтверждения концепции горячей однородной изотропной модели, но мало изменили теоретические взгляды.

В вопросах структуры и неоднородности Вселенной положение противоположное, теория находится в состоянии бурного развития.

Высокая степень однородности реликтового излучения (несущего информацию о состоянии при  $z \approx 1400$ ) наводит на мысль о том, что в эпоху рекомбинации водорода ( $z \approx 1400$ ) возмущения были малы. С другой стороны, весьма неоднородное распределение вещества в масштабах галактик и их скоплений в нашу эпоху свидетельствует о том, что неоднородности нарастали с эпохи рекомбинации водорода до настоящего времени. Такое нарастание возмущений естественно объясняется гравитационной неустойчивостью однородного распределения вещества. Первые главы (9—11) настоящего раздела посвящены различным аспектам линейной теории неустойчивости: в ньютоновском приближении для обычного газа, в теории горячей Вселенной с учетом взаимодействия обычной материи и излучения, в рамках общей теории относительности, когда длина волны возмущений сравнима с размером, характерным для Вселенной как целого.

Математически точная теория может быть развита только в линейном приближении, для малых возмущений, когда каждая индивидуальная волна возмущений, каждое собственное решение линейной системы уравнений эволюционирует независимо от других.

Небольшая гл. 12 посвящена вопросу о случайных возмущениях и об их описании как суммы (суперпозиции) индивидуальных собственных решений. Статистически заданные функции часто применяются в теории турбулентности, в теории передачи информации и помех, но, может быть, недостаточно известны и привычны астрофизикам, чем и объясняется написание этой главы.

Однако принципиальная трудность теории заключается в том, что структура Вселенной соответствует большим возмущениям: средняя плотность вещества в скоплениях галактик в несколько раз больше средней плотности вещества во всем пространстве, а в галактиках — на несколько порядков больше. Линейная теория малых возмущений заведомо непригодна в этом круге явлений. Поэтому гл. 13, в которой мы приступаем к описанию реальной структуры Вселенной, содержит также развитие теории возмущений на случай возмущений большой амплитуды. Наряду с теорией возникновения структуры Вселенной как следствия эволюции малых первичных неоднородностей распределения материи в пространстве (так называемая теория адиабатических возмущений) рассматриваются и другие, альтернативные гипотезы образования структуры: гипотеза начальной турбулентности, гипотеза энтропийных возмущений и гипотеза зарядово-симметричного мнра, разбивающегося на области вещества и антивещества.

Оправданием такого обилия гипотез является тот факт, что вся современная теория возникновения галактик нацелена на расчет эволюции возмущений при данных начальных условиях на возмущения, но сам выбор начальных условий остается в большой мере произвольным. Чем обусловлено возникновение первичных возмущений, каков их характер — об этом существуют только смутные догадки (см. гл. 14). Выбор разного характера начальных возмущений и приводит к разным теориям происхождения галактик.

Лишь путем сопоставления следствий теорий с наблюдениями мы приходим к выводу о предпочтительности теории адиабатических возмущений. Надо подчеркнуть, что надежность этого вывода существенно меньше, чем достоверность утверждений классической теории эволюции Вселенной в целом, излагаемой в разделах I и II.

В гл. 15 излагается вопрос о степени однородности распределения плотности и изотропии скорости расширения в большом масштабе (больше  $100 Mpc$ ), содержащем много скоплений. Поистине удивителен контраст между клочковатым распределением материи в малом масштабе и закономерным, равномерным распределением в большом масштабе.

Здесь средством исследования является реликтовое излучение. Результаты до сих пор носят характер неравенств — возмущения меньше определенного предела.

Оценки распределения материи по неоднородностям разного масштаба на сегодняшний момент и расчеты эволюции неоднород-

ностей в прошлом позволяют, хотя и грубо, оценить степень начальной неоднородности вблизи сингулярности.

Вырисовывается определенная характеристика спектра начальных возмущений. Намечается программа дальнейших исследований.

Особняком стоит гл. 16, посвященная гравитационным волнам. Сенсационные опыты Вебера по попыткам обнаружения гравитационных волн, способствовавшие возбуждению интереса к ним (в частности, и в связи с их ролью в космологии), не подтвердились. Но осталась необходимость трезвого теоретического анализа всего диапазона длин гравитационных волн, анализа их возможного значения в эволюции Вселенной.

Гравитационные волны остаются примером труднонаблюдаемой формы энергии. Приходится мобилизовать косвенные методы для суждения о роли этих волн в космологии.

## ГЛАВА 9

### ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В НЬЮТОНОВСКОЙ ТЕОРИИ

#### § 1. Теория Джинса

В этом разделе книги мы рассмотрим физические процессы, приводящие к разбиению однородной расширяющейся среды на отдельные сгустки, т. е. приводящие к появлению небесных тел и их систем.

Впервые задачу об устойчивости однородного распределения вещества математически поставил и решил в рамках теории малых возмущений Джинс (1902).

Это решение подробно изложено в известном курсе Джинса (1929). Несмотря на некоторую непоследовательность, которая будет отмечена и исправлена в последующем изложении, теория Джинса до сих пор представляет не только исторический интерес. Ее ценность подчеркивается такими прочно укоренившимися названиями, как «джинсовская длина волны», «джинсовский инкремент».

Главное в теории Джинса — учет двух факторов: 1) тяготения, стремящегося собрать вещество в отдельные комки или сгустки, и 2) давления, стремящегося выравнять неоднородности, равномерно распределить вещество.

Изложим сперва теорию в том наиболее простом виде, в каком она была создана ее автором.

Напомним общие уравнения гидродинамики и тяготения в ньютоновском приближении для идеального газа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \operatorname{grad}) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P + \operatorname{grad} \varphi &= 0, \\ \Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= 4\pi G \rho, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{u} \operatorname{grad}) S &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.1)$$

где  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{u}$  — скорость,  $S$  — удельная энтропия вещества,  $\varphi$  — гравитационный потенциал. Предположим вслед за Джинсом, что невозмущенным состоянием является покоящийся газ ( $\mathbf{u}=0$ ), равномерно распределенный в пространстве ( $\rho=\rho_0=\text{const}$ ,  $S=S_0=\text{const}$ ).

$=\text{const}$ ). Давление его везде постоянно ( $P=P(\rho_0, S_0)=\text{const}$ ). Молчаливо предполагается, что и силы тяготения в безграничном равномерно распределенном газе каким-то образом исчезают,  $\text{grad } \varphi=0$ , хотя это и противоречит уравнению Пуассона. Это и есть та непоследовательность, о которой мы говорили выше. К этому вопросу мы вернемся позже.

Для получения решения для возмущений обычно применяют метод разложения произвольного возмущения по какой-либо системе ортогональных функций — метод Фурье — и ищут затем развитие во времени отдельных составляющих возмущения. В нашем случае наиболее просто разложить возмущение на систему плоских волн.

Возмущенное решение ищем в виде одной плоской волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , наложенной на невозмущенное решение.

Итак, предположим:

$$\left. \begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_0 [1 + \delta(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}], \\ u(\mathbf{x}, t) &= 0 + v(\mathbf{x}, t) = w(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \\ \varphi(\mathbf{x}, t) &= \varphi_0 + f(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \\ S &= S_0 + \sigma(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \\ P &= P_0 + \frac{\partial P}{\partial \rho}(\rho - \rho_0) + \frac{\partial P}{\partial S}(S - S_0) = P_0 + b^2 \rho_0 \delta e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + h^2 \sigma e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.2)$$

В выражении для скорости написано первое слагаемое «0», подчеркивающее, что невозмущенное решение  $u_0=0$ .

В последнем выражении для давления введены обозначения  $\frac{\partial P}{\partial S} = h^2$ ,  $\frac{\partial P}{\partial \rho} = b^2$ , причем  $b$  есть адиабатическая скорость звука.

Подставим эти выражения в уравнения гидродинамики; как полагается в теории возмущений, рассматриваем только члены, линейные по  $\delta$ ,  $w$ ,  $f$ ,  $\sigma$ . Члены нулевого порядка (не содержащие  $\delta$ ,  $w$ ,  $f$ ,  $\sigma$ ) описывают невозмущенное решение, и предполагается, что для них уравнения выполняются тождественно.

Членами второго порядка (квадраты и произведения малых величин  $\delta^2$ ,  $\delta\sigma$  и т. п.) пренебрегаем.

Получим систему линейных однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} + i\mathbf{k}\mathbf{w} &= 0, \\ \frac{dw}{dt} + i\mathbf{k}f + i\mathbf{k}b^2\delta + i\mathbf{k}h^2\rho_0^{-1}\sigma &= 0, \\ k^2 f &= -4\pi G\rho_0\delta, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.3)$$

В теории Джинса невозмущенное решение не зависит от времени. Следовательно, в уравнениях (9.1.3) коэффициенты  $\rho_0$ ,  $b^2$ ,  $k$  постоянны, время  $t$  входит только под знаком дифференциала. В этом случае общая теория предсказывает определенный, а именно экспоненциальный, характер зависимости возмущений от времени \*):

$$\delta = \delta_0 e^{\omega t}, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}_0 e^{\omega t}, \quad f = f_0 e^{\omega t}, \quad \sigma = \sigma_0 e^{\omega t}. \quad (9.1.4)$$

Задачей теории является определение величины  $\omega$  и соотношения между величинами  $\delta$ ,  $\mathcal{W}$ ,  $f$ ,  $\sigma$  в собственных решениях. Абсолютная амплитуда собственного решения зависит от начальных условий.

Итак, вернемся к нашей задаче. Подставляя (9.1.4) в систему (9.1.3), получим

$$\left. \begin{aligned} \omega \delta_0 &= -i(k \mathcal{W}_0), \\ \omega \mathcal{W}_0 &= -i k f_0 - i k b^2 \delta_0 - i k \rho_0^{-1} h^2 \sigma, \\ -k^2 f_0 &= 4\pi G \rho_0 \delta_0, \\ \omega \sigma_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.5)$$

#### А. Адиабатические возмущения.

Наиболее интересно решение с  $\omega \neq 0$ , т. е. решение, зависящее от времени. В этом случае  $\sigma_0 = 0$  и вектор  $\mathcal{W}_0$  параллелен волновому вектору  $k$ . Введем обозначение

$$\mathcal{W}_0 = \omega_0 \frac{k}{k} \quad (k = |k|)$$

и получим окончательно систему скалярных уравнений для возмущений, зависящих от времени, с  $\omega \neq 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \omega \delta_0 &= -i k \omega_0, \\ \omega \omega_0 &= -i k f_0 - i k b^2 \delta_0, \\ -k^2 f_0 &= 4\pi G \rho_0 \delta_0. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.6)$$

Система (9.1.6) имеет нетривиальное решение при условии

$$\omega = \pm \sqrt{4\pi G \rho_0 - b^2 k^2}. \quad (9.1.7)$$

\*) Примерный ход рассуждений таков: обозначим решение системы через  $\Phi(t)$ , где  $\Phi$  — совокупность величин  $\delta$ ,  $\omega$ ,  $f$ ,  $\sigma$  в определенных соотношениях. В силу линейности и однородности уравнений величина  $A\Phi(t)$ , где  $A$  — постоянный множитель, тоже является решением. С другой стороны, в силу того, что коэффициенты уравнений постоянны, решение допускает также сдвиг по времени:  $\Phi(t+\tau)$  также является решением.

Предполагается, что существуют такие решения («собственные» решения), для которых обе группы преобразований дают один и тот же результат  $A\Phi(t) = \Phi(t+\tau)$ , причем для каждого  $\tau$  есть свое (одно или несколько) значение  $A$ . Такое функциональное соотношение имеет место, если  $\Phi = \Phi_0 e^{\omega t}$ ,  $A = e^{\omega \tau}$ .

Ясно, что свойства решения критически зависят от знака подкоренного выражения в (9.1.7). При заданных свойствах вещества ( $\rho_0$  и  $b^2$ ) существует критическое значение  $k_{\text{дж}}$ , определяемое условием  $\omega=0$ :

$$\left. \begin{aligned} 4\pi G\rho_0 - b^2 k_{\text{дж}}^2 &= 0, \\ k_{\text{дж}} &= \frac{1}{b} \sqrt{4\pi G\rho_0}, \quad \lambda_{\text{дж}} = \frac{2\pi}{k_{\text{дж}}} = b \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.8)$$

Здесь  $\lambda_{\text{дж}}$  — критическая длина волны, соответствующая критическому значению  $k_{\text{дж}}$  (индекс «дж» от «джинсовский»).

Рассмотрим отдельно следствия теории гравитационной неустойчивости в случае  $\lambda > \lambda_{\text{дж}}$  ( $k < k_{\text{дж}}$ ) и в случае  $\lambda < \lambda_{\text{дж}}$  ( $k > k_{\text{дж}}$ ).

1)  $\lambda > \lambda_{\text{дж}}$  ( $k < k_{\text{дж}}$ ), величина  $\omega$ , определяемая (9.1.7), действительна. Возможны два решения: с положительным и отрицательным  $\omega$ . Существование решения с положительным  $\omega$ , растущего, как  $e^{\omega t}$  ( $\omega > 0$ ), означает гравитационную неустойчивость однородного распределения вещества. Из уравнений следует, что при вещественном  $\omega$  отношение  $\delta_0$  к  $\omega_0$  содержит мнимую единицу  $i$ . Как известно, при пользовании комплексными величинами в расчетах, относящихся к действительным переменным, таким, как плотность, давление, скорость, подразумевается, что уравнения удовлетворяются для вещественной части комплексных величин, входящих в расчет. Предположим, что  $\delta_0$  выбрано вещественным, и выпишем возрастающее решение в вещественном виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \text{Re } \rho_0 (1 + \delta_0 e^{\omega t + i k x}) = \rho_0 (1 + \delta_0 e^{\omega t} \cos kx), \\ v &= \text{Re } \left( \frac{k}{k} e^{i k x} i \frac{\omega}{k} \delta_0 e^{\omega t} \right) = -\frac{k\omega}{k^2} e^{\omega t} \sin kx. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.9)$$

Итак, мнимая единица в отношении между возмущениями плотности и скоростью движения означает, что эти величины сдвинуты по фазе: в местах максимума и минимума плотности равна нулю скорость, в местах максимума модуля скорости равно нулю возмущение плотности. При  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow 0$  инкремент  $\omega \rightarrow \sqrt{4\pi G\rho_0}$ . Время  $\tau$  возрастания возмущений в  $e$  раз  $\left( \tau = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho_0}} \right)$  по порядку величины совпадает с космологическим временем, за которое в модели Фридмана плотность изменяется от  $\rho = \infty$  до  $\rho = \rho_0$ :

$$\rho = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{6\pi G\rho_0}},$$

и это не является случайным совпадением.

2)  $\lambda < \lambda_{\text{дж}}$  ( $k > k_{\text{дж}}$ ). В этом случае формулу (9.1.7) лучше переписать в виде

$$\omega = \pm i \sqrt{b^2 k^2 - 4\pi G\rho_0}. \quad (9.1.10)$$



При мнимой частоте  $\omega$  отношение между возмущением плотности и скоростью вещественное.

После перехода к вещественным физическим величинам это означает, что плотность и скорость имеют одну и ту же фазу, максимум модуля скорости совпадает с максимумом и минимумом плотности. При этом собственное решение имеет характер бегущей волны, скорость движения в направлении распространения пропорциональна возмущению плотности в каждой точке, амплитуда не зависит от времени:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 [1 - \delta_0 \cos(kx - |\omega|t)], \\ v &= \frac{k\omega}{k^2} \delta_0 \cos(kx - |\omega|t), \\ |\omega| &= \sqrt{k^2 b^2 - 4\pi G \rho_0}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.11)$$

Рассмотрим предельный случай весьма коротких волн  $k^2 \gg k_{дж}^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{b^2}$ . В выражении (9.1.10) можно пренебречь величиной  $4\pi G \rho_0$  по сравнению с  $k^2 b^2$ , и решение (9.1.11) переходит в простые звуковые волны, распространяющиеся со скоростью звука.

Итак, главный вывод заключается в том, что для длинноволновых возмущений основную роль играет тяготение, обуславливающее неустойчивость равномерного распределения и существование экспоненциально нарастающих возмущений плотности; давлением в этом случае можно пренебречь.

Для коротковолновых возмущений основную роль играет давление, возмущение плотности сопровождается возмущением давления, которое приводит к распространению акустических волн постоянной амплитуды \*). Для коротковолнового возмущения можно пренебречь ролью тяготения, в следующем приближении тяготение меняет скорость звука, но амплитуда остается постоянной, неустойчивость не появляется.

Граница гравитационной неустойчивости определяется условием  $\lambda = \lambda_{дж}$ , т. е. длиной волны Джинса. Обычно говорят также о «массе Джинса» — массе, заключенной в объеме  $(\lambda_{дж}/2)^3$ :

$$M_{дж} = \left( \frac{\lambda_{дж}}{2} \right)^3 \rho_0. \quad (9.1.12)$$

Это наименьшая масса, для которой давление еще не может помешать росту плотности под действием гравитации. Поэтому

\*) При определенном типе начальных условий решение имеет вид стоячих волн:

$$\rho = \rho_0 (1 + \delta_0 \cos(kx) \cos \omega t), \quad v = \frac{k\omega}{k^2} \sin \delta_0(kx) \sin \omega t;$$

ниже будет показано, что в космологической задаче получается именно такое решение.

предполагается, что с течением времени однородно распределенное вещество переходит в отдельные объекты (звезды) с массой, не меньшей чем  $M_{\text{дж}}$  \*). Удобно выразить  $M_{\text{дж}}$  и  $\lambda_{\text{дж}}$  в астрономических единицах, т. е. в массах Солнца и парсеках:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\text{дж}} &= 27 \left( \frac{T^{\circ}\text{K}}{\mu} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho_0}{10^{-24}} \right)^{-1/2} \text{пс}, \\ M_{\text{дж}} &= 33 \left( \frac{T^{\circ}\text{K}}{\mu} \right)^{3/2} \left( \frac{\rho_0}{10^{-24}} \right)^{-1/2} M_{\odot}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.13)$$

Здесь  $\mu$  — атомный вес, рассчитанный на одну частицу ( $\mu=1$  для нейтрального водорода,  $\mu=1/2$  для ионизованного водорода),  $\frac{\rho_0}{10^{-24}} = 1,7n_{\text{H}}$  для нейтрального водорода ( $n_{\text{H}}$  — плотность числа атомов водорода).

Теория Джинса в том виде, в каком она изложена выше, формально ошибочна, поскольку невозмущенное однородное распределение вещества предполагается стационарным. Между тем в действительности невозмущенное решение должно быть нестационарным, поскольку постоянной плотности  $\rho_0$  соответствует переменный гравитационный потенциал  $\phi$ . Эту «болезнь» нельзя вылечить, взяв в качестве невозмущенного такое статическое решение, в котором гравитация уравновешена градиентом давления: как подробно показано в ТТ и ЭЗ, такое тело имеет конечную массу и размеры порядка  $\lambda_{\text{дж}}$ , так что к нему теория Джинса неприменима. Однородное распределение плотности должно быть нестационарным, т. е. с зависящей от времени плотностью, с общим расширением (или сжатием).

На первый взгляд нестационарное решение очень сильно отличается от стационарного, которое использовано в теории Джинса. Но, как мы увидим, все же результаты точной теории весьма близки к результатам Джинса. Формально ошибочная теория Джинса является хорошим приближением и помогает пониманию точной, но более сложной теории.

Как следует обобщить теорию Джинса?

1. Учесть зависимость  $\rho_0 = \rho_0(t)$ , причем  $\rho_0(t)$  определяется космологическим решением.

2. Учесть, что давление и скорость звука также зависят от времени:

$$P_0 = P(\rho_0) = P(\rho_0(t)).$$

---

\*) На какие именно массы (ио не меньше чем  $M_{\text{дж}}$ ) разобьется среда, зависит от спектра малых начальных возмущений — конкретно об этом говорится далее. Обычно амплитуда возмущения тем больше, чем меньше его масштаб. Поэтому в таком случае среда разбивается на наименьшие массы, которым давление не мешает сгущаться, т. е. на массы в среднем  $\sim M_{\text{дж}}$ . Однако, как мы увидим дальше, в адиабатической теории образования галактик спектр возмущений таков, что возникают объекты со средней массой много больше  $M_{\text{дж}}$ .

3. В ходе расширения длины волн данного элементарного возмущения возрастают так же, как и расстояния между каждой парой частиц:  $\rho_0 \sim a^{-3}(t)$ ,  $\lambda \sim a(t)$ ,  $k \sim a^{-1}(t)$ .

4. Подставляя  $\rho$ ,  $k$ ,  $b$  в (9.1.7) и (9.1.10), мы получим  $\omega = \omega(t)$ . Очевидным обобщением выражения  $e^{\omega t}$  является  $e^{\int \omega dt}$ . Это соответствует предположению, что в нестационарном случае возмущения удовлетворяют дифференциальному уравнению вида  $\frac{d\delta}{dt} = \omega(t)\delta$ . В § 3 этой главы точное решение задачи гравитационной неустойчивости однородного вещества сравнивается с результатами, полученными с помощью такого обобщения результатов Джинса; хорошее согласие между ними показывает, что «ошибочная» теория верна по существу.

#### Б. Энтропийные и вихревые возмущения.

Обратимся к решениям, соответствующим нулевой частоте, т. е. к таким возмущениям, которые вовсе не зависят от времени в джинсовской постановке задачи. Условие  $\omega\sigma = 0$  для возмущения энтропии допускает решение  $\sigma \neq 0$  при  $\omega = 0$ . Очевидно, что в отсутствие теплопроводности начальная неравномерность распределения энтропии с течением времени сохраняется, не изменяется. Полное решение с  $\omega = 0$  требует также механического равновесия; из уравнения движения получим

$$\delta_0 = - \frac{h^2 \sigma}{\rho_0 b^2 - 4\pi G \rho_0^2 k^{-2}}. \quad (9.1.14)$$

При большом  $k$ , т. е. при малой длине волны, можно пренебречь вторым членом в знаменателе, т. е. силами тяготения. В этом случае связь  $\delta_0$  и  $\sigma$  соответствует простому условию постоянства давления. При учете сил тяготения условие равновесия меняется. Знаменатель обращается в нуль как раз при джинсовском критическом  $k_{\text{дж}}$ , когда  $\omega = 0$  также и для возмущений плотности и скорости, рассмотренных выше в п. А. Можно убедиться, что в задаче с конечными начальными значениями  $\delta_0$  и  $\sigma$  при  $t=0$  значения  $\delta_0$  при  $t \neq \infty$  остаются конечными, хотя при  $k \rightarrow k_{\text{дж}}$  они и представляются как разность двух бесконечных величин.

Другой тип решения с  $\omega = 0$  получается, если вектор скорости  $\mathbf{v}$  выбрать перпендикулярным волновому вектору, так что  $(\mathbf{v}\mathbf{k}) = 0$ . Тогда из уравнений следует  $\omega = 0$ , можно принять также  $\sigma = 0$  (случай  $\sigma \neq 0$  был выделен выше) и  $\delta_0 = 0$ ,  $f = 0$ .

Очевидно, что при  $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$  равна нулю дивергенция скорости (в полном соответствии с тем, что плотность остается постоянной при таком движении), но отличен от нуля ротор скорости:

$$\text{rot } \mathbf{v} = i [\mathbf{v} \times \mathbf{k}]. \quad (9.1.15)$$

Поэтому такое движение называется вихревым. При данном направ-

лении  $k$  есть два направления, перпендикулярных  $k$  и между собой, т. е. два линейно независимых вихревых движения.

Подсчитаем общее число типов возмущений с данным  $k$ : два продольных с  $\omega = \sqrt{4\pi G\rho_0 - b^2 k^2}$  и  $\omega = -\sqrt{4\pi G\rho_0 - b^2 k^2}$ , одно энтропийное и два вихревых — итого пять типов.

Начальное состояние среды характеризуется заданием плотности, энтропии и скорости. Скорость является вектором, т. е. характеризуется тремя компонентами. Следовательно, начальное состояние характеризуется заданием всего пяти величин, что как раз и позволяет однозначно определить амплитуды пяти независимых типов возмущений.

До сих пор рассматривались возмущения с заданной периодической зависимостью от пространственных координат ( $e^{ikx}$ ); возмущения с произвольной зависимостью от координат нужно сперва разложить в интеграл Фурье (об этом разложении см. ниже, гл. 12). Сейчас продолжим рассмотрение отдельных волн с периодической зависимостью от координат.

## § 2. Неустойчивость расширяющегося однородного вещества

Неустойчивость расширяющегося однородного вещества в ньютоновском приближении была доказана Боннором (1957). В качестве невозмущенного решения он использовал нестационарные изотропные космологические модели. Такие модели были рассмотрены в первом разделе. Напомним решение, описывающее эволюцию изотропно расширяющегося однородного вещества. Точное решение невозмущенной системы уравнений (9.1.1) имеет вид

$$u = H(t)x, \quad \varphi_0 = \frac{2\pi G}{3}\rho_0(t)x^2, \quad \rho = \rho_0(t), \quad P = P_0(t). \quad (9.2.1)$$

Решением (9.2.1) удовлетворены все уравнения, включая уравнение Пуассона, правда, ценой бесконечного потенциала и бесконечной скорости на пространственной бесконечности:  $x \rightarrow \infty$ ,  $u \rightarrow \infty$ .

В (9.2.1)  $x$  — радиус-вектор,  $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ,  $H(t)$  и  $\rho_0(t)$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\rho_0}{dt} = -3H\rho_0, \quad \frac{dH}{dt} + H^2 = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0. \quad (9.2.2)$$

Возмущения будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} &= \delta(t) e^{ik(t)x} = \delta(t) e^{ikx/a(t)}, \\ x &= \text{const}, \quad k = \frac{\kappa}{a(t)} \end{aligned} \right\} \quad (9.2.3)$$

в соответствии с высказанными в конце § 1 этой главы соображениями; длина волны возмущения увеличивается при расширении Вселенной. Для возмущений скорости и гравитационного потенциала запишем:

$$\mathbf{v} = w(t) \frac{\mathbf{k}}{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \varphi = \varphi_0 + f(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}; \quad (9.2.4)$$

возмущения скорости предполагаются потенциальными, т. е.  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{k}$ . Невозмущенное движение частицы описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = H(t) \mathbf{x},$$

общее решение которого имеет вид

$$\mathbf{x} = a(t) \mathbf{q},$$

где

$$a(t) = \exp \left( \int H(t) dt \right).$$

В релятивистской теории  $a(t)$  определяет радиус Вселенной. В нерелятивистской ньютоновской теории  $a(t)$  — это масштабный множитель, определяющий изменение расстояния между каждой парой частиц. Абсолютное значение  $a(t)$  в ньютоновской теории несущественно, имеет смысл лишь отношение  $\frac{a(t_1)}{a(t_2)}$ . Величина  $\mathbf{q}$  есть лагранжева координата, постоянный (не зависящий от времени) вектор  $\mathbf{x}$  есть волновой вектор в лагранжевых координатах.

Выше мы предположили, что возмущения имеют вид

$$\delta = \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0(t)}{\rho_0(t)} = \delta(t) e^{i\mathbf{x}\mathbf{q}},$$

и аналогично для скорости и потенциала.

Справедливость этого предположения проверяется непосредственно подстановкой величин  $\delta$ ,  $w$ ,  $f$  в основные уравнения. Если учесть, что  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t)$ ,  $\mathbf{x} = \text{const}$ , то окончательно уравнения для величин  $\delta$ ,  $w$ ,  $f$  могут быть приведены к виду (множитель  $e^{i\mathbf{x}\mathbf{q}}$  выпадает из уравнений)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= -ikw, \\ \frac{dw}{dt} + Hw &= -i \frac{\delta}{k} (4\pi G \rho_0 - k^2 b^2), \\ f &= 4\pi G \rho_0 \delta / k^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.2.5)$$

Это — система уравнений первого порядка с зависящими от времени коэффициентами  $k(t)$ ,  $H(t)$ ,  $\rho_0(t)$ ,  $b(t)$  (индекс при  $\rho$  дальше опускаем), которые определяются невозмущенным решением и уравнением состояния газа. При  $H=0$  и  $\rho$ ,  $k$ ,  $b = \text{const}$  система

(9.2.5) переходит в уравнения Джинса. Из (9.2.5) легко получить одно уравнение второго порядка:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - (4\pi G\rho_0 - b^2 k^2) \delta = 0. \quad (9.2.6)$$

В общем случае решение и исследование этого уравнения довольно громоздки. Поэтому мы начнем с простейших случаев. Уравнение (9.2.6) сильно упрощается, если предположить  $P \sim \rho^{1/3}$ , так что скорость звука  $b = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)^{1/2} \sim \rho^{1/6}$ . Заметим, что  $\rho \sim a^{-3}$ ,  $k^2 \sim a^{-2}$ .

При выбранном уравнении состояния  $b^2 \sim \rho^{1/3} \sim a^{-1}$  и, следовательно, оба члена в скобках уравнения (9.2.6) пропорциональны  $a^{-3}$ , т. е. находятся в постоянном отношении. В этом случае для данного сопутствующего объема (для данной массы или для данной системы частиц) отношение внутренней энергии и гравитационной энергии остается постоянным в ходе расширения. Эти же свойства проявляются и в возмущениях.

Сделаем и второе упрощающее предположение — рассмотрим случай «плоской Вселенной», для которого невозмущенное движение описывается формулами

$$\rho = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad a = a_1 t^{1/3}, \quad k = k_1 t^{-1/3}, \quad H = \frac{2}{3} t^{-1}, \quad b = b_1 t^{-1/3}.$$

В этом случае уравнение (9.2.6) приводится к виду

$$t^2 \ddot{\delta} + \frac{4}{3} t \dot{\delta} - \left( \frac{2}{3} - b_1^2 k_1^2 \right) \delta = 0. \quad (9.2.7)$$

Это уравнение имеет степенные решения:

$$\delta = \delta_1 t^n, \quad \omega = \omega_1 t^{n-1/3},$$

где

$$n = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - b_1^2 k_1^2}. \quad (9.2.8)$$

Очевидно, решение критически зависит от знака подкоренного выражения в (9.2.8). Этот результат поучительно сравнить с теорией Джинса. Из (9.2.8) следует, что подкоренное выражение для  $n$  обращается в нуль (показатель  $n$  при этом есть  $n = -1/6$ ) при

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{k_{\text{кр}}} t^{1/3} = \frac{6}{5} 2\pi b_1 t^{1/3} = \frac{6}{5} 2\pi b t. \quad (9.2.9)$$

Для сравнения укажем, что в теории Джинса критическая длина волны определялась формулой  $\lambda_{\text{дж}} = \frac{2\pi b}{\sqrt{4\pi G\rho}}$ . Подставляя  $\rho = \frac{1}{6\pi G t^2}$ , получим

$$\lambda_{\text{дж}} = \sqrt{\frac{3}{2}} 2\pi b t. \quad (9.2.10)$$

В расширяющейся Вселенной критическая длина волны по порядку величины близка к расстоянию, проходимому звуком за время расширения  $bt$  или, точнее,  $\int_0^t b dt$ . Этот результат широко используется

ниже. Все различие между точным значением критической длины волны Джинса и приближенным, полученным из теории Джинса заключается в различии множителей  $6/5 = 1,2$  и  $\sqrt{3/2} = 1,225$ . Близки и другие выводы точной теории и теории Джинса.

Для  $k \ll k_{\text{кр}}$  получаем  $n_1 = 2/3$ ,  $n_2 = -1$ . Обобщая результаты Джинса (как указано в § 1), мы получили бы

$$\delta = e^{\pm \int \sqrt{4\pi G \rho} dt} = e^{\pm \sqrt{1/3} \ln t} = t^{\pm \sqrt{1/3}}.$$

Другому предельному случаю,  $k \gg k_{\text{кр}}$ , в точной теории Боннора соответствуют звуковые волны:

$$\delta = t^{-1/6} \pm i b_1 k_1 e^{i k x} = t^{-1/6} \exp(i k x \pm i b_1 k_1 \ln t); \quad (9.2.11)$$

фазовая скорость совпадает с мгновенной скоростью звука:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b_1 k_1}{|k_1| t^{-1/6}} \frac{d \ln t}{dt} = b_1 t^{-1/6} = b. \quad (9.2.12)$$

Появление в формуле (9.2.11) множителя  $t^{-1/6}$  легко объяснить с помощью теории адиабатических инвариантов. Согласно этой теории, энергия звуковой волны изменяется пропорционально ее частоте \*),  $E = \text{const} \cdot \nu$ .

Частота  $\nu = \frac{b}{\lambda} \sim b_1 t^{-1/6} k_1 t^{-1/6} \sim t^{-1}$ ; энергия звука в сопутствующем объеме  $V$  есть  $E \rightarrow \rho v^2 V \sim \rho V (b \delta)^2 \sim (b \delta)^2 \sim t^{-2/3} \delta^2$ . Поэтому  $\delta^2 \sim t^{-1} t^{2/3} \sim t^{-1/3}$ ,  $\delta \sim t^{-1/6}$ .

Если при обобщении теории Джинса учесть этот множитель также и для апериодических длинных волн, то получим закон  $t^{-1/6} \pm \sqrt{1/3}$ , который очень хорошо совпадает с точным решением  $t^{2/3}$ ,  $t^{-1}$  (так как  $-\frac{1}{6} + \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,65$ ,  $-\frac{1}{6} - \sqrt{\frac{2}{3}} \approx -0,98$ ).

В работе Боннора (1957) рассматривалась эволюция со временем не плоских волн, а сферических. Очевидно, это не может изменить результаты линейной теории, так как с помощью набора плоских волн можно построить сферическую волну.

Отметим, наконец, что в общую классификацию возмущений в расширяющейся Вселенной нужно включить также энтропийные и

\*) В шутильной статье Парадоксова (1966) «Как квантовая теория помогает понять классическую механику» объясняется, что если  $E = N h \nu$ , где  $N$  — число квантов в данной волне или в данном возбужденном состоянии осциллятора, то  $N = \text{const}$  при медленном изменении параметров.

вихревые возмущения, наподобие того, как это сделано было в теории Джинса (§ 1).

Энтропийные возмущения от времени не зависят, лишь длина волны растет по мере всеобщего расширения:

$$\sigma(x, t) = \sigma_0 e^{ik(t)x}, \quad k(t) = \frac{\kappa}{a(t)}, \quad (9.2.13)$$

$$\sigma_0 = \text{const}, \quad \kappa = \text{const}.$$

Выражения для соответствующего возмущения плотности в общем случае произвольного уравнения состояния достаточно сложно. В принципе начальное возмущение энтропии может вызывать нарастающее возмущение плотности; к этим вопросам мы вернемся позже.

Вихревые возмущения в расширяющейся Вселенной представляют собой такие же возмущения скорости, направленные перпендикулярно волновому вектору, как и в § 1:

$$v(x, t) = w(t) e^{ikx}, \quad (wk) = 0. \quad (9.2.14)$$

При этом возмущения всех других величин — плотности, потенциала, энтропии — тождественно равны нулю.

Для амплитуды вихревой скорости получается уравнение

$$\frac{dw}{dt} + H(t)w = 0.$$

Сопоставляя его с законом расширения

$$\frac{da}{dt} - H(t)a = 0,$$

получим ответ

$$w(t) = \frac{w_0}{a(t)}, \quad (9.2.15)$$

где  $w_0$  — постоянный вектор, перпендикулярный волновому вектору  $k$ ; величина и направление  $w_0$  определяются начальными условиями. Этот результат справедлив при любом законе  $a(t)$ , в частности и в случае, соответствующем закрытому ( $\Omega > 1$ ) или открытому ( $\Omega < 1$ ) миру. Для единичной волны, т. е. при отсутствии возмущений другого типа и возмущений с другими волновыми векторами, результат справедлив и при конечной, не малой амплитуде  $w_0$ .

В следующем параграфе мы вернемся к растущим и затухающим возмущениям плотности, которые сопровождаются продольным движением вещества,  $v \parallel k$ . Общий случай произвольного уравнения состояния  $P(\rho)$  и не плоской Вселенной приводит к сложным вычислениям и здесь не рассматривается [см. Хантер (1962), Саведов и Вила (1962)]. Ниже будет подробно рассмотрен случай малых  $k$  (при этом уравнение состояния в уравнении задачи не входит) и неплоской Вселенной.



### § 3. Крупномасштабные возмущения: автомодельное решение

Полученные выше результаты показывают, что давление не влияет на развитие крупномасштабных возмущений. Этот факт весьма важен и заслуживает более подробного обсуждения.

В рамках метода Фурье уравнения для возмущений плотности  $\delta$  и произведения  $ikw = D$  не зависят от  $k$  в пределе  $k \rightarrow 0$ . Следовательно, возмущения любой длины волны с  $k \ll k_{\text{дж}}$  развиваются по одному и тому же закону с течением времени. Поэтому в этом случае использование разложения в ряд Фурье является излишним. Точнее, для каждой волны есть два решения [для возмущения плотности и продольной скорости — возрастающее и убывающее ( $\delta \sim t^{2/3}$  и  $\delta \sim t^{-1}$ ) в простейшем случае плоского мира]. Поэтому можно предвидеть, что решение уравнений движения вещества с учетом тяготения, но без учета давления, можно будет представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_0(t) [1 + \delta_i(t) \psi_i(\mathbf{q}) + \delta_d(t) \psi_d(\mathbf{q})], \\ D(\mathbf{x}, t) &= -\psi_i(\mathbf{q}) \frac{d\delta_i}{dt} - \psi_d(\mathbf{q}) \frac{d\delta_d}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.1)$$

Для одной волны произведение  $ikw$  равно дивергенции скорости. Мы обобщаем на случай произвольного движения  $D = \text{div } w$ . Два решения — с индексом  $i$  (increasing — растущее) и с индексом  $d$  (decreasing — затухающее) — факторизованы, т.е. записаны в виде произведения функции времени на функцию координат. Так как возмущенная область расширяется в ходе общего расширения Вселенной, то факторизация достигается лишь при использовании функций, зависящих от  $\mathbf{q}$ , т.е. от лагранжевых координат, но не от  $\mathbf{x}$ .

Рассматривая дивергенцию скорости  $D$  (а не саму скорость  $w$ ), мы отвлекаемся от рассмотрения вихревых возмущений со своим законом зависимости от времени, отличающимся от  $\delta_i(t)$  и  $\delta_d(t)$ . Две функции времени  $\delta_i$  и  $\delta_d$  представляют собой решения одного уравнения второго порядка

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho\delta = 0, \quad (9.3.2)$$

которое совпадает с уравнением (9.2.6), полученным с помощью разложения в ряд Фурье, если в нем положить  $k=0$ . Это не удивительно, так как, очевидно,  $e^{ikx} = e^{iq}$  есть частный случай функции  $\psi(\mathbf{q})$ . Уравнение (9.3.2) имеет два линейно независимых решения  $\delta_i$  и  $\delta_d$ , например упомянутые  $t^{2/3}$  и  $t^{-1}$  в простейшем случае модели плоской Вселенной. Поэтому, если в момент  $t=t_0$  заданы  $\delta(\mathbf{x}, t)$  и  $D(\mathbf{x}, t)$ , то, вводя  $\mathbf{q}$  вместо  $\mathbf{x}$ , можно получить два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta_i(t_0) \psi_i(\mathbf{q}) + \delta_d(t_0) \psi_d(\mathbf{q}) &= \delta(t_0, \mathbf{q}), \\ \dot{\delta}_i(t_0) \psi_i(\mathbf{q}) + \dot{\delta}_d(t_0) \psi_d(\mathbf{q}) &= -D(t_0, \mathbf{q}). \end{aligned} \right\} \quad (9.3.3)$$

Решая эти уравнения относительно  $\psi_i(q)$  и  $\psi_d(q)$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \psi_i(q) &= \frac{\delta(t_0, q) \dot{\delta}_d(t_0) + D(t_0, q) \delta_d(t_0)}{\delta_i(t_0) \dot{\delta}_d(t_0) - \dot{\delta}_i(t_0) \delta_d(t_0)}, \\ \psi_d(q) &= \frac{\delta(t_0, q) \dot{\delta}_i(t_0) + D(t_0, q) \delta_i(t_0)}{\delta_i(t_0) \dot{\delta}_d(t_0) - \dot{\delta}_i(t_0) \delta_d(t_0)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.4)$$

Например, если при  $t=t_0$  вещество покоится, т. е. заданы лишь возмущения плотности,  $v(q, t_0)=0$ ,  $D(t_0, q)=0$ , то

$$\delta(q, t) = \delta(q, t_0) \frac{\delta_i(t) \dot{\delta}_d(t_0) - \dot{\delta}_i(t_0) \delta_d(t)}{\delta_i(t_0) \dot{\delta}_d(t_0) - \dot{\delta}_i(t_0) \delta_d(t_0)}. \quad (9.3.5)$$

Следовательно, в этом простейшем случае возмущение нарастает без изменения формы [Дорошкевич, Зельдович (1963)]. Поскольку  $\delta_i(t)$  нарастает с течением времени, а  $\delta_d(t)$  убывает, то при  $t \gg t_0$   $\delta_i(t) \gg \delta_i(t_0)$ ,  $\delta_d(t) \ll \delta_d(t_0)$ .

Пренебрегая затухающим решением, получим для вещества, покоящегося в момент  $t_0$ :

$$\delta(t, q) = \delta(t_0, q) \frac{\delta_i(t)}{\delta_i(t_0)} \left[ 1 - \left( \frac{d \ln \delta_i}{dt} / \frac{d \ln \delta_d}{dt} \right)_{t=t_0} \right]^{-1}. \quad (9.3.6)$$

В общем случае начальное состояние задается пятью независимыми функциями координат — возмущением плотности, энтропии и тремя компонентами вектора скорости. Однако растущее крупномасштабное решение есть только одно. В общем случае, если начальная амплитуда растущего решения не равна нулю по какой-нибудь специальной причине\*), с течением времени растущее решение оказывается больше остальных решений и можно учитывать только это растущее решение.

В зависимости от времени оно нарастает пропорционально  $\delta_i$ . Пространственное его распределение с течением времени остается подобным самому себе и с помощью формул (9.3.3), (9.3.4) выражается через начальное распределение (при  $t=t_0$ ) скорости и плотности (а в общем случае также энтропии и состава).

#### § 4. Возмущения как вариации параметров решения

Полученные в предыдущем параграфе результаты могут быть использованы для построения решения и в более сложных (по сравнению с плоским миром) ситуациях. Выберем начальные возмущения

\*) В том случае, если в начальный момент  $\delta=0$  и скорость чисто вихревая,  $\text{div } v=0$ , то амплитуда растущего решения равна нулю в линейном приближении. Таковы предположения вихревой теории образования галактик [Озерной, Чернин (1967, 1968)]. Возмущения плотности зависят от более высоких степеней начальной скорости; для описания наблюдаемой картины необходимы большие начальные скорости к моменту рекомбинации.

специальным образом: пусть внутри сферы радиуса  $R$  возмущения  $\delta = \text{const}$ ,  $D = \text{const}$  в момент  $t_0$ , т. е. не зависят от координаты.

Снаружи возмущения положим равными нулю. Очевидно, внутри сферы справедливо решение, описывающее эволюцию однородной изотропной Вселенной, но с несколько иными параметрами. Внешняя область не влияет гравитационно на внутреннюю область в силу сферической симметрии задачи. Давление также не влияет на динамику расширения, так как возмущения заданы в большом масштабе ( $R \gg bt$ , где  $b$  — скорость звука).

Следовательно, если невозмущенное движение описывается функцией  $\rho = \rho(t)$ , то для описания возмущения нам необходимо найти близкое решение  $\rho_1(t)$  космологических уравнений. Функция  $\delta(t)$  определяется как  $\delta(t) = [\rho_1(t) - \rho(t)]/\rho(t)$ .

Космологические уравнения для  $\rho(t)$  содержат  $t$  лишь под знаком дифференциала. Поэтому-то один из путей получения решения, близкого к невозмущенному, состоит в том, что производится сдвиг по времени:

$$\rho_1(t) = \rho(t + \tau), \quad \delta(t) = \tau \frac{d \ln \rho}{dt} = -3\tau H(t). \quad (9.4.1)$$

Постоянный множитель не существен для решения линейного уравнения. Следовательно, одним из решений (убывающим при расширении,  $\delta_a$  в обозначениях § 3)\*) является

$$\delta_a(t) = H(t). \quad (9.4.2)$$

Для того чтобы найти возрастающее решение  $\delta_i(t)$ , мы сравним невозмущенное решение  $\rho(t)$  с решением, отличающимся значением плотности:

$$\rho_1(t) = \rho(t, \Omega_1) = \rho(t, \Omega + \bar{\omega}). \quad (9.4.3)$$

Выберем решения так, чтобы моменты сингулярности ( $\rho = \infty$ ) для возмущенного решения  $\rho_1(t, \Omega_1)$  и для невозмущенного решения  $\rho(t, \Omega)$  совпадали; следовательно, оба решения асимптотически совпадают при  $t \rightarrow 0$ :

$$\rho_1(t, \Omega_1) \approx \rho(t, \Omega) \approx \frac{1}{6\pi G t^2} \Big|_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \delta_i \rightarrow 0}}.$$

Различие в решениях увеличивается с течением времени. Метод применим и при конечных возмущениях, где различие решений

\*) Справедливость этого решения можно проверить непосредственно: мы знаем, что  $\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\rho$ ; продифференцировав это уравнение и используя соотношение  $\frac{d\rho}{dt} = -3H\rho$ , получим  $\ddot{H} + 2H\dot{H} = 4\pi GH\rho$ . Поэтому  $\delta = H$  удовлетворяет уравнению  $\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G\delta\rho$ , которое совпадает с уравнением (9.3.2).

не мало. Наиболее яркий пример дает случай при  $\Omega=1$  для невозмущенного решения и  $\bar{\omega} \geq 0$ , так что при возмущении плотность больше критической,  $\Omega + \bar{\omega} > 1$ . В этом случае в некоторый момент расширение возмущенной области сменяется сжатием:  $\rho_1(t_c) = \infty$  при  $t=t_c$ , тогда как  $\rho(t_c)$  конечно. В случае  $\bar{\omega} < 0$  при  $t \rightarrow \infty$  плотность в возмущенной области изменяется по закону  $\rho_1 \sim t^{-3}$  вместо  $\rho = \frac{1}{6\pi G t^2}$  в невозмущенной области. Таким образом, при  $\Omega=1$  возмущения любого знака качественно меняют ответ. В линейной теории мы учитываем лишь член первого порядка по  $\bar{\omega}$  и ответ имеет следующий вид при произвольном  $\Omega$ :

$$\delta_i(t) = \frac{\partial}{\partial \Omega} \ln \rho(t, \Omega). \quad (9.4.4)$$

Выражение (9.4.4) дает растущее решение уравнения для возмущений. Рассмотрение сферической возмущенной области полезно также для вывода уравнения развития возмущений (9.3.2) иным путем.

Для сферически-симметричного случая можно написать ( $R$  — радиус невозмущенного шара,  $\Delta$  — его возмущение):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 R}{dt^2} &= -\frac{GM}{R^2}, \quad \frac{d^2 (R + \Delta)}{dt^2} = -\frac{GM}{(R + \Delta)^2}, \quad \rho = \frac{3}{4\pi} \frac{M}{R^3}, \\ \frac{d^2 \Delta}{dt^2} &= \frac{2GM\Delta}{R^3} = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) \Delta, \quad \rho_1 = \frac{3}{4\pi} \frac{M}{(R + \Delta)^3}, \\ \delta &= -3 \frac{\Delta}{R}, \quad R \sim \rho^{-1/3}. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.5)$$

Окончательно имеем формулу

$$\frac{d^2 \delta \rho^{-1/3}}{dt^2} = \frac{8\pi G}{3} \delta \rho^{2/3}, \quad (9.4.6)$$

которая может быть преобразована к виду (9.3.2) с помощью уравнений невозмущенного движения. Этот способ нагляднее, чем длинный вывод с помощью фурье-компонент, использованный в § 3.

Рассмотрим подробнее возмущение скорости при изменении плотности внутри заданной сферы радиуса  $r < R$ . Наружное вещество не действует гравитационно на внутреннее, поэтому внутри возмущенной оболочки имеет место хаббловское расширение с возмущенной функцией  $H(t)$ . Однако возмущение плотности внутри возмущенной области  $r < R$  гравитационно влияет на наружную область  $r > R$ . В этой области скорость оказывается возмущенной:  $u(r) = H_0 r + A(t)/r^2$ . Таким образом, не совсем точно было бы утверждать, что решение в целом складывается из возмущенной внутренней области и невозмущенной внешней. Однако надо заметить,

что возмущение скорости во внешней области такое ( $\delta \mathbf{u} \sim r^{-2}$ ), что его дивергенция тождественно равна нулю, т. е. оно не приводит к изменению плотности. Поэтому, если рассматривать только  $\rho$  и  $\text{div } \mathbf{u}$ , то внешняя область не возмущена. Когда по величине дивергенции мы находим, обратно, поле скорости (при условии  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ , т. е. потенциальную часть скорости), в расчет входят интегралы такие, что  $\mathbf{u} \neq 0$  там, где  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ :

$$\mathbf{u} = - \text{grad} \int \frac{\text{div } \mathbf{u}(r')}{|r - r'|} d^3 r'.$$

Поскольку линейная теория развития возмущений в модели Фридмана с уравнением состояния  $P=0$  проста и может быть построена непосредственно, то некоторые читатели, возможно, решат, что столь подробный разбор найденного выше автомодельного решения — стрельба из пушек по воробьям. Но это рассмотрение полезно для более широких целей — для понимания нелинейной ситуации и также для более сложных случаев, включая и теорию возмущений в рамках ОТО. Цель настоящего параграфа — дать рабочий инструмент и идеи общих методов, а не просто результаты и готовые формулы.

### § 5. Формулы, описывающие развитие возмущений

Выше были введены величины  $\delta$ ,  $D$ ,  $v$ , выписаны уравнения, которые определяют изменения этих величин, и даны соображения о ходе решений. В этом параграфе мы рассмотрим формулы, описывающие решения этих уравнений в зависимости от времени и от красного смещения  $z$ . Произвольные постоянные выбраны так, что  $\delta=1$  при  $t=t_0$  и  $z=0$ . Поэтому приведенные формулы позволяют узнать, какими должны были бы быть возмущения при произвольном  $z$  для того, чтобы дать  $\delta=1$  сегодня.

Масштаб возмущений  $l_0$  приведен как длина волны на сегодняшний день. Принято  $k_0 = 2\pi/l_0$ , в формулах использованы  $H_0$  и  $\Omega$  — постоянная Хаббла и безразмерная плотность сегодня. Поэтому ниже  $\Omega$  рассматривается как постоянная.

В простейшем случае  $\Omega = 1$ ,  $t = \frac{2}{3} H_0^{-1} (1+z)^{-3/2}$ ,  $t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1}$  имеем

$$\left. \begin{aligned} \delta_i &= \left( \frac{t}{t_0} \right)^{3/2}, & D_i &= -\frac{2}{3t_0} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-1/2}, & v_i &= -\frac{1}{3\pi} \frac{l_0}{t_0} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1/2}, \\ \delta_a &= \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-1}, & D_a &= \frac{i}{t_0} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-2}, & v_a &= \frac{l_0}{2\pi t_0} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-3/2}, \\ v_r &= v_{r0} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-3/2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.5.1)$$

Если вместо  $t$  использовать красное смещение  $z$ , то

$$\left. \begin{aligned} \delta_i &= (1+z)^{-1}, \quad D_i = -H_0 (1+z)^{1/2}, \quad v_i = -\frac{l_0 H_0}{2\pi} (1+z)^{-1/2}, \\ \delta_d &= (1+z)^{3/2}, \quad D_d = \frac{3}{2} H_0 (1+z)^3, \quad v_d = \frac{3}{4\pi} H_0 l_0 (1+z)^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.5.2)$$

Наконец, для вихревых возмущений  $\delta=0$ ,  $D=0$ , а соответствующая скорость

$$v_r = v_{r0} (1+z).$$

Обратимся теперь к случаю  $\Omega \neq 1$ . Выпишем некоторые формулы, относящиеся к невозмущенному движению:

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= a(t_0) (1+z)^{-1}, \\ H(t) &= -(1+z)^{-1} \frac{dz}{dt} = H_0 (1+z) \sqrt{1+\Omega z}, \\ H_0 dt &= -(1+z)^{-2} (1+\Omega z)^{-1/2} dz. \end{aligned} \right\} \quad (9.5.3)$$

Нормированная затухающая мода возмущений может быть записана в виде

$$\delta_d = (1+z) \sqrt{1+\Omega z}, \quad (9.5.4)$$

в соответствии с упомянутым выше результатом  $\delta_d \sim H$ , см. (9.4.2).

Для соответствующих возмущений скорости и ее дивергенции имеем

$$\left. \begin{aligned} D_d &= \frac{H_0}{2} (1+z)^2 (2+\Omega+3\Omega z), \\ v_d &= \frac{H_0 l_0}{4\pi} (1+z) (2+\Omega+3\Omega z). \end{aligned} \right\} \quad (9.5.5)$$

Напомним, что функции, растущие с увеличением  $z$ , описывают величины, убывающие с течением времени, поскольку убывает само  $z$ .

Нарастающую моду  $\delta_i(t)$  или  $\delta_i(z)$  нетрудно получить из уравнения (9.2.6); из этого уравнения легко найти, что для любых двух решений  $\delta_i \delta_d - \delta_i \dot{\delta}_d = \frac{\text{const}}{a^2}$ . Таким образом, если известно одно решение ( $\delta_d$ ), то для другого имеем

$$\begin{aligned} \delta_i &= \delta_d \int \frac{dt}{a^2 \delta_d^2} = \delta_d \int a^{-2} \delta_d^{-2} \frac{dt}{dz} dz = \\ &= (1+z) \sqrt{1+\Omega z} \int_z^\infty (1+z)^{-2} (1+\Omega z)^{-3/2} dz. \end{aligned} \quad (9.5.6)$$

Интеграл берется в элементарных функциях:

$$\delta'_i = \frac{1+2\Omega+3\Omega z}{(1-\Omega)^2} - \frac{3}{2} \frac{\Omega}{(1-\Omega)^{3/2}} (1+z) \sqrt{1+\Omega z} \ln \frac{\sqrt{1+\Omega z} + \sqrt{1-\Omega}}{\sqrt{1+\Omega z} - \sqrt{1-\Omega}}. \quad (9.5.7)$$

Это выражение не нормировано условием  $\delta=1$  при  $z=0$ ; для нормировки его надо умножить на величину

$$\frac{1}{\delta_i(\Omega, z=0)} \approx 1 - \frac{3}{2} \Omega \ln \Omega + \frac{3}{7} \Omega + \frac{15}{14} \Omega^2 + \dots \quad (9.5.8)$$

Это приближенная формула дает правильную асимптотику при  $\Omega=1$  и при  $\Omega=0$ . Таким образом, произведение (9.5.7) [или (9.5.6)] и (9.5.8) дает нормированное  $\delta_i(z)$ .

Асимптотику при  $\Omega \ll 1$  лучше получить непосредственно из интеграла (9.5.6). Для нормированного значения  $\delta_i(\Omega, z)$  получаем две асимптотики: при  $z \gg \frac{1}{\Omega}$   $\delta_i \approx \frac{2}{5} \frac{1}{\Omega z}$ , при  $z \ll \frac{1}{\Omega}$   $\delta_i \approx 1$ . Прибли-

женно можно считать, что  $\delta_i$  возрастает от  $z \gg 1$  до  $z_1 = \frac{2}{5\Omega}$  по первой асимптотике, а в дальнейшем при  $z_1 \gg z \gg 0$   $\delta_i$  постоянно и равно 1. Соответственно скорость, связанная с возмущениями, сперва растет пропорционально  $(1+z)^{-1/2}$ , а потом падает пропорционально  $(1+z)$ . Напоминаем, что выражения «растет» и «падает» относятся к возрастанию времени, т. е. уменьшению  $z$ .

Для того чтобы понять такое поведение возмущений, напомним свойства невозмущенной модели. При  $\Omega \ll 1$  сегодня (точнее, при  $z < z_1$ ) расширение происходит с почти постоянной скоростью удаления каждых двух заданных частиц, гравитация почти не влияет на невозмущенное движение (см. модель Милна, раздел I). Естественно, что в этот период гравитация не влияет и на развитие возмущений. Поэтому нет и нарастания возмущений,  $\delta_i = \text{const}$ ; естественно, и падение скорости обратно пропорционально радиусу мира.

Идя в прошлое, мы можем записать ( $u_{12}$  — относительная хаббловская скорость частиц на расстоянии  $r_{12}$ ):

$$\rho = \rho_0 (1+z)^3, \quad H(t) = \frac{u_{12}(t)}{r_{12}(t)},$$

где  $u_{12}(t) = u_{12}(t_0)$ ,  $r_{12}(t) = \frac{r_{12}(t_0)}{1+z}$ ; следовательно,  $H(t) = H_0(1+z)$  до тех пор в прошлом, пока  $\Omega \ll 1$ .

Дадим количественное выражение этих общих соображений. Напомним прежде всего закономерности, относящиеся к однородной Вселенной с малой безразмерной плотностью в настоящее время. До конца данного параграфа будем обозначать  $\Omega_0$ ,  $H_0$ ,  $a_0$  значения, относящиеся к настоящему моменту  $z=0$ , в отличие от  $\Omega(z)$ ,  $H(z)$ ,

$a(z)$ , относящихся к прошлому, характеризуемому красным смещением  $z$ .

Итак, выпишем еще раз

$$\left. \begin{aligned} a(z) &= \frac{a_0}{1+z}, & H(z) &= H_0(1+z)\sqrt{1+\Omega_0 z}, \\ \Omega(z) &= \frac{\Omega_0(1+z)}{1+\Omega_0 z}. \end{aligned} \right\} \quad (9.5.9)$$

Почти пустая, почти милновская в настоящее время космологическая модель ( $\Omega_0 \ll 1$ ) была почти плоской, почти критической в прошлом ( $\Omega \approx 1$ ). Например,  $\Omega_0 = 0,2$ , но в прошлом  $\Omega(z=10) = 0,73$ ,  $\Omega(z=30) = 0,87$ . Соответственно и закон роста возмущений (9.5.6) или (9.5.7) отклоняется от простых законов плоского мира  $\delta \sim t^{2/3} \sim (1+z)^{-1}$ ,  $u \sim t^{1/3} \sim (1+z)^{-1/2}$  только при приближении к настоящему времени.

Формулы (9.5.6) и (9.5.7) и соответствующие им формулы для пекулярной скорости неудобны. Можно предложить простую интерполяционную формулу, имеющую удовлетворительную точность во всем интервале  $z$  и асимптотически точную при больших  $z$  и при  $z \rightarrow 0$ ,  $\Omega \rightarrow 0$ , а именно:

$$\delta_i = \left(1 + \frac{3}{2}\Omega_0\right) \left(1 + \frac{3}{2}\Omega_0 + \frac{3}{2}\Omega_0 z\right)^{-1} = \frac{\left(1 + \frac{3}{2}\Omega_0\right)}{1 - \Omega_0} \frac{1 - \Omega}{1 + \frac{3}{2}\Omega_0 z}. \quad (9.5.10)$$

Формула для пекулярной скорости (также в растущем со временем типе возмущений) имеет вид

$$v = u_i = (1+z)\sqrt{1+\Omega_0 z} \frac{d\delta_i}{dz} = \frac{5}{2} \frac{\Omega_0 \left(1 + \frac{3}{2}\Omega_0\right) (1+z)\sqrt{1+\Omega_0 z}}{(1 + \frac{3}{2}\Omega_0 + \frac{3}{2}\Omega_0 z)^2}. \quad (9.5.11)$$

Пекулярная скорость возмущения достигает максимума [в точном расчете по (9.5.7), а не по (9.5.11)] при  $z_{\max 1} = \frac{0,38 - \Omega_0}{0,62\Omega_0}$ .

Можно также поставить вопрос о моменте, когда максимально отношение пекулярной скорости к хаббловской разности скоростей двух частиц, находящихся на расстоянии, равном половине длины волны,  $z_{\max 2} = \frac{0,26 - \Omega_0}{0,74\Omega_0}$ .

Соответствующие  $z_{\max 1}$  и  $z_{\max 2}$  зависят от величины  $\Omega_0$ , что видно уже из того факта, что при  $\Omega_0 = 1$  пекулярная скорость и отношение ее к хаббловской непрерывно нарастают, максимумов нет. Из общих соображений ясно, что  $z_{\max 1}$  и  $z_{\max 2}$  всегда, при любом  $\Omega_0$ , соответствуют [по формуле (9.5.9) для  $\Omega(z)$ ] определенным, не зависящим от  $\Omega_0$  значениям:

$$\Omega_{\max 1} = \Omega(z_{\max 1}) = 0,38, \quad \Omega_{\max 2} = \Omega(z_{\max 2}) = 0,26.$$



### § 6. Численные оценки

Используем развитую выше теорию для расчета эволюции возмущений в модели Фридмана в нейтральном газе после рекомбинации ( $z \leq 1400$ ). С помощью полученных выше формул можно оценить, какой должна быть амплитуда возмущений плотности и скорости на момент рекомбинации для того, чтобы к сегодняшнему дню могли образоваться галактики и скопления галактик. Можно также рассчитать характерную массу, соответствующую массе Джинса. Следует иметь в виду, что линейная теория, в принципе, может дать ответ только с точностью до порядка величины. Например, с возмущением данной длины волны по соображениям размерности связана определенная масса  $M \sim \left(\frac{\lambda}{2}\right)^3 \rho$ . В действительности в силу статистического характера задачи, даже если возмущения имеют одну определенную длину волны, что нереально, очевидно, что эволюция возмущений приведет к спектру масс. Расчет этого спектра очень труден, к тому же в настоящее время параметры Вселенной определены очень неточно. Особенно плохо мы знаем значение средней плотности. Поэтому необходимо рассматривать весь интервал значений  $1 \gg \Omega \gg 0,025$ .

Примем  $H_0 = 75$  км/сек·Мпс,  $\Omega = 1$ ,  $\rho_0 = 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho = 10^{-29} (1+z)^3$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_{\text{рек}} = 3 \cdot 10^{-20}$  г/см<sup>3</sup>,  $z_{\text{рек}} = 1400$ ,  $T_{\text{рек}} = 3800^\circ\text{K}$ ,  $t_{\text{рек}} \approx 0,5 \cdot 10^{13}$  сек (индекс «рек» — рекомбинация). Длина волны Джинса и соответствующая ей масса на момент рекомбинации равны

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\text{джк}} &\approx \sqrt{\frac{5\pi}{3} \frac{RT}{\mu g \rho}} \approx 8 \cdot 10^7 \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ см} \approx 10 \text{ пс}, \\ M_{\text{джк}} &\approx \frac{\lambda^3 \rho}{8} \approx 3,3 \cdot 10^{-11} T^{3/2} \rho^{-1/2} M_\odot \approx 5 \cdot 10^4 M_\odot. \end{aligned} \right\} \quad (9.6.1)$$

Здесь  $R = 8,3 \cdot 10^7$  эрг/град·моль — газовая постоянная,  $\mu$  — молекулярный вес [ $\mu = 1$  для нейтрального водорода — учет 30% (по весу) He не меняет результат заметно]. Длина, соответствующая  $\lambda_{\text{джк, рек}}$  в ходе последующего расширения изменяется по закону  $14 \text{ кпс}/(1+z)$ . Следовательно, все объекты, начиная с шаровых скоплений с  $M \approx 10^6 M_\odot$ , надкритичны, т. е. превосходят массу Джинса, и их эволюцию после рекомбинации можно рассматривать без учета давления.

В межгалактическом пространстве нет заметной плотности нейтрального газа. Возможно, это указывает на то, что после образования галактик и скоплений галактик газ был разогрет и ионизован вторичными процессами (тогда  $\mu = 1/2$ ). Наблюдения изотропного рентгеновского излучения дают верхний предел  $T < 10^6 (1+z)^\circ\text{K}$ . Принимая этот закон для зависимости  $T(z)$ , получим

$$\lambda_{\text{джк}} < \frac{2,5 \cdot 10^{25}}{(1+z)} \text{ см} = \frac{8}{1+z} \text{ Мпс}, \quad M_{\text{джк}} \approx 10^{13} M_\odot. \quad (9.6.2)$$

При такой зависимости  $T(z)$  величина  $M_{\text{дж}}$  не зависит от  $z$ . Те же формулы в предположении  $\Omega=0,025$ ,  $\rho_0=2,5 \cdot 10^{-31}$  г/см<sup>3</sup> дают для нейтрального газа на момент рекомбинации

$$\lambda_{\text{дж}} = 1,8 \cdot 10^{20} \text{ см}, \quad M_{\text{дж}} = 3,1 \cdot 10^6 M_{\odot} \quad (9.6.3)$$

и, наконец, для ионизованного газа с  $T < 10^6 (1+z)$

$$\lambda_{\text{дж}} < \frac{50}{1+z} \text{ Mpc}, \quad M_{\text{дж}} < 6,3 \cdot 10^{13} M_{\odot}.$$

В предположении  $T \approx 10^6 (1+z)^\circ \text{K}$  лишь в большом масштабе (40—60 Mpc), в котором уже неоднородность мала, можно не учитывать влияние давления при  $\Omega \approx 1$ , но если  $\Omega \ll 1$ , то и этот масштаб близок к критическому \*).

Найдем, каковы должны быть возмущения плотности  $\delta_{\text{рек}}$  при красном смещении  $z_{\text{рек}}$ , т. е. на момент рекомбинации, для того, чтобы сделать возможным рождение отдельных объектов при  $z = z_{\text{рожд}}$  ( $z_{\text{рожд}}$  выбираем в интервале 2—10); при этом полагаем, что возмущения скорости отсутствовали:

$$\delta_{\text{рожд}} = 1 = A \delta_i(z_{\text{рожд}}), \quad \delta_{\text{рек}} = \frac{5}{3} A \delta_i(z_{\text{рек}}) = \frac{5}{3} \frac{\delta_i(z_{\text{рек}})}{\delta_i(z_{\text{рожд}})}$$

(множитель 5/3 учитывает, что при  $z = z_{\text{рек}}$   $v=0$ ). При  $\Omega=1$  и  $\delta_i \sim (1+z)^{-1}$  это дает

$$\delta_{\text{рек}} = 1,2 \cdot 10^{-3} (1 + z_{\text{рожд}}).$$

В случае  $\Omega=0,025$ , если  $z_{\text{рожд}} < 20$ , то

$$\delta_{\text{рек}} \approx 2 \cdot 10^{-2}.$$

Если же на момент рекомбинации возмущения плотности малы, а велики возмущения скорости, то можно найти величину  $D_{\text{рек}}$ , приводящую к  $\delta(z_{\text{рожд}})=1$ . В этом случае амплитуда возмущений скорости зависит от масштаба возмущений или от охваченной возмущением массы.

Для  $\Omega=1$  мы получаем

$$D_{\text{рек}} = 2,5 \cdot 10^{-16} (1 + z_{\text{рожд}}) \text{ сек}^{-1/2},$$

$$\begin{aligned} v_{\text{рек}} &= D_{\text{рек}} \frac{\lambda_{\text{рек}}}{2\pi} = D_{\text{рек}} \frac{\lambda_0}{2\pi z_{\text{рек}}} = 3 \cdot 10^{-20} (1 + z_{\text{рожд}}) \lambda_0 = \\ &= 10^5 (1 + z_{\text{рожд}}) (\lambda_0 \text{ Mpc}) = 3 \cdot 10^{-6} c (1 + z_{\text{рожд}}) (\lambda_0 \text{ Mpc}) = \\ &= 4 \cdot 10^5 (1 + z_{\text{рожд}}) \left( \frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right)^{1/2} = 10^{-5} c (1 + z_{\text{рожд}}) \left( \frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

\*) Подчеркнем еще раз, что выражение  $T=10^6(1+z)$  есть только верхний предел. При рекомбинации и в последующем периоде до  $z \approx 100$  теплообмен газа и излучения велик, и другие соображения показывают, что температура заведомо была низка.

Если в соответствии с наблюдениями взять наибольший масштаб 60 *Mpc* на сегодня и потребовать рождения при красном смещении  $z_{\text{рожд}}=2$ , то  $v_{\text{рек}} \approx 5,5 \cdot 10^{-4} c$  на момент рекомбинации и, соответственно,  $v_{\text{рожд}} \approx 10^{-2} c$ . Величину  $D_{\text{рек}}$  — дивергенцию скорости возмущения — интересно сравнить с дивергенцией скорости невозмущенного движения,  $D_{\text{рек}}^0 = -3H(t) = -\frac{2}{t_{\text{рек}}}$  в момент рекомбинации. При  $\Omega=1$  получим  $D_{\text{рек}}^{(0)} = 2 \cdot 10^{-13}$ .

Для  $\Omega=0,025$  и  $z_{\text{рожд}} < 20$  соответствующие расчеты дают

$$\begin{aligned} D_{\text{рек}} &= 0,8 \cdot 10^{-15} \text{ сек}^{-1}, \\ v_{\text{рек}} &= 10^{-10} \lambda_0 = 0,3 \cdot 10^6 \lambda_0 \text{ Mpc} = 10^{-5} c \lambda_0 \text{ Mpc} = \\ &= 4 \cdot 10^6 \left( \frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right)^{1/3} = 10^{-4} c \left( \frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Существует качественная разница между случаем  $\Omega=1$  (или  $\Omega > 1$ ) и случаем  $\Omega \ll 1$ . В случае большой плотности ( $\Omega \gg 1$ ) рост малых возмущений продолжается до настоящего времени. В некоторых масштабах нарастание возмущений, возможно, закончилось давно, при некотором  $z_{\text{рожд}}$ , как это принято выше, но только в том случае, если в этом масштабе  $\delta=1$  при  $z=z_{\text{рожд}} > 1$ . Тогда наступает нелинейная стадия и образуются галактики и скопления галактик в состоянии динамического равновесия. Даже в этом случае наблюдения показывают, что в больших масштабах ( $> 60 \text{ Mpc}$ ) возмущения еще меньше единицы, следовательно, в этих масштабах рост возмущений продолжается при  $\Omega \gg 1$ .

В случае низкой плотности ( $\Omega \ll 1$ ) необходимо предположить, что почти все вещество уже перешло в галактики и скопления галактик. Но рост возмущений в моделях с низкой плотностью прекращается при  $z=z_1 \sim 20$  для  $\Omega=0,025$ . Поэтому приходится предполагать, что основная масса галактик и скоплений галактик образовалась рано, во всяком случае при  $z > 10$ , длинноволновые возмущения остаются малыми и не растут уже давно, с периода  $z < z_1$ .

Расчеты для  $\Omega=0,025$  не точны даже при предположении  $P=0$  и в рамках линейной теории. Плотность излучения  $\rho_{\gamma} = \frac{e_{\gamma}}{c^2} = 1,8 \cdot 10^{-21} \text{ г/см}^3$  на момент рекомбинации, тогда как плотность вещества при  $z=z_{\text{рек}}$  и  $\Omega=0,025$  равна  $\rho_{\text{вещ}} \sim 0,8 \cdot 10^{-21} \text{ г/см}^3$ .

Излучение непосредственно не взаимодействует с нейтральным газом, но скорость расширения невозмущенной Вселенной больше, чем без учета гравитации излучения. К плотности электромагнитного излучения нужно добавить нейтрино и т. п. Этот эффект важен некоторое время после рекомбинации. Расчеты Гюйо и Зельдовича (1970) показывают, что при учете влияния плотности излучения необходимо задавать возмущения в 2—4 раза большие, чем полученные выше.

### § 7. Неустойчивость бесстолкновительного гравитирующего газа

Рассмотрим задачу о возмущениях однородного бесстолкновительного газа [Бисноватый-Коган, Зельдович (1970), Мак-Кон (1971), Магалинский, Сильвестров (1972), Сильвестров (1974)]. Для простоты предположим, что массы всех частиц одинаковы, распределение скорости изотропно. Расчет проведем по методу Джинса: на примере обычного газа (подчиняющегося уравнениям гидродинамики) мы знаем, что некорректность такого рассмотрения (§ 1) не вносит существенных изменений по сравнению с точной теорией.

Итак, к уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi G\delta\rho \quad (9.7.1)$$

добавим определение объемной плотности через плотность в фазовом пространстве. Обозначим через  $m$  массу частиц,  $n$  — их плотность в фазовом пространстве,  $r$  — координаты,  $v$  — скорость. Тогда

$$\rho = m \int n(r, v) d^3v. \quad (9.7.2)$$

Кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}_{(r)} v n + \operatorname{div}_{(v)} F n = 0, \quad (9.7.3)$$

где

$$F = -\nabla\varphi.$$

Решение ищем в виде плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ :

$$\Phi = f e^{ikx + \gamma t}, \quad (9.7.4)$$

где  $\Phi$  — любая из величин  $\delta\rho$ ,  $\delta n(v)$ ,  $\varphi$ ,  $F$ .

Соответствующие множители перед экспонентами в (9.7.4) обозначаем теми же буквами, невозмущенные величины отмечаем индексом «0». Получим, сокращая экспоненты,

$$-\delta n(v) = \frac{4\pi G\delta\rho}{k^2} \frac{ikv_x}{\gamma + ikv_x} \frac{2dn_0(v^2)}{d(v^2)} = \frac{8\pi G\delta\rho (k^2v_x^2 + ikv_x\gamma)}{k^2(\gamma^2 + k^2v_x^2)} \frac{dn_0}{d(v^2)}. \quad (9.7.5)$$

Подставляя (9.7.5) в выражение для плотности

$$\delta\rho = m \int \delta n \cdot d^3v, \quad (9.7.6)$$

получим уравнение для  $\gamma(k)$ .

В частности, при  $k \rightarrow 0$  для длинных волн получим

$$\gamma^2 = -8\pi Gm \int v_x^2 \frac{dn_0}{d(v^2)} d^3v = 4\pi G\rho, \quad (9.7.7)$$

т. е. тот же результат, что и для обычного газа.

Найдем критическую длину волны из условия  $\gamma=0$ . Получим

$$k_{дж}^2 = -8\pi Gm \int \frac{dn_0}{d(v^2)} 4\pi v^2 dv = 4\pi G\rho (\overline{v^{-2}}). \quad (9.7.8)$$

Эта формула также весьма похожа на классический результат Джинса  $k_{дж}^2 = 4\pi G\rho b^{-2}$ , где  $b$  — скорость звука. Вместо  $b^{-2}$  в случае бесстолкновительного газа фигурирует величина, усредненная по распределению в пространстве скоростей:

$$(\overline{v^{-2}}) = \frac{\int \frac{n_0}{v^2} d^3v}{\int n_0 d^3v} = \frac{\int n_0 dv}{\int n_0 v^2 dv}. \quad (9.7.9)$$

В случае максвелловского распределения сравним  $(\overline{v^{-2}})$  со скоростью звука и средним квадратом скорости:

$$b^2 = \frac{5}{3} \frac{kT}{m}, \quad \overline{v^2} = 3 \frac{kT}{m},$$

т. е. имеем

$$(\overline{v^{-2}}) = \frac{m}{kT} = \frac{3}{5} b^{-2} = \frac{1}{3} (\overline{v^2})^{-1}. \quad (9.7.10)$$

Результаты для обычного газа и бесстолкновительного несколько отличаются. Существенное качественное отличие бесстолкновительного газа, например газа из звезд, возникает лишь на далекой нелинейной стадии, когда обычный газ даст ударную волну, а звезды пройдут друг мимо друга.

В заключение дадим ссылки на работы по возмущениям в бесстолкновительной плазме, важные не для космологической теории развития возмущений, а для теории галактик: Михайловский, Фридман, Эпельбаум (1970), Бисноватый-Коган (1971, 1972а), Михайловский, Фридман (1971, 1973), Бисноватый-Коган, Михайловский (1973), Марочник, Сучков (1974).

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ГОРЯЧЕЙ МОДЕЛИ

## § 1. Условия роста возмущений

В настоящем параграфе соображения, развитые в предыдущей главе, применяются к ранним стадиям расширения, когда вещество полностью ионизовано, плотность излучения много больше плотности вещества и вещество связано с излучением \*).

В этот период Вселенная заполнена средой с уравнением состояния  $P = \varepsilon/3$ . Скорость звука  $b = c/\sqrt{3}$ . В расширяющейся Вселенной  $P = \varepsilon/3 \sim a^{-4}$  ( $a$  — масштабный фактор); для невозмущенного расширения  $a = a_0 \sqrt{t}$ ,  $\rho = \frac{3}{32\pi G t^2} = \frac{4,5 \cdot 10^5}{t^2}$  независимо от значения  $\Omega$  сегодня. Если отношение общей плотности энергии фотонов, нейтрино и гравитонов к плотности энергии фотонов равно  $g$ , то  $g\sigma T^4 = \rho c^2$ ,  $T = 0,58 \cdot 10^9 g^{-1/4} \rho^{1/4} =$   
 $= 1,5 \cdot 10^{10} g^{-1/4} t^{-1/2} = 2,7 (1+z).$  (10.1.1)

Плотность вещества равна

$$\rho_{\text{вещ}} = \Omega \rho_0 (1+z)^3 = \Omega (1+z)^3 10^{-29} \text{ г/см}^3 = 1,7 \Omega g^{-3/4} t^{-3/2}. \quad (10.1.2)$$

С помощью критерия Джинса найдем границу между областями

\*) В дальнейшем будут сделаны необходимые уточнения: при  $\Omega=1$  есть короткий период, когда плотность вещества больше плотности излучения, хотя вещество еще полностью ионизовано. Гелий рекомбинирует раньше, чем водород. Вещество может считаться сильно связанным с излучением лишь для длин волн больше определенной величины, зависящей от  $T$ . В этот короткий период скорость звука

изменяется со временем по закону  $b = \frac{c}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{3\rho_{\text{вещ}}}{4\rho_\gamma}\right)^{-1/2}$ ; плотности вещества и излучения сравниваются при  $z=z_1=10^4$ ,  $t=2 \cdot 10^{11} \Omega^{-2} \text{ сек}$ ; закон изменения плотности вещества со временем следует писать в виде  $\rho_{\text{вещ}} = \frac{0,8 \cdot 10^6}{(t-t_0)^2}$ ,

где  $t_0=2 \cdot 10^{11} \Omega^{-2} (1-0,135 \Omega^{1/4}) \text{ сек}$ . Рекомбинация происходит при  $z=1400$ ,  $T=3800^\circ \text{ К}$  в момент  $t_\gamma=10^{13} \text{ сек}$  (при  $\Omega<0,07$ ) или  $t_\gamma=5 \Omega^{-1/4} \cdot 10^{12} \text{ сек}$  (при  $\Omega>0,07$ ). Более подробно будет рассмотрена и роль слабовзаимодействующих частиц.

устойчивости и неустойчивости. Запишем возмущения в виде

$$\delta = \delta_{\kappa}(t) e^{ikx},$$

где  $k = \kappa a^{-1}(t) = k_0 a^{-1}(t_0) (1+z)$ ,  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda_0}{1+z}$  ( $k_0$  и  $\lambda_0$  относятся к настоящему времени).

Критерий Джинса имеет вид  $b^2 k^2 = 4\pi G\rho$ ; подставляя значения  $\rho$  и  $b$ , получим

$$k_{\text{дж}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{2}} (ct)^{-1}, \quad \lambda_{\text{дж}} = \frac{2\pi}{k_{\text{дж}}} = ct \frac{4\pi \sqrt{2}}{3}. \quad (10.1.3)$$

Результат, согласно которому джинсовская длина волны  $\lambda_{\text{дж}}$  порядка  $ct$  (с учетом того, что скорость звука порядка  $c$ ), очень нагляден:  $ct$  есть расстояние, на котором успевает произойти выравнивание плотности за счет перепада давления. Инвариантными характеристиками возмущения (не зависящей от расширения) являются  $\lambda_{0\text{дж}}$ ,  $k_{0\text{дж}}$  и  $M_{\text{дж}}$ . Джинсовская масса определяется как количество вещества (без излучения), содержащееся в объеме  $(\lambda_{\text{дж}}/2)^3$ . Мы должны выразить эти величины через  $z$  и  $t$ , используя приведенные выше формулы. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} k_{0\text{дж}} &= \frac{k_{\text{дж}}}{1+z} = 6,3 \cdot 10^{-21} g^{1/4} t^{-1/4} = \\ &= 1,14 \cdot 10^{-30} g^{1/2} (1+z) \text{ см}^{-1}, \\ \lambda_{0\text{дж}} &= 10^{21} g^{-1/4} t^{1/4} = 5,5 \cdot 10^{30} g^{-1/2} (1+z)^{-1} \text{ см}, \\ M_{\text{дж}} &= \rho_0 \left( \frac{\lambda_0}{2} \right)^3 = 0,6 \Omega g^{-3/4} t^{3/4} M_{\odot} = \\ &= 10^{29} \Omega g^{-1/2} (1+z)^{-3} M_{\odot}. \end{aligned} \right\} \quad (10.1.4)$$

Удобно изобразить расположение областей устойчивости и неустойчивости на плоскости  $\lg t - \lg M$ . Мы возьмем за абсциссу  $\lg M$  и за ординату  $\lg t$ . Тогда формула для  $M_{\text{дж}}(t)$  изобразится прямой линией на этой плоскости. Легко проверить, что ниже и справа от этой линии лежит область неустойчивости, выше и слева — устойчивости (рис. 43, 44).

Ограничения в области очень малых масс (левый нижний конец прямой  $M=M_{\text{дж}}$ ) сейчас нас не интересуют. При больших  $t$ , очевидно, теория справедлива лишь до момента рекомбинации ( $t \leq t_{\text{рек}}$ , горизонтальная линия на рис. 43, 44). При  $\Omega \approx 0,025$  условие  $\rho_{\gamma} > \rho_{\text{вещ}}$  выполнено вплоть до  $t_{\text{рек}}$ ; этому случаю соответствует рис. 43 (для  $g=2$ ). При  $\Omega=1$   $\rho_{\text{вещ}}=\rho_{\gamma}$  достигается при  $z_1=2 \cdot 10^4 g^{-1}$ . В общем случае произвольного  $\Omega$  условие  $\rho_{\text{вещ}}=\rho_{\gamma}$  достигается при  $z_1=2 \cdot 10^4 \Omega/g$ . В этом общем случае между  $z_1$  и  $z_{\text{рек}}=1400$  (если  $z_1 > z_{\text{рек}}$ )  $M_{\text{дж}}=\text{const}$  и не зависит от  $z$ . Эта константа равна  $M_{\text{дж}}=1,2 \cdot 10^{16} g^{1/2} \Omega^{-2} M_{\odot}$ . Значению  $\Omega=1$  соответствует рис. 44. После рекомбинации вступают в силу соображения предыдущей главы;

критическая джинсовская масса зависит только от давления самого вещества; возмущения плотности нейтрального вещества теперь, при  $t > t_{\text{рек}}$ , не сопровождаются изменением плотности излучения. Таким образом, при  $t < t_{\text{рек}}$  и при  $t > t_{\text{рек}}$  существенно различается

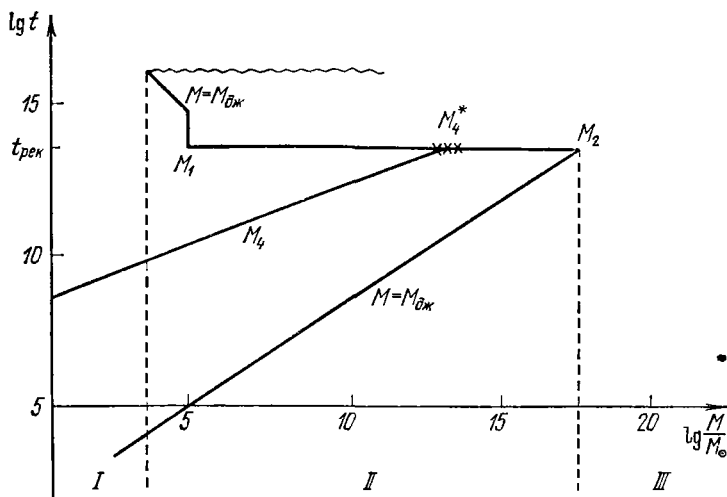


Рис. 43. Расположение областей устойчивости и неустойчивости на плоскости  $\lg t - \lg M$  при  $\Omega = 0,025$ . Линия  $M = M_{\text{дж}}$  отделяет область устойчивости от области неустойчивости. Линия  $M = M_4$  ограничивает область эффективной диссипации возмущений (см. § 2 гл. 10). Массы  $M > M_{\text{дж}}$  находятся в области неустойчивости, массы  $M < M_{\text{дж}}$  — в области устойчивости, возмущения с массой  $M < M_4$  экспоненциально затухают со временем. В период рекомбинации  $M_4$  увеличивается до  $M_4^*$  (показано крестиками). Момент рекомбинации  $t = t_{\text{рек}}$  совпадает (при  $\Omega = 0,025$ ) с моментом, когда сравниваются плотность вещества и плотность излучения.  $M_1$  — масса Джинса после рекомбинации. Она несколько уменьшается после  $t \approx 10^{15}$  сек (см. § 8 гл. 14). Волнистой линией условно обозначен момент вторичного разогрева вещества (см. гл. 14). Остальные обозначения даны в тексте.

сам характер движения, связанный с возмущениями плотности: при  $t < t_{\text{рек}}$  сжатие вещества сопровождается сжатием излучения, при  $t > t_{\text{рек}}$  нейтральное вещество сжимается на фоне равномерного невозмущенного распределения излучения. Давление излучения больше давления вещества в отношении числа фотонов к числу протонов и электронов (до рекомбинации) или к числу атомов водорода (после рекомбинации), что составляет около  $3 \cdot 10^7 / \Omega$ . Не удивительно, что в момент, когда выключается влияние излучения на движение вещества, критическая джинсовская длина волны резко падает, в  $\sqrt{3 \cdot 10^7 / \Omega}$  раз, а джинсовская масса уменьшается в  $(3 \cdot 10^7 / \Omega)^{3/2}$  раз, до величины  $M_1$  порядка  $5 \cdot 10^4 \Omega^{-1/2} M_{\odot}$ , найденной в предыдущей главе.



Эволюция возмущения данной массы соответствует продвижению вдоль вертикальной линии.

При  $M < M_1 \sim 5 \cdot 10^4 \Omega^{-1/2} M_\odot$  (область I на рис. 43 и 44) возмущения, заданные в области неустойчивости, растут только до момента пересечения вертикальной линии с линией, соответствующей  $M_{\text{дж}}$ . Позже возмущения всегда остаются в области устойчивости \*).

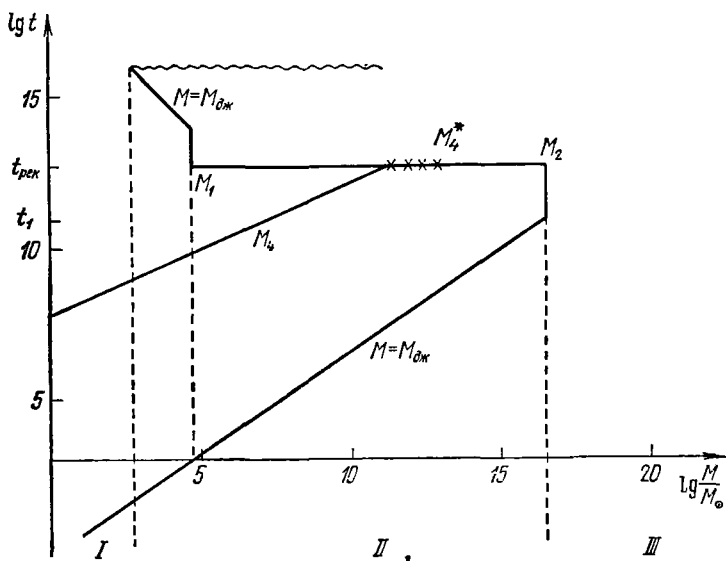


Рис. 44. Расположение областей устойчивости и неустойчивости на плоскости  $\lg t - \lg M$  при  $\Omega = 1$ . Обозначения совпадают с рис. 43. В момент  $t = t_1$  сравниваются плотность вещества и плотность излучения, в момент  $t_{\text{рек}} > t_1$  происходит рекомбинация. На интервале  $t_1 \leq t \leq t_{\text{рек}}$  масса Джинса постоянна.

Для  $M_1 < M < M_2$  (область II) возмущения растут от момента сингулярности вплоть до наклонной линии, соответствующей  $M_{\text{дж}}$ . Затем возмущения попадают в область устойчивости. Мы увидим далее, что в этой области происходят колебания постоянной или затухающей амплитуды. Рост возмущений снова продолжается после рекомбинации, когда вертикальная линия пересекает горизонталь  $t = t_{\text{рек}}$ . Наконец, для  $M > M_2$  возмущения всегда находятся в области неустойчивости и растут непрерывно.

Важной характеристикой является масса  $M_2$  и соответствующий размер  $\lambda_2$  (отнесенный к настоящему времени). Для  $\Omega = 0,025$   $M_2 = 3 \cdot 10^{17} M_\odot$  и  $\lambda_2 = 930 Mpc$ ; для  $\Omega = 1$   $M_2 = 3,4 \cdot 10^{16} M_\odot$  и  $\lambda_2 = 125 Mpc$ .

\*) Точнее, граница I лежит (на рис. 43 и 44) несколько левее  $M_1$ , так как на поздних этапах расширения  $M_{\text{дж}}$  уменьшается из-за охлаждения расширяющегося газа (см. § 8 гл. 14).

Эти значения заведомо больше, чем наблюдаемый в настоящее время масштаб сильной неоднородности во Вселенной.

Какова скорость роста возмущений в области неустойчивости и как ведут себя возмущения в области устойчивости в случае радиационно-доминированной плазмы? В области неустойчивости можно пренебречь ролью давления. Поэтому для ответа на первый вопрос используем автомодельную технику. Пусть невозмущенная сфера расширяется согласно уравнению (см. §§ 6, 8 гл. 1)

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{B}{R^2}, \quad (10.1.5)$$

т. е.  $R = (8B)^{1/4} t^{1/2}$  с плотностью  $\rho = \frac{D}{R^3} = \frac{D}{8Bt^{3/2}} = \frac{3}{32\pi G t^2}$ , так что  $B = \frac{4\pi}{3} G D$ .

Пусть эволюция возмущенной сферы описывается уравнением, отличающимся от (10.1.5) постоянной  $\alpha$ :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR'}{dt} \right)^2 = \frac{B}{(R')^2} + \alpha. \quad (10.1.6)$$

В линейном приближении  $\left( \frac{\alpha (R')^2}{B} \ll 1 \right)$  это уравнение решаем методом последовательных приближений:

$$R' = \left( \sqrt{8B} t + \frac{\alpha (R')^4}{4B} \right)^{1/4} = (8B)^{1/4} t^{1/2} \left( 1 + \frac{\alpha (R')^4}{16 \sqrt{2} B^{3/2} t} \right).$$

Справа в члене с  $\alpha$  мы заменим  $R'$  на невозмущенное значение  $R$  из (10.1.5). Получим

$$R' = (8B)^{1/4} t^{1/2} \left( 1 + \frac{\alpha t}{\sqrt{8B}} \right). \quad (10.1.7)$$

Относительные возмущения плотности равны

$$\delta = \frac{\rho' - \rho}{\rho} = -4 \frac{R' - R}{R} = -\frac{4\alpha t}{\sqrt{8B}} = \text{const} \cdot t = \text{const} \cdot (1+z)^{-2}. \quad (10.1.8)$$

Возмущения плотности с длиной волны больше джинсовской (т. е. лежащие в области неустойчивости) растут пропорционально  $t$  или  $(1+z)^{-2}$ , если уравнение состояния  $P = \varepsilon/3$  \*).

\*) Для наиболее жесткого уравнения состояния ( $P = \varepsilon$ )  $z = t^{-1/3}$  и тот же метод дает  $\delta \sim t^{1/3} \sim z^{-3}$ . В соответствующей таблице на стр. 527 «Релятивистской астрофизики» имеется ошибка. Затухающие возмущения плотности во всех случаях убывают с течением времени, как  $t^{-1}$ . Здесь в качестве невозмущенного решения взята плоская Вселенная, возмущение в зависимости от знака  $\alpha$  соответствует замкнутой или гиперболической (открытой) космологической модели вблизи сингулярности.

Общая плотность  $\rho$  и плотность вещества  $\rho_{\text{вещ}}$  связаны нелинейным соотношением  $\rho_{\text{вещ}} \sim \rho^{3/4}$ . Для малых возмущений тем не менее выполняется линейное соотношение  $\delta_{\text{вещ}} = \frac{\rho'_{\text{вещ}} - \rho_{\text{вещ}}}{\rho_{\text{вещ}}} = \frac{3}{4} \delta$  и  $\delta_{\text{вещ}}$  растет также пропорционально  $t$ . Обоснованием формул (10.1.5) и (10.1.6) является проведенное в разделе I точное релятивистское рассмотрение космологических решений с  $P = \epsilon/3$ .

В области устойчивости поведение возмущений подобно звуковым волнам. В жидкости с  $P = \epsilon/3$  и с постоянной скоростью звука скорость и плотность возмущений связаны соотношением

$$\delta_{\text{вещ}} = \frac{u}{b} = \frac{3}{4} \delta. \quad (10.1.9)$$

Плотность энергии звуковых волн, которая является квадратичной функцией амплитуды, после усреднения на интервале, содержащем много длин волн, запишем в виде

$$\epsilon_{\text{зв}} = 2\bar{\rho} \frac{u^2}{2} = \frac{9}{16} \delta^2 \rho b^2 = \frac{3\delta^2}{16} \epsilon. \quad (10.1.10)$$

При изменении параметров, медленном по сравнению с частотой колебаний ( $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} < ct$ ), в идеальной невязкой жидкости адиабатические инварианты сохраняются. Энергия волнового пакета или звуковая энергия в данном сопутствующем объеме ( $V \sim z^{-3} \sim t^{3/2}$ ) пропорциональна частоте, т. е.  $E/\nu = \text{inv}$ . Частота равна  $b/\lambda \sim z$ . Наконец,

$$E = \epsilon_{\text{зв}} V \sim \epsilon_{\text{зв}} z^{-3} \sim \delta^2 \epsilon z^{-3} \sim \delta^2 z \sim b/\lambda \sim z. \quad (10.1.11)$$

Следовательно, амплитуды плотности и скорости возмущений в звуковой волне постоянны до тех пор, пока можно не учитывать затухание из-за диссипативных процессов.

## § 2. Диссипативные процессы и затухание адиабатических возмущений

Вопрос о роли диссипативных процессов в эволюции адиабатических возмущений был впервые рассмотрен Силком (1968). Аналогичные расчеты, сделанные Дорошкевичем (1968), содержатся в его диссертации, но остались неопубликованными.

Простые зависимости и удобные формулы получены Силком для предельного случая, когда плотность излучения больше плотности вещества,  $\rho_\gamma > \rho_{\text{вещ}}$ , длина волны меньше расстояния до горизонта,  $\lambda < ct$ , длина свободного пробега фотонов существенно меньше  $ct$ . Амплитуда возмущений считается малой, т. е. рассматривается линейная теория. В действительности все эти предположения в большей или меньшей степени нарушаются в период вблизи момента

рекомбинации; в ряде последующих работ [Пиблс и Ю (1970), Чибицов (1972а), Филд (1973а), Вайнберг (1971)] теория диссипативных процессов была уточнена и численные результаты заметно изменились. Тем не менее полезно сперва рассмотреть элементарную теорию, область применимости которой ограничена перечисленными выше предположениями.

Итак, мы имеем дело со средой с уравнением состояния  $P = \epsilon/3$  и скоростью звука  $b = c/\sqrt{3}$ ; условие  $\lambda < ct$  означает также  $\lambda < \lambda_{\text{дж}}$ , так что можно пренебречь ролью тяготения и рассматривать акустические волны. В макроскопическом рассмотрении причинной затухания звука являются вязкость и теплопроводность среды. В свою очередь вязкость и теплопроводность связаны с диффузией фотонов.

Рассеяние фотонов на электронах определяется формулой Томсона, сечение рассеяния равно

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m_e^2 c^4} = 0,665 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Это сечение не зависит от частоты при  $\nu \ll \frac{m_e c^2}{\hbar}$ . Рассеянием на протонах можно пренебречь ( $m^2$  в знаменателе!). Точно так же при  $z < 10^8$  можно пренебречь релятивистскими эффектами рождения пар  $e^+$ ,  $e^-$  и рассеянием фотонов на фотонах. Следовательно, в интересующей нас области длина пробега

$$l_\nu = (\sigma_T n_e)^{-1} = 2,5 \cdot 10^{29} \Omega^{-1} z^{-3} \text{ см.} \quad (10.2.1)$$

Для сравнения с другими характерными длинами найдем массу обычной материи в шаре с диаметром  $l_\nu$ , обозначим ее  $M_3$ :

$$M_3 = \frac{\pi}{6} l_\nu^3 \rho_{\text{вещ}} = 0,4 \cdot 10^{26} \Omega^{-2} z^{-6} M_\odot. \quad (10.2.2)$$

На момент рекомбинации эта масса равна

$$M_{3 \text{ рек}} = 0,7 \cdot 10^7 \Omega^{-2} M_\odot. \quad (10.2.3)$$

Итак, для масс меньше  $M_3$  при соответствующем  $z$  затухание происходит практически мгновенно — достаточно одного свободного пробега фотонов, т. е. интервала меньше периода колебаний для полного затухания. Для больших масс,  $M > M_3$ , мы вправе применять макроскопические понятия вязкости и теплопроводности, поскольку длина пробега фотонов меньше длины волны возмущения. Затухание за время одного колебания невелико, но это не исключает возможности существенного затухания в космологических условиях, так как при  $\lambda \ll ct$  акустическая волна совершает много колебаний за характерное космологическое время.

Кинематическая вязкость  $\nu$ , т. е. отношение вязкости  $\eta$  плотности  $\nu = \eta/\rho$ , и температуропроводность  $\varphi$ , т. е. отношение теплопроводности к теплоемкости единицы объема, имеют одинаковую размерность — ту же, что и коэффициент диффузии. Иногда называют кинематическую вязкость «коэффициентом диффузии скорости», а температуропроводность — «коэффициентом диффузии температуры». В предположениях, сделанных выше \*),

$$\nu = \varphi = \frac{1}{3} l_v c = 2,5 \cdot 10^{30} \Omega^{-1} z^{-3} \text{ см}^2/\text{сек}. \quad (10.2.4)$$

Составим уравнение для энергии колебания одной монохроматической волны (подразумевается энергия в единице сопутствующего пространства). Волна характеризуется «сопутствующим» волновым вектором  $k_0$ , связанным с текущим (мгновенным) значением волнового вектора соотношением

$$k = k_0 (1 + z). \quad (10.2.5)$$

В интересующем нас периоде до рекомбинации,  $z > 1400$ , пренебрегаем единицей по сравнению с  $z$ . Уравнение для энергии имеет вид

$$\frac{d(E/\omega)}{dt} = - \left( \frac{E}{\omega} \right) \nu k^2 = - \left( \frac{E}{\omega} \right) \frac{A}{z}, \quad (10.2.6)$$

где  $A = 2,5 \cdot 10^{30} \Omega^{-1} k_0^2$ .

В уравнении (10.2.6) фигурирует отношение  $(E/\omega)$  потому, что при расширении без диссипации сохраняется именно эта величина, адиабатический инвариант. Затухание, зависящее от диссипации, приводит к результату

$$\frac{E}{\omega} = \left( \frac{E}{\omega} \right)_0 \exp \left( - A \int_0^t \frac{dt}{z} \right). \quad (10.2.7)$$

Так как  $z \sim t^{-1/2}$ , то интеграл сходится; удобно записать

$$\left. \begin{aligned} t &= t_0^* z^{-2}, \quad dt = -2t_0^* z^{-3} dz, \\ t_0^* &= \frac{3,1}{g^{1/2}} \cdot 10^{19} \text{ сек} = 2,2 \cdot 10^{19} \text{ сек}, \\ \int_0^t \frac{dt}{z} &= \frac{2}{3} t_0^* z^{-3}. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.8)$$

Затухание волны определяется всегда последней частью всякого рассматриваемого периода: увеличение длины свободного пробега

\*) Заметим, что если плотность обычной материи порядка или больше плотности излучения, но плотность фотонов по-прежнему значительно больше плотности протонов и электронов, то  $\nu$  уменьшается в отношении  $\frac{\rho_\gamma}{\rho_{\text{вещ}} + \rho_\gamma}$  тогда как  $\varphi$  остается без изменения.

фотонов и периода колебаний пересиливает увеличение длины волны.

Выберем в качестве конечного момент рекомбинации и  $z = z_{\text{рек}} = 1400$  (это возможно лишь при  $\Omega \leq 0,07$ , так как тогда  $\rho_{\gamma} \geq \rho_{\text{вещ}}$  вплоть до  $z_{\text{рек}}$ , при больших  $\Omega$  необходимо учесть иной характер расширения при  $z_1 \leq z \leq z_{\text{рек}}$  и учесть влияние теплопроводности). Интеграл дает определенное число, и ответ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{E}{\omega} \right)_{\text{рек}} &= \left( \frac{E}{\omega} \right)_0 \exp \left( - \frac{2t_0^* A}{3z_{\text{рек}}^3} \right), \\ \delta_{\text{рек}} &= \delta_0 \exp \left( - \frac{t_0^* A}{3z_{\text{рек}}^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.2.9)$$

Величина в экспоненте зависит от длины волны возмущения; удобно от этой зависимости перейти к зависимости от массы, характерной для данной волны:

$$\frac{t_0^* A}{3z_{\text{рек}}^3} = \frac{t_0^*}{3z_{\text{рек}}^3} 2,5 \cdot 10^{39} \Omega^{-1} k_0^2 = \frac{k_0^2 10^{49}}{\Omega g^{1/2}} = \left( \frac{M_4}{M} \right)^{2/3},$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= \rho_{\text{вещ}} \left( \frac{\lambda}{2} \right)^3 = 1,5 \cdot 10^{-61} \Omega k_0^{-3} M_{\odot}, \\ M_4 &= \frac{4 \cdot 10^{12}}{\sqrt{\Omega} g^{1/4}} M_{\odot} = \frac{2,4}{\sqrt{\Omega}} 10^{12} M_{\odot}. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.10)$$

(для  $\Omega = 1$   $M_4 = 3,3 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ ).

Таким образом, появляется еще одна характерная масса  $M_4$ ; при  $M > M_4$  можно пренебречь затуханием, при  $M < M_4$  затухание имеет существенное значение, адиабатические возмущения практически исчезают: при  $M = 0,1 M_4$   $\exp [-(0,1)^{-2/3}] = 10^{-2}$ , при  $M = 0,01 M_4$   $\exp [-(0,01)^{-2/3}] = 4,5 \cdot 10^{-10}$ . Поэтому величина  $M_3$  — масса, при которой затухание происходит за одно колебание, — не играет роли. Любопытно, что по порядку величины длина волны возмущения, затухающего за космологическое время, есть среднее геометрическое длины свободного пробега фотонов и характерной длины  $ct$ ; это видно и сразу из условия

$$\nu k^2 \sim \frac{cl_{\gamma}}{\lambda^2} \sim \frac{1}{t}, \quad \lambda^2 \sim l_{\gamma} \cdot ct. \quad (10.2.11)$$

Соответственно  $M_4 \sim \sqrt{M_3 M_{\text{джк}}}$ , где  $M_{\text{джк}}$  — джинсовская масса. Весьма интересно отмеченное Силком совпадение характерной массы  $M_4$  и массы крупных галактик.

График для  $M_4 = M_4(t)$  показан на рис. 43 и 44. Однако мы увидим в конце этого параграфа, что в действительности из-за процессов в период рекомбинации эта характерная масса, меньше которой

Кинематическая вязкость  $\nu$ , т. е. отношение вязкости  $\eta$  к плотности  $\nu = \eta/\rho$ , и температуропроводность  $\varphi$ , т. е. отношение теплопроводности к теплоемкости единицы объема, имеют одинаковую размерность — ту же, что и коэффициент диффузии. Иногда называют кинематическую вязкость «коэффициентом диффузии скорости», а температуропроводность — «коэффициентом диффузии температуры». В предположениях, сделанных выше \*),

$$\nu = \varphi = \frac{1}{3} l_p c = 2,5 \cdot 10^{28} \Omega^{-1} z^{-3} \text{ см}^2/\text{сек}. \quad (10.2.4)$$

Составим уравнение для энергии колебания одной монохроматической волны (подразумевается энергия в единице сопутствующего пространства). Волна характеризуется «сопутствующим» волновым вектором  $k_0$ , связанным с текущим (мгновенным) значением волнового вектора соотношением

$$k = k_0 (1 + z). \quad (10.2.5)$$

В интересующем нас периоде до рекомбинации,  $z > 1400$ , пренебрегаем единицей по сравнению с  $z$ . Уравнение для энергии имеет вид

$$\frac{d(E/\omega)}{dt} = - \left( \frac{E}{\omega} \right) \nu k^2 = - \left( \frac{E}{\omega} \right) \frac{A}{z}, \quad (10.2.6)$$

где  $A = 2,5 \cdot 10^{28} \Omega^{-1} k_0^2$ .

В уравнении (10.2.6) фигурирует отношение  $(E/\omega)$  потому, что при расширении без диссипации сохраняется именно эта величина, адиабатический инвариант. Затухание, зависящее от диссипации, приводит к результату

$$\frac{E}{\omega} = \left( \frac{E}{\omega} \right)_0 \exp \left( - A \int_0^t \frac{dt}{z} \right). \quad (10.2.7)$$

Так как  $z \sim t^{-1/2}$ , то интеграл сходится; удобно записать

$$\left. \begin{aligned} t &= t_0^* z^{-2}, & dt &= -2t_0^* z^{-3} dz, \\ t_0^* &= \frac{3,1}{g^{1/2}} \cdot 10^{19} \text{ сек} = 2,2 \cdot 10^{19} \text{ сек}, \\ \int_0^t \frac{dt}{z} &= \frac{2}{3} t_0^* z^{-3}. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.8)$$

Затухание волны определяется всегда последней частью всякого рассматриваемого периода: увеличение длины свободного пробега

\*) Заметим, что если плотность обычной материи порядка или больше плотности излучения, но плотность фотонов по-прежнему значительно больше плотности протонов и электронов, то  $\nu$  уменьшается в отношении  $\frac{\rho_\gamma}{\rho_{\text{вещ}} + \rho_\gamma}$  тогда как  $\varphi$  остается без изменения.

фотонов и периода колебаний пересиливает увеличение длины волны.

Выберем в качестве конечного момент рекомбинации и  $z = z_{\text{рек}} = 1400$  (это возможно лишь при  $\Omega \leq 0,07$ , так как тогда  $\rho_{\gamma} \geq \rho_{\text{вещ}}$  вплоть до  $z_{\text{рек}}$ , при больших  $\Omega$  необходимо учесть иной характер расширения при  $z_1 \leq z \leq z_{\text{рек}}$  и учесть влияние теплопроводности). Интеграл дает определенное число, и ответ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{E}{\omega} \right)_{\text{рек}} &= \left( \frac{E}{\omega} \right)_0 \exp \left( - \frac{2t_0^* A}{3z_{\text{рек}}^3} \right), \\ \delta_{\text{рек}} &= \delta_0 \exp \left( - \frac{t_0^* A}{3z_{\text{рек}}^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.2.9)$$

Величина в экспоненте зависит от длины волны возмущения; удобно от этой зависимости перейти к зависимости от массы, характерной для данной волны:

$$\frac{t_0^* A}{3z_{\text{рек}}^3} = \frac{t_0^*}{3z_{\text{рек}}^3} 2,5 \cdot 10^{39} \Omega^{-1} k_0^2 = \frac{k_0^2 10^{49}}{\Omega g^{1/2}} = \left( \frac{M_4}{M} \right)^{2/3},$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= \rho_{\text{вещ}} \left( \frac{\lambda}{2} \right)^3 = 1,5 \cdot 10^{-61} \Omega k_0^{-3} M_{\odot}, \\ M_4 &= \frac{4 \cdot 10^{12}}{\sqrt{\Omega} g^{1/4}} M_{\odot} = \frac{2,4}{\sqrt{\Omega}} 10^{12} M_{\odot}. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.10)$$

(для  $\Omega = 1$   $M_4 = 3,3 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ ).

Таким образом, появляется еще одна характерная масса  $M_4$ ; при  $M > M_4$  можно пренебречь затуханием, при  $M < M_4$  затухание имеет существенное значение, адиабатические возмущения практически исчезают: при  $M = 0,1 M_4$   $\exp [-(0,1)^{-2/3}] = 10^{-2}$ , при  $M = 0,01 M_4$   $\exp [-(0,01)^{-2/3}] = 4,5 \cdot 10^{-10}$ . Поэтому величина  $M_3$  — масса, при которой затухание происходит за одно колебание, — не играет роли. Любопытно, что по порядку величины длина волны возмущения, затухающего за космологическое время, есть среднее геометрическое длины свободного пробега фотонов и характерной длины  $ct$ ; это видно и сразу из условия

$$vk^2 \sim \frac{cl_{\gamma}}{\lambda^2} \sim \frac{1}{t}, \quad \lambda^2 \sim l_{\gamma} \cdot ct. \quad (10.2.11)$$

Соответственно  $M_4 \sim \sqrt{M_3 M_{\text{джк}}}$ , где  $M_{\text{джк}}$  — джинсовская масса. Весьма интересно отмеченное Силком совпадение характерной массы  $M_4$  и массы крупных галактик.

График для  $M_4 = M_4(t)$  показан на рис. 43 и 44. Однако мы увидим в конце этого параграфа, что в действительности из-за процессов в период рекомбинации эта характерная масса, меньше которой



возмущения диссипируют, вырастает за короткий период рекомбинации до  $M_4^* = 10^{13} M_\odot$ . Это увеличение отмечено на рис. 43 и 44 линией с крестиками.

Можно предполагать, что в начальном спектре возмущений масса  $M_4$  не выделена, амплитуда возмущений, соответствующих различным массам, плавно возрастает в сторону малых масс. Однако к моменту рекомбинации диссипативные процессы устраняют все коротковолновые адиабатические возмущения.

В теории первичных адиабатических возмущений обособление объектов с массами меньше  $M_4$  может происходить лишь путем последующей фрагментации больших ( $M > M_4$ ) объектов.

Необходимо иметь в виду, что при  $\Omega > 0,07$  еще до рекомбинации нарушается условие доминирования излучения. При этом теплопроводность становится важнее вязкости. Далее, сама рекомбинация происходит не мгновенно.

В ходе рекомбинации уменьшается плотность электронов примерно в 10 000 раз при изменении  $z$  в 1,5 раза. Длина пробега фотонов пропорциональна  $n_e$ . Значит, в ходе рекомбинации при изменении  $\rho_{\text{вещ}}$  в 3 раза в 10 000 раз увеличивается длина пробега фотонов. Согласно формулам для теплопроводности и вязкости эти величины растут в том же отношении. Затухание акустических волн усиливается — однако усиления затухания в 10 000 раз не происходит!

Дело в том, что начиная с момента, когда длина пробега становится равной длине акустических волн, нельзя пользоваться понятиями вязкости и теплопроводности. Для массы  $M = 10^{13} M_\odot$ ,  $\Omega = 1$ ,  $z = z_{\text{рек}}$ , это условие достигается при  $n_e = 10^2 \text{ см}^{-3}$ , т. е. при степени ионизации порядка  $x = n_e/n_H = 0,01$ . Дальнейшее уменьшение степени ионизации уже не приводит к усилению затухания. Характерное время торможения частично ионизованного ( $x < 1$ ) вещества в поле излучения с плотностью энергии  $\epsilon_\gamma$  есть

$$\tau = \frac{3}{4} \frac{cm_p}{\epsilon_\gamma \sigma x} = 10^{11} \left( \frac{z_{\text{рек}}}{z} \right)^4 \frac{1}{x} \text{ сек.} \quad (10.2.12)$$

При  $x < 0,01$  это время больше космологического. Практически исключается всякое взаимодействие вещества с излучением; поскольку на почти нейтральное ( $> 99\%$ ) вещество не действует давление излучения, начинается период движения вещества под действием одних только сил тяготения с начальным распределением плотности и скорости, зависящим от процессов на стадии до рекомбинации.

Итак, характерная масса, меньше которой все адиабатические возмущения затухают к концу периода рекомбинации есть  $M_4^* \approx 10^{13} M_\odot$  [Чибисов (1972a, б), Пиблс и Ю (1970)]. Эта масса играет фундаментальную роль в теории образования галактик.

### § 3. Взаимодействие возмущений со свободными частицами

При рассмотрении развития возмущений плотности, а также распространения гравитационных волн возникает вопрос о возможной роли таких частиц, как нейтрино и высокоскоростные гравитоны. Выше, в связи с теорией горячей Вселенной, обсуждались пределы, в которых лежит плотность таких труднонаблюдаемых частиц (ТНЧ); напомним, что  $0,5\rho_\gamma < \rho_{\text{ТНЧ}} < 10\rho_\gamma$  (см. § 5 гл. 7). Там же рассматривалось влияние ТНЧ на закон космологического расширения.

Упоминалось также косвенное влияние ТНЧ на развитие возмущений за счет изменения общего темпа расширения.

В принципе, однако, есть и специфический эффект необратимого отбора энергии от акустических колебаний, приводящий к нагреванию ТНЧ. Этот эффект зависит от гравитационного взаимодействия волны переменной плотности с ТНЧ. Поскольку ТНЧ образуют бесстолкновительный газ, рассматриваемое явление подобно затуханию Ландау в теории власовских колебаний бесстолкновительной плазмы.

Дадим оценку порядка величины эффекта.

Акустическая волна распространяется со скоростью  $c/\sqrt{3}$ . Возмущения гравитационного потенциала связаны с возмущением плотности соотношением

$$\Delta\varphi = -k^2\varphi_k = 4\pi G \delta\rho = 4\pi G\rho \cdot \delta. \quad (10.3.1)$$

Среди ТНЧ, движущихся со скоростью света во всех направлениях, есть также такие, которые движутся в фазе с волной: для этого нужно, чтобы их скорость была направлена под углом  $\sim 55^\circ$  к волновому вектору. Доля частиц порядка  $\varphi/c^2$  захвачена и движется, все время отбирая энергию. Скорость отбора энергии порядка  $\rho_{\text{захв}} u_{\text{захв}} F$ , где

$$\rho_{\text{захв}} = \frac{\rho_{\text{ТНЧ}}\varphi}{c^2}, \quad u_{\text{захв}} = \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad F = -\nabla\varphi = ik\varphi_k. \quad (10.3.2)$$

Таким образом, скорость отбора энергии порядка

$$W = k\rho_{\text{ТНЧ}}\varphi^2 c^{-1} = (4\pi)^2 G^2 \rho^2 \delta^2 \rho_{\text{ТНЧ}} c^{-1} k^{-3} \text{ эрг/см}^3 \cdot \text{сек.} \quad (10.3.3)$$

Это выражение надо сравнить с плотностью акустической энергии

$$\varepsilon_{\text{ав}} = \rho u^2 = \rho c^2 \delta^2. \quad (10.3.4)$$

Получим уравнение

$$\frac{d\varepsilon_{\text{ав}}}{dt} = -\varepsilon_{\text{ав}} (4\pi)^2 G^2 \rho \rho_{\text{ТНЧ}} k^{-3} c^{-3} = -\varepsilon_{\text{ав}} \frac{\rho_{\text{ТНЧ}}}{\rho} \left( \frac{\lambda_{\text{Дж}}}{\lambda} \right)^{-4} \omega. \quad (10.3.5)$$

Следовательно, эффект — порядка единицы при переходе через нижнюю границу области устойчивости  $t=t_1$ . В этот момент  $\omega \sim 1/t_1$ ,  $\lambda \sim \lambda_{\text{дж}}$  (мы полагаем  $\rho_{\text{тнч}} \sim \rho$ ). Однако в дальнейшем, как показал Пиблс (1973а) затухание снова мало; таким образом, при переходе границы устойчивости происходит однократное уменьшение амплитуды в  $\sqrt{e}$  раз (или около того), и на этом влияние ТНЧ ограничивается.

С другой стороны, до перехода границы устойчивости, при  $t \leq t_1$ , затухания возмущений, очевидно, не происходит. Уже отмечалось, что возмущенную область в этом периоде можно рассматривать как независимо развивающийся участок Вселенной с измененными (по сравнению с окружающим веществом) начальными параметрами. На краях возмущенной области имеют место градиенты плотности, давления, скорости, и от краев в глубь возмущенной области идут волны разгрузки, нарушающие вышеописанную идилическую картину. Условие  $t < t_1$  есть условие, чтобы разгрузка не затронула всю область; но скорость волны разгрузки  $c/\sqrt{3}$  мало отличается от скорости ТНЧ, равной  $c$ , поэтому при  $t \leq t_1$  картина эволюции возмущенной области сохраняется и в присутствии ТНЧ.

Итак, общий вывод заключается в том, что во всем интервале масштабов возмущений, где имеет место период акустических колебаний, присутствие ТНЧ вызывает очень небольшое уменьшение амплитуды колебаний по сравнению с теорией, не учитывающей ТНЧ. Это уменьшение практически не зависит от масштаба и происходит в период превращения растущих возмущений в колебательные (акустические).

#### § 4. Энтропийные возмущения

Первичная плазма состоит из двух различных субстанций: излучения и вещества. Поэтому можно представить себе, что состав смеси, т. е. отношение вещества и излучения, может быть непостоянным, изменяться от точки к точке.

Неоднородности такого типа на ранних стадиях расширения, при  $\rho_\gamma \gg \rho_{\text{вещ}}$ , не вызывают движения вещества или излучения и заморожены. Позже, после рекомбинации, неоднородности в распределении вещества на фоне однородного излучения приведут к возникновению движения качественно тем же путем, что и адиабатические возмущения.

В качестве первого приближения рассмотрим возмущения плотности вещества

$$\rho_{\text{вещ}} = \bar{\rho}_{\text{вещ}} (1 + \delta_{\text{вещ}}(t) e^{ikx}) \quad (10.4.1)$$

на фоне однородного излучения  $\rho_\gamma = \text{const}$ . Предположим, что скорость вещества  $u_{\text{вещ}} \neq 0$ , тогда как фоновое излучение покоится,

$u_\gamma = 0$ . Сила трения, действующая на единицу массы вещества, равна

$$f = -\frac{4}{3} \frac{\sigma_T}{m_p} \frac{u_{\text{вещ}} - u_\gamma}{c} \rho_\gamma c^2 = -\gamma u_{\text{вещ}}, \quad \gamma = \frac{4}{3} \frac{\sigma_T \rho_\gamma c}{m_p}. \quad (10.4.2)$$

Уравнения сохранения вещества и движения приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_{\text{вещ}}}{dt} &= -ik u_{\text{вещ}}, \\ \frac{du_{\text{вещ}}}{dt} &= -ik b_{\text{вещ}}^2 \delta_{\text{вещ}} - \gamma u_{\text{вещ}} + \frac{i}{k} 4\pi G \rho_{\text{вещ}} \delta_{\text{вещ}}. \end{aligned} \quad (10.4.3)$$

В уравнении движения учтены действие давления самого вещества [но не излучения(!); изотермическая скорость звука в веществе  $b_{\text{вещ}}^2 = RT$ ], сила трения и гравитация. В этой теории, типа теории Джинса, ответ должен иметь вид  $\delta_{\text{вещ}}, u_{\text{вещ}} \sim e^{\omega t}$ , где  $\omega$  определяется уравнением

$$\omega^3 = 4\pi G \rho_{\text{вещ}} - k^2 b_{\text{вещ}}^2 - \gamma \omega. \quad (10.4.4)$$

В пределе длинных волн,

$$\begin{aligned} k \ll k_{\text{дж}}^* = \left( \frac{4\pi G \rho_{\text{вещ}}}{b_{\text{вещ}}^2} \right)^{1/2}, \quad \lambda \gg \lambda_{\text{дж}}^* = \frac{2\pi}{k_{\text{дж}}^*}, \quad M \gg M_{\text{дж}} \sim \frac{5 \cdot 10^4}{\sqrt{\Omega}} M_\odot, \\ \omega_1 = \frac{4\pi G \rho_{\text{вещ}}}{\gamma}, \quad \omega_2 = -\gamma. \end{aligned} \quad (10.4.5)$$

Очевидно, есть неустойчивость,  $\omega_1 > 0$ , но рост возмущений происходит очень медленно. Подставляя численные значения, получим на момент рекомбинации [при  $\Omega \leq 0,07$ ; иначе необходимо учитывать иной закон расширения в период от  $z = z_1$  ( $\rho_\gamma = \rho_{\text{вещ}}$ ) до  $z_{\text{рек}}$ ]

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\text{вещ}} &= 3 \cdot 10^{-20} \text{ г/см}^3, \quad b_{\text{вещ}}^2 = 5,7 \cdot 10^{11} \text{ см}^2/\text{сек}^2, \\ \rho_\gamma &= 2 \cdot 10^{-21} \text{ г/см}^3, \\ \sigma_T &= 0,665 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2, \quad \gamma = 3 \cdot 10^{-11} \text{ сек}^{-1}, \\ t_{\text{рек}} &= 1,5 \cdot 10^{13} \text{ сек}, \\ \omega_1 &= 8 \cdot 10^{-16} \text{ сек}^{-1}, \quad \omega_2 = -3 \cdot 10^{-11} \text{ сек}^{-1}, \\ \omega_1 t_{\text{рек}} &= 1,2 \cdot 10^{-2}, \quad \omega_2 t_{\text{рек}} = -450. \end{aligned} \right\} \quad (10.4.6)$$

Хотя в принципе усиление «нарастающей моды» происходит, оно почти полностью подавляется трением,  $\exp\left(\int \omega_1 dt\right) \leq 1,012$ . Второй корень,  $\omega_2$ , соответствует затуханию начальных возмущений скорости движения вещества относительно фона излучения без возмущений плотности; движение вещества быстро затухает, интеграл  $\int \omega_2 dt$  расходится, так как  $\omega_2 \sim t^{-2}$ .

Второй предельный случай соответствует коротким волнам,  $\lambda < \lambda_{\text{дж}}^*$ ,  $M < 5 \cdot 10^4 M_\odot$ . В этом случае оба корня отрицательны:

$\omega_1 = -\frac{k^2 b_{\text{вещ}}^2}{\gamma}$ ,  $\omega_2 = -\gamma$ . Условие  $|\omega_1 t|_{\text{рек}} = 1$  выполнено для  $k_{\text{рек}} = 3 \cdot 10^{-18} \text{ см}^{-1}$ . Это значит, что для всех масс  $M > 15 \Omega M_\odot$  эволюцией возмущений плотности вещества (в течение всего периода от сингулярности до рекомбинации) можно полностью пренебречь. Начальное распределение плотности вещества в сопутствующем пространстве сохраняется с очень ранних моментов (от сингулярности) вплоть до момента рекомбинации. Возмущения в малых масштабах,  $M < 15 \Omega M_\odot$ , сглаживаются из-за движения вещества относительно излучения. Можно, конечно, подробно исследовать процесс сглаживания, который протекает с колебаниями (при  $k > \gamma/b_{\text{вещ}}$ ) или без колебаний (при  $k < \gamma/b_{\text{вещ}}$ ). Однако такая бесплодная любознательность похожа на позицию врача, который, узнав, что его пациент умер, настойчиво интересуется, икал ли больной перед смертью.

Не затухают к моменту рекомбинации — а следовательно, остаются практически такими же, как и в начальный момент (как угодно близкий к сингулярности), — энтропийные возмущения с  $M > 15 \Omega M_\odot$ . Однако сразу после рекомбинации решающую роль играет давление нейтрального газа, с учетом которого джинсовская масса равна  $M_1 = 5 \cdot 10^4 \Omega^{-1/2} M_\odot$ .

Энтропийные возмущения с  $10^4 M_\odot \leq M \leq M_1$  сохраняются (постоянны до рекомбинации, но переходят в акустические колебания нейтрального газа и быстро затухают после рекомбинации). Возмущения с  $M_1 > M$  сохраняются до рекомбинации, а затем нарастают!

Существуют гипотезы, в которых образование объектов с массой порядка  $M_1$  [сверхзвезды — Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1967а) или шаровые скопления — Дикке и Гиббс (1968)] рассматривается как следствие энтропийных возмущений.

Отметим, наконец, что идеализированная картина энтропийных возмущений на фоне постоянного давления излучения справедлива лишь при длине волны меньше  $ct_{\text{рек}}$ , т. е. при массе меньше  $M \sim 10^{16} - 10^{17} M_\odot$ .

Это условие необходимо для того, чтобы действительно успело произойти выравнивание давления.

Легко убедиться, что в предельном случае волнового вектора  $k \rightarrow 0$  (или возмущенной массы  $M \rightarrow \infty$ ) энтропийные возмущения в плоском мире приводят лишь к затухающему возмущению плотности \*)! Сравним два плоских мира с различной энтропией вещества, эволюционирующих независимо друг от друга. В пределе

\*) При возмущении энтропии Вселенная сохраняет топологию — не переходит к закрытым или открытым мирам.

$t \rightarrow \infty$  плотность излучения при любой конечной энтропии становится малой по сравнению с плотностью вещества. И, следовательно,  $\rho_{\text{вещ}} \rightarrow \frac{1}{6\pi G t^2}$  независимо от энтропии; относительное различие плотности, зависящее от различия энтропии, с течением времени стремится к нулю.

Детальное исследование длинноволновых энтропийных возмущений в наблюдениях может быть, вероятно, отложено до тех пор, пока не появятся какие-либо признаки наличия и существенной роли таких возмущений (см. § 8 гл. 14).

### § 5. Вращательные возмущения

Вращательные (вихревые) возмущения рассматривались в предыдущей главе. Здесь отметим особенности поведения вращательных возмущений в теории горячей Вселенной, связанные а) с изменением массы излучения в ходе адиабатического расширения и б) с фотонной вязкостью.

Напомним, что в данной главе проводится ньютоновское рассмотрение линейной задачи. Поэтому в дальнейшем мы снова и снова будем возвращаться к вращательным возмущениям — в трактовке общей теории относительности и в нелинейной теории, когда возникает турбулентное движение.

Каков закон эволюции вращательной скорости в простейшем случае идеальной невязкой жидкости? Рассмотрим сферу радиуса  $R$  с плотностью  $\rho$  и скоростью  $\mathbf{u} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ . Максимальное значение скорости  $u_{\text{max}} = |\boldsymbol{\omega}| R$  достигается на экваторе. Момент импульса сферы равен  $0,4 \frac{4}{3} \pi \rho R^5 \boldsymbol{\omega}$ . Если трение отсутствует, то момент импульса сохраняется при расширении. При этом  $R = R_0 a(t)$  и  $\rho = \rho_0 a^{-3}(t)$  в случае вещества ( $P=0$ ) и  $\rho = \rho_0 a^{-4}(t)$  в случае излучения ( $P=\epsilon/3$ ). Поэтому

$$\omega \sim a^{-2}, \quad u_{\text{max}} \sim a^{-1} \quad \text{для } P=0, \quad (10.5.1)$$

$$\omega \sim a^{-1}, \quad u_{\text{max}} \sim \text{const} \quad \text{для } P=\epsilon/3. \quad (10.5.2)$$

На ранних стадиях эволюции Вселенной вихревая (вращательная) скорость сохраняется при расширении!

Этот закон может быть получен более простым путем: так как при вращательном движении не возникают градиенты давления (по крайней мере в линейном приближении), то поступательное движение данного сопутствующего объема подчиняется тем же законам, что и движение невзаимодействующей частицы:

$$\tilde{p} a = \text{const}, \quad (10.5.3)$$

где  $\tilde{p}$  — импульс:

$$\tilde{p} = M u = \rho V u. \quad (10.5.4)$$

Это снова дает

$$\rho \sim a^{-3}, \quad V \sim a^2, \quad M = \text{const}, \quad u \sim a^{-1} \quad \text{для} \quad P = 0, \quad (10.5.5)$$

$$\rho \sim a^{-4}, \quad V \sim a^3, \quad M \sim a^{-1}, \quad u = \text{const} \quad \text{для} \quad P = \epsilon/3. \quad (10.5.6)$$

Результат  $u = \text{const}$  для  $P = \epsilon/3$  можно сравнить с результатом  $u = \text{const}$  для звуковых колебаний в случае  $P = \epsilon/3$  (см. § 1 этой главы). Ультрарелятивистский газ с  $P = \epsilon/3$  состоит из частиц (фотонов), движущихся со скоростью света  $c$ . При расширении уменьшается энергия частиц, но не их скорость. Это и приводит к результату  $M \sim a^{-1}$ ,  $u = \text{const}$  для  $P = \epsilon/3$ .

Вязкость первичной плазмы приводит к затуханию вращательных возмущений в малых масштабах. Скорость затухания вращательных движений и звуковых волн может отличаться лишь безразмерным множителем порядка единицы. Поэтому масштаб, в котором вязкость приводит к сильному затуханию вращательных возмущений до рекомбинации, не может сильно отличаться от результатов, полученных Силком (1968) для звуковых волн.

Так обстоит дело, если вплоть до момента рекомбинации излучение доминирует,  $\rho_\gamma > \rho_{\text{вещ.}}$ . В противоположном случае, при  $\rho_\gamma < \rho_{\text{вещ.}}$ , в отсутствие диссипации  $\omega \sim a^{-2}$ ,  $u \sim a^{-1}$  — как для частиц; кроме того, кинематическая вязкость уменьшается (см. выше), но звуковые волны затухают также за счет теплопроводности. Вихревые возмущения не сопровождаются изменением плотности и температуры, поэтому теплопроводность на них не влияет.

Вследствие этого при большой плотности,  $\Omega \sim 1$ , затухают вращательные возмущения лишь с  $M < 4 \cdot 10^{11} M_\odot$ , тогда как адиабатические возмущения затухают вплоть до  $10^{13} M_\odot$ .

Это обстоятельство выяснил в связи с вихревой теорией Чибисов (1972а, б).

## § 6. Сшивание возмущений при изменении уравнения состояния вещества

Момент рекомбинации сопровождается переходными явлениями в нарастающих возмущениях. Сахаров (1965) отметил, что эти явления приводят к своеобразной периодической зависимости конечной амплитуды возмущений от длины волны. Он рассматривал холодную модель Вселенной. Качественно те же явления имеют место и в горячей модели. Рассмотрим этот эффект в горячей модели. В первом приближении рассматриваем рекомбинацию как происходящую мгновенно и рассмотрим возмущение с длинами волн между длиной волны Джинса для нейтрального газа и длиной волны Джинса в плазме до рекомбинации. Соответствующий интервал масс:

$$M_1 = 5 \cdot 10^4 M_\odot \leq M \leq M_2 = 3,4 \cdot 10^{16} M_\odot.$$

Этот интервал (числа даны для  $\Omega=1$ ) очень широк \*). В короткий период времени около момента рекомбинации расширением можно пренебречь, т. е. вернуться к джинсовскому способу рассмотрения возмущений. Растущие и затухающие возмущения экспоненциально зависят от времени; обозначим  $\omega = \sqrt{4\pi G \rho_{\text{рек}}}$ , где  $\rho_{\text{рек}}$  — плотность в момент рекомбинации. До рекомбинации решение имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= A_k \cos kx \cos (kbt' + \alpha_k), \\ u &= b A_k \sin kx \sin (kbt' + \alpha_k), \end{aligned} \right\} \quad (10.6.1)$$

где  $b = \frac{c}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{3\rho_{\text{вещ}}}{4\rho_{\gamma}}\right)^{-1/2}$ , а время  $t'$  отсчитано от момента рекомбинации,  $t' \ll t_{\text{рек}}$ .

После рекомбинации

$$\left. \begin{aligned} \delta &= (B_k e^{\omega t'} + C_k e^{-\omega t'}) \cos kx, \\ u &= \left(-\frac{\omega}{k} B_k e^{\omega t'} + \frac{\omega}{k} C_k e^{-\omega t'}\right) \sin kx. \end{aligned} \right\} \quad (10.6.2)$$

Коэффициенты  $B_k$ ,  $C_k$  могут быть найдены приравнованием  $\delta$  и  $u$  в момент  $t' = t - t_{\text{рек}} = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} B_k + C_k &= A_k \cos \alpha_k, \quad \frac{\omega}{k} (C_k - B_k) = b A_k \sin \alpha_k, \\ B_k &= \frac{A_k}{2} \left( \cos \alpha_k - \frac{bk}{\omega} \sin \alpha_k \right) = \\ &= \frac{A_k}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{bk}{\omega}\right)^2} \cos(\alpha_k + \theta), \\ \theta &= \arctg \frac{bk}{\omega} \approx \frac{\pi}{2} \quad \text{при } M \ll M_2. \end{aligned} \right\} \quad (10.6.3)$$

В точном решении при учете расширения необходимо заменить  $B_k e^{\omega t'}$  на  $B_k \left(\frac{t}{t_{\text{рек}}}\right)^{2/3}$  и, соответственно,  $C_k e^{-\omega t'}$  на  $C_k \left(\frac{t_{\text{рек}}}{t}\right)^{2/3}$ :

$$\frac{bk}{\omega} \approx \left(\frac{M_2}{M}\right)^{1/3}. \quad (10.6.4)$$

Переход  $t$  через  $t_{\text{рек}}$  сопровождается возрастанием амплитуды плотности в растущей моде  $B_k$  после рекомбинации по сравнению с амплитудой плотности в звуковой волне до рекомбинации. Это возрастание по порядку величины равно  $0,5 (M_2/M)^{1/3}$ , где  $M_2 = 3,4 \cdot 10^{16} M_{\odot}$  и  $M$  — характерная масса рассматриваемого возмущения. Этот рост связан со сшиванием скорости  $u$ . Для данного возмущения плотности массовая скорость вещества в звуковой волне больше, чем в растущих возмущениях.

\*) Часть интервала  $M_1 < M < M_2$  в действительности несущественна, так как в этой части амплитуда волн мала вследствие затухания (см. § 2 этой главы).



Отметим периодическую зависимость конечной амплитуды (при  $t > t_{\text{рек}}$ )  $B_k$  от фазы  $\alpha_k$ . Эта зависимость определяется множителем  $\cos(\alpha_k + \theta)$  в (10.6.3).

Каково происхождение и чем определяется фаза  $\alpha_k$ ? Чтобы выяснить это, необходимо вернуться к ранним фазам расширения, когда возмущения данного масштаба  $M$  были в области неустойчивости, ниже линии  $M = M_{\text{дж}}$ , на рис. 43, 44.

В этот период происходит рост одних и затухание других возмущений. В духе теории малых возмущений в расширяющейся Вселенной рассмотрим лишь нарастающую моду:

$$\delta = D_k t \cos kx, \quad u = -\frac{D_k}{k} \sin kx$$

$$\left( k = k_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-1/2}, \quad u \sim t^{1/2} \right). \quad (10.6.5)$$

Она должна быть сшита со звуковыми колебаниями типа (10.6.1). Момент сшивки определяется условием (см. рис. 44)

$$t_{\text{дж}} = t_1 \left( \frac{M}{M_2} \right)^{2/3}. \quad (10.6.6)$$

В этот момент

$$kb = \sqrt{4\pi G \rho} \approx \sqrt{\frac{3}{8}} t_{\text{дж}}^{-1}. \quad (10.6.7)$$

Эти возмущения (10.6.5) сшиваются с решением

$$\left. \begin{aligned} \delta &= A_k \cos kx \cos \left( \int_{t_{\text{дж}}}^t kb dt + \beta_k \right), \\ u &= b A_k \sin kx \sin \left( \int_{t_{\text{дж}}}^t kb dt + \beta_k \right), \end{aligned} \right\} \quad (10.6.8)$$

откуда следует определение  $\beta_k$ :

$$\tan \beta_k = -(kbt_{\text{дж}})^{-1} = -\sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \beta_k = -0,55. \quad (10.6.9)$$

Чтобы найти фазу  $\alpha_k$  на момент рекомбинации, необходимо знать рост фазы в течение колебаний, т. е. в интервале от  $t_{\text{дж}}$  до  $t_{\text{рек}}$ . Для этого учтем изменение длины волны и скорости звука при расширении:

$$\alpha_k = \beta_k + \int_{t_{\text{дж}}}^{t_{\text{рек}}} bk dt, \quad k = \kappa t^{-1/2}, \quad \kappa = \text{const}, \quad b = \frac{c}{V^2} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\rho_{\text{вещ}}}{\rho_\gamma} \right)^{-1/2}.$$

$$(10.6.10)$$

Окончательно получаем

$$\alpha_k = -0,55 + 6,6 \left( \frac{M_2}{M} \right)^{1/2} \approx 2\pi \left( \frac{M_2}{M} \right)^{1/2} - \frac{\pi}{6}. \quad (10.6.11)$$

Важно, что  $\alpha_k$  зависит от длины волны возмущения, определяемой инвариантом  $k_0$  или массой  $M$ . Если начальные возмущения задавать в виде гладкой функции  $D_k(k_0)$  [или  $D_k(M)$ ], то конечная амплитуда растущей моды в нейтральном газе имеет вид

$$A_k(M) = \text{const} \cdot D_k(M) M^{1/2} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{M_2}{M} \right)^{1/2} - \frac{\pi}{6} \right]. \quad (10.6.12)$$

Она промодулирована последним множителем, который и описывает колебания [Сахаров (1965)]. Грубо говоря, когда начальная стадия нарастания (при  $t < t_{\text{дж}}$ ) возмущений прерывается колебаниями ( $t_{\text{дж}} \leq t \leq t_{\text{рек}}$ ) и рост продолжается после рекомбинации ( $t > t_{\text{рек}}$ ), то конечная амплитуда возмущений велика, если в интервале  $t_{\text{дж}} - t_{\text{рек}}$  укладывается целое число полувольт, и равна нулю, если укладывается полуцелое число полувольт. Нули амплитуды соответствуют следующим масштабам:

$$\frac{M}{M_2} = 0,42; \quad 0,166; \quad 0,08; \quad 0,044; \quad 0,027; \quad 0,0176; \quad 0,012; \\ 0,009; \quad 0,0065; \quad 0,005 \text{ и т. д.} \quad (10.6.13)$$

Конечно, все числа даны грубо, но очень важно, что периодическая модуляция амплитуды вплоть до нуля есть точный результат \*).

Необходимо пояснить еще одну тонкость. Колебания были взяты в виде стоячих волн:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= A_k \cos kx \cos (kbt + \alpha_k), \\ u &= b A_k \sin kx \sin (kbt + \alpha_k). \end{aligned} \right\} \quad (10.6.14)$$

Стоячие волны принципиально отличаются от бегущих волн, имеющих вид

$$\left. \begin{aligned} \delta &= A_k \cos (kx - bkt - \alpha_k), \\ u &= b A_k \cos (kx - bkt - \alpha_k) \end{aligned} \right\} \quad (10.6.15)$$

или, в комплексной форме,

$$\delta = A_k e^{ikx - ikbt - i\alpha}, \quad u = b\delta.$$

Для бегущих звуковых волн амплитуда растущей моды после рекомбинации имела бы вид

$$B'_k = A_k \sqrt{1 + \left( \frac{kb}{\omega} \right)^2}$$

без модуляции \*\*). Если различие между стоячими и бегущими волнами столь велико, то почему же мы работаем со стоячими вол-

\*) Результаты машинного расчета см. Пиблс и Ю (1970).

\*\*) Пространственная фаза нарастающей моды  $\delta(x)$  после рекомбинации сдвинута, что, однако, не влияет на приведенное выше значение амплитуды.

нами? Ответ состоит в том, что при переходе от области нарастания возмущений при  $t < t_{\text{дж}}$  к звуковым волнам при  $t > t_{\text{дж}}$  мы получаем именно стоячие волны \*) без каких-либо независимых допущений.

В связи с явлением модуляции необходимо отметить следующее. Мы нашли амплитуду простой единичной моды (амплитуду фурье-компоненты) с определенным инвариантным волновым числом  $\kappa = ak$ . Для удобства мы ввели вместо  $\kappa$  переменную размерности массы, связанную с  $\kappa$  (вернее, с  $k$ ) соотношением  $M = \rho_{\text{вещ}} \left( \frac{\lambda}{2} \right)^3 =$

$= \pi^3 \rho_{\text{вещ}} k^{-3}$ . Эта масса  $M$  инвариантна (не зависит от времени), так как  $\rho_{\text{вещ}} \sim a^{-3}$ . Однако не следует думать, что спектр масс астрономических объектов может непосредственно отражать найденные колебания. Имеются другие процессы (тепловые, гравитационной неустойчивости), которые искажают влияние начального спектра на спектр масс астрономических объектов. Особенно сильно это влияние на найденные колебания. Эти вопросы более подробно рассмотрены в следующих главах.

Модуляция не может быть сильной для энтропийных возмущений, которые практически не вызывают движения вещества до рекомбинации. В этом случае просто  $B_k = A_k/2$ . Поэтому, в принципе, если подробное изучение спектра возмущений в области  $10^{15} - 10^{18} M_{\odot}$  покажет присутствие модуляций или, наоборот, докажет отсутствие модуляций, то такой результат позволит выбрать между адиабатическими и энтропийными начальными возмущениями.

Недавние детальные расчеты Чибисова (1972а, б) (с учетом периода, когда  $\rho_{\text{вещ}}$  и  $\rho_{\gamma}$  близки между собой, и с учетом немгновенной рекомбинации) показали, что определенная модуляция — не достигающая, однако, 100% — имеет место и в случае энтропийных возмущений. Для адиабатических возмущений принципиально при любых параметрах ( $\Omega$ , время рекомбинации и т. п.) есть серия длин волн, для которых теория предсказывает точное равенство нулю амплитуды получающихся позже нарастающих возмущений, иначе говоря, для адиабатических возмущений имеет место 100%-ная глубина модуляции колебаний.

К сожалению, до сих пор нет никаких определенных данных (кроме неравенств), касающихся амплитуды возмущений. С учетом всех трудностей неясно, удастся ли когда-нибудь выяснить по модуляции природу начальных возмущений.

\*) Если мы работаем в комплексной форме, то необходимо использовать условие вещественности  $A_k^* = A_{-k}$ .

## § 1. Общие принципы и уравнения

Для полного и точного описания развития возмущений с длиной волны  $\lambda$  больше или порядка  $ct$  в жидкости с  $P = \epsilon/3$  необходимо пользоваться общей теорией относительности (ОТО). Некоторые выводы о законах развития адиабатических возмущений были получены в предыдущей главе без использования ОТО, однако строгое обоснование этих результатов будет дано ниже. В рамках ОТО может быть достигнуто более глубокое понимание свойств вращательных возмущений. Только в ОТО возникают возмущения, связанные с гравитационными волнами.

Вопросы развития возмущений в ОТО были весьма полно проанализированы в классической работе Лифшица (1946), позже обзор этого вопроса дан в работе Лифшица и Халатникова (1963а, б). Задача ставилась следующим образом. В качестве невозмущенного решения берется однородная изотропная модель Фридмана. Тензор энергии-импульса материи считается гидродинамическим:  $T_{ik} = (\epsilon + P)u_i u_k - g_{ik} P$  \*). Плотность энергии и давление связаны уравнением состояния:  $P = P(\epsilon)$ . В невозмущенном решении материя покоится относительно системы отсчета и компоненты 4-скорости равны  $u^0 = 1$ ,  $u^a = 0$ . Задаются малые «возмущения» модели, т. е. возмущается метрический тензор  $g_{ik}^{(1)} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}$  ( $g_{ik}^{(0)}$  — невозмущенный тензор,  $h_{ik}$  — возмущения) и тензор энергии-импульса  $\epsilon^{(1)} = \epsilon^{(0)} + \delta\epsilon$ , и задаются малые скорости  $u^a$  ( $u^0$  определяется из тождества  $u^i u_k = 1$ ). Эти выражения подставляются в уравнении Эйнштейна, которые связывают между собой возмущения  $h_{ik}$ ,  $\delta\epsilon$ ,  $u^a$  и определяют их эволюцию во времени.

Эта задача является типичной задачей Коши; надо задать начальные возмущения и, решая систему уравнений, проследить их эволюцию во времени.

Здесь необходимы следующие пояснения. Первое пояснение касается задания начальных возмущений. В фиксированный момент

\*) Латинские индексы пробегает значения 0, 1, 2, 3, греческие — 1, 2, 3. Индекс «0» относится к координате времени.

времени  $t_0 = \text{const}$  возмущения  $h_{ik}$ ,  $\delta e$ ,  $u^\alpha$  не могут быть заданы все независимо друг от друга произвольным образом. Уравнения Эйнштейна накладывают на начальные значения  $(h_{ik})_0$ ,  $(\delta e)_0$ ,  $(u^\alpha)_0$  определенные связи. Это соответствует тому факту, что и в общем случае теории относительности начальные значения  $(g_{ik})_0$  и  $(T_{ik})_0$  не независимы, а подчиняются связям, даваемым уравнениями ОТО. Физическая причина существования таких связей заключается в том, что распределение материи (тензор  $T_{ik}$ ) определяет создаваемое ею гравитационное поле. Но задание  $g_{ik}$  также позволяет вычислить гравитационное поле. Следовательно,  $g_{ik}$  не может быть задано независимо. Конечно, в ОТО помимо гравитационного поля, зависящего от материи, т. е. от  $T_{ik}$ , есть еще и свободное поле (гравитационные волны). Поэтому  $g_{ik}$  определяется по  $T_{ik}$  не полностью. В классической ньютоновской теории связи между  $T_{ik}$  и  $g_{ik}$  соответствует уравнение Пуассона  $\Delta\varphi = 4\pi G\rho$ , которое позволяет по распределению материи (плотности вещества  $\rho$ ) найти гравитационный потенциал  $\varphi^*$ ). Мы не останавливаемся здесь подробно на связях между начальными значениями  $(g_{ik})_0$  и  $(T_{ik})_0$ . Математическая сторона дела разобрана, например, в книге Петрова (1966). В нашей задаче необходимые формулы будут приведены в конце параграфа. Отдельные уточнения мы сделаем позже.

Второе пояснение касается выбора системы координат и связанного с этим вопроса о физической трактовке полученных результатов.

В ОТО выбор системы координат произволен. Это вносит серьезные проблемы в правильную интерпретацию результатов. Приведем пример. Пусть мы никак не меняем космологическую модель Фридмана, но рассматриваем ее не в общепринятой сопутствующей системе, а в некоторой другой. Выберем эту другую систему так, чтобы она с течением времени все больше отклонялась от сопутствующей. В формальном решении мы будем видеть, что  $h_{ik}$ ,  $\delta e$  и  $u^\alpha$  нарастают и решение все больше «уходит» от фридмановского. Ясно, что в таком «уходе» нет никакой физики, «уход» связан с неудачным выбором системы отсчета. Здесь избавиться от такой «нефизической неустойчивости» легко — надо вернуться к фридмановской системе отсчета. А что делать в том случае, когда фридмановское решение имеет действительные физические возмущения? Как отделить физические отклонения от подобных рассмотренных выше координатных отклонений?

Одним из возможных способов является выбор сопутствующей системы отсчета в возмущенных решениях, т. е. выбор системы,

---

\*) Подчеркнем, что в ньютоновской теории гравитационное поле создается только плотностью вещества  $\rho$ , в то время как в ОТО оно зависит и от  $\rho$  и от  $P$ ,  $u^i$ . Если не ставить условия  $\rho=0$ ,  $\varphi=0$  на пространственной бесконечности, то и в ньютоновской теории остается произвол, к  $\varphi$  можно добавить решение для пустоты  $\Delta\varphi=0$ .

в которой вещество покоится,  $u^a \equiv 0$ . Действительно, нас интересуют свойства расширяющегося вещества. Если в сопутствующей веществу системе физические величины (но не координатные, так как в выбранной системе отсчета можно еще по-разному выбирать пространственные координаты, например сферические или цилиндрические, и по-разному отсчитывать время; см. ТТ и ЭЗ) мало отличаются от соответствующих величин в решении Фридмана, то, значит, с физической точки зрения возмущения малы.

Лифшиц (1946) и его многочисленные последователи пошли несколько иным путем. Выбиралась для исследования возмущений синхронная система отсчета, в которой  $g_{00} \equiv 1$  и  $g_{0a} \equiv 0$ . После получения решения для возмущений в этой системе отсчета (которая также определяется еще не однозначно!) можно проанализировать его, варьируя системы координат, и выяснить, какая часть возмущения является физической, т. е. описывает изменение распределения плотности в сопутствующей системе, изменение характера деформации среды, появление в ней сил ускорения и абсолютного вращения (математический аппарат для описания этих величин см. в ТТ и ЭЗ). Анализ позволяет отбросить «нефизические» моды.

Мы будем следовать методу Лифшица \*). Прежде чем переходить к выводу формул, сделаем еще следующее замечание. В работе Лифшица (1946) состояние вещества описывалось гидродинамическим тензором  $T_{ik}$ . Однако свойства вещества определяются не только механическими величинами — плотностью и давлением. Существуют еще такие величины, как, например, состав; при высокой температуре и плотности, когда все процессы достигают термодинамического равновесия, состав характеризуется заданием сохраняющихся величин — «зарядов»: барионного заряда, лептонных зарядов — и плотности энтропии. Кроме того, с учетом вязкости и слабовзаимодействующих «свободных» частиц «гидродинамический» тензор  $T_{ik}$  не является наиболее общим! Тем не менее в рамках линейной теории есть основания думать, что результаты Лифшица о росте возмущений не изменятся качественно, да и количественные изменения, вероятно, не превысят 30%.

В нелинейном приближении можно ожидать важных изменений. Например, при наличии частиц с большой длиной пробега, в принципе, возможно нарушение теоремы Гельмгольца и появление вихревых составляющих скорости в первоначально безвихревой жидкости. Таким образом, в связи с развитием теории горячей Вселенной возникли новые проблемы и в теории гравитационной неустойчивости в ОТО. Однако значение классических результатов при этом не уменьшилось. С их изложения мы начнем.

Мы будем рассматривать возмущения в областях пространства, которые могут быть велики по сравнению с  $ct$ , но малы по сравнению

\*) Иной подход см. Хоукинг (1966а).

с радиусом кривизны пространства  $a$  в рассматриваемый период. На ранних стадиях эволюции, как мы знаем (см. гл. 2), всегда  $a \gg ct$ . Принятые условия эквивалентны тому, что мы будем рассматривать возмущения в плоском мире с критической плотностью вещества. Полученные результаты достаточны для нашей ближайшей цели — анализа возможных путей развития галактик. Общий случай (когда длина волны возмущения не мала по сравнению с  $a$ ) рассмотрен все в той же замечательной работе Лифшица (1946).

В плоском мире,  $\rho = \rho_c$ , возмущения «раскладываются» по плоским волнам подобно возмущениям в ньютоновской теории. Итак, в случае однородной и изотропной модели Вселенной (модель Фридмана) с плоским сопутствующим пространством запишем:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = a^2(\eta) (d\eta^2 - \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta). \quad (11.1.1)$$

Здесь последнее равенство получено заменой координаты времени  $c dt \rightarrow a d\eta$ . Невозмущенное решение получено нами выше, в § 1 гл. 2. Мы будем работать в метрике с координатным временем  $\eta$ .

В невозмущенном решении вещество покоится,  $u^0 = \frac{1}{a(\eta)}$ ,  $u^\alpha = 0$  (невозмущенная система отсчета является и синхронной и сопутствующей). Наиболее общие малые возмущения метрики задаются добавлением  $h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  ( $\eta \equiv x^0$ ), но с помощью преобразования координат всегда можно вернуться к синхронной метрике, т. е. к метрике, не содержащей перекрестных членов вида  $dx^0 dx^\alpha$ , и с  $g_{00} = 1$ . Возмущения остаются лишь в пространственной части метрики:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = a^2(\eta) \left[ d\eta^2 - \left( \delta_{\alpha\beta} + \frac{h_{\alpha\beta}}{a^2(\eta)} \right) dx^\alpha dx^\beta \right]. \quad (11.1.2.)$$

В формулах (11.1.2) возмущенная метрика задана в синхронной системе отсчета, но эта система отсчета, вообще говоря, с учетом  $h_{\alpha\beta}$  уже не является сопутствующей. Все расчеты мы проводим в линейном приближении,  $h_{\alpha\beta}$  — величины первого порядка малости. Кроме того, возникают пространственные компоненты скорости и возмущения плотности. Отклонения  $u^0$  от единицы и нарушение равенств  $T^0_0 = \epsilon$  и  $T^\alpha_\alpha = -P\delta^\alpha_\alpha$  возможны лишь во втором порядке, поскольку они пропорциональны произведению  $u_\alpha u^\beta$ . Используя невозмущенную метрику для поднятия и опускания индексов, получим (это есть определение величин  $h^\beta_\alpha$  со смешанными индексами)

$$h^\beta_\alpha = h^\alpha_\beta = \frac{1}{a^2} h_{\alpha\beta}. \quad (11.1.3)$$

Смешанные компоненты  $h^\beta_\alpha$  (включая  $\alpha = \beta$ ) безразмерны, они определяют величину возмущений метрики в том смысле, что если

$h_{\alpha}^{\beta} \ll 1$ , то мало возмущение метрики (этого нельзя сказать о размерных  $h_{\alpha\beta}$  и  $h^{\alpha\beta}$ ).

Условия синхронности не определяют системы координат полностью, так как существуют преобразования координат, оставляющие систему координат синхронной. Этот произвол дает возможность появления указанных выше нефизических добавок в  $h_{\alpha}^{\beta}$ ,  $\delta\epsilon$ ,  $u^{\alpha}$ . Подставляя  $g_{00}=a^2$ ,  $g_{0i}=0$ ,  $-g_{\alpha\beta}=a^2\delta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}$  из (11.1.2) и  $T_{ik}=T_{ik}^{(0)}+\delta T_{ik}$  в уравнения Эйнштейна, мы получаем систему уравнений для возмущений, которая может быть записана в синхронной системе в следующем виде [Лифшиц и Халатников (1963а, б)]:

$$\frac{1}{2}(h_{\gamma}^{\delta}\dot{\gamma}-h\dot{\gamma})\left(1+3\frac{dP}{d\epsilon}\right)+\ddot{h}+\dot{h}\frac{\dot{a}}{a}\left(2+3\frac{dP}{d\epsilon}\right)=0, \quad (11.1.4)$$

$$(h_{\alpha}^{\gamma}\dot{\gamma}+h_{\gamma}^{\beta}\dot{\gamma}_{\alpha}-h_{\alpha}^{\beta}-h_{\alpha}^{\beta}\dot{\gamma})+\ddot{h}_{\alpha}^{\beta}+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_{\alpha}^{\beta}=0 \quad (\alpha \neq \beta), \quad (11.1.5)$$

$$\frac{\delta\epsilon}{\epsilon}=\frac{c^2}{16\pi G\epsilon a^2}\left(h_{\alpha}^{\beta}\dot{\alpha}-h\dot{\alpha}+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}\right), \quad (11.1.6)$$

$$\frac{u^{\alpha}}{c}=\frac{c^2}{16\pi G}\frac{(h^{\alpha}-h_{\beta}^{\alpha\beta})}{a^2(P+\epsilon)}. \quad (11.1.7)$$

Точка обозначает  $\frac{\partial}{\partial x^0}=\frac{\partial}{\partial \eta}$ ,  $h=h_{\alpha}^{\alpha}$ . Индексы после запятой означают простое дифференцирование по соответствующей координате. Здесь и далее в этом разделе  $u^{\alpha}$  — компоненты физической (не координатной!) скорости. В данном приближении этих уравнений достаточно для определения эволюции возмущений, разложенных по плоским волнам в трехмерном пространстве с евклидовой метрикой. При этом (11.1.4) получается из уравнения для  $R_{\alpha\alpha}$ , (11.1.5) — для  $R_{\alpha\beta}$ , (11.1.6) — для  $R_{00}$  и (11.1.7) — для  $R_{0\alpha}$ .

## § 2. Классификация возмущений

Решение уравнений (11.1.4) — (11.1.7) для плоских волн возмущения ищем в следующем виде. Сначала по уравнениям (11.1.4), (11.1.5) находим  $h_{\alpha\beta}$ , а затем уже элементарными вычислениями по (11.1.6) и (11.1.7) находим  $\delta\epsilon$  и  $u^{\alpha}$ .

Возмущения рассматриваются на фоне пространственно-однородной и изотропной, но эволюционирующей Вселенной. Следовательно, решения, относящиеся к «элементарным», «собственным», «фундаментальным» возмущениям (на которые раскладываются произвольные возмущения), должны обладать инвариантностью относительно тех преобразований, относительно которых тождественно инвариантно невозмущенное решение.

Одно преобразование, вытекающее из однородности пространства, есть сдвиг пространственных координат. В нерелятивистской



теории было выяснено, что это требование приводит к зависимости решения от координат вида  $e^{i\kappa x}$ . Таким образом, решение зависит от одного трехмерного вектора  $\kappa$ .

Теперь учтем, что в ОТО «решением» является тензор второго ранга в трехмерном пространстве,  $h_{\alpha\beta}$ .

Изотропия означает существование группы вращения в трехмерном пространстве. Коэффициенты перед экспонентой и волновой вектор могут быть использованы для построения тензора второго ранга в трехмерном пространстве — тензора возмущений  $h_{\alpha\beta}^B$ .

Следуя Лифшицу, мы введем сначала скаляр  $Q = e^{i\kappa x}$ , который приводит к тензору  $h_{\alpha\beta}$  следующим путем. Из  $Q$  можно составить тензор двумя способами:

$$Q_{\alpha}^B = \frac{1}{3} \delta_{\alpha}^B Q, \quad P_{\alpha}^B = \left( \frac{1}{3} \delta_{\alpha}^B - \frac{\kappa_{\alpha} \kappa^B}{\kappa^2} \right) Q. \quad (11.2.1)$$

Умножив каждый из тензоров на множитель, зависящий от  $\eta$ , и сложив их, получим тензор

$$h_{\alpha}^B = \lambda(\eta) P_{\alpha}^B + \mu(\eta) Q_{\alpha}^B.$$

Заметим, что из такого тензора можно составить и вектор  $P = \kappa Q / |\kappa|$  и скаляр  $Q$ .

Опять же следуя Лифшицу, введем вектор  $S = S e^{i\kappa x}$ . Чтобы этот случай не свелся к предыдущему, надо, чтобы из этого вектора нельзя было построить скаляр. Для этого мы потребуем, чтобы  $S \perp \kappa$ ,  $(S, \kappa) = 0$ . Следовательно, для данного  $\kappa$  имеются две степени свободы (две независимые компоненты  $S$ ).

С помощью векторов  $S$  и  $\kappa$  можно построить тензор  $S_{\alpha}^B$ :

$$S_{\alpha}^B = \frac{1}{\kappa} (\kappa^B S_{\alpha} + \kappa_{\alpha} S^B). \quad (11.2.2)$$

Умножая  $S_{\alpha}^B$  на множитель, зависящий от времени, получим  $h_{\alpha}^B$ .

И, наконец, введем тензор второго ранга

$$G_{\alpha}^B = \gamma_{\alpha}^B e^{i\kappa x}. \quad (11.2.3)$$

Так как мы хотим, чтобы с помощью этого тензора и вектора  $\kappa$  нельзя было бы построить ни вектора, ни скаляра (иначе получим один из предыдущих случаев), то мы должны потребовать, чтобы

$$G_{\alpha}^B \kappa_B = 0, \quad G_{\alpha}^B \kappa_B \kappa^{\alpha} = 0. \quad (11.2.4)$$

Напомним, что величины  $Q$ ,  $S$  и  $G_{\alpha}^B$  являются соответственно скалярами, векторами и тензорами лишь в трехмерном пространстве.

Ниже будет показано, что скаляр  $Q$  описывает возмущения скалярной величины — плотности вещества и соответствующие движения вещества, т. е. адиабатические возмущения и, в частности, звуковые волны.

Вектор  $S$  описывает возмущение скорости, но ему не соответствует скаляр. Это значит, что  $\operatorname{div} u = 0$ , поле скорости является вихревым ( $\operatorname{rot} u \neq 0$ , иначе при условии конечности  $u$  получим  $u \equiv 0$ ). Наконец, тензор (11.2.3) описывает ортогональные  $\kappa$  возмущения метрики (без возмущений скорости и плотности), чему соответствуют распространяющиеся по Вселенной гравитационные волны.

Ниже мы подробно останавливаемся на каждом типе возмущений. Лифшиц (1946) рассматривает также возмущения замкнутой ( $\Omega > 1$ ) и гиперболической ( $\Omega < 1$ ) Вселенной. Однако для возмущений, масштаб которых меньше радиуса мира ( $< cH^{-1} \sim 4 \cdot 10^9$  пс на сегодняшний момент), отличия малы. Крайний случай возмущения мира как целого обсуждается в разделе IV. Мы продолжим рассмотрение возмущений в плоской модели.

### § 3. Скалярные возмущения

Рассмотрим первый тип возмущений — (11.2.1).

В работе Лифшица было показано, что для ранних стадий расширения, описываемых уравнением состояния  $P = \varepsilon/3$ , решения уравнений возмущения (11.1.4) — (11.1.7) могут быть записаны в следующем виде: при  $\kappa\eta \ll 1$

$$\left. \begin{aligned} h_{\alpha}^{\beta} &= \frac{3C_1}{\eta} P_{\alpha}^{\beta} + C_2 (Q_{\alpha}^{\beta} + P_{\alpha}^{\beta}), \\ \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} &= \frac{\kappa^2}{9} (C_1\eta + C_2\eta^2) Q, \\ \frac{u^{\alpha}}{c} &= -\frac{i\kappa}{12} \left( 3C_1 + C_2 \frac{\kappa^2}{9} \eta^3 \right) P^{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (11.3.1)$$

и при  $\kappa\eta \gg 1$

$$\left. \begin{aligned} h_{\alpha}^{\beta} &= \frac{C}{\kappa^2 \eta^2} (P_{\alpha}^{\beta} - 2Q_{\alpha}^{\beta}) e^{i\kappa\eta/\sqrt{3}}, \\ \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} &= -\frac{C}{9} e^{i\kappa\eta/\sqrt{3}} Q, \\ \frac{u^{\alpha}}{c} &= \frac{C}{12\sqrt{3}} e^{i\kappa\eta/\sqrt{3}} P^{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (11.3.2)$$

Здесь  $Q_{\alpha}^{\beta}$  и  $P_{\alpha}^{\beta}$  определяются (11.2.1),  $P^{\alpha} = \frac{\kappa^{\alpha}}{\kappa} Q$ ,

$$C = 4\sqrt{3} C_2 + 3i\sqrt{3} \kappa C_1. \quad (11.3.3)$$

В полученных решениях уже исключены моды, соответствующие фиктивным возмущениям, о которых говорилось ранее, и оставлены только физические моды. Технику выделения нефизических мод см. Лифшиц, Халатников (1963а, б). Для других типов возмущений метрики (см. далее §§ 4, 5) мы тоже будем выписывать только физические моды.

Эти формальные результаты необходимо сравнить с интуитивными (т. е. не вполне строгими) результатами, полученными в предыдущей главе. Условие конечных возмущений метрики вблизи сингулярности есть  $C_1=0$ . С учетом этого при  $\kappa\eta \ll 1$  главным членом в  $\delta \equiv \frac{\delta\epsilon}{\epsilon}$  будет  $\frac{\kappa^2}{9} C_2 \eta^2 Q$ . Вспоминая, что  $\eta \sim t^{1/2}$ , получим  $\delta \sim t$ .

При  $\kappa\eta \gg 1$   $\delta \sim \cos \frac{\kappa\eta}{\sqrt{3}}$ , что соответствует акустическим колебани-

ям со скоростью звука  $b = \frac{c}{\sqrt{3}}$  и постоянной амплитудой возмущений

плотности. Таким образом, наиболее важные результаты интуитивного анализа подтверждаются в точной теории. Это же справедливо и для уравнения состояния  $P=0$ , рассматривавшегося Боннором (1957) в нерелятивистской теории. Любопытно, что эволюция теоретической мысли шла в неестественном порядке, точная теория была развита на 10—20 лет раньше, чем интуитивный подход.

Точная теория работает с возмущениями метрики. Согласно (11.3.1) мода  $C_1$  связана с бесконечным ( $\sim 1/\sqrt{t}$ ) возмущением метрики при  $t \rightarrow 0$ . Поэтому, если требовать, чтобы в момент  $\eta_0$  возмущения были малы, то  $C_1 \ll \eta_0$ . Для  $C_2$  имеем условие  $C_2 \ll 1$ . Следовательно, в теории малых возмущений, в которой предполагается, что возмущения в начале расширения при  $t \rightarrow 0$  малы, необходимо положить  $C_1=0$ , как уже упоминалось выше, и рассматривать только моду с  $C_2$ , т. е. моду с  $\delta \sim t$ . Эта мода, требующая конечных возмущений метрики при  $t \rightarrow 0$  ( $h_{\alpha\beta}^0$  при этом вообще не зависят от  $t$ ), связана с возмущениями плотности, конечными при конечном времени, но стремящимися к нулю пропорционально  $t$  при  $t \rightarrow 0$ .

Когда этот результат известен, его нетрудно получить и из интуитивных соображений; мерой возмущений метрики является безразмерное отношение  $\frac{\delta\phi}{c^2}$ , где  $\phi$  — ньютоновский гравитационный

потенциал. По порядку величины  $\delta\phi \sim \frac{G\delta M}{l} \sim G\delta\rho l^2 \sim G \cdot \rho \cdot \delta \cdot l^2$ . При

$P=\epsilon/3$ , подставляя  $\rho \sim t^{-2}$ ,  $l \sim a \sim t^{1/2}$ ,  $\delta \sim t$ , получим, что  $\frac{\delta\phi}{c^2} = \text{const}$ , т. е. не зависит от  $t$ . Легко проверить, что  $\delta\phi = \text{const}$  для больших длин волн (что соответствует постоянству возмущений метрики) при любом уравнении состояния. Например, для  $P=0$

$$\rho \sim t^{-2}, \quad \delta \sim t^{1/2}, \quad l \sim a \sim t^{1/2}, \quad \rho l^2 \delta \sim \text{const}.$$

Еще раз подчеркнем, что эти соображения не имеют силы доказательств, так как ньютоновская теория используется за границей области своей применимости (в области, где  $\phi > c^2$  \*).

\*) Кроме того, отождествление  $\delta\phi/c^2$  с возмущением потенциала в деформирующейся системе отсчета тоже не всегда верно.

Независимость возмущений метрики от времени на ранних стадиях расширения полностью согласуется с идеей, которая подчеркивалась при интуитивном анализе длинноволновых возмущений. В § 4 главы 9 рассматривалась независимая эволюция двух областей с различными начальными условиями. В рамках ОТО обе эти области (части) отличаются также метрикой и кривизной. В ходе независимой эволюции это различие в метриках сохраняется. Например, отношение длины экватора к радиусу (оно меньше, чем  $2\pi$ ) в области замкнутого мира всегда одно и то же в ходе эволюции этой области мира.

Сферически-симметричные возмущения с  $\delta > 0$ , являющиеся суперпозицией плоских волн, могут рассматриваться как часть замкнутого мира, вложенная в плоский мир. Эта интерпретация важна при сравнении точной теории в рамках ОТО и интуитивного анализа. Возмущения скорости, даваемые (11.3.1), пропорциональны  $\kappa^2 \eta^2 \sim t^{3/2} \sim \lambda^2$ , тогда как интуитивный анализ дает  $u \sim \frac{\lambda \delta}{t} \sim t^{1/2}$ .

Налицо, казалось бы, явное противоречие, но это не так. Дело в том, что это скорости по отношению к разным системам отсчета. В интуитивной ньютоновской теории скорость определяется по отношению к невозмущенной системе отсчета. В точной теории (ОТО) в возмущенном решении нет «невозмущенной» системы отсчета, и скорость измеряется в уже возмущенной метрике. Возмущения метрики включают изменение локальной постоянной Хаббла, и, следовательно, главная часть «возмущенной» скорости интуитивной теории уже содержится в возмущениях метрики. Если в обоих подходах вычислять не скорость, которая зависит от выбора системы отсчета, а возмущения тензора скоростей деформации вещества, то получатся одинаковые результаты.

Различие двух подходов в вычислении  $u$  исчезает на поздних стадиях, когда длина волны возмущения становится мала по сравнению с горизонтом,  $\lambda \ll ct$ . Здесь возмущения метрики стремятся к нулю, есть полное соответствие между  $\delta$  и  $u$ . Это — описание звуковых волн. Очевидно, описание коротких звуковых волн в рамках ОТО — роскошь, но сила и красота метода Лифшица таковы, что он может себе это позволить! Однако нужно подчеркнуть, что уменьшение возмущений метрики при  $\lambda \ll ct$  специфично именно для уравнения состояния плазмы с доминирующей ролью излучения, со скоростью звука  $b = c/\sqrt{3}$ . Здесь играет роль именно выравнивание возмущений под влиянием градиента давления, играет роль «звуковой» горизонт. При  $P = 0$  звукового режима нет,  $b = 0$ , возмущения плотности продолжают расти при  $\lambda < ct$ , остаются постоянными возмущения метрики; короче — в пыли свет ничего не выравнивает.

В своей пионерской работе Лифшиц подчеркивал отличие степенного возрастания  $\delta$  в теории, основанной на ОТО, от экспонен-

циального роста возмущений в теории Джинса, основанной на ньютоновской механике. Мы знаем теперь, что дело не в переходе от ньютоновской теории к ОТО, а в рассмотрении эволюционирующей Вселенной. И в действительности  $tn \approx e^{\int \omega dt}$ , отличия нет. Однако второй важнейший качественный вывод Лифшица остается непоколебимым до сегодняшнего дня: для объяснения наблюдаемой картины с конечными возмущениями плотности сегодня (галактики!) достаточно, чтобы  $\delta \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ , но возмущения метрики должны быть конечными,  $h_{\alpha}^{\beta} \neq 0$  при  $t \rightarrow 0$ . По оценке Новикова (1964б), рассмотревшего конкретную ситуацию в нашей Вселенной,  $h_{\alpha}^{\beta} \approx 10^{-2} - 10^{-3}$  при  $t \rightarrow 0$ . Эта оценка, сделанная до открытия реликтового излучения, мало изменилась с учетом горячей Вселенной.

Вселенная, асимптотически приближающаяся к строго однородной по всем параметрам (плотность, энтропия, метрика) вблизи сингулярности, несовместима с наблюдаемой в настоящее время картиной! Этот вывод остается справедливым и для других видов возмущений метрики, которые мы рассмотрим ниже. Энтропийные возмущения не связаны с возмущением метрики, они совместимы с  $h_{\alpha}^{\beta} = 0$  при  $t = 0$ , но при этом конечным остается  $\frac{\delta \rho_{\text{вещ}}}{\rho_{\text{вещ}}}$  при  $t \rightarrow 0$ .

Приведем в заключение формулы решения для возмущений первого типа, справедливые на поздних стадиях расширения, когда  $P = 0$ . Если пылевидное вещество движется без вращений, то синхронная система всегда может быть выбрана сопутствующей веществу. Рассматриваемый тип возмущений как раз относится к этому классу. Поэтому возмущенное решение будем рассматривать в сопутствующей системе отсчета,  $u^2 = 0$ .

Формулы для возмущений имеют вид:

при  $\eta \ll \frac{1}{\kappa}$

$$h_{\alpha}^{\beta} = C_1 (P_{\alpha}^{\beta} + Q_{\alpha}^{\beta}) + \frac{2\kappa^2 C_2}{\eta^3} (P_{\alpha}^{\beta} - Q_{\alpha}^{\beta}); \quad (11.3.4)$$

при  $\frac{1}{\kappa} \ll \eta \ll 1$

$$h_{\alpha}^{\beta} = \left( \frac{C_1}{15} \eta^3 + \frac{2C_2}{\eta^3} \right) \kappa^2 (P_{\alpha}^{\beta} - Q_{\alpha}^{\beta}). \quad (11.3.5)$$

В обоих случаях

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \left( \frac{C_1 \eta^2}{30} + \frac{C_2}{\eta^3} \right) \kappa^2 Q. \quad (11.3.6)$$

Наконец, если плотность вещества не равна критической, то на поздних стадиях расширения, при  $\eta \gg 1$ , имеется милновская

стадия, масштабный фактор  $a \sim t \sim e^\eta$  и для возмущений получаем

$$h_{\alpha}^{\beta} = \left[ 2C_1 \kappa^2 \left( \frac{1}{3} - 2\eta e^{-\eta} \right) + C_2 e^{-\eta} \right] (P_{\alpha}^{\beta} - Q_{\alpha}^{\beta}), \quad (11.3.7)$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \left( \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{4} e^{-\eta} \right) Q. \quad (11.3.8)$$

Последняя формула наглядно показывает, что на милновской стадии возмущения плотности «застывают» при  $t \rightarrow \infty$ .

#### § 4. Векторные (вращательные) возмущения

Рассмотрим второй тип возмущений метрики — (11.2.2).

Развитие вращательных возмущений определяется формулами

$$h_{\alpha}^{\beta} = \sigma(\eta) (S_{\alpha} \kappa^{\beta} + \kappa_{\alpha} S^{\beta}) e^{i\kappa x}, \quad S_{\alpha} \kappa^{\alpha} = 0, \quad (11.4.1)$$

$$\frac{u^{\alpha}}{c} = -\frac{i\kappa \dot{\sigma}}{2a^2(\varepsilon + P)} S^{\alpha} e^{i\kappa x}, \quad \sigma = \sigma_0 \int \frac{d\eta}{a^2},$$

так что для  $P = \varepsilon/3$ ,  $a \sim \eta$ ,  $\varepsilon \sim \eta^{-4}$  имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{C_3}{\eta}, \quad \delta = 0, \\ \frac{u^{\alpha}}{c} &= -\frac{i\kappa C_3}{8} S^{\alpha} e^{i\kappa x}. \end{aligned} \quad (11.4.2)$$

Главный результат интуитивного анализа — независимость возмущений скорости от времени — подтверждается. Эта независимость справедлива как при  $\kappa\eta < 1$ , так и при  $\kappa\eta > 1$ , т. е. при  $\lambda > ct$  и  $\lambda < ct$ . Но неожиданным является рост возмущений метрики ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) при  $\eta \rightarrow 0$ . Это приводит к выводу, что начальные возмущения вращательного типа несовместимы с космологическим решением типа Вселенной Фридмана \*) [Озерной, Чернин (1967, 1968), Зельдович, Новиков (1970)]. Результат является тем более неожиданным, что кажется естественным взять отношение  $u/c$  в качестве меры отклонения возмущений от решения Фридмана, а это отношение остается постоянным при  $t \rightarrow 0$ . Тот факт, что две безразмерные величины  $u/c$  и  $\sigma$  имеют разную асимптотику при  $t \rightarrow 0$ , нуждается в объяснении. Необходимо напомнить, что скорость  $u^{\alpha}$ , определяемая согласно Лифшицу [см. (11.4.1), (11.4.2)], в некотором смысле не является полной скоростью. Как мы уже неоднократно подчеркивали, понятие скорости связано с выбором системы отсчета и поэтому относительно. Важными абсолютными характеристиками возмущений являются абсолютное вращение элементов вещества \*\*)

\*) Точный вывод: возмущения вращательного типа приводят к такой асимптотике решения вблизи сингулярности, которая отличается от решения Фридмана.

\*\*) Вращение является абсолютным относительно локально инерционной системы, в которой нет кориолисовых и центробежных сил. Такая система определяется локально с помощью гироскопов безотносительно к далеким звездам (мы не боимся антиматховской терминологии).

и изменение характера его деформации. Вращательные возмущения исчерпываются этими двумя характеристиками. В то время как скорость  $u^\alpha$  полностью описывает в данном случае вращение элементов среды, она не исчерпывает ее деформации. Это связано с тем, что система отсчета сама не вращается (она синхронна,  $g_{0\alpha} \equiv 0$ , — это означает отсутствие вращения, см. ТТ и ЭЗ) и все вращение среды связано с ее движением в системе. Но сама синхронная система деформируется, и это необходимо учитывать. При вычислении деформации среды надо учесть деформацию возмущенной системы отсчета, в которой проводится все рассмотрение. Деформация среды складывается из деформации, вызванной движением относительно системы отсчета, и деформации самой системы отсчета.

Скорость, определяемая (11.4.2), соответствует сдвиговому движению (например, движению вдоль оси  $y$ , причем скорость зависит от  $x$ ), которое совмещает и вращение и деформацию элемента среды.

Напомним, как описывается относительное движение соседствующих элементов среды \*). Вводим систему координат, движущуюся вместе с избранной частицей, находящейся в данный момент в начале координат, и требуем, чтобы система координат была локально евклидовой и локально инерционной. Из условия  $u(x=0, t=0)=0$  следует, что скорости соседних частиц в близкие моменты времени в первом порядке по малым  $x, t$  можно записать как

$$u_\alpha(x, t) = F_\alpha t + D_{\alpha\beta}^* x^\beta.$$

Здесь  $F_\alpha$  — трехмерный вектор ускорения жидкости, зависящего от негравитационных сил (в рамках гидродинамики такой силой является градиент давления).

Тензор второго ранга в трехмерном пространстве  $D_{\alpha\beta}^*$  разбивается на две части: антисимметричную  $A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(D_{\alpha\beta}^* - D_{\beta\alpha}^*)$  и симметричную  $D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(D_{\alpha\beta}^* + D_{\beta\alpha}^*)$ . Антисимметричная часть описывает вращение жидкости: угловая скорость дается аксиальным вектором  $\Omega_\gamma = \frac{1}{2} \epsilon_{\gamma\alpha\beta} A^{\alpha\beta}$ , где  $\epsilon_{\gamma\alpha\beta}$  — единичный, полностью антисимметричный тензор. Она может быть измерена в сопутствующей системе по появлению кориолисовых ускорений. Деформация элемента среды полностью определяется симметричным тензором  $D_{\alpha\beta}$ .

Отметим принципиальную разницу между  $A_{\alpha\beta}$  и  $F_\alpha$ , с одной стороны, и  $D_{\alpha\beta}$  — с другой. Измерение  $A_{\alpha\beta}$  и  $F_\alpha$  требует введения приборов, например свободных пробных тел и гироскопов. Для

---

\*) Систематическое построение механики в рамках ОТО, основанное на понятии деформации, производилось Зельмановым (1959б). Изложение этого вопроса см. в ТТ и ЭЗ.

определения  $D_{\alpha\beta}$  достаточно измерить расстояния между системой избранных частиц среды \*).

След тензора, т. е.  $D = D_{11} + D_{22} + D_{33}$  (он не зависит от выбора осей), определяет изменение удельного объема среды при деформации,  $\dot{V}/V = -\dot{n}/n = D$  ( $n$  — плотность сохраняющихся частиц). Остающийся тензор с нулевым следом  $\Pi_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} D$  характеризует анизотропию деформации среды: под действием  $\Pi_{\alpha\beta}$  шар превращается в равновеликий трехосный эллипсоид. Тензор  $\Pi_{\alpha\beta}$  имеет пять независимых компонент: два отношения осей эллипсоида, характеризующие его форму, и три угла, характеризующие ориентацию в пространстве \*\*). Приведенные выше формулы требуют, чтобы в рассматриваемой точке в данный момент метрика была галилеевой ( $g_{00}=1$ ,  $g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1$ , остальные  $g_{ik}=0$ ). Формулы, позволяющие вычислить тензор скоростей деформации  $D_{\alpha\beta}$  и также  $F_\alpha$  и  $A_{\alpha\beta}$ , не переходя к галилеевой системе, а сразу по величинам  $g_{ik}=g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , приведены в ТТ и ЭЗ. Здесь нам потребуются только частный случай одной из этих формул. Прежде чем ее выписать, вернемся к рассматриваемой нами задаче.

Мы хотим вычислить деформацию элемента среды в возмущенной задаче. Мы убедимся после вычислений, что вращательные возмущения приводят к тому, что элемент деформируется существенно анизотропно в отличие от строго изотропной деформации в невозмущенной Вселенной Фридмана. Именно эта анизотропия деформации быстро нарастает в прошлое  $t \rightarrow 0$ . Она описывается ростом  $h_\alpha^B$  при приближении к сингулярности и растет, несмотря на то что вращательные скорости остаются малыми. В конце параграфа мы приведем физическое пояснение этой ситуации.

Итак, займемся вычислениями деформации элемента среды. Как уже подчеркивалось, полная деформация равна сумме деформации системы отсчета, в которой рассматривается вся задача, и деформации, вызванной скоростью движения среды в системе отсчета. Начнем с деформации системы отсчета. Общая формула для вычисления  $D_{\alpha\beta}$  [см. ТТ и ЭЗ, формула (1.6.4)] для синхронной системы записывается в виде

$$D_{\alpha\beta} = -\frac{c}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}. \quad (11.4.3)$$

Вторая часть деформации, связанная со скоростями, может быть вычислена стандартным в гидродинамике способом как произ-

\*) Это не значит, что  $F_\alpha$  и  $A_{\alpha\beta}$  менее реальные! В частности, зная уравнения механики, уравнение состояния среды и измеряя распределение давления и плотности, а также  $D_{\alpha\beta}$  и  $D_{\alpha\beta}^{(0)}$ , можно определить  $F_\alpha$  и  $A_{\alpha\beta}$  и без помощи пробных тел.

\*\*) С другой стороны, эллипсоид можно рассматривать как результат возмущения газа квадрупольными функциями, отвечающими моменту  $l=2$ . Число таких независимых функций равно  $2l+1=5$ .



водная скорости по координатам. Однако, как мы видели выше, относительная скорость мала и остается постоянной. Относительная величина отклонений деформации среды от изотропной, связанная с этой скоростью, не нарастает в прошлое, поэтому и без вычислений ясно, что этим слагаемым в деформации среды можно пренебречь по сравнению с (11.4.3) при  $t \rightarrow 0$ .

Итак, при  $t \rightarrow 0$  полная анизотропия деформации среды описывается (11.4.3). Из этой формулы видно, что отклонение возмущенного решения вихревого типа от фридмановского при  $t \rightarrow 0$  связано не прямо с вращательными скоростями вещества, а с вызванной этими скоростями анизотропией деформации. Этот эффект является чисто релятивистским.

Проведем вычисление анизотропии деформации среды. Перепишем уравнение (11.4.3), используя (11.4.2):

$$D_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (g_{\alpha\beta}^{(0)} + h_{\alpha\beta}) = \\ = D_{\alpha\beta}^{(0)} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\sigma(t) a^2(t)] S_{\alpha\beta}. \quad (11.4.3a)$$

Здесь  $D_{\alpha\beta}^{(0)}$  — тензор скоростей деформации системы невозмущенного решения, вместо  $h_{\alpha\beta}$  подставлено его значение (11.4.2) для вихревых возмущений [множитель  $a^2(t)$  появился при опускании индекса у  $h_{\alpha\beta}^0$ ],  $S_{\alpha\beta}$  не зависит от  $t$ . Вычислим теперь анизотропную часть этого тензора,  $\Pi_{\alpha\beta}^{\beta} = D_{\alpha\beta}^{\beta} - \frac{1}{3} D g_{\alpha\beta}^{\beta}$ . Отличные от нуля члены  $\Pi_{\alpha\beta}^{\beta}$  имеют следующий порядок величины (учитываем, что  $a(t) \sim t^{1/2}$  для  $P = \epsilon/3$ ):

$$|\Pi_{\alpha\beta}^{\beta}| \approx \left( -\frac{\sigma}{t} + \frac{1}{t} \frac{d(\sigma t)}{dt} \right) = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (11.4.4)$$

Величины  $\Pi_{\alpha\beta}^{\beta}$  есть отклонения хаббловских констант по разным направлениям от средней хаббловской константы  $H = \frac{1}{3} D = \frac{1}{2t}$ . Относительная величина этих отклонений

$$\frac{|\Pi_{\alpha\beta}^{\beta}|}{H} \approx \frac{d\sigma}{dt} t = \frac{C_3}{t^{1/2}}. \quad (11.4.5)$$

На первый взгляд кажется, что этого нарастания анизотропии деформации можно избежать, если в качестве возмущения взять твердотельное вращение в заданном лагранжевом масштабе. При этом в ньютоновском приближении деформация отсутствует вовсе. Казалось бы, скорость вращения  $\omega$ , остающаяся все время постоянной и малой, не может привести к сильным релятивистским эффектам. Однако это не так, потому что возмущение любого масштаба при  $t \rightarrow 0$  оказывается глубоко внутри гравитационного радиуса массы, который оно охватывает. Вся задача становится существен-

но релятивистской, и даже малая скорость  $u$  приводит к сильным эффектам. Помимо малого параметра  $u/c$  в задачу входит еще большой параметр  $l/ct$  ( $l$  — длина возмущения), и релятивистские эффекты определяются произведением этих двух параметров. Формула (11.4.5) может быть переписана так:

$$\frac{|\Pi_{\alpha}^{\beta}|}{H} \approx \left(\frac{u}{c}\right) \left(\frac{l}{ct}\right). \quad (11.4.6)$$

В рассматриваемой задаче с твердотельным законом вращения возмущения тождественно отсутствуют лишь на оси вращения, где скорость  $u$  равна нулю.

Произвольные возмущения вихревого типа остаются малыми при движении к сингулярности,  $t \rightarrow 0$ , до тех пор, пока  $\frac{|\Pi_{\alpha}^{\beta}|}{H} < 1$ .

Ясно, что для каждой длины волны возмущения наступает в прошлом момент, когда  $|\Pi_{\alpha}^{\beta}|$  сравнивается с  $H$ . Длины в нашем случае пропорциональны  $t^{1/2}$ ,  $l \sim t^{1/2}$ . Поэтому, согласно (11.4.6), для критического момента, когда  $\frac{|\Pi_{\alpha}^{\beta}|}{H} = 1$ , должно быть  $1 = \left(\frac{u}{c}\right) \frac{l_0}{ct_c^{1/2} t_0^{1/2}}$ , т. е.

$$t_c = \frac{l_0^2}{c^2} \frac{u^2}{c^2 t_0}. \quad (11.4.7)$$

В период  $t < t_c$  расширение сильно отличалось от хаббловского. При обсуждении вихревой теории происхождения галактик (см. гл. 13) эти выводы необходимо учитывать. По существу, сильное отличие от невозмущенной модели заключено уже в том, что безразмерные возмущения метрики стремятся к бесконечности, как  $\eta^{-1} = t^{-1/2}$ , вблизи сингулярности при  $t \rightarrow 0$ . Анализ деформаций, проведенный выше, помогает наглядно понять характер отклонений от невозмущенной модели с точки зрения локального наблюдателя. Тем самым с несомненностью доказывается объективный характер нарастания отклонений от модели Фридмана, которые не устраняются каким-либо преобразованием координат.

В заключение параграфа приведем формулы для вихревых возмущений на поздней стадии при уравнивании состояния  $P=0$ . В отличие от потенциальных движений, рассмотренных в предыдущем параграфе, здесь при наличии вращения вещества синхронная система не может быть сопутствующей даже при  $P=0$ .

Формулы для возмущения имеют следующий вид:

при  $\eta \ll 1$

$$\sigma = -\frac{8C_3}{3\eta^3}, \quad \frac{u^{\alpha}}{c} = -\frac{ikC_3}{6\eta^2} S^{\alpha} e^{ikx}; \quad (11.4.8)$$

при  $\eta \gg 1$

$$\sigma = -4C_3 e^{-\eta}, \quad \frac{u^{\alpha}}{c} = -\frac{ikC_1}{6e^{\eta}} S^{\alpha} e^{ikx}. \quad (11.4.9)$$

В обоих случаях скорости  $u^{\alpha}$  затухают  $\sim 1/a$ .

### § 5. Тензорные возмущения — гравитационные волны

Решение, соответствующее тензорным возмущениям, определяется формулами

$$h_{\alpha}^{\beta} = v(\eta) G_{\alpha}^{\beta} e^{i\kappa x}, \quad G_{\alpha}^{\beta} \kappa^{\alpha} = 0, \quad \frac{\delta \rho}{\rho} \equiv 0, \quad u^{\alpha} \equiv 0, \quad (11.5.1)$$

где  $G_{\alpha}^{\beta}$  — постоянный (не зависящий ни от координат, ни от времени) тензор \*) (см. § 2 этой главы). Подчеркнем, что возмущенная система отсчета в этом случае является сопутствующей веществу. Уравнения ОТО (11.1.4), (11.1.5) для релятивистского газа  $P = \epsilon/3$  в случае возмущений вида (11.5.1) дают решение

$$v = C a^{-1} e^{i\kappa \eta} = \frac{C_4 \cos \kappa \eta + C_5 \sin \kappa \eta}{\eta}; \quad (11.5.2)$$

здесь  $C$  — комплексная постоянная,  $C_4, C_5$  — действительные постоянные.

Если длина волны меньше оптического горизонта  $ct$ , решение описывает волновое гравитационное поле. После этого ясно, что в ходе расширения для любой длины гравитационной волны (в лагранжевой сопутствующей системе) наступает момент  $t$ , когда эта длина становится меньше оптического горизонта. Тогда можно по обычным формулам [см., например, Ландау и Лифшиц (1973)] вычислить плотность энергии гравитационных волн. Амплитуда гравитационной волны  $h$  есть

$$h \approx \frac{C_{4,5}}{\eta} = \text{const} \cdot (1+z) = \text{const} \cdot a^{-1},$$

где  $C_{4,5}$  — наибольшая по модулю величина из  $C_4$  и  $C_5$ . Плотность энергии гравитационных волн

$$\epsilon_g = \frac{\pi c^4}{8G} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \sim a^4 \sim (1+z)^4. \quad (11.5.3)$$

Плотность энергии оказывается  $\sim a^4$ , так как согласно предыдущей формуле  $h \sim a^{-1}$ ; кроме того,  $\lambda \sim a$ . Это очевидный результат, описывающий изменение с космологическим расширением плотности энергии  $\epsilon_g$ , запасенной в виде гравитационных волн. Соотношение между зависимостью от времени и зависимостью от координат соответствует волновому решению, скорость волны равна  $c$ . Как отмечалось Лифшицем, с гравитационными волнами не связаны возмущения скорости и плотности. Утверждение о скорости является пиквикским \*\*).

\*) При данном волновом векторе  $\kappa$  есть два линейно независимых тензора  $G$ , соответствующих двум поляризациям гравитационной волны.

\*\*) «Мистер Блаунтли отмечает, что он назвал distinguished председателя невеждой в чисто пиквикском смысле» (Ч. Диккенс, Посмертные записки Пиквикского клуба).

Действительно, скорость вещества относительно возмущенной системы координат тождественно равна нулю в поле гравитационной волны, ибо возмущенная синхронная система является сопутствующей веществу. Однако относительные скорости частиц меняются при наличии гравитационной волны, т. е. имеются деформации (возмущения) самой системы отсчета. Если проделать по формуле (11.4.3) вычисления деформации системы отсчета для метрики  $g_{\alpha\beta}^{(0)} + h_{\alpha\beta}$ , где  $h_{\alpha\beta}$  удовлетворяют (11.5.1), (11.5.2), то легко убедиться, что деформация среды носит следующий характер: шар превращается в эллипсоид с отношениями осей  $(1+h) : (1-h)$ , причем неизменна третья ось, расположенная вдоль направления распространения волны, а величина  $h$  периодически изменяется со временем. Объем шара не изменяется, плотность остается постоянной, невозмущенной, в соответствии с тем, что след тензора возмущенной части  $D_{\alpha\beta}$  в случае гравитационной волны равен нулю.

Рассмотрим вопрос о взаимодействии гравитационных волн со средой. Идеальная жидкость (без вязкости и упругости) характеризуется тем, что ее тензор натяжений  $T_{\alpha\beta}$  сводится к одному скаляру — давлению (закон Паскаля); при анизотропной деформации с постоянной плотностью и, следовательно, постоянным давлением жидкость без сопротивления принимает новую форму. Но это значит, что в жидкости не выделяется тепло, не растет энтропия и не рождаются новые гравитационные волны. Между тем именно рождение новой волны и ее интерференция с проходящей («старой») волной являются механизмом, осуществляющим поглощение волны и изменение ее фазы. Именно за счет объемного излучения вещества, через которое проходит волна, возникает отличный от единицы показатель преломления среды для волн.

Итак, идеальная жидкость не меняет закона распространения гравитационных волн. Именно такой результат получил Лифшиц, решая задачу о гравитационных волнах в расширяющейся Вселенной, заполненной идеальной жидкостью. Если жидкость вязкая, то при деформации происходит нагревание жидкости. Очевидно, что энергия черпается из энергии гравитационной волны; отсюда Хоукинг (1966а) нашел выражение для коэффициента затухания гравитационной волны в вязкой среде:

$$\frac{dE}{dt} = -\xi E, \quad \frac{dE}{dx} = -\frac{\xi}{c} E, \quad \xi = \frac{16\pi G \eta^*}{c^2}, \quad (11.5.4)$$

где  $\eta^*$  — вязкость. Записав вязкость в виде  $\eta^* = \rho \nu^*$ , где  $\nu^* = \frac{1}{3} cl$  — кинематическая вязкость для релятивистских частиц с пробегом  $l^*$ ),

\*) Заметим, что гравитационные волны, как и вихревые возмущения, не сопровождаются изменением объема и температуры, поэтому затухание обоих этих типов возмущений не зависит от так называемой второй вязкости, от релаксации процессов установления равновесия и от теплопроводности.

получим

$$\xi = \frac{16\pi}{3c} G\rho l.$$

Однако очевидно, что такое выражение справедливо лишь до тех пор, пока можно пользоваться понятием вязкости, т. е. пока пробег  $l$  меньше длины волны  $\lambda$ . При  $l \gg \lambda$  нужно рассматривать противоположный случай (почти) свободных частиц в гравитационной волне, к чему мы перейдем ниже, в гл. 16.

Поверим, пока без доказательства, что затухание максимально и может быть вычислено по формуле, приведенной выше, при  $l = \frac{\lambda}{2} = \frac{cT}{2}$ , где  $T$  — период волны. Применительно к космологической задаче выразим плотность через время:  $\rho = \frac{3}{32\pi G t^2}$  для  $P = \frac{e}{3}$ . Получим компактное выражение для верхнего предела  $\xi$ :

$$\xi < \xi_{\max} = \frac{16\pi G \rho c \lambda}{6c^2} = \frac{T}{4t^2}. \quad (11.5.5)$$

С течением времени период волны  $T$  растет пропорционально длине волны:

$$T \sim \lambda \sim a(t) \sim \sqrt{t}. \quad (11.5.6)$$

Введем обозначение  $t_0$  для момента, когда  $T = t = t_0$ , так что (11.5.6) переписется в виде  $T = \sqrt{t t_0}$ . Лишь после момента  $t_0$  можно рассматривать затухание гравитационной волны по приведенным формулам. Оказывается, что интеграл затухания сходится:

$$\int_{t_0}^{\infty} \xi_{\max} dt = \frac{1}{4} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\sqrt{t t_0}}{t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

Вязкость среды не более чем в  $\sqrt{e}$  раз уменьшает энергию гравитационных волн по сравнению с расчетом для идеальной жидкости, учитывающим только адиабатическое изменение энергии волн.

Рассмотрим теперь свойства решения (11.5.2) при  $t \rightarrow 0$ . В период, когда длина волны меньше  $ct$ , это решение описывает еще не волны в привычном смысле. Дело в том, что с начала расширения Вселенной прошло времени слишком мало даже для одного колебания волны.

Важно, что одно из независимых решений  $\left(\frac{C_5}{\eta} \sin \kappa \eta\right)$  конечно при  $\eta \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow 0$ . Следовательно, если положить  $C_4 = 0$ , то такие ограниченные начальные возмущения метрики совместимы с конечной плотностью энергии  $\epsilon_g$  на более поздних стадиях расширения. По порядку величины отношение  $\epsilon_g/\epsilon_\gamma$  равно квадрату безразмерного возмущения метрики ( $\epsilon_\gamma$  — плотность энергии электромагнитного

излучения). Это соотношение справедливо для гравитационных волн, длина которых мала по сравнению с горизонтом, но при этом условию оно не зависит от длины волны. Такое соотношение поддерживается и до и после момента рекомбинации водорода, поскольку  $\epsilon_\gamma$  изменяется пропорционально  $a^{-4}$ , т. е. так же, как и  $\epsilon_g$ . К роли гравитационных волн в космологии мы вернемся в гл. 16.

## § 6. Энтропийные возмущения в релятивистской теории

Интерес к энтропийным возмущениям связан с тем, что они позволяют получить современную структуру Вселенной из сингулярного состояния, метрика которого (асимптотически) точно описывается решением Фридмана, без каких-либо отклонений от однородности. Это обстоятельство отмечает Чибисов (1972б). Неоднородно в пространстве распределен барионный заряд (разность  $r = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma}$  плотности барионов и антибарионов, отнесенная, к плотности фотонов), но вблизи сингулярности заряд не влияет на метрику.

В пределе, при высокой температуре, соотношение между плотностью энергии и давлением не зависит от удельного барионного заряда. В частности, при ограниченном спектре масс элементарных частиц для давления имеем формулу  $P = \epsilon/3$  при  $kT \gg mc^2$  ( $m$  — наибольшая масса частиц) независимо от того, является ли вещество зарядово-симметричным,  $r=0$ , или «заряженным»,  $r>0$ .

Отсюда и следует возможность построить решение с невозмущенной метрикой и давлением и плотностью энергии, не зависящими от координат. Лишь в дальнейшем ходе расширения, при  $kT < mc^2$ , из-за неоднородности  $r$  возникают различные уравнения состояния в различных местах согласно приближенной формуле

$$P = \frac{\epsilon}{3} (1 - r(x) \epsilon^{-1/4}). \quad (11.6.1)$$

Возникают возмущения метрики, а также движение вещества, вызванные различием уравнений состояния в разных точках пространства. Начальные энтропийные возмущения порождают адиабатические возмущения плотности и, в частности, порождают растущую моду адиабатических возмущений, если длина волны достаточно велика. Этот факт не является специально следствием релятивистской теории. Важно лишь, что рассматриваются возмущения в эволюционирующей Вселенной, в которой с течением времени меняется уравнение состояния вещества (в отличие от джинсовской постановки задачи). Энтропийное возмущение с длиной волны, соответствующей массе меньше  $10^4 M_\odot$ , вызывает только затухающие общие колебания плазмы. Но наряду с этим неравномерность

энтропии сохраняется и проявляется (для  $M > 10^5 M_\odot$ ) после рекомбинации водорода.

В принципе можно также рассматривать неравномерное распределение лептонного заряда, т. е. избытка нейтрино над антинейтрино. В этом случае также можно задаться невозмущенной метрикой в сингулярности. Вследствие большого пробега нейтрино неравномерность выравнивается рано, и амплитуда растущего возмущения плотности окажется относительно малой.

Такая гипотеза лишена изящества и никем подробно не разрабатывалась. Известным сходством с энтропийным возмущением обладает и начальное возмущение в виде хаотического магнитного поля: магнитное поле вмерозено в плазму, как и энтропийные возмущения. Однако магнитное поле возмущает метрику. Гипотеза магнитной неоднородности высказана Зельдовичем (1969), но не находит доводов, которые обосновывали бы ее предпочтительность (см. об этой гипотезе § 3 гл. 19).

### § 7. Квазиизотропное решение и гипотеза равномерного распределения возмущений

Кажется заманчивой картина Вселенной, различные части которой вблизи сингулярности имеют слегка различную кривизну в один и тот же момент времени и вместе с тем расширяются подобно модели Фридмана.

Математическим выражением такой картины является квазиизотропное решение [Лифшиц и Халатников (1963а, б)], которое для уравнения состояния  $P = \epsilon/3$  описывается метрикой

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [ta_{\mu\nu}(x^\alpha) + t^2 b_{\mu\nu}(x^\alpha) + \dots] dx^\mu dx^\nu. \quad (11.7.1)$$

Эта формула показывает, что решение содержит произвольную функцию пространственных координат  $a_{\mu\nu}$ . Подставляя (11.7.1) в уравнения ОТО, можно найти  $b_{\mu\nu}$  и следующие члены разложения, соответствующие данному  $a_{\mu\nu}$ . Задание  $a_{\mu\nu}$  дает полный набор начальных условий в данной задаче. Вблизи сингулярности главным является член  $ta_{\mu\nu}$ . Пренебрегая всеми другими членами, мы видим, что каждый элемент пространства расширяется изотропно с одной и той же постоянной Хаббла во всех направлениях. Пространственная кривизна, зависящая от  $\frac{\partial^2 a_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\lambda}$ , произвольна, но мала

по сравнению с компонентами тензора кривизны  $R_{0\alpha 0\beta}$  и  $R_{0\alpha 3\gamma}$ . В тензоре кривизны, с помощью которого можно подсчитать распределение плотности энергии и скорость движения вещества, главным членом являются производные по времени от  $ta_{\mu\nu}$ , и учет их дает для выражения плотности вещества результат, совпадающий с

выражением для однородной модели Фридмана (с  $P = \epsilon/3$ ):

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2}. \quad (11.7.2)$$

В этом порядке плотность не зависит от координат, скорость вещества относительно выписанной системы координат равна нулю. Примером квазиизотропной модели является часть замкнутого мира, считая гладко, например, с плоским миром; мы знаем, что в обеих частях асимптотика плотности одинакова, соответствует (11.7.1).

Решение (11.7.1) показывает, что аналогичную операцию можно проделать и в более общем виде: можно соединить части искривленного пространства с неизотропной кривизной. При этом оказывается, что если в выражении для плотности энергии учесть члены следующего порядка разложения, то вместо (11.7.2) получим

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2} - \frac{f(x^\alpha)}{t}. \quad (11.7.3)$$

Функция  $f$  зависит от  $a_{\mu\nu}$ , точнее, от ее пространственных производных. Очевидно,

$$\delta = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{32\pi G t}{3} f(x^\alpha) \sim t. \quad (11.7.4)$$

Какие типы возмущений описывает метрика (11.7.1)?

Прежде всего, она содержит возмущения плотности (11.7.4), нарастающие  $\sim t$ , т. е. в ней имеется первый тип возмущений — адиабатические возмущения. Кроме того, если написать для (11.7.1) тензор скоростей деформации, то часть тензора деформации с равным нулю следом соответствует гравитационным волнам ограниченной амплитуды. В решении (11.7.1) вихревая скорость отсутствует.

Следовательно, общее квазиизотропное решение подтверждает результат, полученный при исследовании малых возмущений (см. §§ 3—5 гл. 11): фридмановское поведение вблизи сингулярности ( $g_{\mu\nu} \sim t$  при  $P = \epsilon/3$ ,  $\rho \sim t^{-2}$ ) совместимо с возмущениями плотности и гравитационными волнами, но не с вихревыми возмущениями.

При обсуждении адиабатических возмущений и гравитационных волн было отмечено, что необходимо конечное (хотя и малое) возмущение метрики вблизи сингулярности для того, чтобы сегодня могли иметь место конечные возмущения плотности и конечная, не исчезающая амплитуда гравитационных волн.

Таким образом, если поставить вопрос о космологическом решении, не противоречащем современному состоянию Вселенной и минимально уклоняющемся от строго однородного решения при  $t \rightarrow 0$ , то ответом явится квазиизотропное решение.



При этом

$$R_{kl}(r) \sim r^l \quad \text{при} \quad kr \ll 1. \quad (11.8.4)$$

Дальше асимптотика различна в зависимости от того,  $k > 1$  или  $k < 1$ . В первом случае в области  $kr > 1$ ,  $r < 1$  есть плоская промежуточная асимптотика  $R \sim r^{-1} \sin kr$ . В области  $r > 1$  асимптотика существенно связана с гиперболичностью метрики мира, т. е. с тем, что при больших  $r$  поверхность шара растет, как

$$4\pi \operatorname{sh}^2 r \gg 4\pi r^2.$$

Поскольку  $r$  ограничено только снизу,  $r \geq 0$ , при любом целом  $l$  возможно любое действительное  $k$ , в целом спектр непрерывен, что и естественно для бесконечного объема.

В этом отношении гиперболический мир подобен плоскому миру и отличается от замкнутого. В плоском мире плоские волны и сферические гармоники представляют собой два равноценных способа описания возмущений. При одном и том же собственном числе  $k^2$  возмущение можно описывать совокупностью плоских волн различных направлений или совокупностью сферических волн с различными  $l$ ,  $m$ . Переход от одного способа описания к другому вполне аналогичен повороту системы координат \*).

В системе плоских волн легко выразить статистическую однородность и изотропию пространства.

Система сферических волн имеет свои преимущества для описания картины, наблюдаемой из данной точки, которую удобно принять за начало координат.

Плоские волны с данным  $k^2$  различного направления статистически равновероятны. Отсюда следует, что при правильной нормировке угловых функций

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_{lm}^2(\theta, \psi) d\cos\theta d\varphi = 1$$

равновероятны сферические волны, нормированные на одинаковую асимптотику  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(kr + \varphi_l)}{r}$  на бесконечности, при  $r \rightarrow \infty$ .

Итак, возмущение плотности равно

$$\begin{aligned} \frac{\delta\rho}{\rho} = & \int dk C_{k00} R_{k0}(r) P_{00}(\theta) + \int dk C_{k10} R_{k1}(r) P_{10}(\theta) + \\ & + \int dk C_{k11c} R_{k1} P_{11}(\theta) \cos\varphi + \int dk C_{k1s} R_{k1} P_{11}(\theta) \sin\varphi + \\ & + \int dk C_{k22s} R_{k2}(r) P_{22}(\theta) \sin 2\varphi + \dots \quad (11.8.5) \end{aligned}$$

\*) Этот переход есть поворот в гильбертовом функциональном пространстве.

Функции одной скалярной переменной  $k$  (модуля волнового вектора)  $C_k \dots$  с различными индексами являются случайными функциями.

Однородность и изотропия Вселенной, включающие статистическую однородность и изотропию возмущений, означают, что  $C_k \dots$  с различными значениями индексов  $l$ ,  $m$ ,  $s$  или  $c$  одинаковы, имеют одинаковый средний квадрат и независимы, не коррелированы между собой.

Возмущение плотности в точке наблюдения (в начале координат,  $r=0$ ) зависит только от первого интеграла, от  $C_{k0}$ , так как только  $R_{k0}(0) \neq 0$ :

$$\delta\rho(0) = \bar{\rho} \int dk C_{k0} k \frac{1}{\pi \sqrt{2}}.$$

Движение относительно реликтового излучения вещества, находящегося в начале координат, записанное через компоненты скорости, зависит от следующих трех интегралов и только от них:

$$\left. \begin{aligned} u_x(0) &= H \int dk C_{k1c} \frac{1}{\pi \sqrt{6}}, \\ u_y(0) &= H \int dk C_{k1s} \frac{1}{\pi \sqrt{6}}, \\ u_z(0) &= H \int dk C_{k10} \frac{1}{\pi \sqrt{6}} \end{aligned} \right\} \quad (11.8.6)$$

(все для плоского мира,  $\Omega=1$ ,  $H=\frac{2}{3t}$ ).

Среднестатистические величины даются выражениями

$$\overline{\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2} = \int |\bar{C}_k|^2 \frac{k^2}{2\pi^2} dk, \quad (11.8.7)$$

$$\overline{u^2} = H^2 \int |\bar{C}_k|^2 \frac{dk}{2\pi^2}, \quad (11.8.8)$$

где  $|\bar{C}_k|^2$  — средний квадрат случайной функции, общий для всех (различных)  $l$  и  $m$ .

Положение наблюдателя нельзя считать случайным — возникновение Галактики, Солнца, цивилизации наиболее вероятно там, где  $\delta\rho > 0$ .

С помощью сферических функций наиболее удобно рассматривается вопрос о периодическом распределении тех или иных объектов.

Упорные поиски таких закономерностей проводит Дж. Бэрбидж. В гл. 4 описаны рождение и гибель гипотезы о концентрации квазаров при  $z=1.95$ . В последнее время Бэрбидж и О'Делл (1972) с помощью анализа Фурье установили, что в распределении квазаров по величине красного смещения есть периоды  $\Delta z=0.031$  и  $\Delta z=$

$=0,062$ . Мы не будем здесь обсуждать, насколько статистически значимы эти выводы (надежность их невелика), а обратимся к следующему вопросу. Какого рода периодичность совместима с предположением о космологической природе красного смещения спектров квазаров?

В этом случае красное смещение связано с расстоянием  $r$  (сопутствующей координатой) формулой

$$r = \int \frac{dt}{b(t)} = \frac{1}{b_0 H_0} \int_0^z \frac{dz}{(1+z)^{3/2}} = \frac{2}{b_0 H_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right). \quad (11.8.9)$$

Подсчитанное по всему небу (проинтегрированное по  $\theta$  и  $\varphi$ ) число квазаров зависит только от нулевой гармоники,  $l=0$ . Крайнее предположение, соответствующее выраженной периодичности и заключается в том, что  $C_k = A\delta(k - k_0)$ .

Таким образом, можно ожидать распределения

$$n = \bar{n} \left( 1 + \alpha \frac{\sin \psi}{\psi} \right), \quad \psi = \beta \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right). \quad (11.8.10)$$

Максимальное значение  $\alpha$ , при котором  $n$  везде положительно, равно  $\alpha \approx 4,5$ . Потребуем, далее, чтобы период был равен  $\Delta z \approx 0,062$  при малых  $z$ ; получим  $\beta = 200$ . Тогда при  $z \approx 2$  период равен  $\Delta z \approx$

$\approx 0,3$ , а амплитуда  $\left| \frac{n - \bar{n}}{\bar{n}} \right|_{\max}$  составляет всего 0,05. Такой ход кривой существенно отличается от простой периодической зависимости Бэрбиджа и О'Делла. Разложение возмущений по сферическим волнам подсказывает другой способ обработки наблюдений. Нетрудно вывести и формулы для гиперболического мира.

В гиперболическом мире плоских волн нет, и только с помощью сферических волн можно безупречно ввести понятие о статистической однородности и изотропии Вселенной.

В выражении для скорости наблюдателя относительно реликтового излучения  $u$  было допущено упрощение: предполагалось, что возмущения представляют собой растущие моды движения вещества на фоне покоящегося излучения. Такое приближение вполне оправдано в случае волн, коротких по сравнению с расстоянием до горизонта,  $ct \sim c/H$ . Длинные волны увлекают излучение в движение вместе с веществом; при этом уменьшается и в пределе  $\lambda \rightarrow \infty$  стремится к нулю скорость вещества относительно излучения, наблюдаемая как дипольная компонента в  $\Delta T/T$ . Детальный расчет этого эффекта, особенно в гиперболическом мире ( $\Omega < 1$ ), требует использования метода сферических волн.

Следует ожидать, что в ближайшее время метод сферических волн найдет широкое применение в теории возмущений однородной изотропной Вселенной.

## ГЛАВА 12 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

### § 1. Случайность и фурье-анализ

В предыдущих параграфах с максимальной точностью рассмотрено поведение отдельного возмущения с периодической зависимостью от пространственных координат — «плоской волны».

Такой тип возмущения был выбран для рассмотрения в связи с математическим упрощением задачи, сводящейся к исследованию зависимости амплитуды и фазы возмущения от времени. Пространственное распределение возмущения эволюционирует так, что длина волны растет пропорционально радиусу мира. Решающим в выборе исследуемого решения является тот факт, что, пока возмущения малы, любое произвольно распределенное в пространстве возмущение может быть представлено в виде суммы плоских волн и каждое слагаемое ведет себя так же, как одна-единственная отдельная волна.

Ниже мы переходим к исследованию разложения возмущений произвольной формы по плоским волнам и обратной задачи — свойств различных комбинаций плоских волн.

При малой — но не слишком малой — амплитуде возмущений можно продвинуть теорию на один-два шага вперед, рассматривая взаимодействие волн между собой как поправку к линейной теории. В некоторых простых случаях удается решить точно (или приближенно) полную нелинейную задачу.

Характерной особенностью космологических задач является хаотический характер возмущений; с его рассмотрения мы и начнем.

Даже первый мимолетный взгляд на карту распределения галактик показывает, что их расположение и форма в большой степени являются случайными. Ясно, что статистические методы необходимы для описания структуры Вселенной в масштабах галактик и скоплений галактик. Статистические методы также являются (или должны являться) важной частью эволюционной теории и особенно теории развития возмущений. Хотелось бы, приняв случайные начальные возмущения и применяя к ним фундаментальную теорию (гравитация, взаимодействие с излучением и т. д.), получить статистические законы наблюдаемой Вселенной. Основные

положения статистического описания, статистических законов и теории вероятности недостаточно знакомы большинству читателей и нуждаются в объяснениях.

В простейшем виде, например в связи с бросанием монеты, или игральных костей, случайность определяется как противоположность какой-либо функциональной зависимости. Результат каждого последующего события не должен зависеть от прошлых событий (если игрок честный!). Первая трудность в наших задачах заключается в том, что мы работаем не с дискретными испытаниями и величинами (отдельные бросания с ответом «да» или «нет» в примере с монетой), а с функциями непрерывных переменных, например плотностью как функцией пространственных координат и времени. С помощью искусственного разделения пространства на отдельные ячейки можно ввести дискретный набор  $\bar{\rho}_i$  (средняя плотность в ячейке с индексом  $i$ ). Предположим, что  $\rho_i$ ,  $\rho_k$  и т. д. независимы; очень скоро эта независимость будет разрушаться физическим взаимодействием с веществом в соседних ячейках. Эти соображения показывают, что приближение ячеек нецелесообразно. Сама форма описания должна быть приспособлена к характеру процессов, происходящих в рассматриваемых системах.

В тех случаях, когда однородное распределение вещества является разумным первым приближением, плоские волны, естественно, выделяются простыми свойствами, как показано в предыдущих главах. Плоские волны в линейном приближении изменяются независимо друг от друга, т. е. не взаимодействуют. Поэтому можно использовать фурье-разложение случайных функций.

Большие успехи достигнуты в использовании случайных переменных и их фурье-разложений в связи с теорией турбулентности, теорией плазмы и в радиотехнике. Лучшим, известным авторам, руководством по этим вопросам применительно к гидродинамике является замечательная книга Мони́на и Яглома (1965, 1967).

Фурье-разложение скалярной функции  $\rho$ , заданной в объеме  $V$ , может быть записано в виде (при пользовании комплексными величинами подразумевается, что надо взять лишь действительную часть)

$$\delta(x, y, z) = \frac{\rho(x, y, z) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{V\bar{\rho}} \sum A_k e^{ikx}, \quad (12.1.1)$$

где

$$A_k = \frac{1}{V\bar{\rho}} \int \frac{\rho(x, y, z) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} e^{-ikx} d^3x^*).$$

\*) Следует обратить внимание, что мы в этой главе используем волновые векторы  $k$  в физическом пространстве в отличие от используемого в предыдущей главе  $\kappa$  — волнового вектора в лагранжевых координатах. Вектор  $k$  более удобен при непосредственном сравнении с наблюдениями. Подчеркнем, что  $k$  зависит от расширения Вселенной, т. е. от времени. Эта зависимость явно учитывается в вычислениях § 4 этой главы.

Отметим прежде всего, что производится разложение по системе ортогональных нормированных функций

$$\delta = \sum A_k \psi_k(x),$$

где

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikx},$$

с условиями ортогональности и нормировки

$$\int \psi_k \psi_{k'} dV = \delta_{k, k'},$$

$$\delta_{k, k'} = 0 \quad \text{при} \quad k \neq k', \quad \delta_{k, k'} = 1 \quad \text{при} \quad k = k'.$$

Но из условия нормировки следует, что функции  $\psi$  имеют размерность  $V^{-1/2} (см^{-3/2})$ . Так как  $\delta = \frac{\bar{\rho} - \rho}{\bar{\rho}}$  безразмерно, то коэффициенты  $A_k$ , очевидно, имеют размерность  $см^{3/2}$ .

Иметь дело с размерными коэффициентами неудобно: даже зная численное значение  $A_k$ , нельзя сказать, велики или малы возмущения. Поэтому в дальнейшем (учитывая также статистический характер задачи) мы введем безразмерную величину  $\Delta$ , пропорциональную квадрату амплитуды  $|A_k|^2$ , усредненному по нескольким соседним функциям:

$$\Delta = \frac{1}{2\pi^2 n} \sum |A_k|^2 k^3,$$

где  $n$  — число членов суммы. Величина  $\Delta$  безразмерна, так как размерность  $|A_k|^2$  есть  $см^3$ ,  $k^3$  —  $см^{-3}$ , множитель  $2\pi^2$  введен для удобства. Если при всех волновых векторах безразмерное  $\Delta$  мало, то мало и возмущение плотности. Доказательство будет дано ниже, при рассмотрении предела  $V \rightarrow \infty$ .

Волновой вектор  $k$  может принимать одно из дискретных значений, допустимых для данного ограниченного объема  $V$ . Например, если объем кубический и задано условие периодичности  $\delta(L, y, z) = \delta(0, y, z)$  и аналогично по  $y, z$ , то

$$V = L^3, \quad k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad (12.1.2)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  — целые числа.

Для определенности постоянную часть  $\Delta$ , соответствующую  $A_k$  при  $n_x = n_y = n_z = 0$ , исключим из суммирования. В данном случае это оправдано тем, что по определению среднее возмущение в данном объеме  $\bar{\delta}_V = 0$ , если под  $\bar{\rho}$  понимать среднюю плотность по данному объему  $V$ . Проблемы, связанные с переходом к бесконечному пространству  $V \rightarrow \infty$ , обсуждаются ниже. Разумное определение случайной функции состоит в том, что ее коэффициенты Фурье случайны. Идея заключается в том, что эта случайность не разру-

шается физическим взаимодействием, по крайней мере пока возмущение мало, в линейном приближении. Следовательно, предположение о случайности фурье-компонент лучше, чем предположение о случайности значений в различных ячейках.

Гипотеза случайности связана с идеей, что мы можем выбрать во Вселенной много различных объемов  $V_1, V_2, V_3, \dots$ . Каждый из них называется реализацией, имеющей единственную определенную плотность  $\rho = \rho[1 + \delta(x, y, z)]$  и единственный набор  $A_k$ . Рассматривая эти объемы совместно, мы можем спросить: как часто встречается данное значение  $A_k$ ? Следовательно, мы можем ввести вероятность  $P(A_k)$  — или для многих волн сразу  $P(A'_k, A''_k, \dots)$  — появления данных значений коэффициентов Фурье. В линейной теории проще пользоваться записью в комплексной форме. Тогда  $A_k = B_k + iC_k$  ( $B$  и  $C$  — действительные) и более удобно говорить о  $P(B'_k, C'_k; B''_k, C''_k; \dots)$ . Если взять  $N$  объемов, то число объемов  $dN$ , в которых  $B'_k$  лежит между  $B'_k$  и  $B'_k + dB'_k$ , равно

$$dN = N \cdot P(B'_k) dB'_k. \quad (12.1.3)$$

Для случайного распределения интересующей нас величины  $A_k$  естественно предположить, что  $P(B'_k, C'_k; B''_k, C''_k; \dots)$  равно произведению членов типа  $\exp\left(-\frac{B_k^2}{2\beta_k^2}\right) \exp\left(-\frac{C_k^2}{2\gamma_k^2}\right)$  с заданными коэффициентами  $\beta_k, \gamma_k$ , определяющими средний квадрат амплитуды мод возмущений. Представление  $P$  в виде произведения множителей, зависящих только от  $B'_k, C'_k$  и т. д., (факторизация) означает, что  $B'_k, C'_k; B''_k, C''_k$  и т. д. независимы. Выбор экспоненциальной (гауссовой) формы сомножителей означает, что мы выбрали нормальный закон распределения, который хотя и не является наиболее общим законом распределения, но, как правило, осуществляется в действительности \*).

Другое возможное представление есть  $A_k = a_k e^{i\varphi_k}$ , описываемое заданием  $P(a'_k, \varphi'_k; a''_k, \varphi''_k; \dots)$ . Вместо того, чтобы брать действительную часть комплексного выражения, можно использовать условие  $A_{-k}^* = A_k$ , которое также обеспечивает действительность. Нормальный закон распределения  $A_k$  в этом случае означает, что

\*) В теории вероятности доказано, что если рассматриваемая величина является суммой большого числа независимых величин  $A_k = \sum_n a_{kn}$ , то при любом вероятностном законе для каждого слагаемого  $a_{kn}$  получается нормальный закон для суммы  $A$  (в пределе при увеличении  $n$ ).

На ранней стадии — вблизи сингулярности, — если задано поле возмущений в зависимости от координат, то интеграл, которым определяется фурье-компонента, простирается на области, причинно не связанные (если не было периода «до сингулярности»). Поэтому предположение о нормальном распределении  $A_k$  является естественным.

значение  $P$  зависит только от  $a_k$ , но не от  $\varphi_k$ , однако так, что  $P \sim a_k \exp(-a_k^2/2\alpha_k^2)$ .

Параметры  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $\alpha_k$  определяют средние квадраты  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $a_k = |A_k|$ . Именно с помощью этих параметров и могут быть точно сформулированы наши предположения о спектре возмущений.

Например, изотропия и однородность мира выражаются в том, что  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $\alpha_k$  зависят лишь от модуля  $k$ , но не от его направления, кроме того,  $\beta_k = \gamma_k$  и  $\alpha_k = \beta_k \sqrt{2}$ .

Правдоподобно, что функция  $\beta_k$  гладкая. Мы знаем, что возмущения плотности эволюционируют со временем. Следовательно,  $\beta$  зависит от  $t$ . Предыдущие главы этого раздела были посвящены изучению эволюции возмущений с течением времени, т. е., по существу, изучению функции  $\beta_k(t)$  (или  $\beta_k(z)$ ). Для того чтобы полностью определить функцию  $\beta_k(t)$ , задающую спектр возмущений для произвольного момента времени  $t$ , необходимо в полученные ранее (§ 3 гл. 11) выражения для фурье-образов возмущений плотности  $\frac{\delta\rho}{\rho}$  подставить конкретные значения коэффициентов  $C_1$ ,  $C_2$ , определяемые предположением о характере спектра возмущений в некоторый определенный момент времени (скажем, при  $t \rightarrow 0$ ).

В каждой данной реализации  $\varphi_k$  или  $B_k$  и  $C_k$  различны в разных направлениях; они имеют определенные значения, не гладко изменяющиеся в зависимости от  $k$ .

Понятие набора реализаций — важнейшая часть статистической теории, и мы в дальнейшем будем иметь дело с этим понятием.

## § 2. Корреляционная функция и размеры самогравитирующих объектов

Фурье-разложение очень удобно для динамических расчетов. Но функция  $\beta(k, t) \equiv \beta_k(t)$  не является таким ответом, который согревает душу астрономов. Астроном имеет право спросить, каково должно быть число и форма скоплений и других объектов, которые следуют из тех или иных теорий развития возмущений в расширяющейся Вселенной. Тут теоретик должен извиниться: точная теория образования скоплений требует сложных нелинейных расчетов, выполнить которые сегодня невозможно. Все, что может сделать теоретик сегодня более или менее точно и последовательно, — это рассчитать эволюцию возмущений в периоды, когда возмущения еще малы.

Если астроном не потеряет интереса к теории уже на этой стадии обсуждения \*), он спросит о неоднородностях плотности, не

\*) Мы сознательно несколько сгустили краски. В действительности на основе точного анализа линейной теории и приближенного анализа нелинейных стадий теоретики делают вывод о свойствах, например, скоплений галактик, в которых  $\delta\rho/\rho \gg 1$  (см. об этом последующие главы).



превышающих 10—20% от средней, к которым линейная теория применима. Но даже для этих (значительно менее интересных) неоднородностей астроном хочет знать их форму и амплитуду в тот или иной момент времени, а не довольно абстрактную функцию  $\beta(k, t)$ .

Так возникает проблема перехода от фурье-языка к описанию пространственного распределения отдельных тел. Для отдельной реализации ответ дается немедленно [см. (12.1.1)]. Но при статистическом подходе вопрос, какова функция  $\rho(x, y, z)$ , не имеет смысла. Мы можем говорить о средних величинах, усредненных по множеству реализаций. В космологической задаче усреднение по реализациям означает рассмотрение множества одинаковых объемов, расположенных повсюду в однородной Вселенной. Иными словами, нахождение усредненных по реализациям величин означает нахождение средних по пространству характеристик возмущений во Вселенной.

Очевидно, по определению  $\overline{\delta(x, y, z)} = 0$ , т. е. среднее значение  $\overline{\delta(x, y, z)}$  равно нулю в каждой точке пространства. Имеет смысл говорить о среднем квадрате  $\overline{\delta^2(x, y, z)}$ . Используя свойства фурье-рядов, легко показать, что

$$\overline{\delta^2(x, y, z)} = \frac{1}{V} \sum \overline{A_k^2}.$$

Рассмотрим среднее по всем реализациям и одновременно произведем переход к пределу  $V \rightarrow \infty$ , а от суммирования перейдем к интегрированию:

$$\overline{\delta^2(x, y, z)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \overline{A_k^2} d^3k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \beta_k^2 d^3k = \Delta. \quad (12.2.1)$$

Величина  $\delta^2$ , усредненная по реализациям, не зависит от координат. При нормальном законе распределения для  $B_k, C_k$  закон распределения для  $\delta$  также нормальный:

$$P(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} e^{-\delta^2/2\Delta}. \quad (12.2.2)$$

В левой части стоит вероятность данного значения  $\delta$  в любой данной точке. Величина  $\Delta$ , очевидно, одинакова для всего пространства и зависит только от времени.

Эти формулы характеризуют амплитуду неоднородностей, но ничего не говорят об их пространственной структуре. Характеристикой пространственной структуры неоднородностей является корреляционная функция  $f(r)$ . Она определяется формулой

$$f(r) = \frac{\overline{\delta(x_1) \delta(x_2)}}{\overline{\delta^2}}, \quad r = x_1 - x_2. \quad (12.2.3)$$

Каков смысл корреляционной функции? Представим себе пространство, разбитое на области с  $\delta > 0$  и  $\delta < 0$  и средним размером  $r_0$ . Выберем точку  $x_1$  внутри области, где  $\delta > 0$ , так что  $\delta(x_1) > 0$ . При удалении от этой точки на расстояние меньше  $r_0$  мы с большой вероятностью остаемся в области  $\delta > 0$ . Поэтому  $\overline{\delta(x_2)} > 0$  при  $|x_1 - x_2| < r_0$ ,  $\delta(x_1) > 0$ .

Произведение  $\delta(x_1)\delta(x_2)$  положительно (с вероятностью больше половины, а значит, и в среднем), если  $|x_1 - x_2| < r_0$ .

Благодаря квадратичности выражения  $f(r)$  области, где  $\delta$  отрицательно,  $\delta < 0$ , дают вклад того же положительного знака в  $f(r)$ . Значит  $f(r)$  положительно при  $r < r_0$ , при  $r > r_0$   $f(r)$  меняет знак.

Итак, смысл корреляционной функции таков. Пусть в некоторой точке мы задали  $\delta_0$ . Тогда средняя кривая, описывающая поведение  $\delta$  в окрестности данной точки (0), задается  $f(r)$ :

$$\overline{\delta(r)}|_{\delta(0)=\delta_0} = \delta_0 f(r).$$

Индекс после вертикальной черты означает, что средняя кривая задается при условии  $\delta(0) = \delta_0$ . Заметим также, что поскольку все возмущения эволюционируют со временем, то и  $f(r)$ , вообще говоря, зависит от времени. Для нашего анализа эта зависимость сейчас не важна, и поэтому мы ее явно не выписываем.

Мы определили  $\delta$  так, что  $\overline{\delta} = \int \delta dV = 0$ . Отсюда следует, что равно нулю и среднее по объему значение корреляционной функции. В самом деле, запишем  $x_2 - x_1 = r$ ,  $x_2 = x_1 + r$  и найдем

$$\int f(r) d^3r = \frac{1}{\delta^2} \int \left[ \delta(x) \left( \int \delta(x+r) d^3r \right) \right] d^3x.$$

Второй (внутренний) интеграл равен нулю, поскольку он берется о всему объему, а в этом случае выбор начала отсчета  $r$  не играет роли. Итак,

$$\int f(r) d^3r \equiv 0.$$

В однородной и изотропной в среднем Вселенной функция корреляции зависит только от абсолютной величины расстояния  $r$ , но не от выбора начала отсчета  $r$  и не от направления вектора  $r$ . Поэтому, опуская  $4\pi$ , имеем

$$\int_0^\infty f(r) r^2 dr = 0.$$

Значит,  $f(r)$  обязательно должна быть знакопеременной функцией. По определению  $f(0) = 1$  благодаря выбору знаменателя в (12.2.3). В области  $r < r_0$   $f(r) > 0$ . С другой стороны, где-то  $f(r)$  должна быть отрицательной. Естественный вывод заключается в том, что первый нуль функции  $f$ , т. е. то наименьшее значение  $r_1$ , при

котором  $f(r_1)=0$ , как раз и дает средний размер области, т. е.  $r_0 \approx r_1$ .

Не будем скрывать от читателя, что выбор определения корреляционной функции продиктован также и удобством ее вычисления, наряду с удобными для физической интерпретации свойствами.

Дадим выражение  $f(r)$  через спектральную функцию  $\beta(k)$ , характеризующую амплитуду волн различной длины:

$$f(r) = \frac{\int_0^{\infty} \beta^2(k) \frac{\sin kr}{kr} k^2 dk}{\int_0^{\infty} \beta^2(k) k^2 dk}. \quad (12.2.4)$$

Зная  $f(r)$ , можно найти  $r_0$ . Если  $\beta^2(k)$  сконцентрировано в узком интервале около некоторого значения  $k_0$ , то, как видно из (12.2.4),  $r_0 = \pi/k_0$ , т. е.  $r_0$  есть половина длины волны, соответствующей  $k_0$ . Теперь можно высказать первое предположение относительно момента, когда значительная доля массы перешла в гравитационно связанные объекты в ходе эволюции первоначально малых возмущений в расширяющейся Вселенной, а также относительно массы таких объектов. Предположим, что спектр возмущений  $\beta(k, t)$  таков, что  $\bar{\delta}^2(t) = \Delta(t)$  — растущая функция времени (в противном случае возмущения не нарастают, мы уже знаем — см. гл. 10, — что для определенных возмущений на определенных стадиях расширения Вселенной это возможно). Когда в линейной теории  $\Delta$  достигает порядка единицы, то в первом приближении грубо можно считать, что процесс распада вещества на отдельные части произошел. В этот момент найдем корреляционную функцию и, в частности, определим  $r_1$  — положение первого нуля. Характерная масса частей, на которые разбилось вещество, порядка  $\frac{4\pi}{3} \bar{\rho} r_1^3$ . Ясно, однако, что при  $\Delta \sim 1$  грубой становится линейная теория роста  $\beta(k, t)$ , и эта «грубость» складывается с «грубостью» определения характерной массы по нулю корреляционной функции.

Запишем выражение для  $\bar{\delta}^2$  [см. (12.2.1)] в виде

$$\Delta = \bar{\delta}^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} (4\pi \beta^2(k) k^3) d \ln k = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_k d \ln k. \quad (12.2.5)$$

Задаваемая этой формулой функция  $\Delta_k = \frac{4\pi \beta^2 k^3}{(2\pi)^3}$  безразмерна. Если у функции  $\Delta_k$  есть широкий максимум при  $k_{\max}$  (интервал  $\ln k$  порядка 1), то по порядку величины

$$\Delta = \bar{\delta}^2 = \Delta_k(k_{\max}). \quad (12.2.6)$$

Еще лучше от  $k$  перейти к соответствующей массе  $M = \rho \left( \frac{\pi}{k} \right)^3$  и определить  $\Delta(M) = \frac{1}{3} \Delta(k)$  так, что

$$\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(M) d \ln M. \quad (12.2.7)$$

Первый нуль корреляционной функции примерно определяется уравнением  $\sin k_{\max} r_1 = 0$ ,  $r_1 = \frac{\pi}{k_{\max}}$ , — это соответствует половине длины волны моды  $e^{ikr}$  при  $|k| = k_{\max}$ . Теория зависимости от времени функции  $\beta(k, t)$  была развита выше, но проблема выбора начального значения в  $\beta(k, t=0)$  или в  $\beta(k, t_0)$  при  $t_0 \neq 0$ , остается нерешенной. Эта проблема спектра начальных возмущений (откуда они берутся, каковы они?) будет кратко обсуждаться в § 9 гл. 23.

### § 3. Отклонения средней плотности в данном объеме

Естественный путь описания неоднородности распределения вещества состоит в том, что надо взять сферу радиуса  $r$  и определить массу, содержащуюся в этой сфере. Конечно, эта масса зависит от выбора положения центра сферы. В статистических задачах мы можем найти среднее значение массы  $\bar{M}$  и среднюю величину отклонения массы от средней:

$$\mu = \frac{\sqrt{\overline{M^2} - \bar{M}^2}}{\bar{M}}. \quad (12.3.1)$$

Эта величина, рассматриваемая как функция радиуса, или объема, или самой массы, т. е.  $\mu(\bar{M})$ , является достаточно удобной или, по крайней мере, самой простой характеристикой неоднородности распределения вещества.

Представим себе, что вещество распределено в виде обособленных тел массы  $M_1$  со средней плотностью тела  $\rho_1$ . Число тел в единице объема  $n = \frac{\rho}{M_1}$ . Таким образом, на каждое тело в среднем приходится объем  $V = n^{-1} = \frac{M_1}{\rho}$ , между тем как объем самого тела  $v = \frac{M_1}{\rho_1}$ . Для простоты предполагаем, что все вещество собралось в отдельные тела, так что между телами вещества не осталось.

Ясно, что в этом случае функция  $\mu(\bar{M})$  ведет себя следующим образом:

1) При  $\bar{M} \gg M_1$  в объем, рассматриваемый при вычислении  $\mu$ , входит много  $\left(\frac{\bar{M}}{M_1}\right)$  тел, так что  $\mu$  мало:  $\mu < 1$  при  $\bar{M} \gg M_1$ ,  $\mu \rightarrow 0$  при  $\bar{M} \rightarrow \infty$ .

2) При  $\frac{\bar{\rho}}{\rho_1} M_1 < \bar{M} < M_1$  в рассматриваемый объем иногда входит одно тело, иногда — ни одного. Можно показать [см. (12.3.3)], что в этой области (при некоррелированном размещении отдельных тел)

$$\mu \approx \sqrt{\frac{\bar{M}_1}{\bar{M}}} > 1.$$

Если размещение отдельных тел подчиняется какому-либо другому статистическому закону, то формула для  $\mu$  будет иная, но общим свойством всех формул является то, что в этом интервале  $\bar{M}$  функция  $\mu(\bar{M})$  проходит через единицу, плавно сшивая области 1) и 3).

3) Наконец, при  $\bar{M} < \frac{\bar{\rho}}{\rho_1} M_1$ , т. е. при  $\bar{M} < \bar{\rho} v$ , рассматриваемый объем меньше объема одного тела. При этом, если у тел нет структуры (плотность  $\rho_1$  постоянна внутри тела), получим, что  $\mu$  не зависит от  $M$ , не растет с дальнейшим уменьшением  $M$ :

$$\mu \approx \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho}} > 1.$$

В свою очередь, имея такую кривую  $\mu(\bar{M})$ , можно получить представление о характере распределения вещества. Так, например, значение  $\bar{M}$ , при котором  $\mu$  начинает быстро возрастать и проходит через 1, характеризует массу отдельных тел. Неоднородное распределение плотности внутри отдельных тел привело бы к дальнейшему подъему  $\mu$  в области еще меньших  $\bar{M}$ . Однако эта структура отдельных тел не сказывается на ходе кривой  $\mu(\bar{M})$  при  $\bar{M} > \bar{\rho} v$ . Заманчиво использовать зависимость  $\mu(\bar{M})$  для систематизации наблюдений и для сравнения с выводами теории.

Если распределение вещества задано коэффициентами фурье-разложения, то  $\mu(\bar{M})$  определяется формулой

$$\mu^2(\bar{M}) = \frac{9}{4\pi} \int_0^\infty \beta^2(k) (kr)^{-3} J_{3/2}^2(kr) k^2 dk, \quad (12.3.2)$$

где  $\bar{M} = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} r^3$  и  $J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}} [\sin x - x \cos x]$  — функция Бесселя.

Будем по-прежнему рассматривать случай концентрации вещества в обособившиеся объекты массы  $M_1$ . Какова функция  $\mu(\bar{M})$  для  $\bar{M} \gg M_1$ , т. е. для объемов, содержащих несколько объектов?

Наивный ответ на этот вопрос заключается в том, что отдельные объекты ведут себя подобно статистически независимым распределенным частицам. Их среднее число  $\bar{N} = \frac{\bar{M}}{M_1}$  и

$$\mu = \frac{\sqrt{\Delta N^2}}{\bar{N}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{N}}} = \sqrt{\frac{M_1}{\bar{M}}} < 1 \quad \text{при} \quad \bar{M} > M_1. \quad (12.3.3)$$

Но этот ответ неверен! В действительности общего ответа нет — ход кривой в области, где  $\mu < 1$ , зависит от спектра возмущений  $\beta_k$  и от процесса обособления, поэтому изучение малых  $\mu$  может дать ценнейшую информацию о Вселенной [Зельдович (1965 г.)].

Каковы основные предположения, приводящие к закону  $\Delta N = \sqrt{\bar{N}}$ ?

Закон  $\Delta N = \sqrt{\bar{N}}$  получается в предположении случайного, некоррелированного размещения отдельных объектов в пространстве. Можно сказать, что этот закон соответствует гипотезе о божестве, который откуда-то извне засеивает пространство Вселенной объектами (например, галактиками); предполагается, что вероятность каждой следующей галактики попасть в тот или иной участок пространства постоянна и одинакова во всех точках, не зависит от того, как распределены в пространстве предыдущие галактики.

Божественная гипотеза, очевидно, неприемлема. Естественная постановка вопроса заключается в эволюционном рассмотрении образования изучаемых объектов (галактик или скоплений галактик). Предполагается, что вначале плазма была распределена почти равномерно и образование галактик есть результат роста малых возмущений вследствие гравитационной неустойчивости.

На первый взгляд такая гипотеза приводит к вполне определенному выводу о том, что  $\Delta N$  должно быть меньше, чем  $\sqrt{\bar{N}}$ , меньше, чем в гипотезе «случайности». В процессе роста возмущений увеличение плотности в каком-то месте и образование гравитационно связанного объекта есть результат притока вещества из соседних областей. Казалось бы, отсюда следует вывод, что вероятность образования другой галактики рядом с данной меньше, чем вдали. Такая отрицательная корреляция должна привести к уменьшению флуктуаций в больших объемах с большим  $\bar{N}$ . Однако это простое рассуждение, справедливое, например, в случае образования капелек тумана в переохлажденном паре, несправедливо в случае гравитационной неустойчивости. Глубокая причина заключается в том, что сила тяготения дальнедействующая.

Представим себе избыток плотности, сосредоточенный в небольшом объеме. Поле тяготения избыточной массы  $\delta M$  характеризуется потенциалом, убывающим, как  $\delta\varphi = -\frac{G\delta M}{r}$ , соответствующее ускорение равно  $-\frac{G\delta M}{r^2}$  и направлено к центру. Движение, вызванное таким ускорением, характеризуется радиальной скоростью

$$u_{\text{рад}} = -\frac{G}{r^2} \int^t \delta M(t) dt.$$

Поток вещества, переносимый через сферу радиусом  $r$  внутрь, равен

$$q = 4\pi r^2 \rho |u_{\text{рад}}| = 4\pi G\rho \int^t \delta M(t) dt.$$

Отсюда можно построить уравнение

$$\frac{d}{dt} \delta M = 4\pi G\rho \int^t \delta M(t) dt,$$

решения которого совпадают с джинсовской теорией (см. гл. 9):

$$\delta M_i = \text{const } e^{\sqrt{4\pi G\rho} t}, \quad \delta M_d = \text{const } e^{-\sqrt{4\pi G\rho} t}.$$

Здесь, однако, наша цель — подчеркнуть зависимость  $u \sim 1/r^2$ , при которой количество вещества во всех промежуточных слоях не изменяется (поток  $q$  не зависит от  $r$  или  $\text{div } u = 0$ ). Можно сказать, что увеличение массы в центре происходит за счет притока массы из бесконечности, а не из соседних областей! Значит, при действии гравитационной неустойчивости нет *обязательной* антикорреляции соседних галактик.

Выше, в § 3 гл. 9, было показано, что малые возмущения растут подобно, не меняя формы.

Окончательный вывод заключается в том, что тот или иной закон флуктуаций  $\Delta N = f(N)$  в распределении отдельных объектов зависит от начального спектра исходных малых возмущений. В принципе, в зависимости от спектра начальных малых возмущений, возможно, например, как  $\Delta N \sim N^{-1/2}$ , так и  $\Delta N \sim N^{1/2}$ . Исследование флуктуаций может дать такую информацию о начальном состоянии, которую современная теория не может предсказать (пока!), исходя из одних общих законов физики.

Поучительно проанализировать положение с помощью фурье-спектра. Отдельный объект объемом  $v$  размера  $l \sim v^{1/3}$  описывается условием  $A_k = \text{const}$  (не зависит от  $k$ ) при  $kl \ll 1$ . Случайно распределенные объекты имеют также спектр  $\beta_k = \text{const}$ . В этом случае

$$\mu \sim r^{-3/2} \sim V^{-1/2} \sim M^{-1/2}, \quad \Delta N \sim \sqrt{N}. \quad (12.3.4)$$

Если есть корреляция в распределении объектов, то коэффициенты  $A_k$ , относящиеся к различным объектам, взаимно уничтожаются и  $\beta_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow 0$ , например:

$$\beta(k) \sim k^{\alpha^*}, \quad \alpha^* > 1. \quad (12.3.5)$$

Подставляя такое  $\beta(k)$  в формулу (12.3.2), получим ( $r \rightarrow \infty$ )

$$\mu \sim r^{-2} \sim \overline{M}^{-1/2}, \quad \Delta N \sim N^{1/2}.$$

Ответ оказывается независимым от значения  $\alpha^*$ . Это разочаровывает: мы собирались измерять  $\mu$  и узнать что-то о показателе спектра  $\alpha^*$ . Причина разочарования заключена в определении  $\mu$ .

Взяв сферу с данным радиусом  $r$ , мы введем флуктуации даже в случае наиболее регулярного распределения объектов. Пусть объемная плотность будет постоянна в больших масштабах. Даже в этом случае добавление или убирание отдельного объекта, лежащего вблизи поверхности большого шара радиуса  $R$ , изменяет общую массу внутри шара. Число объектов вблизи поверхности

$$N_s = 4\pi R^2 r_1, \quad (12.3.6)$$

( $r_1 = n^{-1/2}$  — среднее расстояние от одного объекта до соседнего) и

$$\Delta N = \Delta N_s = \sqrt{N_s \frac{R}{r_1}} \sim N^{1/2}. \quad (12.3.7)$$

Следовательно, неудовлетворительность определения  $\mu$  заключается в том, что берется шар с четкой границей. Случайность положения объектов вблизи границы сильно влияет на результат. Надо ввести взвешивающую функцию, которая равна единице внутри шара и плавно спадает к краям, «размазывая» тем самым резкость границы.

Для того чтобы исследовать регулярность распределения объектов в данном масштабе порядка  $R$ , попробуем определить

$$M(R) = 4\pi \int_0^\infty \rho e^{-(r/R)^2} r^2 dr \quad (12.3.8)$$

или, в случае точечных масс,

$$M(R) = \sum_i m_i e^{-(r_i/R)^2}. \quad (12.3.9)$$

Очень важно, что в новом определении отсутствует резкая граница.



При этом эффективный объем порядка  $R^3$ , формулы (12.3.8) и (12.3.9) соответствуют  $\bar{M} = \pi^{1/2} R^3 \rho$ .

Небольшие перемещения объектов не приводят к большому изменению  $M(R)$ , а значит и  $\mu$ , как это было при использовании старого определения.

С новым определением  $M$  выполним всю процедуру расчета  $\bar{M}$  и  $\mu$ , усредняя по произвольному выбору положения центра шара. С другой стороны, обращаясь к фурье-представлению \*) для  $\mu$ :

$$\mu^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \beta^2(k) e^{-k^2 R^2/4} k^2 dk,$$

находим

$$\mu \sim R^{-1/2 - \alpha^*} \sim M^{-1/2 - \alpha^*/3}, \quad (12.3.10)$$

чему соответствуют отклонения числа объектов от средних  $\Delta N \sim N^{1/2 - \alpha^*/3}$ . При  $\alpha^* = 0$ , т. е. при плоском спектре, получается «наивный» результат, соответствующий случайному, некоррелированному распределению объектов. Однако теперь влияние  $\alpha^*$  на разумно определенное  $\mu$  прослеживается при любых  $\alpha^*$ . Например, если  $\alpha^* = 2$ , то  $\Delta N \sim N^{-1/6}$  — абсолютная флуктуация (а не только относительная  $\frac{\Delta N}{N}$ ) убывает при  $N \rightarrow \infty$ .

С другой стороны, в принципе возможен (хотя и представляется маловероятным) растущий спектр возмущений,  $\alpha^* < 0$ .

Потребуем, чтобы сходилась интеграл

$$\int_0^\infty \beta^2 k^2 dk.$$

Для этого достаточно  $\alpha^* > -\frac{3}{2}$ . Следовательно, про показатель  $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\alpha^*}{3}$  можно утверждать лишь, что  $\gamma < 1$ , — относительные флуктуации  $\frac{\Delta N}{N} \sim N^{\gamma-1}$  всегда убывают, если интеграл амплитуды возмущений конечен.

При сравнении с наблюдениями, особенно в случае  $\alpha^* > 0$ , необходима осторожность. Результат справедлив для плотности массы, но не для плотности светимости ( $L$ ) или плотности числа галактик (для которых масса не постоянна). Лишь масса является сохраняющейся величиной. Даже если массы распределены однородно в больших масштабах, (что означает  $\beta(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow 0$ ), флуктуации отношения  $L_i/m_i$  светимости к массе для отдельных галактик

\*) В формуле, приведенной ниже,  $e^{-k^2 R^2/4}$  есть фурье-образ взвешивающей функции, заданной формулами (12.3.8) или (12.3.9).

приводят к флуктуации

$$L(R) = \sum L_i e^{-i^2/R^2}, \quad (12.3.11)$$

так что  $(\Delta L)^2 \sim L$ .

«Гладкость» определения  $M(R)$  (12.3.8) и  $\mu(R)$  с помощью гауссовой взвешивающей функции важна для принципиального понимания структуры неоднородности плотности. Но при реальном анализе наблюдений надо помнить о том, что упомянутых факторах, осложняющих такой анализ.

#### § 4. Ограничения и сложности линейной теории

Одна из основных задач теории гравитационной неустойчивости заключается в следующем. Пусть задан в некоторый момент (например, при  $t \rightarrow 0$ ) спектр возмущений. Требуется сделать выводы о том, когда возникнут из возмущений отдельные объекты и каковы их свойства (масса и др.). Сравнительная легкость расчета эволюции спектра  $\beta(k, t)$  после того, как задан начальный спектр, создает соблазн быстрого вывода. Необходимо уделить внимание трудностям и ограничениям, возникающим при таком подходе.

Представим себе, что распределение плотности задано и, для простоты, растет, оставаясь подобным начальному распределению. Хотелось бы взять часть пространства с  $\delta > 0$  (или с  $\delta > \delta_0$ , с некоторым определенным  $\delta_0$ ) как предвестник выделяющегося объекта. Можно рассчитать число таких частей, объем каждой части и содержащуюся в ней массу. Окончательный ответ должен носить статистический характер — должен дать функцию распределения объектов по массе и другим свойствам, например значению скорости, моменту импульса и т. д.

Первая практическая трудность состоит в том, что рассчитать свойства поверхностей данного уровня  $\delta = \delta_0$  для функции, заданной ее фурье-разложением, — не простая задача [см. Дорошкевич (1970)]. Ответ в окончательном виде неизвестен. Предпринимались попытки численных экспериментов. В двумерном случае Пиблс (1969б) предложил остроумный метод оптического моделирования эксперимента.

Некоторые принципиальные трудности можно предвидеть. Если  $\delta_0$  больше, чем среднеквадратичное отклонение  $\sqrt{\overline{\delta^2}}$ , то часть пространства с  $\delta > \delta_0$  мала и распределена в виде островков, окруженных «морем» с  $\delta < \delta_0$ . Если же  $\delta_0$  мало или  $\delta_0 = 0$ , то топология частей с  $\delta > \delta_0$  очень не похожа на топологию определенных астрономических объектов. Например, поверхности  $\delta_0 = 0$  могут быть замкнуты вокруг «объекта» с  $\delta > 0$ , но с равной вероятностью эти поверхности могут быть замкнуты вокруг «дыры», окруженной более плотным веществом.

Глубокие корни трудностей лежат в том, что астрономические объекты есть результат сильной нелинейности, они характеризуются  $\frac{\rho}{\rho} \gg 1$  ( $\frac{\rho}{\rho} \approx 100$  для наименее плотных объектов — скоплений галактик). Эта нелинейность полностью уничтожает симметрию между  $\delta > 0$  и  $\delta < 0$ , характерную для линейной теории. Очевидно, что пространство с  $\frac{\rho}{\rho_0} > 50$  или  $\delta = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 > 49$  занимает долю не больше, чем 2% всего пространства: ни в какой части пространства нет  $\delta = -49$  (и даже  $\delta < -1$ ), потому что везде плотность положительна.

Образование астрономических объектов должно описываться нелинейной теорией. Некоторые гипотезы и результаты, полученные нелинейной теорией, изложены в следующей главе.

Чтобы закончить со статистической теорией, необходимо упомянуть вопросы, связанные с фурье-разложением случайных функций в бесконечном пространстве. В конечном объеме  $V$  мы работали с суммами. Число функций в данном интервале волнового вектора  $k_x - k_x + dk_x$ ,  $k_y - k_y + dk_y$ ,  $k_z - k_z + dk_z$  равно  $\frac{V dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^3}$ , когда

$V$  возрастает, число слагаемых в выражении  $\delta = \frac{1}{V} \sum A_k e^{ikx}$  увеличивается. Но эти слагаемые имеют случайную величину. Следовательно, их сумма пропорциональна квадратному корню из их числа. Каждое слагаемое в сумме должно быть пропорционально  $V^{-1/2}$ . Эти свойства необходимо иметь в виду, чтобы понять смысл интеграла  $\int A_k e^{ikx} d^3x$ . В линейной теории закон эволюции был получен для дискретных волн, т. е. для отдельных членов суммы. Когда же делается переход к бесконечному объему и интегралу, необходимо иметь в виду, что сумма квадратов по определенному объему в  $k$ -пространстве играет роль квадрата амплитуды данной волны, т. е.

$$\frac{\overline{A_k^2}}{V} \rightarrow \frac{\beta_k^2}{(2\pi)^3} d^3k \quad \text{или} \quad \frac{\beta_k^2 k^3}{2\pi^2} d \ln k.$$

В ходе космологического расширения  $k$  уменьшается,  $k \sim (1+z)$ , где  $z$  — красное смещение. Для одной волны закон эволюции  $A_k(z)$  (для простейшего случая плоской космологической модели, заполненной пылевидным веществом) имеет вид

$$A_k(z) \sim t^{1/2} \sim (1+z)^{-1}. \quad (12.4.1)$$

Для амплитуды интеграла Фурье

$$\Delta \sim A_k^2 \sim (1+z)^{-2} \sim \beta_k^2 (1+z)^3,$$

т. е.

$$\beta_k \sim (1+z)^{-1/2},$$

или, точнее, зная величину  $\beta$  при некотором  $z'$ , можно вычислить  $\beta(k, z)$  при любом  $z$  по формуле

$$\beta(k, z) = \beta\left(k \frac{(1+z)}{(1+z')}; z'\right) \left(\frac{1+z}{1+z'}\right)^{-1/2}. \quad (12.4.2)$$

При этом  $k$  есть волновой вектор в физическом (не в сопутствующем!) пространстве. Здесь снова выявляется удобство введенных выше безразмерных функций массы  $\Delta(M)$  и  $\mu(M)$  [см. формулы (12.2.7) и (12.3.1)]. По порядку величины  $\mu^2 = \Delta$ . Постоянному значению аргумента  $M$  соответствует постоянный объем сопутствующего пространства \*). В ходе эволюции  $\sqrt{\Delta}$  и  $\mu$  меняются по тому же закону, что и безразмерная амплитуда отдельной волны.

---

\*) Под  $M$  мы понимаем сумму масс сохраняющихся частиц — барнонов, без учета излучения.

## НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ТЕПЛОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

## § 1. Возмущения в пылевидной среде; задачи, допускающие точные решения

Существуют три различных пути подхода к нелинейным задачам. Один путь заключается в точном решении частных задач со специальными начальными условиями. Примером таких задач могут служить сферически-симметричные возмущения. Второй путь состоит в построении приближенного метода, экстраполирующего линейную теорию. Этот метод очень мощный, но надо всегда помнить о его ограниченной точности. Преимущество этого метода состоит в том, что он применим к общему случаю несимметричных возмущений. Наконец, третий путь состоит в выяснении качественных свойств общего точного решения; сюда относится, в частности, вопрос об особых точках решения и об асимптотических законах вблизи особых точек.

Именно сочетание всех трех методов дает наиболее надежные результаты. Хорош тот приближенный метод, который совпадает с точным решением по крайней мере в каком-то специальном случае и имеет правильную асимптотику вблизи особых точек.

Случай сферически-симметричных возмущений может быть проанализирован точно, потому что влияние соседних возмущений равно нулю. Второй метод учитывает приливное действие со стороны соседних возмущенных областей, но за это приходится расплачиваться тем, что он является приближенным \*). Во всех случаях мы будем пренебрегать силами давления, считая  $P=0$ .

В простейшем сферически-симметричном случае шар, который является частью фридмановского мира с определенной величиной  $\Omega_v$  \*\*), рассматривается на фоне целого фридмановского мира с другой величиной  $\Omega$  [с дырой для возмущенного шара — наподобие швейцарского сыра; сравнение, принадлежащее Эйнштейну и Штраусу (1945)].

---

\*) Точное решение получается также для одномерного движения, в котором все величины зависят от одной декартовой координаты. Это точное решение содержится в формулах приближенной трехмерной теории.

\*\*) Индекс «v» — возмущенный.

Если  $\Omega \leq 1$ , то возможны два случая: 1)  $\Omega_{\text{в}} \leq 1$ , 2)  $\Omega_{\text{в}} > 1$ .

В первом случае возмущенный шар также расширяется до бесконечного радиуса и нулевой плотности, связанный объект не образуется.

Во втором случае, который является более интересным, возмущенный шар ведет себя как замкнутый мир Фридмана. Следовательно, мы можем утверждать, что в некоторый момент времени  $t_m$  плотность в возмущенном шаре достигнет минимума, расширение прекратится и сменится сжатием. Формально это сжатие приведет к бесконечной плотности при  $t_{\infty} = 2t_m$ . Фридмановский мир с  $P=0$  и  $\Omega > 1$  сжимается в точку весь одновременно, и поэтому предположение  $P=0$  всегда и везде в этом случае неправдоподобно. Реально при достаточно большой плотности давление даже холодного вещества уже существенно. На краю шара возникает волна разгрузки, решение становится неоднородным. Но гораздо реальнее случай, когда начальное состояние не строго симметрично или, даже будучи сферически-симметричным, неоднородно, т. е. плотность зависит от радиуса,  $\rho(r)$ . В этом случае также при движении с  $P=0$  в некоторый момент возникает бесконечная плотность; отличие заключается в том, что  $\rho=\infty$  возникает не сразу во всем объеме, а на некоторой поверхности или в одной частице вещества. В этот момент возникают ударные волны, и в последующем вещество, сжатое ударной волной, имеет  $P \neq 0$ . До ударной волны мы полагали энтропию равной нулю, а уравнение состояния таким, что  $P(\rho, S=0) \equiv 0$ . После ударной волны  $S > 0$ ,  $P > 0$  и возникнут колебания вокруг положения равновесия при конечной плотности. При колебаниях за счет диссипативных процессов кинетическая энергия переходит в тепло, амплитуда колебаний уменьшается, часть массы может быть выброшена и предельным состоянием возмущенного шара является равновесная конфигурация [Зельдович, Каждан (1970)] \*).

Полная энергия «части замкнутого мира Фридмана» отрицательна; в момент остановки при смене расширения сжатием равна нулю кинетическая энергия (давлением пренебрегаем, пылевидное вещество), так что полная энергия равна в этот момент потенциальной энергии:

$$E_{\text{полн}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_m}. \quad (13.1.1)$$

В равновесии при той же полной энергии по теореме вириала тепловая энергия равна —  $E_{\text{полн}}$ , потенциальная энергия  $U_{\text{равн}}$  равна

---

\*) В ньютоновской теории равновесное состояние возникает всегда, в ОТО равновесие возможно только в случае, когда радиус равновесного шара больше гравитационного радиуса.

$2E_{\text{полн}}$ . Следовательно,

$$U_{\text{равн}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_{\text{равн}}} = 2E_{\text{полн}} = -2 \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_m}, \quad (13.1.2)$$

откуда  $R_{\text{равн}} = \frac{1}{2} R_m$ ,  $\rho_{\text{равн}} = 8\rho_m$  [Пиблс (1967a)].

Этот результат является оценочным (Пиблс пренебрегает потерей массы). В равновесной конфигурации плотность не постоянна по радиусу, и поэтому  $R_{\text{равн}}$  и  $\rho_{\text{равн}}$  — некоторые эффективные величины.

Для более подробного анализа необходимо полное изучение сжатия после момента остановки. Это нетрудно сделать численными методами, однако результаты уточнения сильно зависят от конкретных предположений о нарушениях точной симметрии и однородности распределения плотности.

Можно предсказать, что если  $\rho(r)$  имеет максимум в центре, то при сжатии возникает ударная волна и небольшая часть вещества сбрасывается с положительной энергией. Отрицательная энергия остающегося гравитационно связанного вещества увеличивается по абсолютной величине. Также увеличивается и равновесная плотность  $\rho_{\text{равн}}$  [Зельдович, Каждан (1970)].

Поучительно сравнить результаты нелинейной теории с «наивными» результатами линейной теории. Простой расчет (опущенный здесь) приводит к следующим формулам нелинейной теории для возмущенного шара и значения  $\Omega=1$  в невозмущенном мире.

В момент  $t_m$ , когда радиус возмущенного шара максимален, возмущенная плотность равна (напомним, что мы считаем возмущенный шар однородным)

$$\rho_m = \frac{(6\pi)^2}{64} \bar{\rho} = 5,5\bar{\rho}, \quad \delta_m = 4,5. \quad (13.1.3)$$

В линейной теории ( $\delta = \text{const} \cdot t^{1/2}$ ), которая дает правильную асимптотику при  $t \ll t_m$ , получаем при  $t = t_m$

$$\delta_{\text{лин}} = \frac{3}{20} (6\pi)^{1/2} = 1,07. \quad (13.1.4)$$

Следовательно, в плоском мире ( $\Omega=1$ ) малые сферически-симметричные растущие возмущения (с асимптотикой  $\delta = a^* t^{1/2}$  при  $\delta \ll 1$ ) прекратят расширение при  $\delta_m = 4,5$  в момент  $t_m = 1,1 a^{*-2/3}$  и приведут к коллапсу, заканчивающемуся (формально) бесконечной плотностью вещества возмущенного шара,  $\delta = \infty$ , при  $t_\infty = 2t_m = 2,2 a^{*-3/2}$  (см. таблицу).

В случае плоского мира Фридмана с  $\Omega=1$ , заполненного пылевидным веществом, полная энергия каждой невозмущенной (сферической) части равна нулю и, следовательно, каждое растущее

ТАБЛИЦА X

Значение  $\delta$  в линейной и нелинейной теориях

| Время             | $t \ll a^{-3/2}$ | $t = a^{-3/2}$ | $t = 2a^{-3/2}$ |
|-------------------|------------------|----------------|-----------------|
| Линейная теория   | $a^* t^{3/2}$    | 1              | 1,7             |
| Нелинейная теория | $a^* t^{3/2}$    | 4,5            | $\infty$        |

возмущение (мода  $*$ ) с  $\delta > 0$  имеет отрицательную энергию и приведет к прекращению расширения и коллапсу с течением времени.

В этом отношении случай сферических возмущений в мире с  $\Omega < 1$  качественно отличается от случаев с  $\Omega \geq 1$ . При  $\Omega < 1$  невозмущенная энергия положительна, так что существует критическая амплитуда возмущений  $\delta_c$ , которая делает в шаре  $\Omega_b = 1$ . При  $\delta > \delta_c$  будут возникать гравитационно связанные объекты, при  $\delta < \delta_c$  такие объекты не возникают.

Интересно рассмотреть ранние моменты в решении, когда невозмущенная плотность велика, а возмущения малы, и найти ответ на вопрос, какова критическая величина возмущения плотности, приводящего к возникновению гравитационно связанного тела, т. е. к прекращению расширения хотя бы при  $t \rightarrow \infty$ .

Для вычисления  $\delta_c$  надо взять нарастающую моду возмущений плотности в (11.3.1) и связанную с ней моду скорости (члены с  $C_2$  в выражениях для  $\frac{\delta \rho}{\rho}$  и  $u^z$ ), добавить эти возмущения к  $\bar{\rho}$  и хаббловской скорости расширения шара. В согласии с нашей моделью однородных возмущенных шаров  $\delta \rho$  и  $u^z$  выбирают так, что внутри шара снова применимо решение Фридмана, но с  $\Omega_b$ , несколько отличной от  $\Omega$  окружающего вещества. Величина  $\delta_c$  соответствует  $\Omega_b = 1$ .

Критическая величина возмущения оказывается равной

$$\delta_c = \frac{3}{5} \frac{1 - \Omega}{\Omega(1+z)}. \quad (13.1.5)$$

Полезно запомнить, что критическая величина возмущения (т. е. возмущение, которое приведет к  $\rho_b \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow \infty$  в нелинейной теории) определяется условием  $\delta = 3/2$  при  $t \rightarrow \infty$  при расчете по линейной теории. Для  $0 < \Omega < 1$  линейная амплитуда  $\delta_{\text{лин}}$  при  $z=0$ , необходимая для того, чтобы в нелинейной теории произошла остановка расширения, лежит в пределах  $1,5 > \delta_{\text{лин}} > 1,07^{**}$ ). Если из-

<sup>\*</sup>) Мы всегда повторяем «растущая мода», поскольку при начальном  $\delta > 0$  в принципе возможно и расширение — если  $\delta > 0$  и  $\text{div } u > 0$  ( $u$  — пекулярная скорость) возможно  $E_{\text{полн}} > 0$ .

<sup>\*\*</sup>) Эта  $\delta_{\text{лин}}$  соответствует моменту остановки расширения. На момент коллапса возмущенного шара  $\delta_{\text{лин}} = 1,5$  для  $\Omega = 0$  и  $\delta_{\text{лин}} = 1,7$  для  $\Omega = 1$ .



вестна средняя амплитуда возмущений на ранние моменты времени, то теперь легко определить долю сконденсировавшегося вещества  $p^*$  согласно оценкам нелинейной теории для сферических возмущений. Для  $\Omega=1$ , очевидно, асимптотически  $t \rightarrow \infty$ ,  $p^*=0,5$ . Действительно, половина возмущений имеет  $\delta > 0$  и сконденсируется, половина —  $\delta < 0$  и не сконденсируется. Для  $\Omega=1$  или  $\Omega \approx 1$  говорить о  $t \rightarrow \infty$  не особенно интересно, так как эта асимптотика относится к далекому будущему и не характеризует конденсацию материи в объекты в наше время. Асимптотика  $t \rightarrow \infty$  имеет смысл лишь для  $\Omega \ll 1$ , поскольку в этом случае доли вещества, сконденсировавшегося в настоящее время ( $z=0$ ) и при  $t \rightarrow \infty$ , одинаковы, так как в линейной теории возмущения не нарастают на поздних стадиях.

Общая формула для  $p^*$  довольно сложна. Пусть в некоторый момент в прошлом, соответствующий красному смещению  $z$ , средняя амплитуда возмущений есть  $\delta_0$ . Тогда доля сконденсировавшегося к нашему времени ( $z=0$ ,  $\Omega \ll 1$ ) вещества

$$p^* = \frac{1}{\delta_0 \sqrt{\pi}} \int_{\delta_c}^{\infty} e^{-\delta^2/\delta_0^2} d\delta, \quad (13.1.6)$$

где  $\delta_c$  определяется (13.1.5).

Еще раз напомним, что все оценки этого параграфа основывались на теории сферических возмущений в веществе с  $P=0$ .

## § 2. Возмущения в пылевидной среде; приближенный анализ общего случая («блины»)

Из астрономических наблюдений известно, что в расширяющейся Вселенной амплитуда возмущений плотности достигает величины порядка единицы на том этапе, когда линейные размеры неоднородностей много меньше  $ct$  и много меньше радиуса кривизны  $a$ . Таким образом, теория роста неоднородностей перестает быть линейной на этапе, когда уже можно пользоваться ньютоновской физикой и релятивистские эффекты несущественны.

Описываемое ниже приближенное решение [Зельдович (1970б)] заключается в использовании лагранжевых переменных и (обоснованной) экстраполяции линейной теории. Эйлеровская координата частиц  $\mathbf{r}$  (или  $x, y, z$ ) будет записана как функция ее лагранжевых координат  $\mathbf{s}$  в виде

$$\mathbf{r} = a(t) \mathbf{s} + b(t) \boldsymbol{\chi}(\mathbf{s}). \quad (13.2.1)$$

Прежде чем переходить к обоснованию формулы (13.2.1), сделаем следующие замечания. Первый член соответствует невозмущенному движению. Пренебрегая вторым членом, получим

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{s} \frac{da}{dt} = \mathbf{r} \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad (13.2.2)$$

т. е. хаббловский закон расширения. Лагранжевы координаты  $\mathbf{s}$  определяются как координаты невозмущенного положения частицы в момент  $t_1$ , определяемый условием  $a(t_1)=1$ ; поэтому  $\mathbf{s} = \mathbf{r} \cdot \frac{1}{a}$  для невозмущенного решения.

Второй член в формуле (13.2.1) описывает возмущения. Форма записи (13.2.1) соответствует случаю малых растущих возмущений — в этом случае функция двух переменных  $\mathbf{s}$  и  $t$  может быть факторизована, т. е. записана как произведение  $b(t)$  на  $\chi(\mathbf{s})$ .

Действительно, в § 3 гл. 9 было показано, что в линейном приближении и при  $P=0$  возмущение любой формы растет, оставаясь подобным:

$$\delta = \delta_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{a} \right) \varphi_1(t), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{a} \right) \varphi_2(t).$$

При этом пространственный масштаб меняется в соответствии с общим космологическим расширением. Здесь следует сделать одну оговорку: распределение плотности может быть любым, т. е. на функцию  $\delta_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{a} \right)$  никакие ограничения не накладываются. При данной функции  $\delta_0$  распределение пекулярной скорости  $\mathbf{u}_0$  связано с  $\delta_0$  условием  $\text{div } \mathbf{u}_0 \sim -\delta_0$ . Второе условие, которому удовлетворяет скорость, заключается в том, что  $\text{rot } \mathbf{u}_0 = 0$ . Это условие должно выполняться в теории происхождения галактик из адиабатических возмущений, ибо мы знаем, что вихревая скорость быстро убывает в ходе космологического расширения, вихревая компонента, даже если она была в начальном спектре, не содержится в растущем решении. Другими словами, в качестве  $\mathbf{u}_0$  можно выбрать произвольное потенциальное поле  $\mathbf{u}_0 = \text{grad } \varphi$  (так что  $\text{rot } \mathbf{u}_0 = 0$ ), а плотность при этом  $\delta \sim -\text{div } \mathbf{u}_0$ . Чтобы от линейного решения перейти к предлагаемому приближенному решению нелинейной задачи, которое также будет записано в виде (13.2.1), остается сделать два шага. Первый шаг заключается в том, что мы вводим лагранжевы переменные  $\mathbf{s}$ , т. е. будем следить за движением каждой данной частицы.

В невозмущенном движении  $\mathbf{s} \equiv \mathbf{r}/a$ ; как уже отмечалось, возмущения зависят именно от этой переменной. Когда возмущения не считаются малыми (т. е. при выходе за рамки линейной теории), выбираем в качестве переменной именно  $\mathbf{s}$ , а не  $\mathbf{r}/a$ .

Второй шаг связан с тем, что простая связь между пекулярной скоростью и плотностью также имеет место только в линейной теории. При построении (приближенной) нелинейной теории выбираем для экстраполяции именно формулу скорости линейной теории  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{s})\varphi_2(t)$ . Соответствующее выражение для смещения имеет вид (13.2.1). Вычислим пекулярную скорость:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - H\mathbf{r} = \dot{\mathbf{a}}\mathbf{s} + \dot{\mathbf{b}}\chi(\mathbf{s}) - \frac{\dot{\mathbf{a}}}{a}(\mathbf{a}\mathbf{s} + \mathbf{b}\chi) = \frac{\dot{\mathbf{a}}\mathbf{b} - \dot{\mathbf{b}}\mathbf{a}}{a}\chi$$

(при этом учтено, что постоянная Хаббла  $H = \dot{a}/a$ ). Таким образом устанавливается связь между функциями  $\varphi_2$  и  $b$ ; пространственная зависимость  $u_0(s)$  и  $\chi(s)$  одинакова. Следовательно,  $\chi(s)$  также является безвихревой функцией. Строгое доказательство того факта, что при потенциальности начальных возмущений движение и на нелинейной стадии остается безвихревым (до возникновения ударных волн), дано в работе Зельдовича (19706).

Почему именно такой вариант записи линейного приближения представляется пригодным для экстраполяции в область конечных и больших возмущений? Для ответа на этот вопрос рассмотрим сначала пылевидную среду без сил тяготения. Тогда задача о ее движении решается точно, так как все частицы движутся по инерции с постоянными скоростями. Мы считаем, что решение без учета сил тяготения может быть применимо, начиная с некоторого момента, когда  $\Omega \ll 1$ . Мы будем отсчитывать время  $t$  от этого момента и лагранжевы координаты  $s$  частиц выберем совпадающими с эйлеровыми  $r$  в момент  $t=0$ .

Решение записывается в виде

$$r = a_0 t s + t v(s) + s. \quad (13.2.1a)$$

Здесь первый член описывает невозмущенное расширение — милновскую расширяющуюся модель ( $a_0 = \text{const}$ ), второй член дает пекулярные скорости, а третий — положение частиц в момент  $t=0$ . В отсутствие тяготения решение фактически имеет вид (13.2.1).

Возьмем небольшой элемент объема такой среды. Расстояние между двумя близкими частицами есть  $|dr|$ , а изменение его с течением времени

$$\frac{\partial |dr|}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{dr_i}{|dr|} \frac{\partial dr_i}{\partial t}.$$

Используя (13.2.1a), получим

$$\frac{\partial |dr|}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{dr_i}{|dr|} \left( a_0 \delta_{ik} + \frac{\partial v_i}{\partial s_k} \right) ds_k.$$

Если градиенты пекулярных скоростей (второй член в круглых скобках) достаточно велики, то  $|dr|$  может как расти со временем (в этих направлениях элемент объема растягивается), так и уменьшаться (в этих направлениях элемент объема сжимается). Относительные скорости постоянны во времени. Имеется направление, в котором скорость сжатия элемента наибольшая. Следовательно, через конечный промежуток времени элемент в этом направлении сплющится в «блин». В соседних элементах скорость сжатия и направление наибольшей скорости сжатия несколько иные, но по непрерывности в близких элементах они близки. Сплющивание элемента объема вещества в «блин» — важнейшее свойство этого

решения. В принципе возможно сжатие и в нить или даже в точку, но для этого надо, чтобы скорости сжатия в двух или, соответственно, трех направлениях совпадали, что крайне маловероятно.

Посмотрим, как повлияют на решение силы тяготения. Если бы вещество сжималось в виде шара в точку, то сила тяготения нарастала бы неограниченно и кардинально бы влияла на решение. При сплющивании же в «блин» сила тяготения остается конечной даже при  $\rho \rightarrow \infty$ . При строго одномерной задаче эта сила для каждого элемента вообще постоянна во времени. Тяготение не меняет существенно свойства решения на нелинейной стадии. В частности, оно не меняет вывода о сплющивании в «блин», а только способствует этому явлению, несколько увеличивая со временем скорость сплющивания. Вот почему решение для нелинейной стадии с учетом тяготения следует искать в виде, похожем на решение для пылевидной среды без тяготения, только коэффициенты при слагаемых в (13.2.1) должны иначе зависеть от времени и эта зависимость определяется тяготением.

В задаче без тяготения (13.2.1a) пекулярные скорости постоянны во времени и для сжатия объема в каком-либо направлении скорости должны были быть заданы достаточно большими. В реальной задаче с тяготением эти скорости нарастают с течением времени из-за гравитационной неустойчивости и, будучи сначала малыми и описываемыми линейной теорией, в конце концов становятся большими, приводят к сплющиванию элемента в «блин».

Оценка точности предлагаемой приближенной формулы (13.2.1) для описания нелинейной стадии будет дана ниже, после исследования свойств решения.

Важное практическое достоинство формулы (13.2.1) заключается в том, что она имеет единый вид для линейных и нелинейных стадий, и, кроме того, в том, что если найдено смещение частиц, то вычисление плотности и относительной скорости легко проделать аналитически, требуется только дифференцирование, но не интегрирование. Отметим, что задачу о движении пылевидной среды ( $P=0$ ) рассматривал Станюкович (1971). Эта задача подробно разобрана также в книге Зельдовича и Мышкиса (1973). В ОТО анализ проведен Грищуком (1967б). Итак, принимаем (13.2.1).

В линейном приближении функция  $b(t)$  хорошо известна: возмущения плотности пропорциональны отношению  $b(t)/a(t)$ , так что это отношение можно считать известным. Приближение заключается в использовании формулы (13.2.1) для описания возмущенного движения и на нелинейной стадии, в частности даже в ходе коллапса, когда бесконечная плотность достигается по крайней мере в части массы.

Вычислим, как меняется плотность, если заданы функции  $a(t)$  и  $b(t)$ . Очевидно, для этого надо вычислить изменение объема элемента среды. Пользуясь выражением (13.2.1), легко подсчитать

деформацию объема. В результате получаем

$$\rho = \bar{\rho} a^3 \frac{ds}{dr} = \bar{\rho} a^3 \left( \frac{D(r)}{D(s)} \right)^{-1},$$

где  $\frac{D(r)}{D(s)}$  — якобиан преобразования. Расписывая якобиан через производные, получаем

$$a^{-3} \frac{D(r)}{D(s)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{b}{a} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{b}{a} \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{b}{a} \frac{\partial x_3}{\partial s_1} \\ \frac{b}{a} \frac{\partial x_1}{\partial s_2} & 1 + \frac{b}{a} \frac{\partial x_2}{\partial s_2} & \frac{b}{a} \frac{\partial x_3}{\partial s_2} \\ \frac{b}{a} \frac{\partial x_1}{\partial s_3} & \frac{b}{a} \frac{\partial x_2}{\partial s_3} & 1 + \frac{b}{a} \frac{\partial x_3}{\partial s_3} \end{vmatrix}. \quad (13.2.3)$$

Мы уже подчеркивали, что в решении отсутствуют вихревые движения, поэтому для каждого элемента среды можно выбрать координаты так, что матрица (13.2.3) станет диагональной. В выбранной системе выражение для  $\rho$  переписывается в виде

$$\rho = \frac{\bar{\rho}}{\left(1 - \frac{b}{a} \alpha\right) \left(1 - \frac{b}{a} \beta\right) \left(1 - \frac{b}{a} \gamma\right)}, \quad (13.2.4)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — функции только  $s$ , а  $b/a$  — функция только  $t^*$ . Величины  $\alpha, \beta, \gamma$  характеризуют деформацию вдоль трех ортогональных главных осей тензора деформации и выражаются довольно сложно через совокупность производных  $\frac{\partial x_i}{\partial s_k}$ . В общем случае  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ , и для определенности мы выберем  $\alpha > \beta > \gamma$ .

Возможны случаи, когда  $\alpha < 0$  (тогда и  $\gamma < \beta < \alpha < 0$ ). Но если  $\alpha > 0$  (знак  $\beta$  и  $\gamma$  произволен), а величина  $\alpha \frac{b}{a}$  растет и достигает единицы в ходе эволюции, то из (13.2.4) следует, что в этот момент и в этой частице  $\rho \rightarrow \infty$ .

Бесконечная плотность возникает в результате одномерного сжатия вдоль оси, соответствующей  $\alpha$ . Таким образом, из нашего приближения следует вполне определенная картина: когда возмущения становятся достаточно большими, в различных местах образуются плоские «блины» коллапсирующей пыли \*\*).

\*) Отношение  $b/a$  есть универсальная функция времени, зависящая от  $\Omega$ , удобно  $b/a$  выразить через  $z$ . Напротив,  $\alpha, \beta, \gamma$  зависят от конкретного вида начального возмущения  $\chi(s)$ .

\*\*) В общем случае совокупности траекторий частиц в ньютоновской теории, пересечение траекторий и бесконечная плотность достигаются за счет движения по одной координате, так что в первый момент возникают плоские области. Пересечение вдоль линии или в точке требует дополнительных условий, возникает в вырожденной задаче. Этот результат появляется и при исследовании движения пылевидного вещества в ОТО [см. Гришук (1967а, б)]. Но надо подчеркнуть, что в реальных задачах образования галактик вполне достаточно ньютоновской теории, эффекты ОТО несущественны.

Обратимся теперь к обсуждению точности предложенного метода. Уравнения движения в лагранжевой форме имеют вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\nabla\varphi, \quad \Delta\varphi = 4\pi G\rho. \quad (13.2.5)$$

Для справедливости записи смещений частиц в форме (13.2.1) необходимо, чтобы все уравнения были линейны. Первое уравнение линейно в смещениях и потенциале. Во втором уравнении, если мы используем истинное выражение для гравитационного потенциала  $\varphi$  как функции от эйлеровской координаты  $\mathbf{r}$ , появляется нелинейность [см. выражение  $\rho$  через  $\mathbf{r}$  (13.2.4)]. Только в случае малых возмущений  $\mathbf{r}$  можно записать

$$\varphi = \varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{6} G\bar{\rho}r^2 + \varphi', \quad (13.2.6)$$

где  $\varphi'$  — линейная функция  $\mathbf{r} - a\mathbf{s}$ , а  $\frac{4\pi}{6} G\bar{\rho}r^2$  — невозмущенный потенциал в ньютоновском приближении. В случае немалых возмущений совокупность (13.2.1), (13.2.4) и (13.2.5) дает лишь приближенное решение. Решающим аргументом в пользу предложенной аппроксимации является то, что бесконечной плотности  $\rho$  в «блине» соответствует конечная плотность на единицу поверхности. Это следствие одномерного сжатия, в противоположность сферически-симметричному случаю. Но бесконечно тонкий диск с конечной массой и конечной поверхностной плотностью  $\mu$  создает конечный потенциал (и конечное поле, т. е. градиент потенциала). Ошибка, вносимая сделанным нами предположением о факторизованном виде (13.2.1), несмотря на нелинейность (13.2.5), остается конечной даже в конце периода сжатия, когда  $\rho \rightarrow \infty$ .

С другой стороны, предлагаемая теория асимптотически точна вначале, когда возмущения малы, поскольку используемые формулы являются обобщением линейной теории. Численные расчеты при случайных начальных условиях показали, что ошибки в моменте образования «блинов» в среднем не превышают 20—30% [Дорошкевич, Рябенский, Шандарин (1973), Дорошкевич, Шандарин (1974)]. Но что представляется твердо установленным — это одномерный характер сжатия с пересечением траекторий и возникновением «блина» из вещества с большой плотностью. Образование «блина» сопровождается возникновением ударной волны в окружающем «блин» веществе. Этот процесс вместе с физическими приложениями теории обсуждается в следующей главе.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что изложенная картина справедлива лишь в случае равного нулю (или пренебрежимо малого) давления. Эквивалентной формулировкой является следующая: теория применима лишь к длинноволновым возмущениям ( $\lambda > \lambda_{\text{дж}}$ ). Функция  $\chi(\mathbf{s})$ , которая играет главную роль в приближенной теории, определяется начальными значениями  $\delta(\mathbf{s}, t)$  и

$u(s, t)$ . Эти величины должны быть разделены (см. гл. 11) на нарастающую, убывающую и вихревую моды (последняя с  $\operatorname{div} u=0$  и  $\delta=0$ ). При  $t \gg t_1$  лишь нарастающая мода выживает \*) и решение описывается формулами (13.2.1), где, однако,  $\chi$  описывает амплитуду растущей моды. В этом решении движение безвихревое как в  $r$ -пространстве, так и в  $s$ -пространстве, так что  $\chi = \operatorname{grad}_s \varphi^*(s)$  и тензор деформации  $\frac{\partial \chi_i}{\partial s_k}$  симметричен.

Можно показать, что при возмущениях, зависящих от одной только декартовой координаты, например  $s_1$ , решение является точным. Из условия отсутствия вихря следует, что решение в этом случае имеет вид

$$x = a(t) s_1 + b(t) \chi_1(s_1), \quad y = a(t) s_2, \quad z = a(t) s_3.$$

При давлении, равном нулю, такое решение справедливо при любой функции  $\chi_1(s_1)$  и при функциях  $a(t)$  и  $b(t)$ , удовлетворяющих уже известным нам уравнениям, полученным для малых возмущений в гл. 9, притом для любого  $\Omega=1$  или  $\Omega \neq 1$ :

$$\ddot{a} = -\frac{H_0^2 \Omega_0 a_0^3}{2a^2}, \quad \ddot{b} = \frac{H_0^2 a_0^3 \Omega_0 b}{a^3}.$$

Решение для  $a$  описывает фридмановское расширение, решение для  $b$  [зависящее от функции  $a(t)$  первого уравнения] описывает линейную стадию возмущений любой формы, но в одномерном возмущении это решение остается точным и при больших возмущениях, пока столкновение частиц и появление ударных волн не приведут к тому, что нельзя будет пренебречь давлением. Эту стадию мы разберем в следующей главе.

Вернемся к общему случаю трехмерной задачи.

При малом отношении  $b/a$  можно записать первое приближение:

$$\rho = \bar{\rho} \left[ 1 + \frac{b}{a} (\alpha + \beta + \gamma) \right], \quad \delta = \frac{b}{a} f(s), \quad f = \alpha + \beta + \gamma. \quad (13.2.7)$$

В этом приближении возмущение плотности растет, сохраняя свою форму, т. е. характер зависимости возмущения от лагранжевой координаты задан одной функцией  $f(s)$ . Однако при больших возмущениях это подобие нарушается. В точках (точнее, в частицах) с данной суммой  $\alpha + \beta + \gamma$  плотность одинаково меняется на ранней (линейной) стадии, но по-разному (в зависимости от значений отдельных величин  $\alpha, \beta, \gamma$ ) на нелинейной стадии. Можно сказать, что предлагаемая приближенная теория учитывает не только приток вещества в область, где уже есть избыток массы, но учитывается и

\*) Случай начальных вихревых возмущений будет рассмотрен позже, в гл. 14.

приливное воздействие соседних масс, действующих косвенно на характер сжатия.

Обратимся теперь к некоторым статистическим аспектам теории «блинов».

Довольно тонкий вопрос о вероятности появления данного набора коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  исследован Дорошкевичем (1970). Отдельные компоненты тензора  $D_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial s_k}$  в фиксированной системе координат имеют нормальную функцию распределения, если функция распределения начальных возмущений нормальна и фурье-образы возмущений также распределены по нормальному закону. Но диагонализация тензора  $D_{ik}$ , т. е. расчет трех величин  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  по шести величинам  $\frac{\partial x_i}{\partial s_k}$ , — операция нелинейная. Следовательно, функция распределения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  больше не будет нормальной, даже если функция распределения  $\frac{\partial x_i}{\partial s_k}$  нормальна.

Дорошкевич получил для вероятности данного набора  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$

$$P(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{27 \exp\left(-\frac{3}{5}s_1^2 + \frac{3}{2}s_2\right)}{8 \sqrt{5}\sigma_0^3} (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma), \quad \left. \vphantom{\frac{27 \exp\left(-\frac{3}{5}s_1^2 + \frac{3}{2}s_2\right)}} \right\} (13.2.8)$$

$$\sigma_0 s_1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad \sigma_0^2 s_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma,$$

где  $\sigma_0$  — дисперсия диагональных компонент тензора  $D_{ik}^*$ ). Множители  $(\alpha - \beta)$ ,  $(\alpha - \gamma)$ ,  $(\beta - \gamma)$  представляют особый интерес. Совпадение  $\alpha$  и  $\beta$  (или  $\alpha$  с  $\beta$  и  $\gamma$ ), превращающее «блин» в «прут» (или даже в точку), является очень маловероятным, гораздо менее вероятным (из-за указанных выше множителей), чем совпадение двух или трех независимых величин. Картина «блинов» получает дальнейшее подтверждение.

Необходимо отметить, что сжатие по одной координате может сопровождаться как сжатием, так и расширением в плоскости «блина». На самом деле, как показал Дорошкевич, лишь около 8% вещества сжимается по всем трем осям ( $\alpha > \beta > \gamma > 0$ ); 84% вещества сжимается в одном направлении, но расширяются в одном или двух направлениях ( $\alpha > \beta > 0 > \gamma$  или  $\alpha > 0 > \beta > \gamma$ ). Величина 8% близка к оценке Оорта, по которой лишь около  $1/16 \approx 6\%$  вещества сжимается по всем направлениям. Конечно, если вещество сжимается по трем направлениям, то оно образует гравитационно связанный объект. Однако не очевидно, что только эти 8% будут гравитационно связаны. Часть из других областей может также привести к образованию объектов.

\*) Величина  $\sigma_0$  выражается через фурье-компоненты растущих возмущений и пропорциональна  $\left(\int \Delta(M, t) d \ln M\right)^{1/2}$ , т. е. возмущению плотности, см. (13.2.7).



### § 3. Нелинейная спектральная теория

Случай пылевидного вещества относительно прост, и в линейной теории общее решение может быть написано непосредственно, без использования фурье-преобразований. Не удивительно, что в нелинейной теории приближенное решение может быть выписано через функции, зависящие от пространственных координат.

Теперь мы рассмотрим другой случай, в котором давление существенно. Это особенно важно для анализа процессов, происходящих до рекомбинации. Необходимо обсудить законы развития возмущений, распространяющихся подобно звуковым волнам или лежащих вблизи границы области неустойчивости. Здесь спектральный подход становится неизбежным. Начав с теории малых возмущений и построив линейную теорию, необходимо включить эффекты нелинейности, сначала как поправки к линейной теории.

Уравнения для фурье-амплитуд в линейном приближении могут быть приведены к виду [см., например, (9.2.6)]

$$a \frac{d^2 A_k}{dt^2} + b \frac{d A_k}{dt} + c A_k = 0, \quad (13.3.1)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — функции длины волны. Однородность уравнения (13.3.1) отражает тот факт, что в линейном приближении каждая фурье-амплитуда  $A_k$  изменяется независимо от других и  $A_k = 0$  тождественно является решением.

Нелинейные поправки превращают уравнение (13.3.1) в

$$a \frac{d^2 A_k}{dt^2} + b \frac{d A_k}{dt} + c A_k = F(A_{k'}, A_{k''}). \quad (13.3.2)$$

Из-за нелинейности основных уравнений возникает правая часть. Наиболее важным результатом учета нелинейности является генерация гармоник, отсутствующих в начальном спектре: условие  $A_k = 0$ ,  $\frac{d A_k}{dt} = 0$  в некоторый момент времени не гарантирует  $A_k = 0$  в последующие моменты времени, если функция  $F$  отлична от нуля.

Конечно, уравнение типа (13.3.2) является приближенным. Если уравнение (13.3.1) назвать первым приближением, то (13.3.2) может быть названо вторым приближением, но точное уравнение содержит функции третьего порядка  $F(A_{k'}, A_{k''}, A_{k'''})$  и  $F(A_k, A_{k'}, A_{k''})$  и всех более высоких порядков.

Точные уравнения в фурье-представлении являются настолько сложными интегро-дифференциальными уравнениями, что они бесполезны; точные уравнения в обычной пространственно-временной форме удобнее, так как это лишь дифференциальные уравнения в частных производных. Поэтому ограничимся при обсуждении второго приближением (13.3.2).

Функция  $F$  описывает взаимодействие двух волн с волновыми векторами  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$ , дающих третью волну с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , определяемым законом сохранения

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' \quad (13.3.3)$$

Следовательно, функция  $F$  может быть записана в виде

$$F = \int d^3k' d^3k'' A_{\mathbf{k}'} A_{\mathbf{k}''} u(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}''). \quad (13.3.4)$$

Вопросы нелинейного взаимодействия рассматривались во многих работах. Хорошая сводка содержится в упомянутой ранее монографии Монина и Яглома (1965, 1967). Основные физические следствия нелинейного взаимодействия следующие:

1. Если пренебречь вязкостью, то взаимодействие продольных волн между собой не приводит к возникновению поперечных волн. Этот результат вытекает из точной теоремы сохранения вихря, поперечные волны соответствуют вихревому движению без возмущений плотности:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \mathbf{B}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}x}, \quad \text{rot } \mathbf{u}_{\mathbf{k}} = i[\mathbf{k} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}] e^{i\mathbf{k}x}; \quad (13.3.5)$$

$[\mathbf{k} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}] \neq 0$ , но  $\text{div } \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \sim (\mathbf{k} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}) = 0$  для поперечных волн. Если  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$  вначале, он остается равным нулю и далее, если нет вязкости и не возникают ударные волны. Следовательно, безвихревое движение создает в квадратичном (второй порядок) приближении безвихревые продольные волны.

2. Взаимодействие поперечных волн между собой создает продольные волны, и, следовательно, во втором порядке возникают возмущения плотности (это справедливо и для высших порядков). Этот эффект лежит в основе вихревой, или турбулентной, теории образования галактик, которая обсуждается более подробно в следующей главе.

• Эффект возникновения продольных волн сильно зависит от уравнения состояния среды.

Поперечные волны не зависят от времени как в плазме с  $P = \varepsilon/3$ , так и в пыли с  $P = 0$  \*). В среде с большой скоростью звука  $b_{\text{зв}}$  продольные звуковые волны являются периодическими с периодом  $T = \frac{2\pi}{b_{\text{зв}} k}$ . Поперечные волны не приводят к резонансному (по времени) нарастанию продольных волн, амплитуда генерируемых возмущений плотности порядка  $\delta \sim \frac{u^2}{b_{\text{зв}}^2}$ .

Эффект в пыли сильно возрастает. Это использовали Озерной и Чернин (1967, 1968): они предположили существование вихревых

\*) Точнее, они затухают из-за вязкости и расширения, но это несущественно для дальнейшего.

(турбулентных) движений до рекомбинации в плазме, в которой преобладает излучение. После рекомбинации, когда давление излучения перестает действовать на вещество, эта турбулентность приводит к возникновению больших возмущений плотности (см. об этом следующую главу).

3. Взаимодействие продольных возмущений с малой длиной волны (меньше некоторого  $\lambda_0$ ) приводит к возникновению продольных волн возмущений плотности с большой длиной волны. Если начальный спектр достаточно круто падал в сторону длинных волн, то этот процесс будет определять флуктуации плотности в больших масштабах.

Точный результат зависит от рассматриваемой ситуации: рассматриваются ли возмущения с длиной волн больше джинсовской или акустические возмущения — бегущие или стоячие звуковые волны. При правдоподобных предположениях получается, что амплитуда длинных волн пропорциональна  $A_k \sim k^2$ , что приводит к закону

$$\frac{\Delta M}{M} \sim \sqrt{A_k^2 k^3} \sim k^{1/2} \sim M^{-1/4}. \quad (13.3.6)$$

Простое объяснение этого результата дано в следующем параграфе, где рассматривается газ, молекулами которого являются звезды или скопления звезд. Очевидно, это крайний случай громадного числа коротковолновых возмущений.

4. Продольные волны с длиной волны большей, чем некоторое  $\lambda_0$ , из-за нелинейного взаимодействия будут генерировать короткие волны. Этот процесс также важен для космологии: согласно линейной теории (см. § 2 гл. 10), вязкость сильно подавляет возмущения в интервале длин волн, соответствующем  $M < 10^{14} M_\odot$ , а генерация поддерживает возмущения в этом интервале.

Пиблс (1970) исследовал процесс образования ударных волн в плазме, в которой преобладает излучение. Этот процесс вызван как раз генерацией коротких волн. Синусоидальная волна не имеет гармоник, но когда она трансформируется в пилообразную, то ее фурье-спектр содержит много обертонов. Разрыв в функции  $\rho(x)$  (при некотором  $x_s$ ), т. е.  $\rho(x_s+0) \neq \rho(x_s-0)$ , соответствует убыванию спектра пропорционально  $k^{-1}$  в одномерном случае.

Возникновение ударной волны сопровождается также ростом энтропии. В этой ситуации флуктуации энтропии останутся даже после затухания продольных акустических волн.

В пылевидной среде,  $P=0$ , рассмотренное выше образование «блинов» (§ 2 этой главы) также сопровождалось появлением высоких гармоник в спектре возмущений плотности.

Теория нелинейного волнового взаимодействия в настоящее время далека от завершения. Есть лишь несколько важных для космологии законченных результатов. Поэтому наше обсуждение

лучше рассматривать как введение к нерешенной проблеме, написанное для будущих теоретиков. Отметим некоторые свойства общей теории.

В статистической механике показано, что в равновесии на каждую степень свободы приходится одна и та же энергия, равная  $\theta$  (эффективная температура в энергетических единицах,  $\theta = kT$ , где  $k$  — постоянная Больцмана; мы избегаем пользоваться такой записью, чтобы не путать постоянную Больцмана с  $k$  — волновым вектором). Это значит, что  $A_k = \text{const} \cdot \sqrt{\theta}$ , где  $\text{const}$  не зависит от  $k$  и  $t$ , должно быть решением кинетического уравнения, если  $\frac{\partial A_k}{\partial t} = 0$  в левой части этого уравнения (в среднем).

Законы равновесия не зависят от конкретных механизмов взаимодействия. В равновесии каждый процесс (например, рождение  $k$  из  $k'$  и  $k''$ ) сопровождается обратным процессом (распадом  $k$  в  $k'$  и  $k''$  в нашем примере), и когда все  $A_k$  имеют равновесные значения, то прямые взаимодействия в точности скомпенсированы обратными. Это очень общий и очень важный принцип, и его можно применить к системе уравнений, описывающей продольные и поперечные волны.

Равновесное решение строго реализуется лишь в тривиальном случае общего равновесия, если нет макроскопических движений и флуктуаций. В тех случаях, когда есть макроскопические движения, соответствующие значения  $\theta$  чрезвычайно велики: например, движение воды со скоростью 1 см/сек в масштабе порядка 1 см соответствует  $\theta \sim 1$  эрг, т. е.  $T \sim 10^{16}$  К. Но, очевидно, невозможны ситуации, в которых все степени свободы в нашем примере находились бы при такой температуре: вода испарилась бы при температуре  $\sim 10^3$  К.

Теория турбулентности и теория флуктуаций всегда имеют дело с неравновесной ситуацией. Следовательно, равновесие может быть осуществлено только в малой части фазового объема (при  $k$  много меньших, чем обратное межатомное расстояние), и обычно мы сталкиваемся со стационарной, но неравновесной ситуацией.

Различие между этими двумя возможностями наиболее ясно видно из примера диффузии ( $n$  — концентрация частиц,  $j$  — поток,  $D$  — коэффициент диффузии):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial n}{\partial x}.$$

В равновесии  $n = \text{const}$ ,  $j = 0$ , но стационарное состояние достигается при  $j = \text{const}$ ,  $n = n_0 - \frac{xj}{D}$ .

В задачах с турбулентностью или флуктуациями обычно есть поток энергии в сторону коротких волн, где энергия из-за диссипации превращается в тепло. В некоторых ситуациях, если  $A_k \rightarrow 0$

при  $k \rightarrow 0$ , в части фазового пространства возможно и обратное направление потока энергии.

Необходимо иметь в виду еще следующее важное обстоятельство. Равновесие характеризуется только средним значением  $\bar{A}_k$ , и этого вполне достаточно, потому что фаза случайна и распределение  $A_k$  (т. е. вероятность найти некоторое значение  $A_k$ ) нормально, т. е. гауссово.

В уравнениях нелинейного взаимодействия (13.3.2) заманчиво использовать те же предположения. Но они недопустимы! Вспомним о «блинах» — возникает распределение плотности с большой амплитудой коротких волн, но эти короткие волны не случайны, они коррелированы с длинными волнами и все вместе образуют плоский «блин». Без этой корреляции тот же спектр коротких волн дал бы весьма отличную картину распределения плотности. Следовательно, в проблемах, подобных проблеме возникновения «блинов», и в задачах образования ударных волн спектральный подход хуже (т. е. несравненно более сложен из-за учета корреляций), чем прямой анализ в пространственных координатах.

При обсуждении нелинейных задач спектральный подход не должен применяться далее, чем до второго порядка теории возмущений.

#### § 4. Возникновение длинноволновых возмущений в газе из звезд или звездных скоплений

Рассмотрим важный вопрос о формировании сгущений большого масштаба из уже возникших отдельных объектов. Это — так называемая теория скучивания объектов.

Скучивание может происходить по двум причинам. Во-первых, потому, что в больших масштабах были первоначальные малые возмущения на ранней стадии расширения в начальном спектре. Эти возмущения растут в согласии с законами гравитационной неустойчивости и с течением времени дорастают до значительных и приводят к возникновению скоплений объектов. Во-вторых, скучивание может происходить из-за нелинейных эффектов, порождающих длинные волны возмущений из коротких.

Ниже мы проанализируем, при каких условиях осуществляется каждая из указанных причин скучивания. Дальнейшее изложение в этом параграфе основано на работе Дорошкевича, Зельдовича (1974).

Предположим, что спектр возмущений — весь или часть его — соответствует амплитуде, падающей с ростом масштаба, но не слишком быстро (ниже мы уточним, что означает «не слишком быстро»). В таком случае сперва образуются мелкие единицы — отдельные тела, но они распределены в пространстве неравномерно из-за наличия (хотя и более слабых) возмущений большего масштаба.

Образование больших единиц в этой картине определяется начальным спектром, начальной амплитудой соответствующих возмущений. При этом предварительное, более раннее образование малых единиц в первом приближении несущественно. В большом масштабе (например,  $10^{16} M_{\odot}$ ) закон нарастания возмущений одинаков для газа, состоящего из отдельных атомов  $H$  / с  $m \approx 10^{-24} z \approx 10^{-57} M_{\odot}$ , и для газа, «молекулами» которого являются шаровые скопления с массой  $M \approx 10^5 M_{\odot}$ .

Пусть в момент рекомбинации  $t_{\text{рек}}$ ,  $z_{\text{рек}}$  заданы возмущения плотности, зависящие от масштаба, характеризуемого массой  $M$ , по закону

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\text{рек}} &= \frac{\delta \rho}{\rho} = b_0 M^{-\nu} & \text{при } M \geq M_1; \\ \delta_{\text{рек}} &= 0 & \text{при } M < M_1. \end{aligned} \right\} \quad (13.4.1)$$

Закон роста возмущений (для случая критической плотности) таков:

$$\delta = \delta_{\text{рек}} \frac{1+z_{\text{рек}}}{1+z} = \delta_{\text{рек}} \left( \frac{t}{t_{\text{рек}}} \right)^{2/3}. \quad (13.4.2)$$

Примем в качестве приблизительного условия обособления отдельных тел  $\delta(M, z) = \delta(M, t) = 1$ . Тогда первые обособившиеся тела с массой  $M_1$  появятся в момент  $t_1$ ,  $z_1$ , который получим из условия

$$\delta = b_0 M_1^{-\nu} \left( \frac{t_1}{t_{\text{рек}}} \right)^{2/3} = b_0 M_1^{-\nu} \frac{z_{\text{рек}}}{1+z_1} = 1, \quad (13.4.3)$$

так что

$$t_1 = t_{\text{рек}} b_0^{-3/2} M_1^{3/2\nu}, \quad z_1 + 1 = z_{\text{рек}} b_0^{-1} M_1^{-\nu}. \quad (13.4.4)$$

В дальнейшем происходит рост характерной массы, т. е. процесс объединения масс  $M_1$  в агрегаты с массой  $M$  по закону

$$M(t) = M(z) = M_1 \left( \frac{t}{t_1} \right)^{3/2\nu} = M_1 \left( \frac{1+z_1}{1+z} \right)^{1/\nu}. \quad (13.4.5)$$

В частности, при простейшем законе  $\delta \sim M^{-1/2}$ ,  $\nu = 1/2$  получим [см. Пресс и Шехтер (1974)]

$$M \sim t^{4/3} \sim (1+z)^{-2}, \quad (13.4.6)$$

так что число первичных тел с массой  $M_1$ , объединившихся к данному моменту ( $N = M/M_1$ ), растет пропорционально  $a^2$  — квадрату радиуса Вселенной.

Однако закон (13.4.5) независимого роста возмущений разных масштабов возможен, как мы сейчас покажем, лишь при не слишком крутом спектре,  $\nu < 7/6$  в случае степенного спектра.

Дело в том, что необходимо учесть нелинейные эффекты. Рассмотрим крайний случай, когда в первичном спектре длинноволно-

вые возмущения вовсе отсутствуют ( $\delta=0$  при  $M>M_2$ ). Коротковолновые возмущения в процессе роста за счет нелинейности рождают также и длинноволновые возмущения с амплитудой фурье-компонент  $A_k \sim k^2$ , где  $k$  — волновой вектор. Обоснование этого закона  $A_k \sim k^2$  будет дано ниже в этом параграфе. Здесь остановимся на физических выводах [Зельдович (1965г), Пиблс (1974б)]. В пересчете на среднее возмущение плотности, соответствующее данной массе  $M \gg M_1$ , получим

$$\delta(M) = (A_k^2 k^3)^{1/2} |_{k=M^{-1/3}} \sim M^{-7/6}. \quad (13.4.7)$$

Из размерности следует, что в момент  $t_1$ , когда  $\delta(M_1, t_1)=1$ , для больших масс

$$\delta(M, t_1) = \left( \frac{M}{M_1} \right)^{-7/6}. \quad (13.4.8)$$

Таким образом, если начальный спектр достаточно крут, то нелинейные эффекты приводят к степенному спектру (13.4.8) с показателем  $\nu=7/6$ , которому соответствует закон роста массы

$$M = M_1 \left( \frac{1+z}{1+z_1} \right)^{-9/7} = M_1 \left( \frac{t}{t_1} \right)^{4/7}. \quad (13.4.9)$$

Именно этот закон можно назвать «автомодельным» законом сгущивания. Этот закон устанавливается во всех случаях, когда начальный спектр является достаточно крутым, т. е. когда в начальном спектре нет длинноволновых возмущений (точнее, эти возмущения меньше определенного предела) и возникновение больших масс причинно связано (через нелинейность) с ранее произошедшим обособлением малых масс.

Напротив, закон (13.4.6)  $M \sim (1+z)^{-2} \sim a^2 \sim t^{1/3}$  не следует называть автомодельным: степенная зависимость здесь отражает заданность начального спектра в степенном виде, а не физическую сущность процесса.

Предположим, что начальные возмущения являются энтропийными. Тогда естественно предположить, что  $\delta(M)$  имеет максимум при  $M_1 \approx 10^5 - 10^6 M_\odot$  на момент  $z \approx 200$ . В меньшем масштабе возмущения не растут: этому препятствует газовое давление нейтрального водорода. Предположим, что массы  $M_1 \approx 10^6 M_\odot$  выделяются наиболее рано, при  $z \approx 1000$ , спектр крутой, и дальнейшая эволюция заключается в их гравитационном сгущивании. При этом к сегодняшнему моменту  $z=0$  получим  $M \approx 10^6 \cdot (10^3)^{9/7} M_\odot \approx 5 \cdot 10^8 M_\odot$ . Следовательно, такая концепция неудовлетворительна, она не объясняет существования объектов с гораздо большей массой.

Пресс и Шехтер (1974), принимая закон  $M \sim (1+z)^{-2}$ , получают  $M_{\max} \approx 10^{12} M_\odot$ , что близко к массам гигантских галактик или малых скоплений галактик. Выше было объяснено, что в действительности в этом случае образование больших объектов является след-

ствием задания длинноволновых возмущений в начальных условиях, и нельзя в этом случае говорить об *объяснении* процесса образования тел с  $M \approx 10^{12} M_{\odot}$ .

В ранней работе Дорошкевича, Зельдовича и Новикова (1967а) предполагалось, что физические возмущения, связанные со взрывами протозвезд  $M \approx 10^5 - 10^6 M_{\odot}$ , приводят к более быстрому нарастанию масштабов. В настоящее время нам представляется более вероятным наличие начальных возмущений в масштабе до  $10^{14} - 10^{16} M_{\odot}$ , достаточных для того, чтобы  $\delta \approx 1$  достигалось при  $z \approx 4 - 10$  [см. Сюняев, Зельдович (1972б), Дорошкевич, Шандарин (1974)].

Такие возмущения могут быть адиабатическими, а не энтропийными, тогда масштаб  $M \approx 10^{14} M_{\odot}$  обусловливается затуханием акустических волн меньших масштабов на предыдущей, догалактической стадии эволюции. Все эти вопросы будут рассмотрены в следующей главе.

Перейдем теперь к выводу приведенного выше автомодельного спектра длинноволновых возмущений (13.4.7).

Предположим, что пространство разбито на малые ячейки, в каждой из которых находится одна или несколько частиц, причем выполнены два условия: 1) масса в каждой ячейке постоянна; 2) суммарный импульс частиц в ячейке равен нулю, и центр тяжести всех частиц в данной ячейке совпадает с центром ячейки. Покажем, что в этом случае возникают возмущения, характеризуемые спектром  $A(k) \sim k^2$  при  $k \rightarrow 0$ . Аналогичный вывод может быть сделан и в рамках гидродинамики [см. об этом Дорошкевич, Зельдович (1974)].

Пренебрежем космологическим расширением и гравитационным взаимодействием. В этом случае каждая частица движется по прямой с постоянной скоростью  $\mathbf{v}_i$ . Можно записать текущую координату отдельной частицы в виде

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i + \Delta \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t,$$

где  $\mathbf{R}_i$  — координата центра ячейки,  $\Delta \mathbf{r}_i$  — начальное смещение частицы из центра ячейки. Разлагая плотность в ряд по степеням  $\mathbf{k}$ , получим ( $V$  — объем системы)

$$\rho = V^{-1} \sum_i m_j e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} \approx V^{-1} \sum_i m_j e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_j} \left[ 1 + i\mathbf{k}(\Delta \mathbf{r}_j + \mathbf{v}_j t) - \frac{1}{2}(\mathbf{k}\Delta \mathbf{r}_j)^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{k}\mathbf{v}_j)^2 t^2 - (\mathbf{k}\Delta \mathbf{r}_j)(\mathbf{k}\mathbf{v}_j)t + \dots \right]. \quad (13.4.10)$$

Первый член ряда описывает среднюю плотность и не содержит случайных множителей ( $\Delta \mathbf{r}_j$  и  $\mathbf{v}_j$ ). Второй и третий члены ряда дают нуль при суммировании в пределах каждой отдельной ячейки, поскольку, согласно предположению 2), центр тяжести ячейки



совпадает с ее центром и суммарный импульс частиц в ячейке равен нулю. Лишь квадратичные по  $k$  члены дают отличный от нуля вклад в случайную амплитуду возмущений. Это приводит к амплитуде возмущений плотности

$$A(k) \sim k^2. \quad (13.4.11)$$

Это очень общий результат. Произвольное локальное взаимодействие, рассматриваемое как источник возмущений, удовлетворяет законам сохранения массы и импульса. Следовательно, возникающие возмущения плотности характеризуются амплитудой  $A(k) \sim k^2$ . Это, например, проявляется при расчете флуктуаций в гидродинамике, возникающих под влиянием диссипативных процессов [Ландау и Лифшиц (1957)]. В случае стационарных флуктуаций (квантовых или равновесных) рассмотренное выше разложение не применимо ни для каких  $k$  и вывод  $A(k) \sim k^2$  не справедлив. Поэтому в стационарном распределении возможны спектры  $A^2(k) \sim k^0$  — равновесное распределение, квантовые флуктуации бозе-газа,  $A^2(k) \sim k$  — квантовые флуктуации ферми-газа и др.

В упомянутой работе Пресса и Шехтера (1974) в отдельной ячейке была лишь одна частица, причем расположенная случайным образом. В этом случае центр тяжести ячейки не совпадает с центром ячейки и возмущения характеризуются амплитудой  $A(k) \sim k$  в пределе  $k \rightarrow 0$ . Вернемся к предположению (13.4.11).

Учет расширения и гравитационной неустойчивости приводит к выводу (для простоты предположим критическую среднюю плотность):

$$\overline{A^2(k, t)} \approx k^4 \left( \frac{v^2}{G\rho_0} \right)^2 \frac{m}{\rho_0} a^2 \quad (13.4.12)$$

в пределе при  $k \rightarrow 0$  ( $a \sim t^{1/3}$  — масштабный множитель, описывающий общее хаббловское расширение), или, подставляя по порядку величины  $v^2 \approx Gm^{1/3}\rho^{1/3}$ , получим

$$\overline{A^2(k, t)}|_{k \rightarrow 0} \approx k^4 \left( \frac{m}{\rho_0} \right)^{1/3} a^2. \quad (13.4.13)$$

Если определять дисперсию массы в объеме, охватывающем массу  $M$ , условием

$$\Sigma^2(M) = \overline{A^2(k, t)} k^3|_{k^3=M/\bar{\rho}}, \quad (13.4.14)$$

то для спектра (13.4.13) получим

$$\Sigma^2(M) \approx \left( \frac{m}{M} \right)^{1/3} a^2, \quad (13.4.15)$$

что и решает, в принципе, вопрос о возможности гравитационного сгущивания объектов.

Для того чтобы связать конечное распределение объектов по массам и начальный спектр флуктуаций плотности, используется какое-либо условие обособления, объектов, условие слипания частиц и выделения группы их на общем среднем фоне. В работах Дорошкевича (1967) и Пресса и Шехтера (1974) предполагается, что каждый выделяющийся объект строго сферически-симметричен, и в качестве условия обособления используется требование достижения определенного избытка массы  $\Delta M/M$  в шаре с данной массой  $M$ . При этом границы шара фиксируются резко и, как это отмечено и обсуждается Зельдовичем, Новиковым (1967б), см. также гл. 12, дисперсия массы в объеме с массой  $M$  определяется формулой (13.4.14) при  $k \rightarrow 0$  лишь в том случае, если  $\overline{\Delta^2(k, t)} \sim k^n$  и  $n \leq 1$ . Если же  $n > 1$ , то резкое задание границы приводит к тому, что вместо (13.4.14) мы получим  $\Sigma^2(M) \sim k^4 \sim V^{-4/3}$  при любом  $n \geq 1$ . В этом случае  $\Sigma^2(M)$  определяется флуктуацией числа частиц на границе рассматриваемого объема. В реальной задаче, особенно при отказе от точной сферической симметрии, резкой границы не возникает и можно полагать, что формула (13.4.14) лучше соответствует действительности. Принятое в работе Пресса и Шехтера (1974) условие обособления, в принципе, не позволяет выделить спектр с показателем  $n > 1$ .

Результаты численных расчетов Пресса и Шехтера для случая начальных возмущений с показателем спектра  $n=0$  полностью совпадают с теорией малых возмущений и не содержат каких-либо элементов автомодельности. Действительно, при  $n=0$  для связи относительного превышения массы в объеме с массой  $M$  с размерами объема и временем получим

$$\left( \frac{\delta M}{M} \right)^2 \sim M^{-1} a^2, \quad (13.4.16)$$

где  $a$  — масштабный множитель. Условие обособления

$$\left( \frac{\delta M}{M} \right)^2 = \text{const}, \quad (13.4.17)$$

откуда получаем зависимость массы «объекта» от времени:

$$M \sim a^2. \quad (13.4.18)$$

Для показателя спектра (фактического)  $n=1$  аналогичными рассуждениями получаем

$$M \sim a^{3/2}, \quad (13.4.19)$$

что совпадает с результатами численного эксперимента на начальной стадии. В общем случае для произвольного показателя степени

$n [A^2(k) \sim k^n]$  получаем

$$M \sim a^{\frac{6}{3+n}} \quad (13.4.20)$$

и для флуктуаций, соответствующих (13.4.13),

$$n = 4, \quad M \sim a^{1/4}. \quad (13.4.21)$$

Аналогичные результаты могут быть получены и для функции распределения объектов по массам. Формула, обобщающая распределение по массам Пресса и Шехтера, была получена Дорошкевичем (1967). Там же была выявлена область применимости этой формулы. Если отказаться от использования резкой сферической границы выделяющегося объема и использовать для дисперсии массы в данном объеме формулу (13.4.14), то для функции распределения объектов по массам получим

$$dW \sim M^{\frac{n-3}{6}} \exp\left(-\frac{\Sigma^2}{2}\right) dM. \quad (13.4.22)$$

Для  $n=0$  и  $n=1$  это полностью согласуется с результатами Пресса и Шехтера. Отклонение в численных экспериментах Пресса и Шехтера от теории при  $n=1$ , по-видимому, связано с использованием недостаточно большого количества частиц (только  $10^3$  точек). Это приводит к заметному влиянию границы, т. е. частиц, расположенных в поверхностном слое, и появлению примеси возмущений со спектром  $\overline{A^2(k)} \sim k^0$ . Не случайно эти возмущения проявляются лишь на поздней стадии расчета и точность этого варианта много хуже точности варианта с  $n=0$ .

## § 5. Тепловая неустойчивость и разделение однородного газа на фазы

При наличии источников энергии и неравновесных процессов существует механизм, вызывающий неустойчивость однородного газа и приводящий к разделению однородного газа на плотные холодные облака и горячий газ малой плотности между облаками. Этот механизм, называемый тепловой неустойчивостью, не связан с действием силы тяготения. Как следствие, его эффективность (инкремент нарастания возмущений) убывает для длинных волн. Для тепловой неустойчивости характерно существование оптимального размера. Подчеркнем сразу, что первичное разделение космологической плазмы на отдельные тела не связано с тепловой неустойчивостью, так как для ее проявления необходимы источники энергии. Зато в условиях галактик с большим содержанием газа значение тепловой неустойчивости весьма велико.

Это явление, хотя оно не относится, строго говоря, к области релятивистской астрофизики, важно для образования звезд и близко к другим вопросам, рассматриваемым в этой главе.

Тепловой баланс газа, находящегося под действием внешних источников нагрева, описывается уравнением вида

$$C_P \frac{dT}{dt} = h - \rho \Psi(T), \quad (13.5.1)$$

где  $C_P$  — теплоемкость газа, первое слагаемое правой части описывает нагрев газа, второе — охлаждение.

Поступление энергии в единицу массы (функция  $h$ ) в первом приближении не зависит от плотности и температуры газа. Потери энергии на излучение зависят от двойных столкновений между атомами или атома с электроном. Следовательно, эта величина пропорциональна  $\rho$ . Зависимость  $\Psi(T)$  от температуры довольно сложна: при низких температурах ( $\sim 100^\circ\text{K}$ ) главным процессом охлаждения является возбуждение нижнего уровня атомов углерода (и других примесей), при высоких температурах преобладает излучение водорода в линии Ly- $\alpha$ , при еще более высоких — свободно-свободное излучение.

Для газа данного состава и при данных внешних источниках нагрева можно рассчитать стационарную температуру с помощью уравнения

$$\left. \begin{aligned} h - \rho \Psi(T) &= 0, \\ T_{\text{ст}} &= \Phi(\rho), \end{aligned} \right\} \quad (13.5.2)$$

а также давление согласно уравнению состояния газа ( $R$  — газовая постоянная,  $\mu$  — молекулярный вес)

$$P_{\text{ст}} = \frac{RT_{\text{ст}}}{\mu} \rho. \quad (13.5.3)$$

Расчет дает в условиях нашей Галактики немонотонную зависимость  $P_{\text{ст}}(\rho)$ , качественно подобную кривой Ван-дер-Ваальса ниже критической точки (рис. 45).

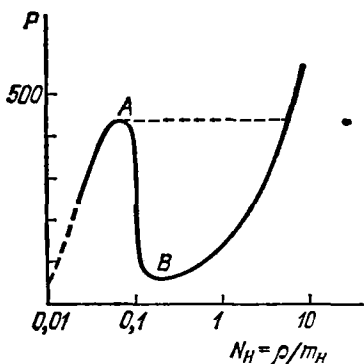


Рис. 45. Зависимость стационарного давления от плотности. Область АВ неустойчива.

Очевидно, в области между  $A$  и  $B$ , газ  $\frac{dP}{d\rho} < 0$ , газ неустойчив. Формальный расчет в линейном приближении подтверждает это. Возмущения растут, как  $e^{\omega_T t}$ , где

$$\omega_T = k \sqrt{-\frac{dP}{d\rho}}. \quad (13.5.4)$$

Эта формула справедлива постольку, поскольку  $\omega_T^{-1}$  больше, чем время релаксации температуры

$$\frac{1}{t_T} = \frac{\rho}{C_P} \frac{d\Psi}{dT}. \quad (13.5.5)$$

Именно эта ситуация и носит название тепловой неустойчивости и связана с увеличением потери энергии, когда при постоянном давлении температура падает, а плотность возрастает. Отметим некоторые работы по тепловой неустойчивости: Филд (1965), Голдсмит, Хабинг и Филд (1969), Спитцер и Томаско (1968).

Представляет интерес и нестационарная задача о тепловой неустойчивости. Рассмотрим газ, не находящийся в тепловом равновесии с излучением, лишенный подогрева. Газ остывает, и можно поставить вопрос: как изменяются возмущения за время остывания? Без учета тяготения (короткие волны) возмущения растут лишь в течение ограниченного времени: при приближении к полному равновесию обязательно возникает устойчивость, устанавливается равновесная температура, и тогда условие постоянства давления приводит и к постоянной плотности. Однако это не исключает возможности сильного нарастания возмущений на этапе, далеком от равновесия.

Вернемся к системе с постоянным подогревом и стационарным неравновесным состоянием. Можно рассмотреть и конечный результат нарастания возмущений, притом точно, не ограничиваясь теорией малых возмущений. Это было сделано в важной работе Пикельнера (1967). Система стремится к состоянию, в котором при постоянном давлении она устойчива. Этим условиям соответствует разделение однородного вначале газа на две фазы —  $L$  и  $N$ . Обе фазы устойчивы и обладают равным давлением,  $N$  — плотная холодная фаза,  $L$  — разреженная горячая фаза.

Это основы теории, объясняющей происхождение в нашей Галактике облаков с  $\rho \approx (3-6) \cdot 10^{-24}$  г/см<sup>3</sup> и  $T \approx (70-100)^\circ\text{K}$ , окруженных горячим газом с  $\rho \approx 4 \cdot 10^{-26}$  г/см<sup>3</sup> и  $T \approx (5-10) \cdot 10^8$  К. Оценки скорости нагрева дают  $h \approx 10^{40}$  эрг/г·сек [Пикельнер (1967)]. Необходимо отметить, что решение не является единственным. На плоскости  $\rho, P$  можно выбрать горизонтальную линию, парал-

лельную линии  $LN$ , но лежащую ниже или выше и дающую другую пару точек.

В работе Зельдовича и Пикельнера (1969) рассмотрен вопрос о поверхности, отделяющей плотный холодный газ от горячего разреженного, при учете теплопроводности. Существует только одна пара точек и одно давление, для которых эта поверхность не движется. Если взять более высокие давления, то это приведет к конденсации разреженного газа в облака. Более низкое давление приведет к испарению облаков. Следовательно, есть лишь одно полностью стационарное состояние.

Теплопроводность — медленный процесс, и поэтому полная стационарность недостижима практически. Точное значение давления, число и объем облаков могут зависеть от деталей истории системы, а также от наличия магнитных полей и других осложняющих факторов.

•

## Г Л А В А 14

### ТЕОРИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ГАЛАКТИК

#### § 1. Введение

Уже само название главы, в котором говорится не об одной, а о многих теориях, характеризует состояние вопроса.

В настоящее время в рамках теории горячей Вселенной разрабатываются, сравниваются между собой и конкурируют несколько гипотез.

Общим для этих гипотез является предположение о том, что в период преобладания излучения (до рекомбинации) плазма была почти однородной; современная структура в этот период не существовала. Предполагается, следовательно, что современная структура возникла после рекомбинации водорода, при  $z < 1400$ . В формулировке «почти однородная плазма» перенесем ударение со слова «однородная» на слово «почти». В чем заключаются отклонения состояния плазмы от строго однородного? Вспомним классификацию типов возмущений. С учетом этой классификации выкристаллизовались следующие теории происхождения галактик:

1. *Адиабатические возмущения плотности и связанные с ними потенциальные движения и возмущения метрики.* В период преобладания излучения (РД-период) эти возмущения представляют собой акустические колебания (возмущения с длиной волны меньше  $ct$ ). После рекомбинации возмущения растут по закону гравитационной неустойчивости.

Учет фотонной вязкости и затухания акустических колебаний приводит к характерной массе порядка  $10^{13} M_{\odot}$ , близкой к наблюдаемой массе скоплений. Это совпадение является аргументом в пользу адиабатической теории. На нелинейной стадии роста возникают диски («блины»), газ «натыкается» на ударные волны, разогревающие его. Детальному разбору возникающей картины посвящены §§ 2—7 данной главы. Здесь отметим только большое разнообразие физических состояний газа, обещающее возможности объяснения таких различных объектов, как квазары, эллиптические и спиральные галактики.

Долгое время казалось, что вращение галактик (проявляющееся в дисковой и спиральной структуре и непосредственно измеряемое

по доплер-эффекту) очень трудно или даже невозможно объяснить в теории потенциальных, т. е. безвихревых, возмущений. Недавно Пиблс (1967а, 1969а) показал, что в рамках этой теории момент вращения, возникающий вследствие гравитационного взаимодействия, лишь ненамного уступает наблюдаемому. В последнее время Дорошкевич (1973) учел современные представления о дисковой стадии в процессе превращения малых возмущений в скопления галактик. При этом увеличивается ожидаемый момент вращения и, что существенно, появляется вихревое движение части газа. При наличии вращения естественно объясняются и магнитные поля в галактиках.

Принципиальная особенность теории адиабатических возмущений заключается в наиболее полном использовании гравитационной неустойчивости. Можно сказать, что теория адиабатических возмущений решает задачу о тех наименьших возмущениях строго однородной космологической модели, которые необходимы для получения наблюдаемой в настоящее время структуры. Малые, хотя и конечные ( $10^{-3}$  —  $10^{-4}$  в безразмерных единицах), возмущения метрики не меняют качественно локальных свойств Вселенной на ранних этапах. Строго однородна в этой теории энтропия. Космологическое квазизотропное решение со строго постоянным составом вещества — вот то состояние вблизи сингулярности, которое приводит к адиабатическим возмущениям.

2) *Пространственные флуктуации состава плазмы.* Наиболее естественно считать флуктуирующей малую, но существенную величину — отношение числа барионов к числу фотонов. Удельная энтропия приблизительно равна числу фотонов, отнесенных к одному бариону. Поэтому такие флуктуации называются энтропийными. В этой концепции в течение всего РД-периода эволюции метрика Вселенной и динамика расширения вообще не «чувствуют» никаких возмущений. Диффузия барионов мала, и заданное в начальный момент распределение барионов остается неизменным до момента рекомбинации.

После рекомбинации перед нами неоднородный нейтральный газ при температуре около  $4000^\circ\text{K}$  без пекулярных скоростей. Температура и средняя плотность в этот момент определяют джинсовскую массу  $M_{\text{дж}} \approx 5 \cdot 10^4 \Omega^{-1/2} M_\odot$ . Возмущения большего масштаба растут по закону, не зависящему от масштаба при  $M \gg M_{\text{дж}}$ , возмущения меньшего масштаба не растут.

Наиболее вероятным представляется падающий с увеличением масштаба начальный спектр возмущений. В таком случае первыми образуются объекты наименьшей массы, совместимой с джинсовским порогом, т. е. несколько большей  $5 \cdot 10^4 \Omega^{-1/2} M_\odot$ . Физически именно давление газа ограничивает снизу эту массу; роль давления существенна, и можно полагать, что образуются сферические тела, а не «блины». Дорошкевичем, Зельдовичем и Новиковым (1967а) выска-



зано предположение, что так образуются сверхзвезды. Их эволюция проходит быстро и заканчивается взрывами. Выделяющаяся при взрыве энергия — лучистая и кинетическая — вызывает цепь дальнейших процессов. В 1967 г. мы пытались всю структуру Вселенной получить, исходя из энтропийных возмущений. Последующие авторы ставили задачу более скромную, но и более реальную.

Дикке и Пиблс (1968) полагают, что объекты с массой порядка  $10^5$ — $10^6 M_\odot$  превращаются в шаровые скопления звезд. Шаровые скопления, состоящие из старых звезд с массами около  $1 M_\odot$  каждая, наблюдаются в составе нашей Галактики; до работы Дикке и Пиблса не было объяснения необычайного сходства таких скоплений друг с другом, малого разброса масс и т. д.

Как объяснить структуру Вселенной в самом большом масштабе с точки зрения гипотезы энтропийных флуктуаций? Если начальная амплитуда длинноволновых флуктуаций ( $M \sim 10^{13}$  —  $10^{14} M_\odot$ ) мала, то распад газа на тела с  $M \sim 10^6 M_\odot$  не успеет привести к наблюдаемой структуре большого масштаба (см. § 4 гл. 13).

Заложив «руками» начальный спектр энтропийных возмущений с максимумом около  $10^{13} M_\odot$ , можно получить те же выводы, что и в теории адиабатических возмущений.

Такой подход представляется искусственным, даже антиэстетичным, но опровергнуть его трудно.

3) *Гипотеза зарядово-симметричного мира.* После открытия античастиц и создания физической теории зарядовой симметрии свойств элементарных частиц идея зарядовой симметрии мира как целого приобрела необычайную привлекательность.

Идея симметрии высказывалась применительно к разным масштабам. Наиболее смелым является предположение, что в Галактике представлены звезды и антизвезды и в Солнечную систему вторгаются куски антивещества (метеоры, кометы) [см. Рожанский (1940а, б), Константинов и др. (1966)]. Наиболее осторожное предположение состоит в том, что одни скопления галактик состоят из вещества, другие — из антивещества. В зарядово-симметричных теориях нельзя избежать аннигиляции там, где перемешиваются вещество и антивещество. При этом должны происходить характерные цепочки реакций  $p + \bar{p} = \pi^0 +$  другие частицы,  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  с энергией гамма-квантов в интервале 50—200 Мэв.

Специальные поиски такого гамма-излучения дали отрицательный ответ. Однако расчет ожидаемого фона в различных вариантах зарядово-симметричной теории не прост. Для его проведения нужно задаться еще различными предположениями. Важный аргумент против зарядово-симметричной теории образования галактик выдвинул Бардин [устное сообщение приведено Филдом (1973а)].

В такой теории области, занятые веществом, и области, занятые антивеществом, резко разграничены; на границе равна нулю плот-

ность как вещества, так и антивещества. Это значит, что контраст плотности вещества порядка единицы все время. Конденсация объектов, изолированных друг от друга, начинается сразу после рекомбинации. Но в таком случае плотность объектов должна быть порядка плотности вещества в момент рекомбинации,  $3 \cdot 10^{-20} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ . Между тем плотность галактик  $\sim 10^{-24} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ , плотность скоплений галактик порядка  $10^{-27} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ .

В работах Клейна и Альвена [см. обзор Альвена и Эльвиус (1973)] рассматривается зарядово-симметричная модель Вселенной. Предложен весьма остроумный механизм разделения частиц и античастиц магнитным и гравитационным полями. Однако надо подчеркнуть, что исходным состоянием альвеновской модели является плазма малой плотности, не находящаяся в равновесии с излучением. Альвен отказывается от горячей космологической модели с сингулярностью, так что объяснение реликтового излучения в его теории затруднительно \*).

Вернемся от выводов к истокам теории. Современная физика включает в себя как огромное завоевание XX века зарядовую симметрию, т. е. симметрию свойств (массы, абсолютной величины заряда, времени жизни — для нестабильных) частиц и античастиц. Но эволюция любой системы определяется не только законами физики (которые включают зарядовую симметрию), но и начальными условиями. Законы физики — это законы движения, эволюции. Закон выбора начальных условий в космологии (пока) не известен. Значит, несимметричная (избыток барионов) или симметричная Вселенная априори одинаково совместимы с законами физики \*\*).

Особое направление зарядово-симметричной теории развивает Омнес (см. гл. 7); возможно, хотя и не доказано, что плазма с большим равновесным содержанием барионов и антибарионов спонтанно распадается на две фазы, с избытком  $\bar{B}$  и с избытком  $B$ . Первоначально размеры соответствующих областей малы, но затем они увеличиваются. Дискутируется вопрос о том, удастся ли так объяснить наблюдаемую структуру (§ 3 гл. 23). Если разделение фаз реально, оно скажется и в эволюции несимметричного мира.

Еще один аспект вопроса о зарядовой симметрии связан с предшествующим вопросом об энтропийных флуктуациях. Пока мы рассматриваем плазму, состоящую из фотонов и барионов, естественно сделать предположение, что где-то барионов больше, где-то меньше (концентрация фотонов быстро выравнивается), но везде плотность барионов отлична от нуля и уж, конечно, положительна.

\*) Нетрудно объяснить появление значительной общей плотности излучения; однако нет условий для установления термодинамического равновесия. Трудность состоит в объяснении спектра реликтового излучения.

\*\*) В 1964 г. было показано экспериментально, что зарядовая симметрия не точна: есть так называемое сверхслабое взаимодействие, нарушающее эту симметрию; подробнее см. об этом в разделе V.

Но когда мы обращаемся к периоду  $t < 10^{-6}$  сек,  $T \geq M_p c^2$ , когда много барионов и антибарионов — в среднем  $B : \bar{B} = 1,00000001$ , взгляды меняются.

Для того чтобы образовались шаровые скопления (или сверхзвезды?) с массой порядка  $10^6 M_\odot$ , нужно, согласно § 8 этой главы, чтобы барионный заряд имел в этом масштабе флуктуации порядка 1%. Но в пересчете на состояние в момент, когда много пар  $B, \bar{B}$ , это означает флуктуации в отношении  $B : \bar{B}$  в пределах  $1,0000000099—1,0000000101$ .

В действительности само среднее отношение (его отклонение от единицы, принятое выше равным  $10^{-6}$ ) мы знаем с плохой точностью: возможно, что оно в несколько раз больше или меньше, но отношение флуктуаций к избытку, нужное для возникновения скоплений, правильно отражено приведенными числами.

Отметим сразу, что эти флуктуации гигантски велики по сравнению со «статистическим»  $1/\sqrt{N}$ . В самом деле,  $M = 10^6 M_\odot$  соответствует  $10^{63}$  барионов,  $1/\sqrt{N} = 3 \cdot 10^{-32}$ , а в теории флуктуаций мы оперируем  $\frac{\Delta B}{B} \sim 10^{-10}$  до аннигиляции и  $\frac{\Delta B}{B} \sim 10^{-2}$  после аннигиляции.

Хотя флуктуации и не «статистичны», можно полагать, что чем меньше масштаб, тем больше флуктуации. Тогда не исключено и предположение, что в каком-то масштабе флуктуации «перехлестывают» средний избыток  $10^{-6}$  — получается, например,  $0,99999997 < B : \bar{B} < 1,00000005$ . Но это означает, что по окончании аннигиляции возникают области антивещества и вещества ( $\bar{B} : \gamma \sim 3 \cdot 10^{-8}$  и  $B : \gamma \sim 5 \cdot 10^{-8}$ ).

Итак, гипотеза энтропийных флуктуаций (§ 8 этой главы) естественно смыкается с гипотезой зарядовой симметрии в главном предсказании о возможности существования областей антивещества. Далее нужно конкретно рассматривать аннигиляцию этих областей, зависящую от диффузного взаимопроникновения, выделения энергии в этом процессе и его физические проявления.

Однако все эти вопросы будут рассмотрены не в связи с теорией галактик, а позже, в гл. 15, посвященной исследованиям возмущений по их влиянию на реликтовое излучение.

Эти исследования не дали указаний на процесс аннигиляции. Существует ли концепция, в которой энтропийные флуктуации автоматически подчинены условию отсутствия антивещества? Предположим, что в момент сингулярности вещество было холодным и на 100% зарядово-несимметричным — состояло из одних барионов \*). Предположим, далее, что огромная энтропия, наблюдаемая

\*) См. Зельдович (1972а, 1973б) и § 9 гл. 23.

в настоящее время, есть следствие каких-то физических процессов \*). При наборе энтропии могут появиться и антибарионы, но обязательно парами,  $B + \bar{B}$ ; гарантирован избыток барионов и отсутствие областей с антивеществом.

4) *Вихревая (турбулентная) теория*. Истоки этой теории восходят к космогонии Солнечной системы (гипотеза Канта — Лапласа): для объяснения вращения планет и самого Солнца в одной плоскости и в одном направлении предполагается, что все возникло из одного вращающегося облака газа.

Гамов (1952, 1954) полагал, что Вселенная не только горячая, но и турбулентная; Вейцекер (1951) развивал турбулентную теорию Солнечной системы, а затем и турбулентную теорию Вселенной.

На современном уровне с учетом (не подвергаемой сомнению) концепции горячей Вселенной вихревую теорию развивают Озерной, Чернин, Чибисов, Нарин, Томита, Силк и другие.

Предполагается, что в эпоху преобладания излучения плазма находится в состоянии вихревого турбулентного движения, на которое накладывается общее космологическое расширение. Поскольку на этой стадии фотоны являются главной компонентой плазмы (не только по числу частиц, но и по плотности массы), говорят о «фотонных вихрях» [см. Озерной и Чернин (1967)].

Подробно, с формулами и числами, вихревая теория будет рассмотрена позже (§ 9; трудности этой теории рассмотрены в § 10), здесь будет дана лишь самая общая характеристика ее. Предполагается, что перед рекомбинацией плазма (протоны, электроны и фотоны) находится в движении. В первом приближении движение рассматривается как движение несжимаемой среды, изменения плотности считаются малыми. Движение предполагается хаотическим; в таком случае при отсутствии общего упорядоченного движения оно (движение) должно быть вихревым. Считается в последнем варианте теории, что скорость движения значительно меньше скорости света и скорости звука в плазме ( $V_{\text{вихр}}$  порядка 0,1—0,05  $c$ ). Максимальный масштаб движения значительно меньше «горизонта» на момент рекомбинации.

Авторы теории турбулентности предсказывают определенный спектр для установившегося движения: условие установления связывает масштаб, скорость движения и время установления. Задание максимального масштаба  $L$  установившейся турбулентности определяет картину движения. Теория турбулентности дает скорость в масштабах меньше  $L$ , причем учитывается и фотонная вязкость. В масштабах, больших  $L$ , предполагается падающий спектр. Предполагается, как уже отмечалось выше, что турбулентность на

---

\*) Такую точку зрения высказали Лайзер и Хайвел (1973). Предлагаемый ими механизм кажется нам спорным. Рис (1972) рассматривает набор энтропии в результате затухания вихревых движений (см. далее в этом параграфе).

стадии преобладания излучения — дозвуковая. Это значит, что давление излучения препятствует отклонению плотности от средней.

Дадим наглядную оценку флуктуаций давления и плотности: движущиеся навстречу объемы жидкости создают разности давления порядка  $\Delta P = \rho u^2$ , малые по сравнению с  $P = \rho b^2$  ( $b$  — скорость звука), соответственно  $\frac{\Delta P}{P} \sim \frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \frac{u^2}{b^2} \ll 1$  — происходит растекание и дробление потоков, движение почти не отличается от движения несжимаемой жидкости. Когда наступает рекомбинация, давление выключается, скорость звука обращается в нуль. Движение продолжается по инерции, с распределением скоростей, унаследованным от предыдущей стадии. При этом движение «несжимаемо» лишь в первый момент после рекомбинации. Свойство несжимаемости не является сохраняющимся. При движении по инерции с течением времени происходят столкновения облаков газа, их нагрев за счет сжатия и ударных волн и последующее охлаждение. Вступает в действие тяготение, области повышенной плотности (если не все, то большая часть) превращаются в гравитационно связанные объекты. Важнейшая особенность вихревой теории заключается в том, что вращение и галактик и скоплений галактик унаследовано от начального вихревого движения плазмы до рекомбинации; наличие вращения не нуждается в специальном механизме.

Авторы вихревой теории утверждают, что наблюдаемые закономерности, касающиеся плотности, момента вращения и масс галактик и скоплений галактик, хорошо согласуются с вычислениями.

Каковы трудности теории? Коснемся их уже здесь, подробнее о некоторых из них см. в § 10. Начнем с прошлого, т. е. рассмотрим состояние плазмы задолго до рекомбинации. На стадии преобладания излучения ( $P = \epsilon/3$ ) скорость вихревого движения не меняется в ходе расширения. Она все время может оставаться малой по сравнению со скоростью звука ( $b = c/\sqrt{3}$ ) и скоростью света. Казалось бы,  $u/c$  есть мера отклонения от невозмущенной модели. Но, как мы видели в § 4 гл. 11, в действительности, с учетом ОТО, возмущения метрики зависят не только от  $u/c$ , но и от отношения масштаба к горизонту,  $L/ct$ . Вихревая теория несовместима с конечными и тем более с малыми возмущениями модели Фридмана; см. подробно Зельдович, Новиков (1970).

Является ли это трудностью или недостатком вихревой теории? Должны ли мы догматически отбрасывать возможность нефридмановского начала космологического расширения, приводящего к вихревым возмущениям? Сегодня ответ на этот вопрос в сильной степени субъективен: нет детальной космологической модели, соответствующей вихревой теории и прослеживающей эволюцию турбулентно движущейся плазмы от сингулярности до рекомбинации. Недостаточно сказать, что сингулярность «не фридмановская»;

авторы вихревой теории должны дать позитивный ответ: какая сингулярность нужна, с какими свойствами и выводами относительно, например, распространенности гелия-4, количества нейтрино, величины энтропии.

Интересна попытка совместить вихревое движение вещества с отсутствием возмущений метрики за счет встречного потока гравитонов (нулевые вихри) — Чибисов (1975). Наконец, может быть, самым существенным является рождение частиц в анизотропной сингулярности (см. гл. 23, § 4). Этот процесс уничтожает анизотропию, а следовательно и вихрь! Возможно, что квантовая теория сингулярности (еще не завершенная) исключит первичное вихревое движение.

Вихревая теория сталкивается также с конкретными трудностями, касающимися процессов после рекомбинации (Пиблс (1971б)<sup>1</sup>). Вкратце суть их сводится к тому, что большие вихревые скорости должны привести к образованию гравитационно связанных объектов на очень ранней стадии ( $z \approx 130$ , по первоначальной оценке Озерного, или в несколько раз меньше, согласно более поздним оценкам).

Сильная теплоотдача в этот период приводит к большой плотности образующихся объектов; сверхзвуковая турбулентность затухает чрезвычайно быстро и не способна препятствовать сжатию. Отсутствие заметных возмущений реликтового излучения (его спектра, его изотропии) \*) и сравнительно малая плотность скоплений галактик — все это заставляет авторов вихревой теории модифицировать ее количественно, в сторону уменьшения начальной скорости вихревых возмущений в периоде преобладания излучения. В конце концов количественные изменения меняют картину явления качественно. Малые вихревые скорости, которые приводили бы к позднему образованию объектов, в действительности работают в две стадии: они дают вначале малые возмущения плотности, которые затем подхватываются гравитационной неустойчивостью, т. е. за счет гравитации создают потенциальное движение, но в этом случае вихревая компонента может оказаться недостаточной для объяснения вращения.

Для вихревой теории характерны скорости движения плазмы, значительно превышающие скорости движения в адиабатической теории на тот же момент рекомбинации. В вихревой теории в первых вариантах предполагалось раннее образование протоскоплений, при  $z_1 \approx 130$  (а в адиабатической теории обычно предполагают  $z_1 \approx 5$ ). Но даже в предположении равного с адиабатической теорией малого  $z_1$ , т. е. в теории слабой турбулентности, начальные ско-

---

\*) Впрочем, изотропию реликтового излучения авторы вихревой теории объясняют рассеянием в газе после его вторичной ионизации, сопровождающей образование галактик.

рости должны быть в несколько раз больше в вихревой теории по сравнению с адиабатической. По этому параметру турбулентную теорию трудно согласовать с наблюдениями реликтового излучения. Большие скорости ведут к большим  $\frac{\Delta T}{T}$  реликтового излучения.

Приходится прибегать к предположению о рассеянии реликтового излучения ионизованным газом. Но для этого нужна большая оптическая толща:  $\tau \approx 4$ , газ должен быть ионизован рано, при  $z \approx 50$ . Возможна ли такая ранняя вторичная ионизация газа какими-то источниками энергии? Независимых соображений в пользу этого нет. Конкретные цифры, иллюстрирующие эту серьезную трудность, будут даны в § 10 этой главы.

Для оценки вихревой теории безразлично состояние других, конкурирующих точек зрения. Особенно важно объяснить наблюдаемое вращение галактик в теориях адиабатических и энтропийных возмущений без привлечения изначального вихревого движения на стадии преобладания излучения. Если бы в других теориях (помимо вихревой) вращение галактик не получало естественного объяснения, то это бы говорило за то, что в вихревой теории, непринужденно объясняющей вращение галактик, есть рациональное зерно. Но мы уже говорили, что работы Дорошкевича (1973), Пиблса (1967а, 1969а) дали объяснение вращения галактик в адиабатической теории.

Обзор различных теорий мы начали с того, что выбор между теориями еще не сделан, разработка теорий и дискуссии продолжаются. Вышеизложенное только иллюстрирует и конкретизирует этот тезис. Параграф 10 этой главы будет посвящен сравнению различных теорий после их подробного изложения.

## § 2. Адиабатические возмущения. Предпосылки

Мы начнем с изложения теории происхождения галактик из адиабатических возмущений. Наиболее современный обзор состояния этой теории дан в докладе Дорошкевича, Сюняева, Зельдовича (1973).

Ниже рассматривается развитие возмущений после рекомбинации ( $z < 1400$ ); рассмотрение доводится до стадии образования гравитационно связанных обособленных масс, т. е., предположительно, протоскоплений галактик.

Таким образом, рассмотрение захватывает период, когда возмущения нельзя уже считать малыми и линейная теория малых возмущений неприменима.

Формально можно было бы задаться произвольным начальным распределением плотности и скорости нейтрального газа после рекомбинации и исследовать — аналитически или численно — дальнейшую судьбу и эволюцию газа.

Однако в действительности очень важно поставить более узкую задачу и ограничиться возмущениями, получающимися из начальных адиабатических возмущений. Это составляет содержание «адиабатической теории». Такое ограничение позволит развить приближенную теорию процесса, применяя соображения о нелинейных стадиях эволюции, развитые в предыдущей главе.

Свойства адиабатических возмущений, которые используются в дальнейшем, следующие

1) Движение является потенциальным, вихрь скорости равен нулю в начальный момент и, следовательно, остается равным нулю и дальше, до момента образования ударной волны.

2) Начальные возмущения в момент рекомбинации малы. После рекомбинации следует продолжительный период, когда возмущения малы и справедлива линейная теория.

В линейной теории можно выделить затухающие и растущие возмущения. Начальная их амплитуда одного порядка, за длительный период затухающие возмущения практически исчезнут. Движение, которое предстоит продлить в нелинейную область, является растущим возмущением со всеми вытекающими отсюда следствиями: в частности, растущее движение является безвихревым.

3) Линейная теория применима к периоду до рекомбинации. Естественно предположить, что на ранней стадии амплитуда возмущений была более или менее плавной функцией длины волны.

Интервал длин волн, важный для образования галактик, не широк. В этом интервале, вероятно, можно задаться степенной зависимостью амплитуды от длины волны:

$$A_k \sim k^r, \quad \sqrt{\Delta(M)} \sim M^{-\nu}. \quad (14.2.1)$$

Здесь  $\Delta(M)$  есть величина, введенная в § 2 гл. 12, так что показатели  $r$  и  $\nu$  связаны между собой:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{A_k^2 k^3} \sim k^{\frac{2r+3}{2}} \sim M^{-\frac{1}{2} - \frac{r}{3}}, \quad \nu = \frac{1}{2} + \frac{r}{3}. \quad (14.2.2)$$

Затухание, связанное с диссипативными процессами, приводит к глубокому изменению вида спектра. Обобщенно функцию затухания можно записать в виде

$$e^{-ak} \sim e^{-R_c/R} \sim e^{-(M_c/M)^{1/3}}, \quad (14.2.3)$$

где  $M_c$  порядка  $10^{13} M_\odot$  (см. гл. 10, § 2),  $R_c \approx \left(\frac{M_c}{\rho}\right)^{1/3}$ .

Точный вид функции не так важен — дело сводится к тому, что затухают волны, соответствующие  $M < M_c$ , и не изменяются волны с  $M > M_c$ .



4) После рекомбинации происходит перестройка движения; возникающие растущие возмущения характеризуются амплитудой

$$\sqrt{\Delta(M)} = M^{-n} e^{-(M/M_c)^{1/2}}, \quad n = \nu + \frac{1}{3}^* \quad (14.2.4)$$

5) После рекомбинации можно пренебречь давлением нейтрального газа при рассмотрении эволюции возмущений. Основанием является тот факт, что  $M_c \gg M_{\text{дж}}$  — джинсовской массы нейтрального газа (см. ниже § 3). Благодаря этому применима приближенная теория роста возмущений в пылевидной среде, изложенная в § 2 гл. 13.

Обратимся к картине движения, вытекающей из пунктов 1)—5).

В приближенной теории было выяснено, что с течением времени возникают области бесконечной плотности. После возникновения такой области ближайшие частицы газа наталкиваются на плотный газ и останавливаются. Ниже мы рассмотрим подробнее движение газа, его нагревание ударной волной и дальнейшую судьбу сжатого газа.

### § 3. Ударная волна

Обратимся к приближенному решению, описывающему образование «блинов» в ходе роста неоднородностей плотности (§ 2 гл. 13). Величина  $\alpha$  [см. формулу (13.2.4)] определяет момент, когда плотность формально достигнет бесконечности, по условию

$$\alpha(s) \frac{b}{a} = 1. \quad (14.3.1)$$

Рассмотрим частицу, в которой  $\alpha$  максимально,  $\alpha = \alpha_{\text{max}}$ . Обозначим ее лагранжеву координату  $s_m$ . Достаточно локального максимума, т. е. того, что  $\alpha(s_m)$  больше, чем в соседних точках, хотя где-то вдали могут существовать и другие максимумы, часть которых выше  $\alpha_{\text{max}}$ .

Вблизи  $s_m$  можно разложить  $\alpha$  как функцию  $s$  в ряд:

$$\alpha = \alpha_{\text{max}} + A_{ik}(s_i - s_{mi})(s_k - s_{mk}) + \dots \quad (14.3.2)$$

---

\*) Отвлекаемся от модуляции амплитуды возмущений (см. гл. 10, § 6), т. е. рассматриваем амплитуду, усредненную по не слишком малому интервалу  $\Delta M$ . Формула справедлива для  $M > M_2 \approx 10^{17} M_{\odot}$ , т. е. для флуктуаций, которые проходят стадию акустических колебаний до рекомбинации. Отличие  $n$  от  $\nu$  связано с тем, что  $\delta\rho$  в растущей моде после рекомбинации пропорционально  $ut/l$ , где  $u$  — скорость вещества в акустической волне до рекомбинации и  $l \sim M^{1/2}$ . Наконец, напомним, что  $A_k$  есть фурье-амплитуда возмущения плотности в акустическом режиме до затухания (в частности, на нижней границе области устойчивости, рис. 43). Эта амплитуда и численно (по порядку величины) и по зависимости от волнового вектора совпадает с амплитудой скалярного возмущения метрики, не зависящей от времени на всем протяжении от сингулярности до области устойчивости. Вероятным представляется  $\nu=0$ ,  $n=1/3$ ,  $r=-3/2$  (см. ниже); однако не исключены и другие значения  $\nu$ ,  $n$ ,  $r$ .

Члены первого порядка ( $s - s_m$ ) отсутствуют потому, что в частице  $s_m$  величина  $\alpha$  максимальна. По той же причине следующий квадратичный член везде отрицателен. Поверхности с постоянным  $\alpha$  представляют собой эллипсоиды с частицей  $s_m$  в центре. Из соображений размерности следует, что  $|A_{ik}| \sim \frac{\alpha_m}{R_c^2}$ , где  $R_c$  — характерный размер — длина волны возмущений, избегающих затухания в период до рекомбинации.

В определенный момент  $t_c$ , подчиняющийся условию  $\frac{\alpha_m b(t_c)}{a(t_c)} = 1$ , впервые в частице  $s_m$  возникает бесконечная плотность. Затем сжимается вещество со все меньшим и меньшим значением  $\alpha$ . Нетрудно убедиться, что все три оси эллипсоида, в котором достигнуто условие  $\alpha(s) \frac{b(t_c)}{a(t_c)} = 1$ , по порядку величины равны

$$r \sim R_c \sqrt{\frac{t - t_c}{t_c}}; \quad (14.3.3)$$

масса вещества в эллипсоиде растет пропорционально  $(t - t_c)^{3/2}$ .

Но эллипсоид имеет три (по порядку величины) одинаковых оси только в  $s$ -пространстве (в лагранжевых координатах). В действительности в эйлеровых координатах (в  $r$ -пространстве) эллипсоид сжат в том направлении, в котором деформация происходит всего быстрее. Это направление, вдоль которого скорость деформации дана величиной  $\alpha_m$  (причем  $\alpha > \beta > \gamma$ , см. гл. 13, § 2).

Направление  $\alpha_m$  может и не совпадать ни с одной осью эллипсоида.

Переход от лагранжевых координат к эйлеровым сопровождается сжатием эллипсоида. При сжатии эллипсоида по любому направлению получается (в том приближении, в котором  $\rho = \infty$ ) плоская фигура — эллипс, которую мы называем «блином».

На каждом элементе поверхности «блина» сжатие происходит независимо от того, как развиваются события на соседних элементах, потому что все градиенты в направлении нормали гораздо больше градиентов в плоскости «блина». Поэтому целый ряд локальных характеристик — законы изменения давления, плотности, температуры — можно рассматривать в одномерном приближении; см. Зельдович (1970б), Сюняев, Зельдович (1972б).

Рассмотрим одномерную картину сжатия вещества в «блин». Общее решение одномерной задачи выписано в § 2 гл. 13. Здесь мы только предположим, что возмущение задается в виде одной синусоидальной волны и  $\Omega = 1$ . Решение тогда перепишем в виде

$$r = a_0 t^{2/3} s - \frac{\kappa}{\kappa} b_0 t^{1/3} \sin(\kappa s), \quad (14.3.4)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} x &= a_0 t^{2/3} s_x - b_0 t^{4/3} \sin(\kappa s_x), \\ y &= a_0 t^{2/3} s_y, \quad z = a_0 t^{2/3} s_z. \end{aligned} \right\} \quad (14.3.5)$$

Для плотности получаем выражение

$$\rho = \bar{\rho} \left[ 1 - \frac{\kappa b_0}{a_0} t^{2/3} \cos(\kappa s_x) \right]^{-1}, \quad \bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (14.3.6)$$

Итак, впервые плотность обращается в бесконечность в плоскости \*)  $s_x=0$ ,  $x=0$  в момент  $t_c = \left(\frac{a_0}{\kappa b_0}\right)^{3/2}$ . Соответствующее значение красного смещения  $z$  назовем  $z_c$  (далее везде в этом параграфе  $z$  — красное смещение, не путать с координатой  $z$ ). Для упрощения везде вместо  $z+1$  будем писать просто  $z$  (при  $z \sim 3-5$  читатель сам легко внесет поправку). С учетом этого  $\frac{z}{z_c} = \left(\frac{t_c}{t}\right)^{3/2}$ .

При  $t > t_c$  возникают две ударные волны, распространяющиеся симметрично от начала. Сперва рассмотрим случай мгновенного охлаждения сжатого газа. В этой ситуации плотность его бесконечна, поверхность ударной волны не отходит от плоскости  $x=0$ .

Найдем закон, по которому растет количество сжатого вещества и давление ударной волны. Ударная волна и сжатое вещество расположены при  $x=0$ , откуда

$$\frac{\sin \kappa s_x}{\kappa s_x} = \left(\frac{t_c}{t}\right)^{3/2} = \frac{z}{z_c}. \quad (14.3.7)$$

Это уравнение имеет нетривиальное ( $s_x \neq 0$ ) решение при  $t > t_c$ ,  $z < z_c$ . Удобно ввести величину  $\mu = \frac{\kappa s_x}{\pi}$ . Эта величина, являющаяся разновидностью лагранжевой координаты, есть отношение массы, заключенной между началом  $s_x=0$  и данным  $s_x$ , к полной массе в половине ячейки периодичности. Получим

$$\frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} = \frac{z}{z_c}. \quad (14.3.8)$$

При  $\mu \ll 1$  отсюда \*\*)

$$1 - \frac{1}{6} (\pi \mu)^2 = \frac{z}{z_c}, \quad \mu = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{z}{z_c}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{t}{t_c} - 1}. \quad (14.3.9)$$

\*) В дальнейшем все изложение ведется для одной ячейки периодичности  $-\frac{\pi}{\kappa} < s_x < \frac{\pi}{\kappa}$ , также  $(2n-1)\frac{\pi}{\kappa} \leq s_x \leq (2n+1)\frac{\pi}{\kappa}$ .

\*\*) Закон зависимости массы сжатого газа от времени  $\mu \sim \sqrt{t - t_c}$  отличается от найденного ранее общего закона  $m \sim (t - t_c)^{3/2}$  вследствие того, что здесь рассматривается вырожденный случай одновременного образования ударной волны по всей плоскости  $x=0$ . В общем случае количество вещества в каждой точке поверхности «блина» пропорционально  $\sqrt{t - t_c}$ , но в различных точках различно значение  $t_c$ .

Далее,  $\mu = \frac{1}{2}$  при  $z = \frac{2}{\pi} z_c$ . В сделанных предположениях за бесконечное время  $t \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow 0$  все вещество проходит через волну ( $\mu \rightarrow 1$ ), но лишь асимптотически.

Нужно особенно отметить, что ударному сжатию подвергается вещество, которое еще не успело достичь бесконечной плотности за счет сближения соседних слоев, и даже то вещество, которое расширяется до попадания в ударную волну. Приводим таблицу, характеризующую динамику сжатия в сделанном приближении.

ТАБЛИЦА XI

Доля вещества, прошедшая через ударную волну

|         |   |       |       |      |      |     |          |
|---------|---|-------|-------|------|------|-----|----------|
| $t/t_c$ | 1 | 1,025 | 1,33  | 1,96 | 6,1  | 28  | $\infty$ |
| $z/z_c$ | 1 | 0,983 | 0,83  | 0,64 | 0,30 | 0,1 | 0        |
| $\mu$   | 0 | 0,1   | 0,333 | 0,5  | 0,76 | 0,9 | 1        |

Найдем скорость, с которой вещество сталкивается с ударной волной, плотность вещества перед ударом и возникающее давление. Несложный расчет дает

$$\left. \begin{aligned} |u| &= \frac{\lambda_c}{t_c} \frac{1}{3\pi} \sqrt{\pi\mu \sin \pi\mu}, \\ \rho &= \rho_c^* \frac{\sin^3 \pi\mu \operatorname{tg} \pi\mu}{(\pi\mu)^3 (\operatorname{tg} \pi\mu - \pi\mu)}, \\ P &= \rho u^2 = \rho_c^* \left( \frac{\lambda_c}{t_c} \right)^2 \frac{\sin^4 \pi\mu \operatorname{tg} \pi\mu}{9\pi^2 (\operatorname{tg} \pi\mu - \pi\mu) (\pi\mu)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (14.3.10)$$

Здесь введено обозначение  $\lambda_c = 2\pi a_0 t_c^{2/3} / \kappa$ , т. е.  $\lambda_c$  — это длина волны возмущения в характерный момент  $t_c$ ;  $\rho_c^* = (6\pi G t_c^2)^{-1}$  — средняя плотность в этот момент.

Характерной особенностью приведенных выше формул является поведение описываемых ими величин при малых  $\mu$  (при малых  $t - t_c$ , малых  $z_c - z$ ) вскоре после образования ударной волны:

$$\left. \begin{aligned} u &\sim \mu \sim \sqrt{t - t_c} \sim \sqrt{z_c - z}, \\ \rho &\sim \mu^{-2} \sim (t - t_c)^{-1} \sim (z_c - z)^{-1}, \\ P &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (14.3.11)$$

Это не значит, что давление строго постоянно, его производная вовсе не равна нулю. Важно, что нет степенной зависимости давления от  $\mu$ , давление не равно нулю и не равно бесконечности в начальной стадии. С течением времени давление уменьшается и

$$P\left(\mu = \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3\pi^2} P(\mu = 0) = 0,134 P(\mu = 0). \quad (14.3.12)$$

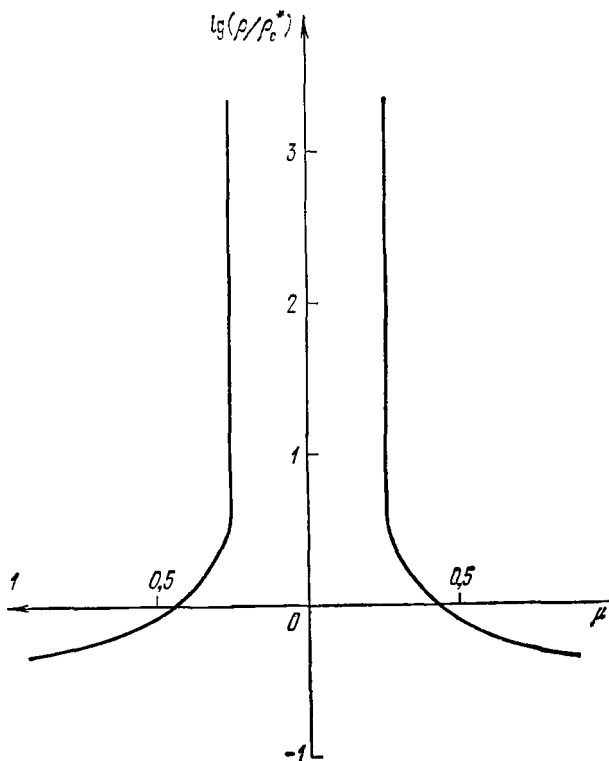


Рис. 47. Распределение плотности в предположении быстрого охлаждения в момент, когда ударная волна достигла координаты  $\mu=0,25$ . В эйлеровых координатах область  $\rho=\infty$  стягивается в точку.

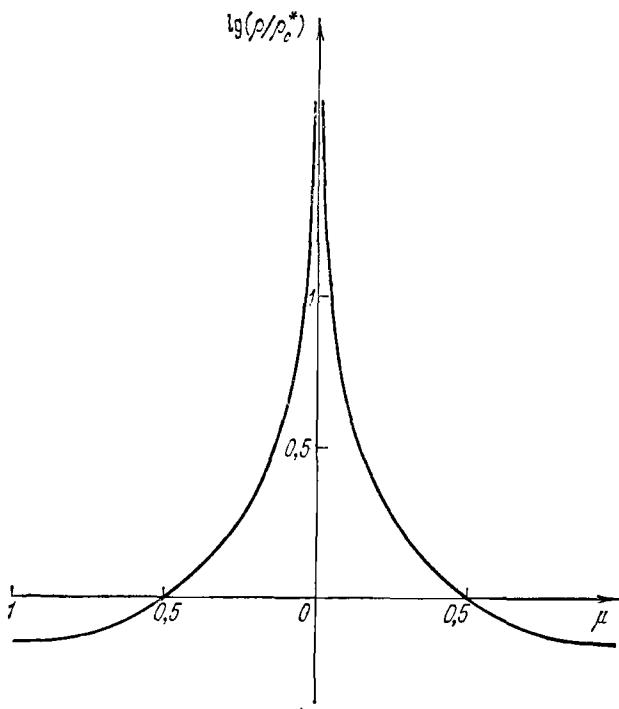


Рис. 46. Распределение плотности в момент  $t=t_c$ . По оси абсцисс отложено  $\mu$ , по оси ординат  $\lg(\rho/\rho_c^*)$ . В точке  $\mu=0$  плотность бесконечна [см. формулу (14.3.6)].

Теперь рассмотрим противоположный предельный случай другого теплового режима — полное отсутствие теплоотдачи.

Картина движения после появления волны уже не может быть построена элементарно, без численного расчета, даже в сделанных выше упрощающих предположениях. Просто можно найти лишь асимптотику начала сжатия,  $\mu \ll 1$ . По-прежнему давление имеет определенное предельное значение, которое, однако, меньше, чем в первом случае в  $\frac{11}{12} = 0,92$  раза; в  $\sqrt{\frac{11}{9}} = 1,1$  раза больше количество вещества, сжатого ударной волной, на тот же момент времени, так как волна теперь отделяется от плоскости  $x=0$  и идет навстречу падающему веществу.

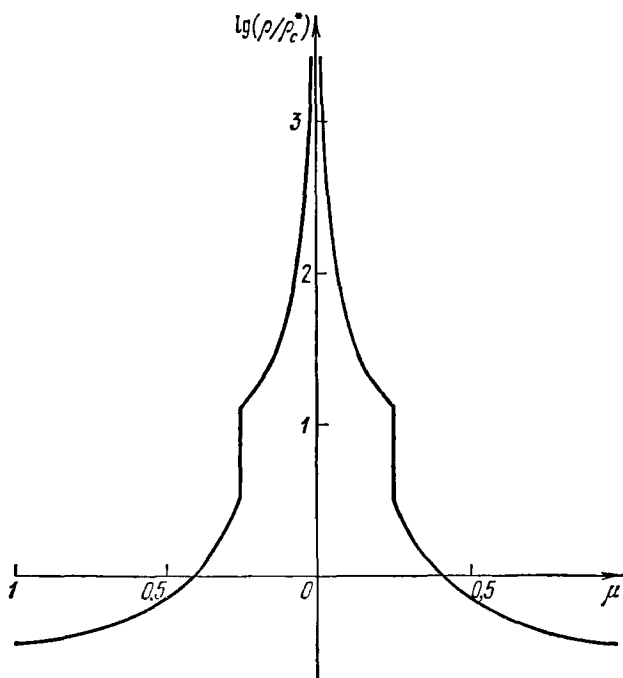


Рис. 48. Распределение плотности в адиабатическом варианте в момент достижения ударной волной координаты  $\mu=0,25$ . Без охлаждения, в адиабатическом случае, плотность после сжатия не обращается в бесконечность.

Средняя плотность сжатого вещества в 12 раз больше плотности вещества перед фронтом волны. На рис. 46 показано распределение плотности в момент  $t_c$ , т. е. как раз в момент достижения  $\rho=\infty$  в плоскости  $x=0$ . На рис. 47 и 48 показано распределение плотности в момент  $t = \frac{7}{6} t_c$ , когда сконденсировалась приблизительно

четверть вещества. При этом рис. 47 относится к случаю быстрого охлаждения, а рис. 48 — к адиабатическому случаю.

Уже упоминалась характерная особенность адиабатического случая, а именно отрыв волны от плоскости симметрии. Вначале (при  $\mu \ll 1$ ) путь, пройденный волной, мал, притом мал не только по сравнению с размером ячейки периодичности, но и по сравнению с расстоянием, составляющим долю  $\mu$  от половины ячейки.

В самом деле, средняя плотность за фронтом (т. е. плотность сжатого вещества) равна  $\rho_{\text{сж}} = \bar{\rho} \frac{33}{(\pi\mu)^2}$ . Значит, толщина слоя, отнесенная к размеру ячейки периодичности (к расстоянию между соседними сжатыми слоями), равна

$$\alpha^* = \frac{2x}{\lambda_c} = \frac{\mu \bar{\rho}}{\rho_{\text{сж}}} = \frac{\mu^3 \pi^2}{33}. \quad (14.3.13)$$

Из этих формул получим, что, когда доля вещества, сжатого ударной волной, равна 10% ( $\mu=0,1$ ), это вещество занимает долю объема  $\alpha^*=3 \cdot 10^{-4}$ ; это значит, что его плотность в 300 раз больше средней. Для 30% ( $\mu=0,31$ ) получим соответственно  $\alpha^*=10^{-2}$ ,  $\rho_{\text{сж}}/\bar{\rho}=30$ .

Подчеркнем, что расчет проделан в предположении строгой адиабатичности, без учета потерь тепла. Истинный объем  $\alpha$  (при данном типе возмущения) может быть только меньше, а плотность — больше приведенных величин.

По мере дальнейшего хода процесса включается взаимное притяжение слоев сжатого вещества.

Давление на фронте ударной волны создается за счет потока количества движения падающего вещества. Давление в средней плоскости между двумя волнами (при  $x=0$ ) в рассматриваемом случае больше давления ударной волны на величину гравитационного давления, равного

$$P_g = \frac{\pi}{2} G \sigma^2, \quad (14.3.14)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность ( $g/cm^2$ ) всего слоя (от  $-\mu$  до  $+\mu$ , с учетом вещества слева и справа от начала координат).

По мере увеличения количества сжатого вещества увеличивается отношение гравитационного давления к давлению ударной волны.

Численные расчеты Дорошкевича и Шандарина (1973) показывают, что при  $t \sim 4t_c$  процесс практически замирает, сжатое вещество удерживается тяготением, падение вещества приостанавливается. Понадобилось бы нереально большое время для того, чтобы волна сжала все вещество, а между тем в сжатом веществе начинаются новые процессы излучения, рождения звезд и т. д., не учтенные в схематической картине одномерного сжатия.



## § 4. Тепловой режим сжатого газа

В адиабатическом приближении температура газа, сжатого на фронте волны, дается выражением

$$T = 2,5 \cdot 10^6 z_c \mu^2 \left( \frac{M}{10^{13} M_\odot} \right)^{2/3} \text{°K} \quad (14.4.1)$$

для малых  $\mu$ . Численное значение приведено для синусоидальной волны, начальной температуры, в точности равной нулю, и полного отсутствия теплоотдачи. Теплоемкость взята, как у полностью ионизованного водорода, пренебрегаем энергией ионизации, эквивалентной  $158\,000^\circ\text{K}$ . В этих предположениях, вероятно, точность формулы порядка  $\mu$  или  $\mu^{2*}$ ), температура убывает не только во вновь сжимающихся слоях, но и в ранее сжатом веществе в силу адиабатического расширения. Температура вычислена в предположении быстрого обмена энергией между ионами и электронами.

Будем теперь последовательно отказываться от упрощающих предположений и строить более реалистическую картину распределения температуры и термического режима сжатого газа. В духе метода последовательных приближений давление возьмем то, которое получалось ранее, в адиабатической картине.

Прежде всего отметим, что в исходном, невозмущенном газе давление и температура отличались от нуля. Поэтому при плавном сжатии до заданного давления этот газ сожмется до конечной плотности и, соответственно, приобретет конечную температуру.

Рассматривая тепловой режим однородной Вселенной, мы нашли (гл. 8, § 2), что теплообмен вещества и излучения эффективно прекращается примерно при  $z=200$ ,  $T=540^\circ\text{K}$ ,  $\rho=0,8 \cdot 10^{-22} \text{ г/см}^3$  (все для  $\Omega=1$ ). В дальнейшем — происходит ли монотонное расширение или расширение, которое сменяется плавным сжатием, — давление, температура и плотность связаны адиабатой (изэнтропой) одноатомного газа  $\rho \sim P^{3/5}$ ,  $T \sim P^{2/5}$ . В частности, в невозмущенном газе при  $z=5$  (точнее,  $z+1=5$ ) получим  $T = 540 \left( \frac{5}{200} \right)^2 = 0,34^\circ\text{K}$ , в то время как температура излучения равна  $14^\circ\text{K}$ . При сжатии до  $P=1,44 \cdot 10^{-12} \text{ бар}$ , что примерно соответствует давлению в «блине» с  $M=10^{13} M_\odot$  при  $z_c=5$ , получим  $T=376^\circ\text{K}$ ,  $\rho_m=0,46 \cdot 10^{-22} \text{ г/см}^3$ . Эту величину можно сравнить со средней плотностью в тот же момент,  $\sim 10^{-27} \text{ г/см}^3$ .

Грубо можно считать, что плотность равна  $\rho_m=4,6 \cdot 10^{-23} \text{ г/см}^3$  там, где по расчету с нулевой температурой плотность была бы больше, чем  $\rho_m$ . Так мы получим толщину слоя, в котором  $\rho=\rho_m$ , т. е. толщину адиабатически сжатого слоя.

\*) Т. е. есть поправки — множители вида

$$[1+f_1(\alpha, \beta, \gamma)\mu+f_2(\alpha, \beta, \gamma)\mu^2+\dots].$$

За фронтом  $\frac{p}{\rho} = \mu^{-2}$  (см. предыдущий параграф). Приравнивая  $\mu^{-2} = 4,6 \cdot 10^{-23} / 1,2 \cdot 10^{-27} = 3,3 \cdot 10^4$ , получим  $\mu \approx 0,005$ . Такой же результат получится, если найти распределение температуры в приближении  $T_0 = 0$ , затем считать, что температура ниже адиабатической при данном давлении невозможна, и на этом основании заменить часть кривой  $T = T(\mu)$  на  $T = \text{const} = T_{\text{адиабат}}$ .

Следующий этап заключается в учете тепловых потерь. Тепловое излучение единицы объема при свободно-свободных переходах дается выражением

$$W_{\text{эрг/см}^3 \cdot \text{сек}} = 1,4 \cdot 10^{-27} n_e^2 \sqrt{T}; \quad (14.4.2)$$

$n_e$  — концентрация электронов.

В сжатом газе излучение энергии происходит при постоянном давлении. Поэтому нужно приравнять

$$W = -C_P \frac{dT}{dt} = -5kn_e \frac{dT}{dt} \quad (14.4.3)$$

и выразить скорость теплоотдачи через давление и температуру:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\tilde{a}P}{\sqrt{T}}, \quad \tilde{a} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ см}^3/\text{эрг} \cdot \text{сек} (\text{град})^{3/2}. \quad (14.4.4)$$

Отсюда время охлаждения до нулевой температуры

$$t_T = \frac{1}{\tilde{a}P} \int_0^{T_0} \sqrt{T} dT = \frac{2}{3\tilde{a}P} T_0^{3/2}. \quad (14.4.5)$$

В действительности охлаждение происходит лишь до температуры рекомбинации, порядка  $10^4$  °К; при давлении  $\sim 2,6 \cdot 10^{-13}$  бар\*) этому соответствует плотность атомов водорода около  $0,2 \text{ см}^{-3}$ .

Важно, что время рекомбинации сильно зависит от начальной температуры. В каждый данный момент получается резкая граница.

Часть газа с  $T_0 < \left(\frac{3}{2} \tilde{a} P t\right)^{2/3} = T_1$  остыла полностью, до  $10^4$  °К. Другая часть газа остывает мало: например, если  $T_0 = \alpha T_1$ , то конечная температура  $T = (\alpha^{3/2} - 1)^{2/3} T_1 = \beta T_1$ , что дает при  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1,5$ , а при  $\alpha = 1,2$ ,  $\beta = 0,45$ . При параметрах, выбранных выше ( $M \sim 10^{13} M_\odot$ ,  $1 + z_c = 5$ ), и для момента, когда сжата половина вещества, находим  $T_1 \sim 4 \cdot 10^5$  °К.

Таким образом, получается весьма своеобразное распределение температуры (рис. 49) и соответствующее ему распределение плотности числа частиц (рис. 50).

\*) Газ уже не находится в равновесии с тепловым излучением, поэтому условие рекомбинации определяется формулой Эльверта, а не Саха; температура выше, чем при первой, равновесной рекомбинации. Давление  $P = 2,6 \cdot 10^{-13}$  бар соответствует сжатию около половины вещества «блина» в рассматриваемом приближении.

Численные расчеты одномерной задачи см. Дорошкевич, Шандарин (1973). При учете неоднородности задачи расчеты становятся более сложными [Дорошкевич, Шандарин (1974)].

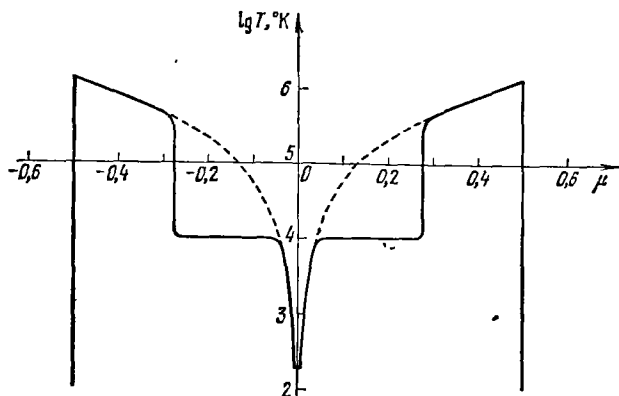


Рис. 49. Зависимость температуры от лагранжевой координаты  $\mu$  внутри сжатого вещества в момент, когда ударная волна находится при  $\mu=0,5$ . Сплошная кривая показывает температуру с учетом радиационного остывания, пунктиром показана зависимость  $T=T(\mu)$  без учета остывания.

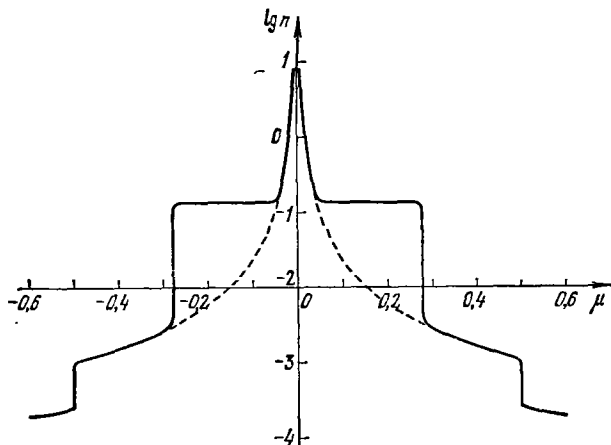


Рис. 50. Зависимость плотности числа частиц от лагранжевой координаты  $\mu$  в сжатом веществе в момент, когда ударная волна находится при  $\mu=0,5$ . Сплошная кривая показывает плотность с учетом радиационного остывания, пунктирная — без учета остывания.

Отличительные черты распределения можно суммировать следующим образом:

1) Около 1% вещества подвергалось только адиабатическому сжатию и имеет весьма низкую температуру.

2) Около 2—3% вещества нагрето ударной волной до температуры от 100 до  $10^4$  К, если не учитывать остывания из-за образования и возбуждения молекул  $H_2$ . Такое вещество не ионизовано, остывает медленно, лишь в силу адиабатического расширения.

3) Около 20% вещества было сжато ударной волной и нагрето до температуры выше  $10^4$  К, но затем остыло за счет излучения до  $10^4$  К и в значительной части рекомбинировало.

4) Около 25% вещества нагрето волной до температуры выше  $5 \cdot 10^5$  К и остается горячим, заметно не остывает.

5) Половина вещества не подвергалась действию ударной волны вовсе. Из наблюдений известно, что нейтральный водород практически отсутствует в пространстве между скоплениями галактик. Убедительным доказательством является спектр квазаров с красным смещением  $z > 2$ : нейтральный водород очень сильно ослабил бы излучение короче линии Ly- $\alpha$ . Благодаря красному смещению это излучение попадает в область спектра, доступную земным телескопам [Ганн, Петерсон (1965)]. Независимо от детальной теории «блинов» нельзя представить себе, чтобы в пространстве между галактиками совсем не было вещества. Следовательно, вещество в этом пространстве практически полностью ионизовано. Объяснение ионизации газа является одной из задач космологической схемы.

Высказывалось предположение, что излучение сжатого газа («блинов») может ионизовать газ, не подвергавшийся действию ударной волны. Вероятно, однако, этого излучения недостаточно. Если принять более высокую температуру «блинов», то, наряду с ультрафиолетовым, усилится чрезмерно рентгеновское излучение. Оценки см. Дорошкевич, Шандарин (1975). Возможно, что ионизацию осуществляют ранние квазары с  $z \geq 4$ , не наблюдаемые непосредственно.

Все расчеты весьма затруднены неопределенностью важнейших исходных параметров — постоянной Хаббла и общей плотности вещества. В зависимости от принятых параметров в интервале от  $H=100$ ,  $\Omega=1$  до  $H=50$ ,  $\Omega=0,03$  расчетная плотность меняется в 120 раз!

Можно ли непосредственно наблюдать «блины» (протоскопления) в далеком прошлом, до превращения их в современное состояние? Оценки показывают, что оптическое и ультрафиолетовое излучение вряд ли когда-либо удастся наблюдать на фоне других близких источников.

Рентгеновское излучение можно наблюдать, по-видимому, лишь у статистически редких, самых больших скоплений. При этом важно, что газ высокой температуры не остывает за счет излучения. Если газ гравитационно связан, то он не подвергается расширению, а значит, не остывает адиабатически.

Рентгеновское излучение таких источников, как Coma, предположительно является тормозным излучением горячего газа.

В гл. 15 в связи с реликтовым излучением обсуждается возможность независимого (не по рентгеновскому излучению) определения количества и температуры этого газа. Здесь мы останавливаемся на данном вопросе потому, что можно предположить космологическое происхождение горячего газа, предположить, что это газ, сжатый ударной волной в процессе образования «блина». Этот газ оказался связанным, когда «блин» превратился в скопление (т. е. когда в центральных холодных областях «блина» возникли галактики и звезды и произошла сферизация «блина» — тяготение вдоль поверхности «блина» собрало все вещество в комок, в скопление).

Отметим общую закономерность: если газ нагрет до температуры  $T_1$  при красном смещении  $z_1$ , а затем адиабатически расширяется, то наиболее жесткое излучение, воспринимаемое наблюдателем, приходит от начальной стадии. Обозначая измеряемую наблюдателем температуру излучения  $T_{\text{эфф}}$ , получим  $T_{\text{эфф},1} = \frac{T_1}{(1+z_1)}$ .

В самом деле, позже  $T = T_1 \left( \frac{1+z}{1+z_1} \right)^2$  температура газа быстро падает, уменьшение красного смещения не компенсирует это падение, для излучения, испущенного при  $z=z_i$  и принятого сегодня, получим

$$T_{\text{эфф},i} = T_1 \frac{1+z_i}{1+z_1} < T_{\text{эфф},1}. \quad (14.4.6)$$

Если газ приобрел температуру  $T_1$  при  $z_1$  и затем не охлаждался и не расширялся (был гравитационно связан), то, естественно, наиболее жесткое излучение наблюдатель получит от близкого объекта:

$$T_{\text{эфф},0} = T_1 > T_{\text{эфф},1}. \quad (14.4.7)$$

Исследование всеми методами мощных внегалактических источников рентгеновского излучения интересно как само по себе, так и для космологии (и теории образования галактик).

Наконец, возможно, по-видимому, обнаружение протоскоплений за счет излучения линии 21 см нейтральным водородом в области «блина», где температура недостаточна для ионизации [Сюняев, Зельдович (1972б), Зельдович, Сюняев (1974), Новокрещенова, Рудницкий (1973)]. Если бы удалось обнаружить это излучение и доказать его принадлежность «блину», то красное смещение линии позволило бы определить момент образования «блинов».

По приближенной оценке яркостная температура в центре линии может быть порядка 1000°K. Ожидаемая спектральная ширина линии порядка  $\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim 10^{-4} - 10^{-3}$ . Угловые размеры излучающей области порядка одной или нескольких угловых минут.

Трудность наблюдений связана с тем, что неизвестна абсолютная длина волны, поскольку неизвестно значение  $z$ , при котором

образуется сжатый газ. К тому же неизвестно заранее направление поисков: сжатый газ должен наблюдаться при  $z$ , значительно превышающем красное смещение «обычных» всеволновых радиоисточников, таких, как квазары. Вскоре после образования облака сжатого газа радиоизлучение в линии 21 см должно прекращаться или по крайней мере существенно ослабевать. Значительная часть нейтрального водорода превращается в звезды, часть оставшегося свободным газа снова ионизируется излучением молодых звезд. Практически в любой теории можно ожидать такого эффекта, но в существенно отличающиеся моменты времени, при разных  $z$ . Наблюдение радиоизлучения протогалактик имело бы огромное принципиальное значение.

### § 5. Массы скоплений и фрагментация протоскоплений

Теоретическая оценка массы протоскоплений по характерной (критической) длине волны возмущений является лишь весьма грубым приближением. В статистической задаче, очевидно, следует ожидать некоего распределения масс, зависящего от формы спектра возмущений, т. е. от закона изменения амплитуды возмущений в зависимости от длины волны.

Могут возникнуть также большие безразмерные числа в соотношении между массами гравитационно связанных объектов (в частности, скоплений галактик) и величиной размерности массы — кубом половины длины волны, умноженным на плотность.

Второй вопрос, рассматриваемый в данном параграфе, касается дальнейшей судьбы обособленных газовых тел (протоскоплений), структура которых была выяснена выше. Гравитационная неустойчивость протоскоплений приводит к их дальнейшему разделению на отдельные тела (галактики и квазары).

Для того чтобы определить момент, когда в значительной доле вещества становятся существенными нелинейные эффекты, или, попросту, значительная часть сжата в «блины», в первом приближении достаточно найти долю вещества, где  $\alpha \frac{b}{a} > 1$  [см. (14.3.1)]. Как показали гидродинамические расчеты одномерной задачи, количество вещества, сжатое ударной волной, превышает количество вещества, которое само (без учета ударной волны, подчиняясь условию  $\alpha \frac{b}{a} \geq 1$ ) доходит до бесконечной плотности.

На начальном этапе и при мгновенном охлаждении это превышение составляет  $\sqrt{3}$  раз, а без охлаждения — почти в два раза по сравнению с условием  $\alpha \frac{a}{b} \geq 1$ . С помощью функции распределения вероятности  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  можно, интегрируя по  $\beta$  и  $\gamma$ , найти  $W(\alpha)$  — полную вероятность того, что  $\alpha$  больше заданной величины при любых  $\beta$  и  $\gamma$ . Отсюда получается закон изменения со временем об-

шего количества сжатого вещества. На рис. 51 представлен этот закон: по оси абсцисс откладываем  $\lg(t/t_c)$ , по оси ординат  $2W$  ( $\frac{ab}{a} = 1$ ). При этом  $t_c$  в статистической задаче определим как момент, когда вычисленная по линейной теории величина  $(\frac{\delta\rho}{\rho})^2 = 1$ . Для сравнения приведена также кривая, относящаяся к одномерной задаче с синусоидальным возмущением (пунктир). Ее отличие от сплошной

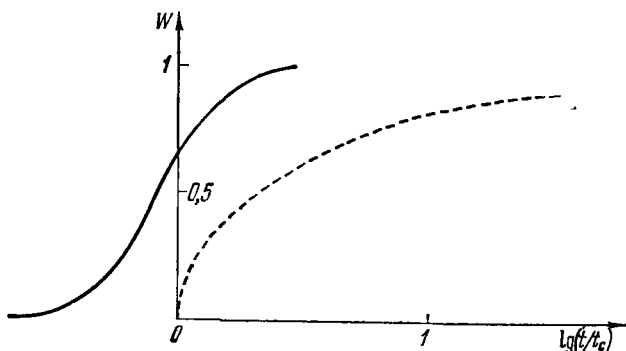


Рис. 51. Зависимость доли вещества, сжатого ударной волной, от времени. Сплошная кривая — в статистической теории, пунктир — в одномерной задаче с синусоидальным возмущением.

кривой связано главным образом не с одномерностью, а со статистичностью, так как синусоидальное возмущение очень сильно отличается от статистического. Расчеты проделаны для  $\Omega=1$ .

От начальной амплитуды возмущений зависит только абсолютное значение  $t_c$ . Если по оси абсцисс отложено отношение  $t/t_c$  или логарифм этого отношения, то кривые универсальны, не зависят от амплитуды.

Попытка пройти существенно дальше в детализации нелинейного этапа предпринята в работе Дорошкевича и Шандарина (1975). С помощью корреляционной функции с той точностью, которую имеет приближенная теория, удастся определить в каждый момент плотность «ядер кристаллизации» — число областей высокой плотности, число «блинов» в единице объема. Оцениваются также тот объем и масса, расположенные вокруг «блина», которые с большой вероятностью присоединяются к данному «блину».

Расчеты сложны и на поздних стадиях становятся ненадежными, так как не все локальные максимумы  $\alpha$  дают самостоятельные отдельные «блины». Частица может быть сжата ударной волной другого «блина» раньше, чем в ней возникнет своя, зависящая от ее значения  $\alpha$ , бесконечная плотность. Очевидно, что формулы приближенной теории здесь теряют силу уже потому, что в сжатом

веществе давлением отнюдь нельзя пренебрегать. Кроме того, оценки размеров «блина» очень ненадежны.

Важным выводом работы Дорошкевича и Шандарина является следующий. Толщина «блина» (по лагранжевой координате) порядка  $R_c$ , в то время как площадь «блина» доходит до  $\sim 30 R_c^2$ .

Очень поучительно появление подобных больших безразмерных множителей: они показывают недопустимость упрощенного подхода к сложной статистической задаче. Численные трехмерные расчеты могут внести поправки в оценки Дорошкевича и Шандарина, но возврат к наивному отождествлению  $M_c$  и массы скоплений не предвидится.

Вопрос о фрагментации (разделении на отдельные части, фрагменты) протоскопления рассмотрен в уже цитированной работе Сюняева и Зельдовича (1972б).

Особенность задачи заключается в том, что рассматривается гравитационная неустойчивость вещества, занимающего тонкий слой, с толщиной, во много раз меньшей продольных размеров. К тому же холодное плотное вещество находится под внешним давлением окружающего горячего вещества, плотность которого гораздо меньше. Это давление на начальной стадии роста «блина» больше, чем гравитационные силы между частицами плотного слоя.

Задача о гравитационной неустойчивости тонкого (в пределе бесконечно тонкого) слоя рассматривалась многими авторами в связи с теорией галактического диска и вопросами о распаде вращающегося диска на спиральные ветви.

Наша задача проще, так как можно предположить, что нет вращения и нет пекулярных скоростей в плоскости диска.

Будем рассматривать однородный диск данной поверхностной плотности  $\sigma$  (г/см<sup>2</sup>). Решение уравнений для возмущений плотности ищем в виде (в предположении весьма тонкого диска)

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} = \text{const} \cdot e^{\omega t + i k x} \quad (14.5.1)$$

( $k, x$  — двумерные). При этом гравитационный потенциал рассматривается в трех измерениях. С учетом того, что вне диска  $\Delta\varphi=0$ , имеем

$$\delta\varphi = \text{const} \cdot e^{\omega t + i k x - |k| |z|}, \quad (14.5.2)$$

и амплитуда потенциала определяется граничным условием в плоскости:

$$\left. \frac{\partial \delta\varphi}{\partial z} \right|_{z=0} - \left. \frac{\partial \delta\varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 4\pi G \delta\sigma. \quad (14.5.3)$$

Уравнения для возмущений дают закон нарастания возмущений:

$$\omega = \sqrt{2\pi G \sigma |k|}. \quad (14.5.4)$$



Характерное отличие от трехмерной задачи — зависимость скорости нарастания от волнового вектора  $|k|$ ; напомним, что в трехмерном случае

$$\omega = \sqrt{4\pi G\rho - a^2 k^2} \rightarrow \sqrt{4\pi G\rho} \quad \text{при } k \rightarrow 0 \quad (14.5.5)$$

(см. гл. 9). Размерность  $\sigma |k|$  та же ( $г/см^3$ ), что и размерность  $\rho$ ; поэтому не удивительно, что в формулу вместо  $\rho$  входит именно  $\sigma |k|$ .

При конечной толщине диска («блина») меняются формулы для гравитационного потенциала, а главное, появляется сила, противодействующая гравитационной неустойчивости. Эта сила, действующая в плоскости диска, есть произведение давления на площадь сечения, перпендикулярного плоскости диска, точнее — градиент этой величины, возникающий в результате возмущения. Площадь сечения на единицу длины линии пересечения есть толщина диска  $h$ . С учетом конечной толщины и давления получим

$$\omega = \sqrt{2\pi G\sigma |k| - \sigma^{-1} P h k^2}. \quad (14.5.6)$$

Таким образом, при конечной толщине диска есть критическая длина волны, аналогичная джинсовской длине волны трехмерной задачи:

$$\omega = 0, \quad k = k_{\text{дж}} = \frac{2\pi G\sigma^2}{Ph}, \quad \lambda_{\text{дж}} = \frac{2\pi}{k_{\text{дж}}}. \quad (14.5.7)$$

Есть и величины, не имеющие аналога в трехмерной задаче: волновой вектор  $k_{\text{мах}}$  и длина волны  $\lambda_{\text{мах}}$  наиболее «опасного», т. е. наиболее быстро растущего, возмущения, для которого  $\omega$  максимально. Легко убедиться, что  $k_{\text{мах}} = \frac{1}{2} k_{\text{дж}}$ ,  $\lambda_{\text{мах}} = 2\lambda_{\text{дж}}$ . Если давление в слое определяется только весом (тяготением) вещества слоя, то в середине слоя  $P_{\text{ц}} = \frac{\pi}{2} G\sigma^2$ , на краях, очевидно,  $P=0$  и среднее давление порядка  $P = G\sigma^2$ . Подставляя это значение в выражения для  $\lambda_{\text{дж}}$  (14.5.7) и  $\lambda_{\text{мах}}$ , будем иметь

$$\lambda_{\text{дж}} = h, \quad \lambda_{\text{мах}} = 2h \quad (14.5.8)$$

и, далее, используя  $\sigma = h\bar{\rho}$ , получим

$$\omega_{\text{мах}} = 0,885 \sqrt{4\pi G\bar{\rho}}. \quad (14.5.9)$$

Эти результаты вполне естественны с точки зрения теории размерности.

Если слой окружен горячим легким газом, то нужно учитывать давление этого газа, но можно пренебречь его тяготением и возмущением под действием возмущения потенциала. В этом случае критическая длина волны и опасная длина волны возрастают в

отношении  $\frac{P_{\text{газ}} + P_g}{P_g}$ , где  $P_{\text{газ}}$  — давление газа на поверхность слоя, а  $P_g$  — найденное выше значение  $P = G\sigma^2$ .

В работе Сюняева и Зельдовича эти соображения применяются к распаду плоского протоскопления — «блина», структура которого описана в предыдущем параграфе.

Возможная схема образования галактик (которая весьма предварительна и может сильно измениться), например, следующая. Внутренний, самый плотный (сжатый адиабатически) слой должен, по оценкам, распадаться на массы порядка  $10^7$ — $10^8 M_{\odot}$ . Слой, остывший до  $\sim 10^4$  К, распадается на массы порядка  $10^{11}$ — $10^{12} M_{\odot}$ . Горячий газ с  $T > 4 \cdot 10^5$  К частично остается гравитационно не связанным, а частично образует горячее гало вокруг масс  $10^{11}$ — $10^{12} M_{\odot}$ . Предлагается гипотеза [Сюняев, Зельдович (1972б)], согласно которой наиболее плотные, но малые массы представляют собой квазары и ядра галактик.

Массы  $10^{11}$ — $10^{12} M_{\odot}$  естественно отождествляются с галактиками. С этой точки зрения объясняются и некоторые общие свойства связанных тел разных типов.

В адиабатически сжатом газе не должно быть вихревой компоненты скорости. Начальная плотность этого газа порядка  $30$  атомов/см<sup>3</sup>; в ходе дальнейшего сжатия средняя плотность может возрасти.

После образования первых «блинов» часть газа, охваченная ударной волной, нагревается до высокой температуры, жесткое излучение этих слоев прогревает уже весь газ до температуры выше адиабатической. Такой прогрев не влияет на общую картину дальнейшего образования «блинов», но в «блинах», образовавшихся позже, средний слой уже не столь плотный и холодный, как в первых «блинах». Можно предположить, что образование квазаров (и ядер галактик?) прекратится раньше, чем прекратится образование галактик. Возможно, что резкое падение числа квазаров и радиисточников при  $z \gtrsim 3$ , отмеченное Лонгейром (1966) [см. также Дорошкевич, Лонгейр, Зельдович (1970)], связано с этим обстоятельством.

В первых «блинах» в квазары и ядра переходит, по предположению, около 1% всего вещества. Такое количество согласуется с грубыми оценками, исходящими из представления, что активная жизнь квазара\*) длится всего  $10^5$ — $10^6$  лет.

В каждом «блине» с плотной средней прослойкой можно ожидать образования около 100 плотных объектов. Не должны ли в таком случае квазары располагаться группами, не должны ли их положения быть коррелированными? Наблюдения не подтверждают

\*) Здесь в квазары включены также квазизвездные радиоспокойные объекты; название «квазар» (quasistellar galaxies) не привилось.

такой корреляции, но ее и не должно быть, если учесть, что упомянутый активный период жизни квазаров ( $10^5$ — $10^8$  лет) во много раз меньше как сегодняшнего космологического времени ( $10^{10}$  лет), так и времени образования «блинов» ( $3 \cdot 10^8$ — $10^9$  лет). В каждый момент мы наблюдаем порядка  $10^{-3}$  от общего числа плотных объектов — потенциальных квазаров, так что среднее число наблюдаемых квазаров на одно протоскопление значительно меньше единицы, ожидаемые пары квазаров должны составлять менее 10% общего числа их.

Обращаясь к галактикам, отметим, прежде всего, стабильность температуры слоя, из которого, предположительно, образуются галактики. Эта температура ( $\sim 10^4$  °К) определяется особенностями законов рекомбинации и излучения оптически тонкого газа. Газ излучает наиболее сильно при частичной ионизации, когда велико излучение в линиях и рекомбинационное излучение; после рекомбинации излучение резко уменьшается. Поэтому температура, до которой нагревается газ, слабо зависит от предыстории и параметров «блина» как целого (его массы и момента образования). Эта стабильность температуры, возможно, отражается в том, что (по замечанию Озерного) галактики отличаются малым разбросом средней плотности.

Другая возможная схема распада «блина» на галактики, учитывающая идеализированный характер рассмотренной выше одномерной картины, предложена в работе Дорошкевича и Шандарина (1974). В их схеме важную роль играет появление вихревой компоненты скорости в сжатом ударной волной газе (см. § 6 этой главы) и предполагается турбулизация сжатого газа.

Мы закончили обсуждение стадий разбиения «блина» на отдельные облака газа. Возникновение звезд в этих облаках лежит за пределами космологии. Фактические данные наблюдений о массах скоплений, групп галактик, о массах самих галактик, их вращении даны в § 11 этой главы.

## § 6. Вращение галактик

Возможно ли возникновение вращения в теории, в которой предполагается, что начальные возмущения являются безвихревыми?

В течение долгого времени казалось, что вращение в такой ситуации не возникает. Такое мнение не было совсем бесосновательным.

Известные теоремы Гельмгольца — Кельвина говорят о том, что гравитационные силы, обладающие потенциалом, способны создать поле скорости только потенциальное, т. е. с равным нулю вихрем.

До рекомбинации плотность и давление однозначно связаны друг с другом; силы, связанные с давлением, не создают вихревого

движения. Наконец, вязкость в потенциальном движении создает вихрь лишь при наличии стенок или градиента плотности \*).

В принципе не исключено возникновение вихревого движения в том случае, если потенциальное движение приводит к появлению ударных волн. Однако в теории адиабатических возмущений весьма мала амплитуда потенциального движения:  $\frac{u}{c} \sim \frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-3} - 10^{-4}$  — в области спектра, соответствующей массе  $10^{13} M_{\odot}$  и выше.

Такая амплитуда не приводит к возникновению ударных волн за космологическое время. Амплитуда может быть больше в области коротких волн при  $M \ll 10^{13} M_{\odot}$ .

Не исключено, что эти волны превращаются в ударные раньше, чем они затухнут за счет вязкости. Этот процесс может иметь значение для появления энтропийных возмущений и будет обсуждаться ниже.

Однако вихрь скорости, связанный с мелкомасштабными ударными волнами, должен быть, соответственно, малого масштаба, и такой вихрь полностью затухает к моменту рекомбинации. Итак, действительно, в раннем периоде эволюции при отсутствии изначальных вихрей движение остается потенциальным, безвихревым.

Другую сторону вопроса составляет соотношение между моментом вращения тела и ротором скорости.

При вращении твердого тела угловая скорость каждого элементарного объема тождественно равна угловой скорости всего тела  $\Omega$ . Поэтому  $\text{rot } u = 2\Omega$ . Когда  $\text{rot } u = 0$ , то и  $\Omega = 0$ , а значит, равен нулю и момент тела  $M$ . Любопытно, что в общем случае тела неправильной формы (не шары) характеризуются тензором моментов инерции  $I_{ik}$ , направление момента  $M$  не совпадает с направлением  $\Omega$  и  $\text{rot } u$  и так как  $M_i = I_{ik}\Omega_k$ , то момент  $M$  нельзя представить как интеграл по объему от  $\text{rot } u$ .

Для определенной ограниченной массы жидкости или газа связь между моментом массы и ротором скорости отсутствует. Известны безвихревые движения несжимаемой жидкости с конечным моментом, получающиеся при вращении заполненного жидкостью сосуда неправильной (не осесимметричной!) формы \*\*).

Однако определенная связь между моментом и ротором есть и в случае жидкости. В самом деле, если жидкость имеет везде

\*) О понятии вихря в релятивистской гидродинамике см. Зельманов (1959б), Вайнштейн и Рузмайкин (1973), Чернин и Эйдельман (1969, 1971), Чернин (1969), Тиунов и Чернин (1971). Учет зависимости вязкости от плотности, в принципе, приводит к появлению вихря, однако эффект в РД-плазме, по-видимому, ничтожен.

\*\*) Движения типа  $u_x = \frac{ay}{x^2 + y^2}$ ,  $u_y = -\frac{ax}{x^2 + y^2}$ ,  $u_z = 0$  не следует рассматривать как безвихревые:  $\text{rot } u = \delta(x^2 + y^2)n_z$ , вихрь равен нулю везде, кроме оси  $n_z$ , где он бесконечен.

постоянную плотность, заполняет осесимметричный сосуд \*) и ротор скорости отсутствует, то проекция момента на ось тождественно равна нулю. В этом легко убедиться: найдем проекцию момента на заданное направление  $\omega$  («ось»):

$$\mathcal{M}_\omega = \rho \int [\mathbf{u} \times \mathbf{r}]_\omega d^3\mathbf{r}, \quad (14.6.1)$$

разбивая рассматриваемый объем на кольца с центром на оси. Для такого кольца

$$d\mathcal{M}_\omega = \rho r_1 dS \oint u_t dl, \quad (14.6.2)$$

где  $r_1$  есть радиус кольца,  $dS$  — его сечение,  $dl$  отсчитывается вдоль кольца,  $u_t$  — проекция скорости на  $dl$ .

Интеграл по кольцу представляет собой циркуляцию скорости и, следовательно, по теореме Стокса выражается через интеграл ротора по поверхности, натянутой на кольцо. В безвихревом движении

$$\oint u_t dl = 0.$$

Отсюда видно, что возможность возникновения момента при безвихревом движении ограничена, существенно связана с переменной плотностью. Конечный момент объема жидкости тоже можно рассматривать как предельный случай резкой зависимости плотности от координаты:  $\rho = \rho_0$  внутри  $V$ ,  $\rho = 0$  вне  $V$ ; на поверхности  $S$ , ограничивающей  $V$ , имеет место разрыв  $\rho$ . Предположим, что жидкость движется потенциально, но имеет отличный от нуля полный момент за счет несимметричной формы объема, занятого жидкостью. Пусть эта жидкость изолирована от действия внешних сил, так что момент сохраняется. Станет ли движение вихревым с течением времени?

Общим свойством твердотельного вращения является минимум кинетической энергии при данном полном моменте вращения. Поэтому изолированное от внешних сил тело с течением времени стремится перейти в состояние твердотельного вращения \*\*). Твердотельное вращение является вихревым движением. Очевидно, вязкость должна вызвать переход потенциального движения с моментом в твердотельное вращательное движение, т. е. создать вихрь; только при твердотельном вращении вязкость перестает увеличивать энтропию, превращая в тепло избыток энергии движения над энергией твердотельного вращения. В твердотельном вращении жидкость не деформируется, и вязкость перестает увеличи-

\*) Сосуд должен быть односвязным, без полости на оси, чтобы исключить движения, типа рассмотренного в предыдущем примечании.

\*\*) Внутренние источники энергии, например ядерная реакция внутри тела, могут создавать отклонения от твердотельного вращения.

вать энтропию. Детальное рассмотрение показывает, что в потенциальном несжимаемом движении ограниченного тела с моментом при учете вязкости энтропия растет во всем объеме, но вихрь возникает лишь у границы и постепенно, за время  $\sqrt{\nu L}$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость,  $L$  — размер), охватывает весь объем. Этот факт естественно согласуется с тем, что в неограниченном пространстве не может быть момента и вязкость не генерирует вихрь при постоянной плотности.

Подробное (может быть, слишком подробное) обсуждение теоремы сохранения вихря и обсуждение взаимоотношения вихря и момента необходимо для понимания внутренней логики работ последних лет, которые прояснили возможность возникновения вращения в космологии в таких объектах, как галактики и скопления галактик. Рассмотрены три задачи:

1) Ранний период малых адиабатических возмущений после рекомбинации.

Отдельные моды возмущений растут в соответствии с линейной теорией. Ротор скорости равен нулю. Вычисляя момент произвольно выбранной сферы в линейном приближении ( $u \neq 0$ ,  $\rho = \rho_0$ ), получим нуль. Однако если учесть отличие плотности от средней ( $\frac{\delta \rho}{\rho} \sim \frac{|u|t}{l} \neq 0$ ), то в этом приближении, квадратичном по амплитуде возмущений, момент сферы отличен от нуля [Дорошкевич (1970), Пиблс (1969a)]. Опустим все безразмерные множители, чтобы сделать грубую оценку.

При амплитуде возмущений плотности порядка  $\frac{\delta \rho}{\rho} \sim 1$  амплитуда скорости  $u \sim \frac{l}{t}$ , где  $l$  — масштаб и  $t$  — космологическое время, поэтому

$$\mathcal{M} \sim \delta \rho u l^4 \sim \frac{\rho l^5}{t}. \quad (14.6.3)$$

Подставив  $t = (6\pi G \rho)^{-1/2}$ , получим

$$\mathcal{M} \sim G^{1/2} \rho^{3/2} l^5 \sim G^{1/2} M^{3/2} l^{1/2}, \quad (14.6.4)$$

где  $M = \rho l^3$ . Но это как раз тот момент, при котором центробежная сила удерживает массу  $M$  в состоянии диска с размером  $l$ .

Упомянутые выше авторы не делают такого вывода, ибо он совершенно тривиален, так как в задаче нет никаких безразмерных параметров. Внимание авторов сосредоточено на вычислении безразмерного множителя в выражении для  $\mathcal{M}$  (14.6.4); по их оценкам, этот множитель гораздо меньше единицы ( $\sim 0,005$ ).

2) Сжатие холодного газа ударной волной после рекомбинации при  $z < z_c$ .

В нелинейной картине (§ 3 этой главы) развитие возмущений приводит к формированию сильных ударных волн. При наличии

ударной волны уже не имеет места сохранение вихря \*); формально это связано с тем, что в ударной волне энтропия растет. Заметим, кроме того, что и при охлаждении газа от температуры порядка  $4 \cdot 10^5$  до  $10^4$  °K вихрь также не сохраняется.

Важность несохранения вихря в ударной волне для проблемы возникновения вращения галактик отметил качественно Чернин (1970) и подробно исследовал Дорошкевич (1973). Очень грубо представим себе волну, в первом приближении совпадающую с плоскостью  $x=0$ . Падают газ ( $x=0$ ,  $u_x < 0$ ), движущийся не строго по параллельным линиям ( $u_y \neq 0$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial x} \neq 0$ ), но безвихревой

( $\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial z}$ ). Ударная волна останавливает нормальное

движение по оси  $x$ , так что за фронтом  $u_x = 0$ ,  $\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$ . Пола-

гая, что тангенциальная скорость сохраняется, учтем, что увеличение плотности в волне в четыре раза сопровождается уменьшением  $x$ -компоненты вектора расстояния между частицами, так что

$\left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_+ = 4 \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_-$  (индекс «+» — после сжатия, индекс «-» — до сжа-

тия волной). Таким образом, равенство  $\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$ , которое приводило к безвихревому движению до сжатия волной, полностью разрушается после сжатия. Грубый подход дает оценку  $\text{rot } \mathbf{u} = H \frac{\rho}{\rho}$ ,

где  $H$  — постоянная Хаббла на момент сжатия \*\*). В качестве примера примем, что  $z+1 = \frac{z_c+1}{1,5} = 3$ . Тогда  $H = 3^{1/2} H_0 = (1,5 \cdot 10^9 \text{ лет})^{-1}$ ;

плотность вещества в галактике есть  $\rho = 10^{-24} \text{ г/см}^3$ ,  $\bar{\rho} = 3 \cdot 10^{-28} \text{ г/см}^3$ , и мы получим  $\text{rot } \mathbf{u} = (7,5 \cdot 10^5 \text{ лет})^{-1}$ .

Предположим, что с такой угловой скоростью как твердое тело вращается галактика; мы получили бы период обращения

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \pi (\text{rot } \mathbf{u})^{-1} = 2,3 \cdot 10^6 \text{ лет} \quad (14.6.5)$$

— в 100 раз меньше наблюдаемого!

\*) Точнее, надо говорить о сохранении циркуляции скорости по контуру, образованному данными частицами. При адиабатическом движении  $\int \mathbf{u} d\mathbf{l}$  сохраняется, а ротор может изменяться. Однако если начальные значения ротора и циркуляции равны нулю, то обе величины остаются равными нулю — можно говорить о сохранении безвихревого движения в условиях, предусмотренных теоремой Гельмгольца — Кельвина.

\*\*) Оценка основана на том, что нелинейное сжатие происходит в том случае, когда локально градиенты возмущений скорости по одному направлению превосходят постоянную Хаббла, от которой зависит общее расширение, но по порядку величины близки к ней. Множитель  $\rho/\bar{\rho}$  отражает рост градиента возмущений скорости из-за сжатия вещества.

Возможно, что в точной теории есть безразмерные малые числа: видимо, входит малая величина  $\mu$  — доля вещества, вошедшего в галактики. Остается обнадеживающим тот факт, что расчет по порядку величины оставляет большой запас для уменьшения угловых моментов галактик. Отметим еще, что центральная часть «блина», которая подверглась адиабатическому сжатию, остается безвихревой в этой концепции (если не учитывать турбулентность).

3) Рассмотрим последнюю стадию, когда возмущения привели к образованию отдельных тел, пространственно отделенных, обособленных друг от друга. Эти тела гравитационно взаимодействуют между собой. Гравитационное взаимодействие в первую очередь приводит к обмену импульсом — к изменению направления и скорости движения. Так взаимодействуют точечные частицы, а также шарообразные тела, гравитационное поле которых снаружи не отличается от поля точки.

Однако тело неправильной формы имеет отличный от нуля квадрупольный  $Q$  (и высшие) момент распределения масс. Внешнее поле такого тела имеет слагаемое, зависящее от угла:

$$\varphi_Q = \frac{1}{3} P_Q(r, \theta, \varphi), \quad (14.6.6)$$

где  $P_Q$  — квадрупольная сферическая гармоника. В таком потенциале не сохраняется орбитальный момент пролетающего второго тела; соответственно по закону равенства действия и противодействия (или по закону сохранения полного момента) изменяется и момент вращения первого тела (создающего  $\varphi_Q$ ) под действием не написанного здесь поля второго тела. Говоря проще, несферические невращающиеся тела при пролете друг около друга приобретают моменты.

Характерно (и неизбежно по теории потенциала), что квадрупольное взаимодействие убывает с увеличением расстояния быстрее, чем потенциал точечной массы. Поэтому теория набора момента при столкновениях резко отличается от теории перераспределения скорости поступательного движения. В наборе момента главную роль играют самые близкие столкновения. Момент силы, действующей на первое тело с массой  $M_1$  и квадрупольным моментом  $Q_1$  со стороны второго тела с массой  $M_2$ , порядка

$$\left| \frac{d\mathcal{M}}{dt} \right| \sim \frac{G Q_1 M_2}{r_{12}^3}. \quad (14.6.7)$$

При пролете тела с прицельным параметром  $b^*$  имеем по порядку величины  $r_{12} \sim b^*$ ,  $t \sim \frac{b^*}{u}$ , где  $u$  — скорость пролета, так что

$$|\Delta \mathcal{M}| \sim \frac{G Q_1 M_2}{b^{*2} u}. \quad (14.6.8)$$



При хаотических соударениях складываются квадраты статистически независимых приращений момента. Частота столкновений с прицельным параметром между  $b^*$  и  $b^* + db^*$  равна  $d^2W = nu2\pi b^* db^* dt$ , где  $n$  — средняя плотность тел.

Таким образом,

$$(\Delta \mathcal{M})^2 \approx G^2 Q_1^2 M_2^2 \frac{nt}{u} \int_{b_0^*} \frac{2\pi b^* db^*}{b^{*4}} \approx \frac{t G^2 Q_1^2 M_2^2 n}{b_0^{*2} u}. \quad (14.6.9)$$

Ответ существенно зависит от выбора нижнего предела интегрирования  $b_0^*$ .

В качестве самой грубой оценки, рассматривая процесс обособления галактик, подставим в (14.6.9)  $M_1 \approx M_2 = M$ ,  $Q_1 = MR^2$ ,  $n = R^{-3}$ ,  $b_0^* = R$ ,  $t = \frac{R}{u}$ ,  $u = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ ,  $\mathcal{M}_0 = 0$  ( $\mathcal{M}_0$  — момент при начале процесса,  $t=0$ ). Получается результат, который очевиден из размерности; приобретенный галактикой момент есть в среднем

$$\bar{\mathcal{M}} = \sqrt{GM^3 R}, \quad (14.6.10)$$

т. е. как раз момент, необходимый для того, чтобы центробежная сила галактики с массой  $M$  и радиусом диска  $R$  уравнивала силу притяжения.

Возникает вопрос: можно ли предположить, что обособляющееся тело (протогалактика) обладает квадрупольным моментом  $Q \neq 0$  вначале, пока еще оно не набрало момент вращения? Изолированное тело без момента в состоянии равновесия принимает шаровую форму с  $Q=0$ .

Однако в момент обособления тела еще не успевают принять равновесную форму — такова первая причина того, что  $Q \neq 0$ . Кроме того, даже если первое тело было сферически-симметричным до приближения массы  $M_2$ , то само приближение этой массы вызывает приливную деформацию первого тела, а значит, и появление квадрупольного момента. По порядку величины такой «индуцированный» второй массой момент меньше, чем  $Q_1 = M_1 R^2$ , в отношении  $\frac{M_2}{M_1} \frac{R^3}{b^3}$  (в момент максимального сближения  $r_{12} = b^*$ ). Для набора вращательного момента нужно еще, чтобы индуцированный квадрупольный момент по направлению главных осей отставал от линии, соединяющей центры тяжести тел. Это обстоятельство приводит к дополнительному множителю  $\frac{R}{b^*}$  или  $\left(\frac{R}{b^*}\right)^2$  при  $b^* \gg R$ . Однако снова получится, что после подстановки характерных значений  $b^*$ ,  $u$  и других результирующее выражение для  $\bar{\mathcal{M}}$  окажется тем же.

Итак, только подсчет безразмерных множителей может дать окончательный ответ на вопрос о среднем моменте галактик и скоп-

лений галактик в теории адиабатических возмущений. Но подсчет такого рода «теоретическими» (читай: аналитическими) методами вряд ли возможен; сама формулировка исходных условий статистична, ответ тоже должен формулироваться статистически, в виде функций распределения обособившихся тел по массам и моментам.

Вероятно, неизбежно проведение численных расчетов трехмерного движения для набора реализаций случайных исходных данных. Такая программа потребует (с учетом тепловых явлений) нескольких лет. В настоящее время можно констатировать, что есть по крайней мере три принципиально разных процесса, приводящих в адиабатической теории возникновения галактик к набору момента обособленными телами. Нельзя утверждать, что уже сейчас строго доказана достаточность этих процессов. Вместе с тем никак нельзя утверждать и обратное, что теория адиабатических возмущений будто бы неспособна объяснить наблюдаемое вращение галактик. Фактические данные о вращении галактик даны в § 11 этой главы.

## § 7. Магнитное поле галактик

Происхождение магнитного поля галактик проясняется лишь в последние годы, в связи с успехами теории динамо-эффекта — усиления поля при движении плазмы. Предполагается, что первичное весьма слабое магнитное поле возникает вследствие вращения газового облака — протогалактики за счет различия масс электрона и протона и различного взаимодействия электронов и протонов с релятивистским излучением.

Дальнейшее усиление связано с конвективным движением вращающегося газа. В этой концепции мы опираемся на наблюдательно установленный факт вращения спиральных и эллиптических галактик. Выбор той или иной теории происхождения самого вращения мало влияет на выводы, касающиеся магнитного поля.

Несколько лет назад казалось, что в теории динамо-эффекта имеются непреодолимые трудности. Поэтому обсуждалось предположение о существовании сравнительно сильного ( $\sim 10^{-8}$  гс в настоящее время) первичного космологического магнитного поля, замороженного в реликтовую плазму и заданного в космологической сингулярности. Мы разберем такую возможность в § 3 гл. 19. Поле галактик ( $\sim 10^{-8}$  гс) получалось в такой концепции за счет стягивания магнитных силовых линий при конденсации разреженного газа в более плотные галактики. В пространстве между скоплениями, где газ разрежен, должно остаться упорядоченное поле  $\sim 10^{-9}$  гс.

В настоящее время эта концепция хотя и не опровергнута, но представляется искусственной. Данные об упорядоченном космологическом поле ненадежны [Кавабата и др. (1969), Рейнгардт и Тил (1970), Комберг, Рузмайкин (1972)]. Поэтому космологические

модели с первичным полем мы кратко обсудим в § 3 гл. 19 в связи с общезначимым вопросом о влиянии частиц и полей на сингулярность.

Здесь же мы обратимся к теориям генерации полей в рамках горячей модели Вселенной без первичного поля, с малыми возмущениями скорости и плотности, наложенными на однородное и изотропное фридмановское решение.

Гаррисон (1968, 19706) рассматривает вращательные возмущения на стадии преобладания излучения. Напомним, что сохранение момента вращения шара радиуса  $R$  дает условие

$$\mathcal{M} = I\omega = \rho R^5 \omega = \text{const}, \quad (14.7.1)$$

где  $I$  — момент инерции. В ходе расширения растет радиус  $R$ , плотность падает (на РД-стадии) по закону  $\rho \sim R^{-4}$ . Поэтому угловая скорость уменьшается  $\omega \sim R^{-1}$ , линейная скорость  $u = \omega R$  остается постоянной (§ 5 гл. 10).

Плотность вещества, взятого в отдельности (барионов, без фотонов), убывает, как  $\rho_{\text{вещ}} \sim R^{-3}$ . Вещество «хотело бы» вращаться медленнее:  $\omega \sim R^{-2}$ ,  $u \sim R^{-1}$ . При этом легкие электроны увлекаются излучением, а отстают от вращения РД-плазмы тяжелые протоны. Возникает электрический ток, плотность его равна  $j = ne(u_p - u_e)$ , где  $n = n_e = n_p$  — плотности частиц,  $e$  — элементарный заряд. Такой ток создает магнитное поле, направленное по оси вращения. При вычислении магнитного поля нужно учесть, что изменение магнитного потока индуцирует электродвижущую силу, которая стремится выравнять скорости протонов и электронов. В первом приближении полагаем, что скорость протонов мало отличается от скорости электронов, находим э. д. с.,  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$  и  $\mathcal{H}$ , необходимые для того, чтобы протоны двигались, не отставая от электронов, а потом проверяем, что разность скоростей  $u_p - u_e$ , необходимая для создания такого поля, действительно мала.

Итак, основные уравнения\*): уравнение движения протонов

$$u_p = \text{const}, \quad m_p \frac{du_p}{dt} = -m_p \frac{u_p}{R} \frac{dR}{dt} + e\mathcal{E} = 0, \quad \mathcal{E} = \frac{m_p u_p}{e} \frac{dR}{dt} \quad (14.7.2)$$

(проверьте: при  $\mathcal{E} = 0$  было бы  $u_p = \text{const} \cdot R^{-1}$ ); уравнение для э. д. с.

$$\frac{d}{dt} \pi \mathcal{H} R^2 = -c 2\pi R \mathcal{E} = -\frac{2\pi m_p c}{e} u_p \frac{dR}{dt}. \quad (14.7.3)$$

---

\*) Электрическое поле  $\mathcal{E}$  определено в системе отсчета, покоящейся относительно всей материи, состоящей на этой стадии в основном из фотонов.

Подставляя  $u_p = \omega R = \text{const}$ , получим

$$\frac{d}{dt} R^2 \left( \mathcal{H} + \frac{2m_p c}{e} \omega \right) = 0. \quad (14.7.4)$$

Асимптотическое решение этого уравнения

$$\mathcal{H} = - \frac{2m_p c \omega}{e}. \quad (14.7.5)$$

В вихревой теории рассматривается движение такое, что размер наибольшего вихря равен произведению скорости на космологическое время, что является условием осуществления законов турбулентности. Значит,  $\omega \sim \frac{2\pi}{t}$ , где  $t$  — космологическое время в момент рекомбинации (или окончания доминирования излучения). Величина  $t$  — порядка  $5 \cdot 10^{12}$  сек. Получим  $\mathcal{H} = 0,4 \cdot 10^{-15}$  гс при плотности  $\rho_{\text{вещ}} \approx 3 \cdot 10^{-20}$  г/см<sup>3</sup>. Плотность современных галактик меньше — порядка  $10^{-24}$  г/см<sup>3</sup>. Значит, после рекомбинации продолжается расширение отдельных вихрей, прежде чем произойдет образование галактик. Если расширение происходит подобно, то условие вмороженности — сохранения потока магнитного поля — приведет к дальнейшему уменьшению  $\mathcal{H}$  еще на два порядка — до  $2 \cdot 10^{-18}$  гс.

Мишустин и Рузмайкин (1971) рассматривают случай возникновения вращения в стадии, когда плотность фотонов уже мала. В первом приближении протоны и электроны вращаются с одинаковой скоростью, однако электроны тормозятся вследствие трения о фотонный газ. Условие, из которого определяется магнитное поле, заключается в том, что индуктивная э. д. с. компенсирует трение электронов:

$$m_e \frac{du}{dt} = - \frac{4}{3} \frac{\sigma_T e \gamma u}{c} - e \mathcal{E} = 0. \quad (14.7.6)$$

Здесь  $e_\gamma = 4 \cdot 10^{-13} (1+z)^4$  эрг/см<sup>3</sup> — плотность энергии излучения,  $\sigma_T$  — томсоновское сечение электрона. Уравнение индукции имеет тот же вид, что и раньше. За время порядка космологического, не учитывая изменения радиуса газового облака, набирается магнитное поле порядка

$$\mathcal{H} = 4 \frac{t_{\text{косм}}}{t_{06}} (1+z)^{3/2} \frac{\sigma_T e \gamma_0 4\pi}{e}, \quad (14.7.7)$$

где  $t_{\text{косм}}$  — сегодняшнее космологическое время ( $10^{10}$  лет),  $t_{06}$  — время одного оборота облака (для нашей Галактики  $t_{06} = 2 \cdot 10^8$  лет),  $e_{\gamma_0} = 4 \cdot 10^{-13}$  эрг/см<sup>3</sup>. Подставляя  $1+z=5$  и  $t_{06} = 2 \cdot 10^8$  лет, получим

$$\mathcal{H} = 10^{-23} \text{ гс.}$$

Любопытно, что оба изложенных механизма дают величину, не зависящую от плотности носителей тока.

Однако первичное поле оказывается весьма малым по сравнению с наблюдаемым в Галактике ( $\sim 10^{-6}$  гс). То же утверждение относится и к другим, не рассмотренным здесь механизмам генерации магнитного поля, например к комбинации термоэлектродвижущих сил, конвекции и вращения [Бирман (1950), Шлютер, Бирман (1950) и др.].

Итак, удовлетворительное решение невозможно без динамо-эффекта, который дал бы экспоненциальное нарастание поля с течением времени. Простые движения газа с вмороженным магнитным полем способны усиливать поле, но это усиление либо связано с уменьшением масштаба поля (при хаотическом движении), либо дает эффект, лишь линейный по времени, что недостаточно для заметного роста поля. Для примера рассмотрим диск с начальным радиальным полем (за исключением центральной области), силовые линии поля замыкаются сверху и снизу по вакууму; в целом поле квадрупольное. При вращении с угловой скоростью, зависящей от радиуса \*),  $\omega = \omega(R)$ , силовые линии вытягиваются. Появляется  $\phi$ -компонента поля

$$\frac{\partial \mathcal{H}_\phi}{\partial t} = R \frac{\partial \omega}{\partial R} \mathcal{H}_R. \quad (14.7.8)$$

Однако  $\mathcal{H}_R$  остается постоянным, поэтому  $\mathcal{H}_\phi$  растет только линейно, что явно недостаточно для заметного усиления начального поля за космологическое время.

Для осесимметричного и плоского движения были доказаны точные теоремы о невозможности динамо. В трехмерном случае долгое время были известны лишь такие решения, в которых нарастание поля было экспоненциальным, но с характерным временем, соответствующим времени нарушения вмороженности, т. е. пропорциональным проводимости («медленное динамо»). Для разреженной плазмы и космологических масштабов это время недопустимо велико. Казалось бы, есть общий закон, запрещающий быстрое нарастание. Однако в середине 60-х годов был дан простой пример «быстрого динамо». Представим себе тор сечения  $S$ , радиуса  $R$ , заполненный полем  $\mathcal{H}_0$ . Растянем тор, сохраняя его объем, до радиуса  $2R$ ; сечение уменьшится до  $S/2$ , поле из условия сохранения момента будет иметь величину  $2\mathcal{H}_0$ . Перегнем тор в виде восьмерки, а затем сложим два кольца восьмерки в один тор. Мы получим снова тор с радиусом  $R$  и сечением  $S$ , но с магнитным полем  $2\mathcal{H}_0$  — магнитный поток удвоился. Если раньше силовые линии могли быть замкнутыми кругами, то теперь силовые линии возвращаются в исходную точку лишь после двух оборотов. Однако эти

---

\*) Вращение — дифференциальное, не твердотельное.

«тонкие» свойства поля несущественны. Предлагаемая операция удваивает магнитный поток при каждом цикле движений, и такие циклы можно проводить неограниченное число раз. При постоянном темпе — один цикл за время  $T$  — получим нарастание по экспоненте  $2^{\frac{t}{T}} = e^{\frac{t \ln 2}{T}}$ .

Движение, однако, существенно не плоское, в нем обязательно присутствует винтовой поворот, превращающий тор в восьмерку. В работах Штеенбека (1963), Штеенбека, Краузе и Рейдлера (1966) построена теория хаотического винтового движения (зеркально неинвариантной турбулентности) с  $(\mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{u}) \equiv \alpha \neq 0$  и показано, что для магнитного поля получается уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\alpha \mathcal{H})$$

(мы выписываем только главный член), имеющее экспоненциально возрастающие решения. Авторы рассматривали случай малой проводимости. Позже Вайнштейн (1971) показал, что такой тип движения дает экспоненциальное нарастание и в случае большой проводимости. Возможно и комбинированное решение: дифференциальное вращение создает  $\mathcal{H}_\varphi$  из  $\mathcal{H}_R$  (как описано выше), турбулентность с  $\alpha \neq 0$  создает  $\mathcal{H}_R$  из  $\mathcal{H}_\varphi$ :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial t} = \operatorname{const} \cdot \alpha \mathcal{H}_\varphi.$$

Такая система двух уравнений (для  $\mathcal{H}_\varphi$  и  $\mathcal{H}_R$ ) уже имеет экспоненциальные решения [Фитримэнн, Фриш (1969), Е. Паркер (1971), Вайнштейн, Рузмайкин (1971)].

Несомненной верхней границей скорости нарастания поля является закон  $e^{\omega t}$ , где  $\omega$  — угловая скорость. При  $\omega = \frac{2\pi}{t_{06}} = 3 \cdot 10^8 \text{ лет}^{-1}$  и  $t \approx 10^{10} \text{ лет}$  такой закон дал бы возрастание в  $e^{300} = 10^{70}$  раз, что более чем достаточно. Более реалистические оценки сделать труднее. Необходимо возрастание в  $10^{10} - 10^{20}$  раз, т. е. в 3—7 раз более медленное.

Как и во многих других разделах космологии, придется констатировать, что нет сколько-нибудь надежной теории, но нет и тупика, т. е. нет четкого отрицательного ответа, который требовал бы введения сильного первичного космологического поля. Подробный обзор современного состояния теории динамо-эффекта см. Вайнштейн и Зельдович (1972).

В качестве «резервного» варианта выдвигалось предположение о том, что магнитное поле создается динамо-механизмом в более плотных областях, где больше скорость вращения и меньше характерное время, а затем это поле вместе с выброшенным газом расте-

кается по всей Галактике. Плотными областями могут быть звезды или ядро галактики [Хойл (1969), Бисноватый-Коган, Вайнштейн (1971), Бисноватый-Коган, Рузмайкин, Сюняев (1973)]. Выброшенные поля также могут служить эффективной «затравкой» для действия динамо-эффекта.

## § 8. Теория энтропийных возмущений

В теории горячей Вселенной существует особый тип возмущений, которые в принципе могут привести к выделению отдельных, обособленных, гравитационно связанных тел на современной стадии, при полном отсутствии возмущений метрики, плотности, скорости на ранней стадии и, в частности, вблизи сингулярности. Общая характеристика этих так называемых энтропийных возмущений была дана в § 4 гл. 10 и § 6 гл. 11. Напомним основной вывод: энтропийные возмущения с длиной волны, соответствующей массе  $M > 10M_{\odot}$ , остаются практически постоянными вплоть до момента рекомбинации. После рекомбинации в нейтральном водороде энтропийные возмущения превращаются в возмущения плотности и далее в растущие потенциальные возмущения при  $M > M_{\text{дж}} \sim 5 \times 10^4 M_{\odot}$  и в затухающие звуковые волны при  $M < 5 \cdot 10^4 \Omega^{-1/2} M_{\odot}$ . Здесь будет рассмотрена возможная роль энтропийных возмущений в образовании современной структуры Вселенной.

Можно сделать крайнее предположение, что вначале, вблизи сингулярности, имели место одни только энтропийные возмущения.

На первый взгляд такая гипотеза приводит к следствиям, не отличающимся от гипотезы адиабатических возмущений. Нужно только так подобрать спектры энтропийных возмущений и адиабатических возмущений (на РД-стадии), чтобы они дали одинаковый спектр растущих потенциальных возмущений на поздней стадии, после рекомбинации.

Однако объективно существующее глубокое различие двух гипотез, двух типов возмущений (энтропийных и адиабатических) здесь скрыто за допущением подбора начального спектра. Существует понятие «естественного» начального спектра. Это понятие несколько расплывчато — и не удивительно, так как нет фундаментальной теории начальных возмущений.

Определение «естественного» спектра сегодня скорее негативно: в естественном начальном спектре не должно быть особенностей (дельта-функций, разрывов, изломов, максимумов или минимумов) в момент  $t_0$ , достаточно близкий к сингулярности, когда все интересующие нас длины волн гораздо больше горизонта  $ct_0$ .

«Естественным» можно считать появление особенностей в результате тех или иных физических процессов на более поздних стадиях при определенных длинах волн. Примером таких длин волн является горизонт на момент рекомбинации. Масса вещества в шаре

с таким радиусом  $M \sim 10^{18} - 10^{19} M_{\odot}$ . Другой пример — длина волны затухания адиабатических возмущений на тот же момент, она охватывает массу порядка  $10^{13} M_{\odot}$ . Наконец, третий пример — джинсовская длина волны неустойчивости для нейтрального водорода охватывает массу порядка  $10^5 M_{\odot}$ .

Совпадение особенностей *первичного* спектра с характерными длинами, появляющимися (проявляющимися) на более поздней стадии, было бы случайностью, представляется искусственным, а поэтому противоречит понятию естественного первичного спектра.

Поэтому для адиабатических возмущений естественным считался спектр, не имеющий изломов при  $M > 10^{13} M_{\odot}$ ; после рекомбинации в таком спектре появляются особенности, например максимум в окрестности  $10^{13} M_{\odot}$ , связанный с затуханием адиабатических колебаний на предыдущем этапе. Для рассматриваемых здесь энтропийных возмущений естественным является спектр, не имеющий

изломов при  $M > \frac{5 \cdot 10^4}{\sqrt{\Omega}} M_{\odot}$ . После рекомбинации единственной особенностью спектра растущих возмущений оказывается максимум около  $M \sim 10^5 M_{\odot}$ . Этот максимум образуется вследствие того, что скорость нарастания возмущений обращается в нуль на джинсовской длине волны нейтрального водорода.

Какова дальнейшая судьба возмущенного вещества?

Если начальная амплитуда возмущений достаточна, то они успевают возрасти до  $\delta\rho/\rho \sim 1$  при  $z > 1$ , т. е. возмущения станут большими раньше сегодняшнего дня.

Для нелинейной стадии характерна существенная роль давления газа. Напомним, что именно давление газа обусловило величину джинсовской массы. Поэтому для рассматриваемых возмущений давление радикально влияет и на нелинейную стадию; приближенная нелинейная теория, изложенная выше (§ 2 гл. 13), здесь неприменима, «блинов» не будет!

Напомним картину эволюции однородной плазмы (гл. 8). При  $z = 1400$ ,  $T = 4000^\circ\text{K}$  происходит рекомбинация. Однако еще долгое время, вплоть до  $z \sim 200$ ,  $T \sim 540^\circ\text{K}$ , сохраняется тепловой контакт между излучением и материей; при этом  $T_{\text{вещ}} = T_{\text{изл}} = (1+z) \cdot 2,7^\circ$ . До тех пор, пока  $T_{\text{вещ}} \sim (1+z)$ , джинсовская масса остается постоянной. Если возмущения с  $M \geq M_{\text{дж}}$  нарастают до  $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 1$  в этот период, то давление включается сразу и останавливает рост возмущений при  $\rho_{\text{вещ}}$ , всего в несколько раз большей средней плотности газа, т. е. порядка  $10^3 \text{ атомов/см}^3$  для  $z = 200$ ,  $\rho \sim 10^{-22} \text{ г/см}^3$ .

Такие тела оказываются гравитационно связанными; в дальнейшем окружающий газ расширяется в соответствии с общим хаббловским расширением, но гравитационно связанные тела сжимаются по мере их охлаждения. В условиях, когда уже небольшое сжатие приводит к увеличению давления (благодаря адиабатичес-



кому закону роста давления,  $\rho \sim \rho^{1/2}$  для одноатомного газа), останавливающему сжатие, можно ожидать образования сферических плотных облаков — может быть, с небольшой сплюснутостью, если тело приобрело вращательный момент \*).

Какова дальнейшая судьба таких облаков, какова их роль в формировании общей структуры?

В работе Дорошкевича, Зельдовича и Новикова (1967а) была сделана попытка получить всю структуру Вселенной как следствие описанного выше типа возмущений. Была выдвинута гипотеза, что плотные облака превратятся в сверхзвезды и быстро, может быть со взрывом, выделяют ядерную энергию.

Ядерная энергия сгорания водорода в гелий — около 7 Мэв на протон — в  $10^6$  раз больше энергии ионизации и нагрева водорода до  $10^6$  °К. Следовательно, сверхзвезда может прогреть и «возмутить» массу газа, во много — например, в  $10^4$  раз — большую массы самой сверхзвезды. Достаточно того, чтобы «на хвосте гауссовского распределения» доля  $10^{-4}$  всего вещества превратилась в сверхзвезды и сгорела, как остальное вещество радикально изменяет свои свойства. Дальнейшие процессы пойдут уже под решающим влиянием нагрева и возмущений от первых сверхзвезд. Авторы надеялись эскалацией масштабов дойти до характерного размера скоплений галактик — порядка  $10^{15} M_{\odot}$ . О взрывах сверхзвезд см. Бисноватый-Коган (1968), Фрике (1973).

Другая гипотеза высказана Дикке и Пиблсом (1968); см. также Пиблс (1967б). Они предполагают, что энтропийные возмущения ответственны за рождение так называемых шаровых скоплений. Шаровые скопления состоят из  $10^5$ — $10^6$  звезд, близких по светимости и массе к Солнцу, так что масса шарового скопления также порядка  $10^5$ — $10^6 M_{\odot}$ . Они отличаются большой плотностью: размер их порядка 50 пс и средняя плотность  $\sim 10^{-22}$  г/см<sup>3</sup>. Отмечается стабильность плотности: плотность различных шаровых скоплений (даже принадлежащих к различным галактикам) приблизительно одинакова.

Значительная часть шаровых скоплений выделяется также малым содержанием элементов тяжелее гелия и металлов, о чем судят по спектрам звезд, входящих в состав этих скоплений.

Наконец, в нашей Галактике (и других галактиках) шаровые скопления принадлежат сферической составляющей: среднее удаление их от плоскости симметрии Галактики составляет 5000 пс, тогда как молодые открытые скопления имеют среднее удаление 120 пс.

Все перечисленные особенности говорят о том, что шаровые скопления, вероятно, являются древнейшими составными частями Галактики. Обзор см., например, сборник Холопов (редактор) (1962).

---

\*) Впрочем, давление, стремясь придать телу сферическую форму, одновременно уменьшает и набор момента.

Гипотеза Дикке и Пиблса сразу объяснила (по порядку величины) характерную массу шаровых скоплений \*). Развивая этот успех, авторы пришли к выводу, что значительная доля вещества (около половины) может разбиться на гравитационно связанные тела с массами порядка  $10^5$ — $10^6 M_{\odot}$ . Часть этих тел превращается в шаровые скопления, т. е. разбивается на звезды, остающиеся гравитационно связанными между собой, но большая часть путем столкновений и приливных взаимодействий рассеивается. В нашей Галактике шаровые скопления составляют около 0,1% полной массы.

Недавно судьбу сферического облака газа исследовала Румяйкина (1972). Ситуация оказалась сложной, зависящей от большого числа процессов — образования молекул  $H_2$  и их излучения и т. п. В возможном разбиении газового облака с массой  $10^5$ — $10^6 M_{\odot}$  на звезды существенную роль играет тепловая неустойчивость. Наряду с превращением облака в шаровые скопления или взрывающуюся сверхзвезду, автор отмечает возможность прямого коллапса с возникновением «черной дыры».

В гипотезе Дорошкевича, Зельдовича и Новикова (1967а) сделана попытка увязать раннее образование сверхзвезд с разбиением вещества на более крупные единицы. В гипотезе Дикке и Пиблса молчаливо предполагается, что эти два процесса между собой не связаны. Какие-то (адиабатические) возмущения имеют большой масштаб и создают скопления галактик и галактики. В первом приближении безразлично, действуют ли эти возмущения на газ из отдельных атомов или на газ, «атомами» которого являются облака с массой около  $10^6 M_{\odot}$  каждое.

Однако в действительности детальная картина изменяется существенно.

В отсутствие энтропийных возмущений газ даст структуру, подробно описанную в § 2 этой главы. Если же газ распался на облака, то эти облака могут «проскакивать» одно мимо другого, и плотный холодный слой не образуется. Подробно теория с двумя видами начальных возмущений до настоящего времени не разрабатывалась.

В принципе можно задаться пологим спектром одних только энтропийных возмущений и подобрать показатель так, чтобы в масштабе порядка  $10^6 M_{\odot}$  обособление произошло, например, при  $z \approx 100$ , но в большем масштабе — например  $10^{13}$  или  $10^{14} M_{\odot}$  — возмущения стали бы порядка единицы при  $z=3$ . Трудности такой концепции возникают при экстраполяции пологого спектра в об-

\*) Как было отмечено выше, джинсовская масса нейтрального водорода  $\sim 5 \cdot 10^4 \Omega^{-1/2} M_{\odot}$  в период, когда температура водорода равна температуре ионизации. Масса, в которой возмущения наиболее сильны при данном  $z < 1400$ , больше джинсовской: конкретное число зависит от показателя спектра, дополнительные множители появляются при переходе от спектра возмущений к спектру отдельных тел.

ласть еще более длинных волн. Эта сторона дела обсуждается в следующей главе в связи с наблюдениями реликтового излучения.

Выше рассматривались следствия возможной большой амплитуды энтропийных возмущений. Поставим вопрос о том, возможна ли теория без заметной роли энтропийных возмущений. Ясно, что шаровые скопления при этом придется объяснять как-то иначе.

Другая сторона дела заключается в том, что адиабатические возмущения на ранней РД-стадии обязаны были создавать энтропийные возмущения.

Методами § 3 гл. 13 можно показать, что есть два механизма возникновения энтропийных возмущений — диссипация энергии,  $\left. \frac{\delta \rho}{\rho} \right|_{\text{энтр}} \approx \frac{1}{\omega t} \left|_s \left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right)_{\text{адиаб}}^2 \right.$ , и ударные волны  $\left. \frac{\delta \rho}{\rho} \right|_{\text{энтр}} \approx \text{const} \cdot \left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right)_{\text{адиаб}}^2$ .

Для длин волн, ответственных за образование скоплений галактик с  $M \approx 10^{13} M_{\odot}$  и с соответствующей амплитудой  $\left. \frac{\delta \rho}{\rho} \right|_{\text{адиаб}} \sim 10^{-3}$ , оба механизма дают ничтожное  $\left. \frac{\delta \rho}{\rho} \right|_{\text{энтр}}$ . Таким образом, ответ целиком определяется тем, как спектр из начальных адиабатических возмущений экстраполируется в области малых масс. Поэтому теория с пренебрежимыми энтропийными флуктуациями вполне возможна, не противоречит общим принципам.

## § 9. Вихревая теория

Вихревая теория исходит из предположения, что на ранней РД-стадии плазма находится в состоянии турбулентного движения. В качественной форме вихревая теория предлагалась Гамовым (1952, 1954), Вейцзеккером (1951) и др.

В последнее время, с учетом современных данных о горячей Вселенной, вихревую теорию подробно развивают Озерной, Чернин (1967, 1968), Оорт (1970), Сато, Матсуда, Такеда (1970), Сато (1971), Томита и др. (1971); ссылки на другие работы см. на стр. 432. Важнейшим успехом вихревой теории является простое объяснение вращательного движения галактик.

Изложив основные положения вихревой теории, мы остановимся и на некоторых ее трудностях, отмеченных, в частности, Пиблсом (1971б, 1973в).

Итак, в современной вихревой теории предполагается, что перед рекомбинацией в плазме имеет место турбулентное движение. Предполагается также, что движение является дозвуковым,  $u < b_{\text{зв}}$ . Напомним, что скорость звука на ранней стадии равна  $b \sim 0,58c$ , а вблизи момента рекомбинации  $— 0,58c / \sqrt{1 + 14\Omega}$ , т. е.  $0,15c$  при  $\Omega = 1$ . Дозвуковая турбулентность соответствует несжимаемому движению жидкости, отдельные объемы жидкости обтекают друг друга; перепады давления порядка  $\rho u^2$  и достаточны для того, чтобы

менять скорость и направление течения. Но при таких перепадах давления не возникает заметных перепадов плотности:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{\delta P}{P} \sim \frac{\rho u^2}{\rho b_{\text{зв}}^2} \sim 3(1 + 14\Omega) \frac{u^2}{c^2} \ll 1. \quad (14.9.1)$$

Картина резко изменяется в момент рекомбинации. После рекомбинации фотоны и нейтральный водород движутся независимо. Длина пробега фотонов становится очень большой. Фотоны из разных объемов, двигавшихся друг относительно друга, перемешиваются. Нейтральный водород сразу после рекомбинации наследует от предыдущего этапа распределение скоростей. Скорость звука в нейтральном водороде при температуре около  $4000^\circ\text{К}$  мала,  $b_{\text{зв}} \approx 0,75 \cdot 10^8 \text{ см/сек}$ .

Скорость движения газа после рекомбинации во много раз больше скорости звука, турбулентность становится сверхзвуковой. Другими словами, давление нейтрального водорода мало — оно меньше давления РД-плазмы как раз в отношении плотности фотонов к плотности барионов, т. е.  $\sim 10^6$  раз. Влиянием давления нейтрального водорода на движение газа после рекомбинации можно пренебречь. Дальнейшее движение происходит по инерции и под действием сил тяготения. Гидродинамика в предельном случае нулевого давления не отличается от закона движения совокупности не связанных между собой материальных точек. Говоря иначе, ньютоновские уравнения движения частиц представляют собой уравнения характеристик системы гидродинамических уравнений в частных производных [при  $P=0$ ; см. Зельдович, Мышкис (1973)].

В первый момент после рекомбинации движение остается несжимаемым. В однородном (с постоянной плотностью) веществе с  $P=0$  пекулярная (случайная) скорость каждой частицы затухает на фоне космологического расширения:  $u \sim a^{-1} \sim t^{-1/2} \sim (z+1)$ , где  $a$  — общий масштаб Вселенной.

Для интересующего нас процесса образования обособленных тел решающую роль играет тот факт, что движение не остается несжимаемым. В начальный момент свободного движения  $t=t_{\text{рек}}$  (момент рекомбинации),  $\text{div } u=0$ , а значит,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} = 0$  \*). Однако  $\frac{\partial}{\partial t} \text{div } u \neq 0$ , поэтому уже вторая производная,  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \neq 0$ , зависит от координат. Поэтому с течением времени возникает неоднородность распределения плотности; вначале эта неоднородность возрастает

\*) При этом мы отвлекаемся от общего космологического расширения. Точнее,  $\text{div } u = 3H = 2t^{-1}$ ,  $\frac{d\rho}{dt} = -\frac{2\rho}{t}$ , но это расширение однородно, поэтому, вводя  $\delta\rho = \rho - \bar{\rho}$  (усреднение по пространству), получим уже точно:  $\frac{d\delta\rho}{dt} = 0$  при  $t=t_{\text{рек}}$ .

пропорционально  $(t - t_{\text{рек}})^2$ . Из соображений размерности ясно, что в этом периоде

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{u^2}{l^2} (t - t_{\text{рек}})^2.$$

В этом смысле эффект нелинейный — входит квадрат скорости возмущения. Для дальнейшего существенно, что в ходе расширения масштаб увеличивается, скорость убывает; поэтому рост флуктуаций плотности замедляется, не продолжается неограниченно, как  $(t - t_{\text{рек}})^2$ . В приложении к этому параграфу будет подробнее рассмотрена формальная сторона дела. Здесь мы ограничимся качественной картиной.

Возможны два предельных случая:

1) Слабая турбулентность; флуктуации плотности останавливаются на  $\frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1$  (для этого нужно  $\frac{ut_{\text{рек}}}{l} < 1$ ). Другими словами, сама турбулентность оказывается недостаточной для того, чтобы произошло обособление галактик, их скоплений и т. п. В действительности флуктуации плотности, даже малые, порождают и соответствующее поле тяготения, иными словами, эти флуктуации являются начальными для дальнейшего роста потенциальных возмущений за счет гравитационной неустойчивости. Таким образом, этот предельный случай переходит на рельсы адиабатических возмущений. Отличие заключается в том, что начальное поле скоростей содержит вихревые составляющие. Циркуляция скорости постоянна, она не исчезает, но потенциальные скорости нарастают с течением времени, как  $t^{1/2}$ , между тем вихревая компонента скорости при расширении уменьшается обратно пропорционально масштабу, т. е. как  $t^{-1/2}$ . Поэтому вихревая скорость оказывается относительно малой. Теория слабой турбулентности лишена той главной привлекательной черты, ради которой вводится турбулентность. Эта теория не объясняет наблюдаемого вращения [Пиблс (1971б)].

2) Рассмотрим теперь случай сильной турбулентности. Только теория сильной турбулентности может претендовать на роль вихревой теории образования галактик. В этой теории  $\frac{ut_{\text{рек}}}{l} \geq 1$ ; это условие можно наглядно сформулировать так:  $\frac{1}{t_{\text{рек}}} = \frac{3}{2} H_{\text{рек}}$ , где  $H_{\text{рек}}$  есть параметр Хаббла в момент рекомбинации. Произведение  $lH_{\text{рек}}$  есть хаббловская скорость в масштабе  $l$ . Значит, условие сильной турбулентности заключается в том, что (в данном масштабе  $l$ ) турбулентные скорости больше хаббловских.

В самом грубом приближении можно пренебречь расширением и связанным с ним затуханием турбулентной скорости. После рекомбинации частицы движутся по инерции. С течением времени траектории соседних частиц пересекаются и возникают слои

бесконечной плотности. По существу, повторяется ситуация с «блинами» (§ 2 гл. 8). Качественное отличие заключается в том, что движение является вихревым. Возможно твердотельное вращение «блина» как целого, а также и скольжение одних слоев «блина» относительно других. Количественное отличие вихревой теории от теории адиабатических возмущений заключается в том, что предсказывается раннее образование «блинов», при  $z > 100$  (под лозунгом «теперь или никогда»). При таком раннем образовании «блинов» плотность их велика; средняя плотность при  $z = 100$  равна  $10^{-23} \Omega \text{ г/см}^3$ , т. е. не меньше  $10^{-24} \text{ г/см}^3$ .

Плотность вещества, сжатого в «блины», очевидно, еще во много раз больше. Далее, при большом  $z$  и большой плотности излучения и вещества должна быть сильной теплоотдача газа, сжатого и нагретого ударной волной. К излучению энергии тормозным механизмом (при столкновении электронов с ядрами) добавляется отдача энергии электронами при комптоновском рассеянии, поскольку велика плотность излучения. При  $z = 100$ ,  $\epsilon_{\text{изл}} = 4 \cdot 10^{-13} z^4 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ эрг/см}^3$  время потери энергии электроном равно  $\frac{cm_e}{2\sigma\epsilon} = 5 \cdot 10^{11} \text{ сек}$  — в 600 раз меньше космологического времени  $t \sim 3 \cdot 10^{14} \text{ сек}$ .

Быстрое охлаждение означает, что образовавшиеся сгущения потеряют свою тепловую энергию и останутся плоскими и плотными. Большая плотность обособленных тел является главной и характерной особенностью — а может быть, и трудностью — вихревой теории [см., в частности, Пиблс (19716)].

В ряде работ Озерного и Чернина (1967, 1968), Озерного (1971), Озерного и Чибисова (1970), Чернина (1971, 1972), Курскова и Озерного (1974а, б, в), Томиты (1973) вихревая теория развивается весьма подробно. Авторы считают оптимальным выбор характерной скорости около 0,05—0,2с. Задание одного численного параметра вместе с несколькими качественными принципами, по утверждению авторов, практически определяет остальные параметры (см. по этому поводу § 10 этой главы).

Потребуем вслед за авторами, чтобы указанная характерная скорость имела место как раз в масштабе  $L = ut_{\text{рек}}$  в момент рекомбинации или, точнее, в момент равенства плотности материи и плотности излучения  $z_{\text{рав}} = 2 \cdot 10^4 \Omega$ .

В масштабах  $R > L$  вихревые скорости будем считать меньшими; в этих больших масштабах начальные скорости не успели измениться, возможны в принципе любые предположения. В частности, наиболее экономное предположение есть предположение о падающем спектре скорости.

В масштабах  $R < L$  спектр должен быть колмогоровским [см. Колмогоров (1941)]. В таком спектре  $\frac{u(R)}{u(L)} = \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}$ .\*. Такая форма

\* ) Здесь  $u(R)$  есть разность скоростей на расстоянии  $R$ ,

спектра, как известно, следует из того, что крупномасштабное движение затухает вследствие турбулентной вязкости. При этом энергия крупномасштабного ( $L$ ) движения не прямо переходит в тепло, а сперва превращается в энергию движения меньшего масштаба, т. е. имеет место поток энергии по шкале масштабов. Турбулентная вязкость по порядку величины равна  $\nu_{\text{турб}} = Ru(R)$ , скорость диссипации энергии

$$q = \rho u R \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 = \rho u R \left( \frac{u}{R} \right)^2 = \rho \frac{u^3(R)}{R}.$$

Из условия, чтобы  $q$  не зависело от  $R$  (вся диссипированная энергия проходит через все масштабы), и следует закон  $u(R) \sim R^{1/3}$ , приведенный выше. Минимальный масштаб  $R_0$ , до которого справедлив закон, определяется вмешательством истинной (не турбулентной, фотонной в данном случае) вязкости.

Отсюда получится  $R_0 = L [\text{Re}(L)]^{-1/4}$ . Таким образом, оказывается известным весь спектр турбулентного движения.

Рассмотрим сначала очень упрощенный случай: предположим, что до рекомбинации выполняется условие РД (т. е.  $\rho_{\text{изл}} > \rho_{\text{вещ}}$ ) и рекомбинация происходит мгновенно.

Эти упрощения нужны для того, чтобы процесс обособления в нейтральном водороде начался с колмогоровским спектром вихревых скоростей в интервале от «несущего энергию» максимального масштаба  $L$  до масштаба затухания  $R_0$ .

Энергонесущий (наибольший) масштаб  $L$  имеет пекулярную, вихревую скорость движения, как раз равную хаббловской в данном масштабе,  $u_L = HL$ . Это значит, что время возникновения контраста плотности  $\frac{\delta \rho}{\rho} \sim 1$  как раз порядка космологического времени.

В меньших масштабах в колмогоровском спектре характерное время  $\tau$  меньше. В самом деле,  $\tau \sim \frac{R}{u}$ , но  $u \sim R^{1/3}$ , значит,  $\tau \sim R^{2/3}$ . С учетом  $\tau = t$  для  $R = L$  получим

$$\tau = t \left( \frac{R}{L} \right)^{2/3}.$$

Значит, в наименьшем масштабе  $R_0$  сильное сжатие, ударные волны и охлаждение сжатого вещества происходят весьма быстро, за время, существенно меньшее космологического.

Остаются ли возникающие «микроблины» гравитационно связанными? Превращаются ли они за столь же малое время в звезды? Или движение по другим осям (и, в частности, вращение) вызывает

\*) Это  $R_0$  меньше, чем силковский масштаб  $R_c = L [\text{Re}(L)]^{-1/2}$ , соответствующий затуханию за космологическое время  $t$ . Турбулентная подкачка энергии связана с меньшим временем. Здесь  $\text{Re}$  есть число Рейнольдса. Рассматриваем  $\text{Re}$  для разных масштабов,  $\text{Re}(R) = u(R) R \nu^{-1}$ . В формулу, приведенную в тексте, входит  $\text{Re}$  для максимального масштаба  $L$ .

диспергирование, рассеяние этих сравнительно малых по массе, но плотных образований? В настоящее время на эти вопросы нет ясных ответов. Важно подчеркнуть, что движение в большом масштабе — вплоть до энергонесущего — продолжается своим чередом, независимо от судьбы малых образований.

С течением времени достигается условие  $\delta\rho/\rho \sim 1$  в больших масштабах. Если к этому моменту процессы в меньших масштабах оставили вещество в газовом состоянии, то столкновения газовых масс и высвечивание кинетической энергии столкновений будут продолжаться. В этом случае скопления галактик (соответствующие максимальному масштабу) также окажутся весьма плотными, в соответствии с тем, что они образуются при  $z \approx 100$ , да еще с потерей энергии.

Меньшей плотности скоплений можно ожидать, если в малом масштабе успевают образоваться галактики и звезды. Динамика скопления, т. е. динамика большого масштаба, есть в этом случае динамика бесстолкновительного газа, молекулами которого являются малые образования — галактики. Именно возможность пересечения траекторий без слипания частиц приводит к тому, что энергия хаотического движения частиц не исчезает и, в согласии с теоремой вириала, хаотическое движение ограничивает среднюю плотность скопления. Таким образом, вихревая теория в этом варианте приводит к картине образования наибольших структурных единиц — скоплений, сверхскоплений — путем «скупивания» меньших образований.

В другом варианте в малых масштабах вещество остается газобразным и гравитационно не связанным. Рыхлые облака газа занимают большую долю объема, они сталкиваются между собой, высвечивая кинетическую энергию относительного движения.

В действительности хаотическое относительное движение в малом масштабе, которое затухает при пересечении траекторий, не является источником упругости, такое движение не останавливает крупномасштабное сжатие. В этом варианте возникают крупномасштабные гравитационные образования большой плотности.

Озерной, Чибисов (1970) уточняют вихревую теорию, учитывая, что 1) при  $\Omega > 0,07$  (для  $H = 75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ ) равенство плотностей вещества и излучения,  $\rho_{\text{изл}} = \rho_{\text{вещ}}$ , достигается задолго до рекомбинации,  $z_{\text{рав}} = 2 \cdot 10^4$ , тогда как  $z_{\text{рек}} = 1400$ ; 2) немгновенность рекомбинации вызывает дополнительное затухание. В периоде  $z_{\text{рав}} > z > z_{\text{рек}}$ ,  $t_{\text{рав}} < t < t_{\text{рек}}$  происходит уменьшение всех скоростей, пропорциональное уменьшению  $z$ . Напомним, что в РД-периоде при  $\rho_{\text{изл}} > \rho_{\text{вещ}}$  скорости крупномасштабных движений, в которых не сказывается вязкость (ни фотонная, ни турбулентная), остаются постоянными.

Скорости дополнительно уменьшаются во время затянутой рекомбинации. Существенно, что в ходе изменения доли свободных



электронов от 1 до  $10^{-4}$  от полного их числа прозрачность меняется в  $10^4$  раз. Для каждой длины волны возмущения есть такой момент и такой уровень ионизации, при которых данное возмущение затухает наиболее быстро. Чибисов (1972б) получил выражение для затухания малых вихревых возмущений:  $\frac{u_{\text{после}}}{u_{\text{до}}} = e^{-(M/M_*)^{-1/2}}$ ,

$M_* = 10^{11} M_{\odot}$ . Авторы вихревой теории утверждают, что учет всех этих факторов позволяет улучшить согласие выводов вихревой теории с наблюдениями.

Авторы вихревой теории отмечают, что теория а) дает разумное соотношение между количеством вещества в быстровращающихся (в том числе спиральных) и слабо- или невращающихся (эллиптических) галактиках; б) дает разумную величину средней плотности галактик и их момента вращения и в) дает разумное распределение скоплений галактик по массам и плотностям.

При сравнении теории с наблюдениями надо иметь в виду следующее. Как показали Дорошкевич и Шандарин (1974), переход от фурье-спектра возмущений к распределению по массам отнюдь не прямолинеен, связан с большой дисперсией и большими безразмерными множителями. Результаты зависят не только от одного параметра — скорости движения в энергонесущем масштабе, но и от характера исходного спектра в больших масштабах. Однако представляется, что трудная задача конкретизации теории с целью решения еще более сложной проблемы — сравнения ее с прямыми наблюдениями галактик и скоплений — не является единственным (и, может быть, не является главным) путем проверки правильности теории. Необходимо привлечь наблюдения и теоретические соображения другого типа — искажения реликтового излучения и релятивистскую теорию космологической сингулярности. Об этом речь пойдет в следующем параграфе и в следующей главе.

## ПРИЛОЖЕНИЕ К § 9

Рассмотрим нелинейную стадию эволюции вихревых возмущений, которая наступает после момента рекомбинации. Вихревое движение после этого момента происходит со сверхзвуковой скоростью, поэтому до возникновения ударных волн можно пренебречь давлением вещества. Пренебрегаем также и гравитационными полями, связанными с возмущениями плотности. Последнее отличает данную задачу от рассмотренной в § 2 гл. 13, задачи о нелинейной стадии адиабатических возмущений. Аналогично методу § 2 гл. 13, разложим движение среды на хаббловское расширение и пекулярное движение. Запишем вектор  $\mathbf{r}$  положения каждой частицы в эйлеровой системе координат в виде

$$\mathbf{r} = t^{2/3} \mathbf{s} + \mathbf{f}(t) \psi(\mathbf{s}); \quad (14.9.п.1)$$

$\mathbf{s}$  — лагранжева координата, второй член описывает пекулярное смещение. Наша задача заключается в нахождении функции  $\mathbf{f}(t)$ . Абсолютная скорость частицы в ньютоновской картине есть  $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  ( $\mathbf{s} = \text{const}$ ). Пекулярная скорость

есть разность между абсолютной скоростью и хаббловской скоростью невозможной среды в той же точке пространства:

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}} - H\mathbf{r} = \left( \dot{f} - \frac{2}{3f} \dot{f} \right) \Psi. \quad (14.9.п.2)$$

Как известно (см. § 1 гл. 3), пекулярная скорость убывает обратно пропорционально масштабу, т. е. как  $t^{-2/3}$ . Относя численный множитель к функции  $\Psi$  получим

$$\dot{f} - \frac{2}{3} \frac{\dot{f}}{f} = t^{-1/3}. \quad (14.9.п.3)$$

Определим лагранжеву координату  $\mathbf{s}$  как положение точки в момент начала свободного движения, т. е. в момент рекомбинации  $t_{\text{рек}}$ :

$$\mathbf{r} = t_{\text{рек}}^{2/3} \mathbf{s}, \quad \dot{f}(t_{\text{рек}}) = 0. \quad (14.9.п.4)$$

С этим начальным условием получим решение уравнения (14.9.п.3):

$$\dot{f} = t^{2/3} \cdot 3 \left( t_{\text{рек}}^{-1/3} - t^{-1/3} \right). \quad (14.9.п.5)$$

Перемещение частицы в сопутствующем пространстве дается функцией  $\varphi$  (не смешивать  $\varphi$  с потенциалом!):

$$\varphi = \frac{\dot{f}}{t^{2/3}} = 3 \left( t_{\text{рек}}^{-1/3} - t^{-1/3} \right). \quad (14.9.п.6)$$

Как видно из формулы,  $\varphi \sim (t - t_{\text{рек}})$  вблизи начального момента  $t_{\text{рек}}$  и  $\varphi = 3t_{\text{рек}}^{-1/3} = \text{const}$  асимптотически при  $t \rightarrow \infty$ . Этот результат существенно отличается от результата § 2 гл. 13  $\varphi \sim t^{2/3} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$  для растущих адиабатических возмущений, усиливаемых своим гравитационным полем.

Зная смещения частиц, вычисляем плотность вещества:

$$\frac{\rho(\mathbf{s}, t)}{\rho(t)} = D^{-1}, \quad D = |d_{ik}|, \quad d_{ik} = \delta_{ik} + \varphi(t) \frac{\partial \psi_i}{\partial s_k}. \quad (14.9.п.7)$$

В вихревой теории функция  $\Psi(\mathbf{s})$  отнюдь не должна быть потенциальной, как это было для адиабатических возмущений; тензор  $\frac{\partial \psi_i}{\partial s_k}$  несимметричен в вихревой теории, его антисимметричная часть соответствует вращению. Рациональным выбором осей координат, постоянным для данной частицы, можно привести тензор  $\frac{\partial \psi_i}{\partial s_k}$  к виду

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha & \omega & \delta \\ -\omega & \beta & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & -(\alpha + \beta) \end{array} \right\|. \quad (14.9.п.8)$$

Величина  $\omega$  характеризует вращение вокруг оси  $z$  (третьей оси). Учтен тот факт, что начальное движение (еще на стадии до рекомбинации) есть движение несжимаемой среды, след тензора  $\text{Sp} \frac{\partial \psi_i}{\partial s_k} = \frac{\partial \psi_i}{\partial s_i} = 0$ . Невихревая (симметричная) часть тензора характеризуется также недиагональными  $\delta$  и  $\varepsilon$ . Условившись, что ось  $z$  направлена по оси вращения, мы оставили одну лишь степень свободы — поворот координат вокруг оси  $z$  — и использовали

ее чтобы исключить симметричную часть  $\frac{\partial \psi_1}{\partial s_2}$  и  $\frac{\partial \psi_2}{\partial s_1}$ . Величины  $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \omega$  зависят от  $s$ , так же как и ориентация осей нашей системы координат.

В принятых обозначениях получим, расписывая (14.9.п.7):

$$\frac{\rho(s)}{\rho} = \{1 - \varphi^2 [\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 - \omega^2] - \varphi^3 [\alpha\beta(\alpha - \beta) + \delta^2\beta + \varepsilon^2\alpha + \omega^2(\alpha + \beta)]\}^{-1}. \quad (14.9.п.9)$$

Как и следовало ожидать, при малых  $\varphi$  разложение  $\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} - 1$  начинается с  $\varphi^2 \sim (t - t_{\text{рек}})^2$ , поскольку учтено, что в начальный момент движение (унаследованное от дорекомбинационного) несжимаемое,  $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$  при  $t = t_{\text{рек}}$ .

При данных компонентах тензора движение может привести к образованию ударной волны при обращении в нуль величины, заключенной в фигурные скобки. В отличие от потенциального случая (§ 3 гл. 13), эта величина никогда не имеет всех трех положительных корней для  $\varphi$ . Однако один положительный корень вполне возможен и при  $\omega \neq 0$ . Не всякий положительный корень для  $\varphi$  реализуется как ударная волна и бесконечная плотность, поскольку надо иметь в виду ограничение роста  $\varphi \rightarrow \text{const}$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

В действительности, однако, когда рост  $\varphi$  (эффективно при  $z \sim 0,3z_{\text{рек}}$ ) останавливается, возникшие возмущения плотности начинают гравитационно влиять на решение. Наше пренебрежение гравитацией становится незаконным, и возмущения плотности являются начальными возмущениями растущего решения типа решения § 2 гл. 13.

Выражение для  $\frac{\rho}{\rho}$  (14.9.п.9) заставляет предполагать, что между плотностью и вихрем скорости есть антикорреляция. В частности, в элементе объема, в котором равны нулю все компоненты тензора,  $\alpha = \beta = \delta = \varepsilon = 0$ , кроме  $\omega \neq 0$ , плотность монотонно убывает:  $\frac{\rho}{\rho} = (1 + \varphi^2\omega^2)^{-1}$ . В элементе объема с  $\omega = 0$  вначале, при  $\varphi \ll 1$ , плотность обязательно возрастет. Действительно, пренебрегаем  $\varphi^3$  по сравнению с  $\varphi^2$  в (14.9.п.9), а коэффициент при  $\varphi^2$  в квадратных скобках положителен, так как  $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ . В заключение заметим, что подробно статистическая теория описываемой ситуации не разработана.

## § 10. Сравнение эволюционных теорий происхождения галактик

В предыдущих параграфах мы познакомились с некоторыми наблюдательными фактами и основными теоретическими утверждениями, касающимися строения и происхождения галактик.

Эти теоретические утверждения в большинстве своем носят характер следствий, вытекающих из начальных условий. В настоящее время фундаментальной теории выбора начальных условий не существует. Но при этом существуют — и они изложены выше — несколько теорий, каждая из которых может быть «правильна» в узком смысле: следствия из принятых начальных условий получены без ошибок. Нас же интересует то, что происходило во Вселенной

в действительности. В природе осуществляется, скорее всего, какой-то один тип начальных условий, один тип эволюции или, по крайней мере, один тип является наиболее важным, ведущим. Маловероятно, чтобы два или более разных типа возмущений были одинаково существенны.

В принципе ответ нужно искать, сопоставляя расчеты эволюции с наблюдательными данными. Однако очень важно использовать при этом не только данные, касающиеся масс, плотностей, вращения галактик и скоплений галактик, но и данные о реликтовом излучении и о процессах вблизи сингулярности.

Теорию образования галактик нельзя строить, игнорируя или недооценивая общие сведения об эволюции Вселенной, накопленные к настоящему времени. В данном параграфе мы будем широко использовать данные первых двух разделов, а также те сведения о галактиках, о реликтовом излучении и сингулярности, которые излагаются позже, в следующем параграфе, в последних главах раздела III и в разделах IV и V. Связанное с этим неудобство для читателя искупается тем, что общее обсуждение образования галактик не отрывается от изложения отдельных теорий в предыдущих параграфах.

В настоящее время нет теории, которая была бы единодушно признана. Нижеследующее изложение, несомненно, несет отпечаток субъективности, поскольку мы отдаем предпочтение определенной системе взглядов. Мы излагаем те причины и доводы, которые обусловили это предпочтение.

При построение общей картины образования галактик первый выбор, который можно сделать,— это выбор между конденсацией разреженного газа и взрывом сверхплотного тела.

Последовательным сторонником второго направления является Амбарцумян (1960). Большой заслугой Амбарцумяна [см. также Амбарцумян, Казютинский (1973)] является указание на активность ядер галактик и на сходство процессов в квазарах и в ядрах галактик. Амбарцумян предположил, что галактики целиком образуются из сверхплотных тел, остатками которых (сохранившими свою активность и энергию) являются ядра, наблюдаемые в настоящее время. В рамках эволюционной космологии представлялось возможным описать эти сверхплотные тела, например, как вещество в сингулярном состоянии, задержавшееся в своем расширении по сравнению с основной частью вещества [Новиков (19646), Нееман (1965)]. Такие задержавшиеся ядра получили название «белые дыры» (отоны). Высказывались мнения, что, может быть, не галактики, а только квазары описываются таким образом.

Каково современное отношение к такому направлению?

Идея образования галактик из изолированных сверхплотных тел наталкивается на трудности, связанные с моментом вращения галактик. Так, например, наша Галактика при массе  $\sim 2 \cdot 10^{11} M_{\odot}$

имеет момент порядка  $2 \cdot 10^{74} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек}$ , соответствующий окружной скорости  $\sim 300 \text{ км/сек}$  на радиусе около  $5 \text{ кпс}$ . Попробуем представить себе, что Галактика образовалась из начального сверхплотного тела с радиусом, скажем, в  $1 \text{ пс}$ . Момент Галактики соответствует такой линейной скорости на экваторе такого тела, которая превышает скорость света. Противоречие усилится, если представить, что тело целиком находится под своим гравитационным радиусом при массе и моменте Галактики:  $r_g = 0,01 \text{ пс}$  для  $M = 10^{11} M_\odot$ .

Применительно к квазарам это возражение недействительно: момент квазаров неизвестен \*). Однако в последнее время показано, что вся идея взрывающихся «белых дыр» наталкивается на трудности [Зельдович, Новиков, Старобинский (1974)]. Оказалось, что квантовомеханический процесс рождения частиц вблизи сингулярности неизбежно приводит либо к раннему взрыву «белой дыры», либо к тому, что она никогда не взрывается. Подчеркнем, что изложенные критические замечания не касаются идеи современной активности ядер галактик и квазаров, хотя и ограничивают представления о возможном источнике энергии, питающей эту активность.

Применительно к образованию галактик в настоящее время доминирует точка зрения конденсации из более разреженного газа. Если стать на эту точку зрения, то остается вопрос о выборе типа космологической модели, т. е. о выборе между теориями происхождения галактик, изложенными в предыдущем параграфе.

Начнем с поведения возмущений вблизи сингулярности. Адиабатические и энтропийные возмущения совместимы с малостью возмущений метрики, т. е. с квазиизотропным решением, которое вблизи сингулярности не отличается по своим локальным свойствам от строго однородного и изотропного решения. Следовательно, эти концепции не изменяют известных результатов строго однородной теории, касающихся нуклеосинтеза (§ 5 гл. 7):  $\text{He}^4 - 0,25-0,27$ ;  $D < 10^{-4}$ ;  $\text{He}^3 < 10^{-4}$ , которые, по-видимому, подтверждаются наблюдениями.

Вихревая теория требует существенно неизотропной сингулярности (§§ 4, 6 гл. 11); вихревые возмущения обязательно требуют изменения закона расширения вблизи сингулярности, а это приводит (§ 5 гл. 20) к начальному химическому составу, резко отличному от приведенного выше и, вероятно, не согласующемуся с наблюдениями (либо больше 30%  $\text{He}^4$ , либо 2—3%  $D$ ) \*\*).

Но еще важнее следующее. Представим себе, что начало расширения действительно было не фридмановским, а каким-то другим и только с течением времени решение приблизилось к фридмановскому. Согласно вихревой теории, при приближении к фридмановскому.

\*) По-видимому, из самого факта компактности квазаров следует, что их вращательный момент мал.

\*\*) О возможности совместить фридмановское начало расширения с вихревыми движениями см. Чибилов (1975).

кому решению все отклонения от метрики Фридмана, кроме вихревых, были резко подавленными. Спрашивается: почему в сингулярности начальные условия были именно такими, чтобы в далеком будущем привести к столь специфичной ситуации? Гораздо правдоподобнее считать, что при приближении к фридмановскому решению все типы возмущений будут представлены одинаково (гипотеза равномерного распределения). Но тогда вихревые возмущения быстро затухнут, а адиабатические будут нарастать (как мы видели в гл. 11), и развитие пойдет по рельсам теории адиабатических возмущений.

Наконец, важно учитывать еще квантовые явления вблизи сингулярности. Рождение частиц в анизотропной сингулярности в простейшем случае приводит к изотропизации, переводит космологическую модель на рельсы квазиизотропного решения (см. гл. 23). Конкретно для космологических моделей с вихревым движением вещества этот процесс еще предстоит исследовать. Весьма вероятно, что с учетом квантовых явлений такие модели с вихрем исчезнут вовсе, окажутся внутренне противоречивыми [Лукаш, Новиков, Старобинский (1975)].

Теперь встанем на точку зрения астронома, не считающего убедительными доводы, относящиеся к периоду от сингулярности до нуклеосинтеза включительно. Проанализируем более поздний период, начинающийся по окончании аннигиляции электронов и позитронов и продолжающийся вплоть до сегодняшнего момента, т. е.  $10^3 \leq z \leq 0$ . Этот период включает эпоху РД-плазмы, рекомбинацию гелия и водорода, рост возмущений в нейтральном газе, образование галактик, квазаров и т. п. и вторичную ионизацию газа, не вошедшего в состав гравитационно связанных объектов.

Начнем с сопоставления выводов теории и наблюдений реликтового излучения.

Отличительная особенность вихревой теории — это предположение о большой амплитуде возмущений, о большой скорости вихревых движений, наложенных на общее хаббловское расширение. Эта особенность возникает неизбежно: вихревое движение в первый момент после рекомбинации не вызывает возмущения плотности.

В первом варианте теории предполагалось, что скорость вихревого движения в момент рекомбинации порядка 0,1—0,4 скорости света. Соответствующие флуктуации температуры реликтового излучения, очевидно, также равны  $\frac{\Delta T}{T} \approx 0,1—0,4$ . Ничего подобного не наблюдается — в действительности  $\frac{\Delta T}{T} < 3 \cdot 10^{-4}$ .

Для объяснения этого авторы вихревой теории предполагали, что флуктуации температуры ослабевают при комптоновском рассеянии. Флуктуации необходимо ослабить по крайней мере в 300 раз, для этого нужно не менее шести рассеяний, т. е. оптическая толщина  $\tau \geq 6$ .

Большая начальная скорость движения действительно приводит к тому, что очень рано после рекомбинации происходит столкновение газовых облаков и образование ударных волн.

В рассматриваемом выше первом варианте вихревой теории предполагалось, что галактики образуются весьма рано, при  $z \approx 130$ . Раннее столкновение облаков и раннее образование гравитационно связанных объектов на первый взгляд согласуется с многократным рассеянием реликтового излучения, необходимым для того, чтобы совместить большие вихревые скорости РД-плазмы с наблюдаемой изотропией реликтового излучения.

Однако в действительности раннее возникновение ударных волн и ранняя ионизация газа создают большие трудности. Раннему моменту соответствует большая плотность излучения и быстрое охлаждение электронов за счет «обратного комптон-эффекта» — рассеяния фотонов с увеличением частоты (в среднем) и с потерей энергии электронов. Когда в ходе охлаждения температура электронов падает, плотность плазмы соответственно растет, так как холодная плазма окружена горячей, еще не остывшей плазмой и в первом приближении сохраняется давление.

Так, например, при  $z=130$ ,  $\Omega=0,5$  средняя плотность равна  $3 \text{ см}^{-3}$ , в ударной волне плотность возрастает до  $12 \text{ см}^{-3}$ . При скорости волны  $10^9 \text{ см/сек}$  (начальная скорость  $u \approx 0,3 c$ , она падает с расширением пропорционально  $z$ ) достигается температура порядка  $10^9 \text{ К}$ . При падении ее до  $10^6 \text{ К}$  плотность увеличивается в  $10^4$  раз, достигая  $10^6 \text{ см}^{-3}$ . При такой плотности рекомбинация идет весьма быстро, невозможно длительно поддерживать газ в полностью ионизованном состоянии.

Позже был предложен другой, так называемый «тихий» вариант вихревой теории, отличающийся сравнительно малой начальной вихревой скоростью,  $u/c \approx 0,03$ .

После рекомбинации, в нейтральном веществе, вихревая скорость затухает обратно пропорционально линейным размерам. Напомним, что любая скорость (наложенная на общее расширение) затухает по такому закону \*), если ее не усиливает гравитационное поле возмущения плотности. Пусть в момент рекомбинации  $\left(\frac{u t}{\lambda}\right) < 1$ ; это условие эквивалентно тому, что вихрь ( $\text{rot } u$  порядка отношения  $u/\lambda$ ) меньше постоянной Хаббла  $H \sim 1/t$ . Тогда в приближении, не учитывающем гравитационное поле возмущений, ударные волны никогда не успевают образоваться (см. приложение к § 9), при  $t \rightarrow \infty$  получим

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \Big|_{\infty} \sim \left( \frac{u_0 t_0}{\lambda_0} \right)^2 \ll 1. \quad (14.10.1)$$

\*) При этом скорость уменьшается, но угловой момент сохраняется!

Общая картина «тихого» варианта такова: начальное вихревое возмущение затухает, оставляя малое возмущение плотности. Уже вслед за этим возмущение плотности порождает потенциальное движение, усиливающее возмущение плотности в соответствии с гравитационной неустойчивостью (см. приложение к § 9).

Выбирая начальное возмущение, мы получаем ту или иную амплитуду растущего потенциального возмущения. В «тихом» варианте предлагается выбор такой, что образование гравитационно связанных тел приурочено к  $z \sim 30-20$ .

Но и при этом снова остается противоречие с наблюдаемой изотропией реликтового излучения; начальное  $u/c \approx 0,03$  дало бы  $\Delta T/T \approx 0,03$  — в 100 раз больше наблюдаемого! В «тихом» варианте не отпала необходимость сглаживания начальной анизотропии излучения. Однако если образование галактик и вторичная ионизация происходят при  $z \approx 30$  или позже, то сгладить анизотропию невозможно. Действительно, максимальная оптическая толща есть

$\tau = 0,03 \sqrt{\Omega h_{80}^2} z^{1/2}$ , где  $h_{80} = \left( \frac{H}{50 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}} \right)$ . При  $\Omega = 1/8$ ,  $z = 30$ ,  $h_{80} = 1$  получаем  $\tau = 3,5$  и  $e^\tau = 13$ , тогда как нужно 100, чтобы согласовать с наблюдаемой изотропией реликтового излучения.

Вихревая теория, по-видимому, несовместима с наблюдаемой изотропией реликтового излучения.

Наряду с вопросом о том, возможна ли вихревая теория, исходя из сравнения с наблюдениями реликтового излучения, нужно рассмотреть и вопрос о том, насколько она привлекательна: какой элемент произвола содержится в этой теории, каковы другие ее следствия, кроме предсказаний, касающихся масс и вращения галактик и анизотропии реликтового излучения, и сравнить ее в этом смысле с теорией адиабатических возмущений.

В теории адиабатических возмущений для объяснения современной структуры Вселенной нужно задать возмущения метрики с амплитудой порядка  $10^{-3} - 10^{-4}$  в масштабе, соответствующем  $M \sim 10^{13} - 10^{14} M_\odot$ .

Спектр возмущений можно безболезненно продолжить с той же амплитудой (по метрике) в обе стороны. Более длинноволновые, соответствующие  $M \gg 10^{14} M_\odot$ , возмущения растут медленнее, и они (при той же амплитуде метрики) дадут сегодня  $\left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right) \ll 1$ , т. е. дадут возмущения реликтового излучения порядка  $10^{-4}$ , не противоречащие наблюдениям.

Возмущения с  $M \ll 10^{14} M_\odot$  затухают и не влияют на рождение галактик (§ 2 гл. 10). Если амплитуда этих возмущений также порядка  $10^{-3} - 10^{-4}$ , то при затухании их не возникнут никакие наблюдаемые эффекты.

Итак, в адиабатической теории можно выбрать начальный спектр (без какого-либо выделенного характерного масштаба), задав его



одной характерной величиной — амплитудой и предоставив законам природы выделить характерный масштаб скоплений галактик. Эти свойства теории адиабатических возмущений поучительно сравнить со свойствами вихревой теории.

Авторы вихревой теории утверждают, что эта теория содержит только один начальный параметр — характерную скорость  $u$  или безразмерное отношение вихревой скорости к скорости звука  $b$  в момент равенства плотности излучения и материи,  $\beta = \frac{u}{b_{\text{вв}}} \approx 2 \frac{u}{c}$ .

Предполагается, что эта скорость относится к масштабу, связанному с ней соотношением  $R \approx ut$  на тот же момент.

Важнейший факт заключается в том, что в вихревой теории необходимо начальный спектр турбулентности (в начале РД-периода, при  $z \approx 10^8$  или раньше) взять с выделенным масштабом  $R$ , с резким максимумом  $\beta^2(r)$  при  $r=R$ , необходимая величина  $\beta$ , указанная выше, и есть этот максимум, обозначим ее  $\beta_{\text{max}}$ . Надо взять начальный спектр  $\beta(r) < \beta_{\text{max}}$  при  $r \ll R$  для того, чтобы начальная мелкомасштабная турбулентность при затухании не искажала реликтовое излучение. Но спектр возмущений вихревой теории нужно ограничить и со стороны больших масштабов,  $r > R$ . Это ограничение следует из отсутствия заметных угловых флуктуаций реликтового излучения.

Мы видим, что вихревая теория требует специального подбора начального спектра и в этом смысле невыгодно отличается от адиабатической теории. Авторы книги отдают предпочтение адиабатической теории происхождения галактик.

## § 11. Данные наблюдений галактик и скоплений галактик и средняя плотность материи во Вселенной

В этом параграфе мы в очень краткой и схематической форме приведем сводку некоторых наблюдательных данных об основных свойствах галактик и скоплений галактик. В качестве обзоров по внегалактической астрономии можно рекомендовать, например, книгу Воронцова-Вельяминова (1972), более ранние обзоры Эйбла (1962, 1965), а также популярную книгу Агеяна (1970). Обзор данных о межгалактическом газе дан Филдом (1973б), о средней плотности материи во Вселенной — Пиблсом (1971а). Необходимо предупредить читателя, что многие из приводимых ниже параметров определяются неуверенно и значения меняются от автора к автору. Оценки же ошибок очень субъективны. Важной характеристикой свойств галактик, которая относительно просто устанавливается из наблюдений, является функция светимости — число галактик с данной абсолютной величиной (точнее, между  $m$  и  $m+dm$ ). Пиблс (1971а) приводит следующую аппроксимационную формулу для среднего числа галактик в единице объема, имеющих яркость

большую, чем абсолютная величина  $M$  (не смешивать с массой!):

$$n(<M) = A \cdot 10^{\alpha M}, \quad \alpha = 0,75, \quad M < M^*,$$

$$n(<M) = B \cdot 10^{\beta M}, \quad \beta = 0,25, \quad M > M^*,$$

при  $M = M^*$ , очевидно,  $A \cdot 10^{\alpha M^*} = B \cdot 10^{\beta M^*}$ . Абсолютная визуальная величина  $M^*$  есть

$$M^* = -20,1 + 5 \lg \left( \frac{H}{75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}} \right).$$

Для теоретиков большое значение имеют параметры, связанные с определением масс галактик. Наиболее надежный путь определения масс заключается в измерении лучевых скоростей вращения галактик. Тогда при известных линейных размерах галактики можно по закону Ньютона вычислить массу. Но заметными вращениями обладают только спиральные и неправильные галактики. Для эллиптических галактик массы могут быть определены по дисперсии лучевых скоростей звезд. На рис. 52 приведена функция масс \*) для галактик (и отдельно для спиральных галактик), полученная Холмбергом (1969). Массы наиболее массивных галактик около  $10^{12} M_{\odot}$  и даже больше. Это гиганты типа E, а также Sb [см. Воронцов-Вельяминов (1972)]. Наибольший вклад в суммарную массу всех галактик дают галактики с массой около  $10^{11} M_{\odot}$ . Минимальные массы  $M \approx 10^5 M_{\odot}$  имеют карликовые сфероидальные галактики (табл. XII).

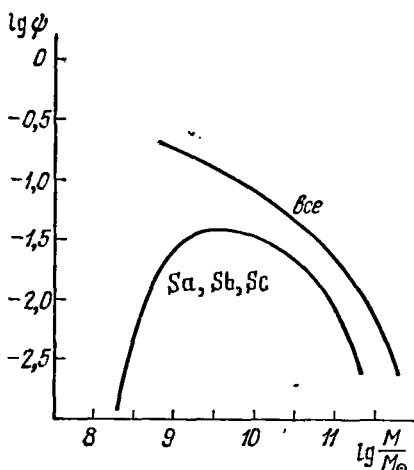


Рис. 52. Функция масс для галактик разных типов.

ТАБЛИЦА XII

Вклад в общую сумму масс галактик с разными массами

| $M/M_{\odot}$      | $>10^{11}$ | $10^{10}-10^{11}$ | $10^9-10^{10}$ | $<10^9$ |
|--------------------|------------|-------------------|----------------|---------|
| Вклад в сумму масс | 46%        | 40%               | 11%            | 3%      |

\*) Функция масс есть отношение числа галактик с массой между  $M$  и  $M+dM$  к полному числу галактик в фиксированном объеме.

Отношение масса/светимость,  $M/L$  ( $M$  и  $L$  — в солнечных единицах), составляет для неправильных галактик (тип I) около 5, для спиральных (тип S) 7—20, для эллиптических (тип E) — около 40. Линейные диаметры ярких галактик составляют около  $3 \cdot 10^4$  пс. Карликовые галактики имеют гораздо меньшие размеры. Угловые моменты вращения галактик известны плохо. Согласно одной из последних работ Нордсека (1973), удельный момент спиральных галактик в его модели обработки наблюдений связан с массой соотношением

$$\lg \frac{\mathcal{M}}{M} = -0,4 + 0,67 \lg M; \quad (14.11.1)$$

$\mathcal{M}$  — момент в единицах  $10^{12} M_{\odot} \text{ км/сек}$  ( $\text{км/сек}$ ) =  $6,2 \cdot 10^{11} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек}$ ,  $M$  — масса галактики в  $10^{10} M_{\odot}$ . Распределение галактик по типам может быть иллюстрировано табл. XIII [Ван ден Берг (1960)] для 935 галактик ярче  $13^m$ .

ТАБЛИЦА XIII

## Распределение галактик по типам

| Тип | E и S0 | Sa  | Sb   | Sc   | I   | Разные |
|-----|--------|-----|------|------|-----|--------|
| %   | 22,9   | 7,7 | 27,5 | 27,3 | 2,1 | 12,5   |

Разумеется, подобные таблицы не отражают прямо распределение галактик по типам в единице объема пространства. Было выяснено, что это распределение очень сильно зависит от типа скопления галактик.

Цвикки, Герцог, Вилд (1968) опубликовали каталог нескольких тысяч скоплений галактик. Эйбл (1958) разделил скопления на правильные и неправильные \*). Правильные скопления состоят из большого количества галактик (иногда более  $10^4$  членов), обладают сферической симметрией, большой концентрацией к центру. Яркие члены этих скоплений относятся, вероятно, только к типам E и S0. Согласно Воронцову-Вельяминову, спирали могут только случайно проектироваться на такое скопление. В центре скопления часто находится одна или две ярчайшие эллиптические галактики. Типичный представитель правильных скоплений — скопление в Волосах Вероники (Coma). Неправильные (рассеянные) скопления имеют неправильную форму, в них часто встречаются отдельные сгущения. Состоят эти скопления из галактик всех типов. Они

\*) Помимо этого важного деления скоплений на две группы, существуют классификации скоплений по разным параметрам, например по богатству (числу членов), наличию пекулярных галактик и т. п.

могут быть и богатыми (более чем тысяча членов), как, например, скопление Девы, и очень бедными. Согласно Воронцову-Вельяминову, общее поле галактики состоит из слабых внешних частей и многочисленных перекрывающихся рассеянных скоплений и мелких групп: см. Эйнасто и др. (1974 г.).

Наиболее хорошо изучены правильные скопления. Приведем данные, относящиеся к скоплению Coma. Размер скопления Coma, согласно Голдсмиту и Силку (1972), около 4 *Мпс*. Общее число галактик в скоплении (включая слабые) оценивается в несколько десятков тысяч. Дисперсия лучевых скоростей галактик составляет около  $\Delta v = 1000$  км/сек. Руд и др. (1972) подчеркивают, что  $\Delta v$  сильно зависит от расстояния от центра скопления, спадая от центра к краю, — на краю она составляет всего  $\Delta v \approx 500$  км/сек. Если считать скопление стационарным, то, используя теорему вириала, по дисперсии скоростей и размерам можно найти массу скопления. Она оказывается неожиданно большой:

$$M \approx 3 \cdot 10^{15} M_{\odot} \left( \frac{N}{75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}} \right)^{-1}. \quad (14.11.2)$$

Действительно, по подсчетам галактик можно определить интегральную светимость скопления и вычислить затем отношение  $M/L$ . Это отношение, по Эйблу, составляет

$$\frac{M}{L} \approx 300 \left( \frac{N}{75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}} \right) \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}, \quad (14.11.3)$$

что во много раз больше  $M/L$  даже для эллиптических галактик, у которых  $M/L$  наибольшее. Этот результат, по-видимому, означает, что либо 1) скопление нестационарно, хотя его правильный вид и концентрация к центру говорят за стационарность, либо 2) в скоплении имеется много невидимой массы между видимыми частями галактик, либо, наконец, 3) имеются сильные систематические погрешности наблюдений и их интерпретации. Краткое обсуждение ситуации дается в конце этого параграфа.

Примером неправильного скопления является скопление в Деве. Оно содержит тысячи членов: размер его, согласно Эйблу (1962), около 3 *Мпс*. По оценке того же Эйбла, отношение масса/светимость для скопления не менее 400. Для проверки теорий об образовании галактик большое значение имеет вопрос об ориентации осей вращения галактик в скоплениях. Надежных данных здесь нет, и мы ограничимся ссылками на литературу: Броун (1964, 1968), Рейнгардт (1972), Рейнгардт и Робертс (1972).

Долго обсуждался вопрос о том, существуют ли скопления скоплений галактик. Споры не прекратились и сейчас. Цвикки (1957) считает, что скоплений скоплений не существует. Того же мнения придерживается и Воронцов-Вельяминов (1972). Проти-

воположной точки зрения придерживается Эйбл (1961). Но, видимо, все согласны с тем, что значительных неоднородностей плотности в масштабах, в десятки раз превышающих размеры крупных скоплений, не существует. Сильнейшие аргументы в пользу этого дают косвенные соображения, основанные на наблюдении изотропии реликтового излучения, о чем мы уже упоминали выше и будем говорить еще в следующей главе. Согласно Цвикки, диаметры наибольших скоплений порядка  $8 \cdot 10^8$  пс и скопления распределены в среднем однородно: размер наибольшей ячейки неоднородности во Вселенной порядка  $40 \cdot 10^8$  пс, что составляет линейный размер, приходящийся на одно большое скопление.

Несмотря на подробные математические исследования вопроса о наблюдательных доказательствах существования сверхскоплений, проведенные Нейманом и Скотт (1962), задача нуждается в дальнейшем тщательном изучении.

Помимо крупных скоплений существует огромное количество небольших скоплений, групп и кратных галактик. Практически все исследованные группы галактик, если к ним применять теорему вириала, оказываются неустойчивыми: их кинетическая энергия, вычисленная на основе измерения дисперсии лучевых скоростей галактик, намного превышает потенциальную энергию, подсчитанную по массам видимых галактик. Очень впечатляющие примеры неустойчивых групп приведены в обзоре Э. М. Бэрбидж и Сэргента (1971).

Таким образом, при учете только материи, содержащейся в галактиках, все системы — от кратных галактик до скоплений и, возможно, существующих сверхскоплений — оказываются, согласно расчетам, неустойчивыми. Это иллюстрируется табл. XIV, составленной Караченцевым (1968). В столбцах: светимость, среднее число членов, радиус, дисперсия лучевых скоростей, плотность наблюдаемая, плотность вириальная, время разлета  $R/\Delta v$ .

Вопрос о том, устойчивы ли системы галактик, тесно связан с вопросом об определении средней плотности вещества во Вселенной.

ТАБЛИЦА XIV

Средние характеристики систем галактик

| Системы галактик  | $\frac{L}{10^{10} M_{\odot}}$ | $N$  | $\frac{R}{10^4 \text{ пс}}$ | $\Delta v$ | $\frac{\rho_{\text{набл}}}{10^{-24} \text{ г/см}^3}$ | $\frac{\rho_{\text{вир}}}{10^{-24} \text{ г/см}^3}$ | $t$<br>$10^8 \text{ лет}$ |
|-------------------|-------------------------------|------|-----------------------------|------------|--|---|---------------------------|
| Триплеты          | 4,9                           | 3    | 8,8                         | 121        | 0,1  | 1,0   | 4,5                       |
| Группы            | 10,5                          | 8    | 39                          | 287        | 0,002  | $9 \cdot 10^{-2}$                                   | 11                        |
| Бедные скопления  | 43                            | 35   | 114                         | 354        | $4 \cdot 10^{-4}$                                    | $2 \cdot 10^{-2}$                                   | 20                        |
| Богатые скопления | 270                           | 220  | 271                         | 827        | $2 \cdot 10^{-4}$                                    | $2 \cdot 10^{-2}$                                   | 18                        |
| Сверхскопления    | 1500                          | 1200 | 1640                        | 1100       | $4 \cdot 10^{-6}$                                    | $6 \cdot 10^{-4}$                                   | 87                        |

ной. Если учитывать только легко наблюдаемые формы материи, входящие в галактики, то системы галактик, как мы видели, оказываются неустойчивыми. При этом средняя плотность вещества во Вселенной  $\bar{\rho}$  оказывается заметно меньше критической. Лучшее определение  $\bar{\rho}$ , учитывающее только материю в галактиках, принадлежит Оорту (1958), и последующие уточнения ничего существенного в этой оценке не изменили. Определение Оорта основано на нахождении средней светимости единицы объема Вселенной по подсчетам галактик и использовании среднего для галактик значения  $M/L$ . Если это среднее значение

$$\frac{M}{L} \approx 15 \left( \frac{H}{75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}} \right) \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}},$$

то

$$\bar{\rho} \approx 2 \cdot 10^{-31} \left( \frac{H}{75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}} \right)^2 \text{ и } \frac{\bar{\rho}}{\rho_c} \approx 0,02.$$

Парадокс с неустойчивостью скоплений галактик вызвал предположение о наличии большого количества невидимых масс материи в пространстве между галактиками. Если этой материи достаточно много, то скопления окажутся гравитационно связанными, а средняя плотность вещества во Вселенной — близкой к критической.

Первым кандидатом в такие «невидимые массы» является межгалактический ионизованный газ. Вопрос о возможном количестве такого газа подробно обсуждался нами в разделе II. Недавно ситуация была подытожена в обзоре Филда (1973б). Его выводы сводятся к следующему. Богатые скопления (например, Кома) являются рентгеновскими источниками. Предполагается, что если это излучение газа с  $T \approx 10^8 \text{ }^{\circ}\text{K}$ , то его количество слишком мало, чтобы сделать скопление гравитационно связанным. Предположение о том, что в скоплении имеется значительное количество более холодных облаков газа с  $T \approx 10^6 \text{ }^{\circ}\text{K}$ , исключается комбинацией наблюдений в ультрафиолете и наблюдаемый в мягком рентгене. Общая масса такого газа в скоплении Кома, по крайней мере, в несколько раз меньше, чем требуется для того, чтобы сделать скопление устойчивым. Теоретические соображения об аккреции газа, находящегося между скоплениями, на богатые скопления вместе с наблюдательными данными о скоплениях приводят к выводу о том, что для такого газа  $\Omega \leq 0,05$ .

Наблюдения пока не могут исключить присутствия значительного количества газа с  $T$  между  $10^6$ — $10^7 \text{ }^{\circ}\text{K}$  в так называемых группах галактик Вокулера. Современные данные не противоречат тому, что из-за этого газа в среднем во Вселенной  $\Omega \approx 1$ . Для проверки этого нужны наблюдения в мягком рентгеновском диапазоне. Напомним, что наличие или отсутствие этого газа не имеет никакого отношения к проблеме стабильности богатых скоплений.

В последнее время появляется все больше сторонников идеи о том, что галактики могут быть окружены огромными коронами из слабых звезд. Масса этих звезд не влияет заметно на динамику внутренних частей галактик, которые хорошо наблюдаются, и поэтому наблюдения этих внутренних частей дают только их массу и ничего не говорят о массах корон. Возможно, что учет этих корон существенно изменит оценку масс галактик в скоплениях и массу самих скоплений; об этой проблеме см. Вокулер (1969), Арп, Бертола (1971), Корменди, Бакалл (1973), Эйнасто и др. (1974а, б, в, г), Острайкер, Пиблс, Яхил (1974), Тартер, Силк (1974), Озерной (1974), Комберг, Новиков (1975). Наконец, другими формами невидимых масс могут быть объекты самой разной природы: карликовые или мертвые галактики или даже «черные дыры» в пространстве между галактиками [см. Пиблс (1971а)]. Вопрос о количестве невидимой материи остается пока открытым.

В § 6 гл. 15 приводятся аргументы в пользу  $\Omega < 1$ , основанные на том, что в группах галактик с плотностью, в несколько раз большей средней во Вселенной, хаббловский закон расширения не сильно отличается от общего хаббловского закона для Вселенной.

## Г Л А В А 15

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЕЛИКТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

#### § 1. Введение

Детальное исследование реликтового излучения — его спектра и углового распределения, — в принципе, может дать весьма ценную информацию об отклонениях Метагалактики от идеального однородного и изотропного космологического решения.

Существование таких отклонений несомненно: в предыдущей главе показано, что отклонения необходимы для возникновения структуры Вселенной — скоплений галактик, галактик, звезд.

Однако обратная задача — определение отклонений от однородности на стадии до образования небесных тел по наблюдаемой сейчас макроструктуре Вселенной — оказывается трудной и неоднозначной. Исследование реликтового излучения существенно дополняет наши сведения о возмущениях. Возмущения малого масштаба затухают еще до рекомбинации водорода во Вселенной и не оставляют видимого следа в структуре. Однако, затухая, эти возмущения выделяют энергию и искажают спектр реликтового излучения, создают отклонения спектра от равновесного планковского закона.

С другой стороны, возмущения самого большого масштаба имеют, по-видимому, малую амплитуду. Статистика внегалактических объектов (скоплений, квазаров, радиисточников) имеет дело с дискретными телами. Эта дискретность создает дополнительные источники «шума», случайных ошибок. Поэтому, например, точность определения константы Хаббла до сих пор не лучше 20%. Изотропия константы Хаббла, определенной в разных направлениях на небе, тоже установлена с точностью не лучше 20%. Между тем измерение температуры реликтового излучения, приходящего с различных направлений, отвечает практически на тот же вопрос об одинаковости расширения во всех направлениях, т. е. об изотропии Вселенной. Точность измерения разности температур в наиболее удобной сантиметровой области лучше 0,1%. В настоящее время наблюдатели не обнаружили ни искажений спектра, ни зависимости температуры от направления, несмотря на разработанную теорию таких отклонений, известную наблюдателям. На этом месте



нетерпеливый читатель может прервать чтение главы «о несуществующих эффектах». Мы же продолжим детальное обсуждение вопроса по двум причинам. Во-первых, сегодня негативные результаты наблюдений дают возможность получить неравенства, верхние границы возмущений. Эти верхние границы достаточно интересны, особенно в сопоставлении с наблюдаемой структурой. Вырисовывается картина начального состояния Вселенной вблизи сингулярности с весьма малыми отклонениями от идеализированной модели Фридмана. Во-вторых, завтра можно ожидать дальнейшего уточнения экспериментальных методов. Одновременные измерения в нескольких спектральных интервалах позволят точнее отделить флуктуации реликтового излучения от вклада близких к нам источников. Можно надеяться, что эффекты, рассматриваемые ниже, будут реально обнаружены уже после повышения чувствительности на один-два порядка (до  $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-6}$ ), и тогда теория, излагаемая ниже, станет практически важной для обработки наблюдений.

Напомним, что пространственно-однородная ситуация уже была рассмотрена ранее (см. гл. 8). Было выяснено, какие искажения спектра возникают в результате выделения данной энергии в тот или иной период, при том или ином значении  $z$ .

В § 2 и § 3 рассматриваются две конкретные причины выделения энергии — аннигиляция вещества и антивещества (§ 2) и превращение в тепло кинетической энергии пекулярных движений (§ 3). Показано, какие ограничения на количество и распределение антивещества следуют из отсутствия отклонений спектра от равновесного (§ 2). В § 3 аналогичные ограничения получены на пекулярные движения вещества.

Дальше рассматривается вопрос о зависимости температуры реликтового излучения от направления при наличии возмущений. В § 4 дана общая схема вычисления распределения температуры при заданном пекулярном движении вещества и заданном распределении возмущений плотности. В поле излучения, которое в первом приближении равносильно, однородно и изотропно, задача очень упрощается: никакое отклонение лучей, их фокусировка или дефокусировка не могут изменить яркости. Только пекулярные движения (через доплер-эффект) создают изменения яркостной температуры. В следующих параграфах эта общая схема применяется к различным видам возмущений. В § 5 она применяется к адиабатическим возмущениям, т. е. к потенциальным движениям с одновременными изменениями плотности вещества. Эти возмущения растут в силу гравитационной неустойчивости (и поэтому наибольшая их амплитуда достигается в настоящее время).

Адиабатические возмущения вызывают также общее движение того вещества — того скопления или сверхскопления, — к которому принадлежит наша Галактика, Солнце и, в конечном счете,

наша планета, несущая наблюдательную аппаратуру. Реликтовое излучение позволяет определить в каждой точке систему отсчета, относительно которой измеряется эта пекулярная (случайная, обаянная возмущениям) скорость движения. В § 6 обсуждаются измерения пекулярной скорости и следующие из них ограничения на амплитуду адиабатических возмущений.

Наконец, в § 7 рассматриваются вихревые возмущения и длинные гравитационные волны как возможный источник флуктуаций реликтовой температуры \*). Для этих типов возмущений характерно их ослабление в ходе расширения. Поэтому эффект зависит главным образом от ситуации в наиболее ранний момент, доступный наблюдению, в данном случае — в момент рекомбинации, когда плазма становится прозрачной. В определенном интервале длин волн возмущений эффект сильно зависит от того, что рекомбинация и просветление плазмы происходят не мгновенно: излучение, приходящее с определенного направления, усредняет температуру толстого слоя.

Далее, вторичная ионизация всего первичного газа или части его, не вошедшей в скопления, приводит к рассеянию и сглаживает возможную угловую зависимость интенсивности реликтового излучения. Поэтому, казалось бы, отсутствие наблюдаемых возмущений всегда можно приписать сглаживающему действию рассеяния, даже тогда, когда в момент рекомбинации возмущения велики.

Однако такое универсальное объяснение — или, скорее, отговорка — сталкивается с большими трудностями. Для эффективного сглаживания нужна большая оптическая толща, что в свою очередь требует ранней вторичной ионизации (при  $z \sim 50-80$ ), но в ранний момент велика скорость теплоотдачи, трудно удерживать плазму горячей и ионизованной. Сами процессы, нагревающие газ, вносят новые возмущения в реликтовое излучение. В целом вывод заключается в том, что наблюдаемая высокая степень изотропии реликтового излучения является сильным доводом в пользу малости возмущений фридмановской однородной и изотропной модели, в частности в пользу теории адиабатических возмущений, и против вихревой (турбулентной) теории образования галактик.

## § 2. Аннигиляция антивещества

Рассмотрим аннигиляцию антивещества (антипротонов, антиядер гелия) и вещества в РД-периоде.

В литературе обсуждается зарядово-симметричная космологическая модель, где с самого начала предполагается, что в среднем во Вселенной имеется равное количество вещества и антивещества.

---

\*) Все вопросы, связанные с гравитационными волнами и, в частности, вопрос о флуктуациях реликтового излучения выделены в отдельную главу.

Ряд авторов считает такую модель предпочтительной из общеприятных софистических предпосылок.

Общие принципы будут обсуждаться в разделе V книги, посвященном космологической сингулярности: зарядовая симметрия или несимметрия мира должна быть заложена уже в сингулярный момент, позже это свойство заведомо остается неизменным.

В данном параграфе будут найдены требования к зарядово-симметричной модели, связанные с тем, что в этой модели неизбежна аннигиляция и выделение энергии, ведущее к искажению спектра реликтового излучения.

Рассмотрение РД-периода принципиально важно, так как в этом периоде можно рассчитать аннигиляцию: скорость процесса аннигиляции определяется диффузией вещества и антивещества к границе раздела соответствующих областей \*). В свою очередь скорость диффузии зависит от трения при движении электронов или позитронов относительно излучения: протоны не могут опередить электроны, так как они связаны электростатическими силами. Теория такого процесса подробно рассмотрена в электрохимии в связи с диффузией электролитов. Изложим простейший вариант ее, полностью пренебрегая трением протонов об излучение \*\*).

Давление полностью ионизованного газа равно, очевидно,

$$P = (n_e + n_p) kT. \quad (15.2.1)$$

Градиент этого давления и есть сила, действующая на электроны в единице объема. Этой силе противостоит трение электронов об излучение:

$$-\Delta P = F = n_e \alpha^{-1} v_e = n_e \frac{4}{3} \epsilon_v \sigma_T \frac{v_e}{c}, \quad (15.2.2)$$

где  $\alpha$  — подвижность электронов,  $\epsilon_v$  — плотность энергии излучения ( $\epsilon_v = 4 \cdot 10^{-13} \text{ эрг/см}^3$ ),  $v_e$  — средняя скорость электронов,  $\sigma_T$  — сечение взаимодействия электронов с излучением, электростатическое взаимодействие дает  $n_e = n_p$ .

Из этого уравнения находим поток электронов  $q_e = n_e v_e$ . Используем принцип электронейтральности:  $n_p = n_e$ , так что

$$v_e = -\frac{2\alpha kT}{n_e} \text{grad } n_e \text{ и поток протонов тождественно равен потоку}$$

\*) Условия, необходимые для того, чтобы диффузия играла главную роль, мы выясним ниже. Для этого нужно, в частности, найти значение коэффициента диффузии, которое и обсуждается в первую очередь.

\*\*) Учет 7–10% альфа-частиц в составе первичного газа ничего не меняет; можно проверить, что и более ранняя рекомбинация гелия также не дает заметного вклада, в частности, потому, что тепловая скорость атомов гелия в 100 раз меньше, чем у электронов. Любопытно, что аннигиляция  $p$  и  $\bar{p}$  с  $\text{He}^4$  могла бы дать количество осколков D, T,  $\text{He}^3$ , превышающее то, что дает нуклеосинтез в однородной Вселенной.

электронов. Окончательно

$$q_p = -2\alpha kT \nabla n_p = -\frac{3ckT}{2\varepsilon_q \sigma_T} \nabla n_p = -D \nabla n_p. \quad (15.2.3)$$

Коэффициент при  $\nabla n_p$  есть, по определению, коэффициент диффузии  $D$ .

Подставляя выражения  $\varepsilon_q$  и  $T$  для горячей Вселенной, а также численные значения констант, получим

$$D = 0,6 \cdot 10^{22} z^{-3} \text{ см}^2/\text{сек}. \quad (15.2.4)$$

Оценим по порядку величины путь, который частица проходит к моменту, когда  $z$  достигает данной величины. Этот путь равен  $l_z = \sqrt{6Dt}$ ; в РД-периоде  $t = 3 \cdot 10^{19}/z^2$ , так что  $l_z = 10^{26} z^{-1/2}$ . Однако для правильного сравнения нужно отнести путь к единому (например, сегодняшнему) масштабу, учитывая увеличение масштаба в  $z+1 \approx z$  раз.

Следовательно, сегодняшний размер равен  $l = 10^{26} z^{-1/2}$  см. При современной плотности  $\rho = 10^{-29} \text{ г/см}^3$  соответствующий объем содержит массу

$$M = \rho R^3 = 10^{49} \Omega z^{-1/2} = 5 \cdot 10^{15} \Omega z^{-1/2} M_\odot. \quad (15.2.5)$$

Формула применима лишь в РД-периоде, до рекомбинации; для  $\Omega = 0,1$ ,  $z = 1400$  она дает  $M = 3M_\odot$ .

Вернемся к общей картине явления. При расчете предполагается, что кинетика аннигиляции полностью определяется диффузией. Это значит, что нигде вещество и антивещество не сосуществуют в заметных количествах. Все пространство разбито на области, занятые веществом, и области, занятые антивеществом.

Аннигиляция происходит на границе этих областей. Диффузия подводит к границе равное количество вещества с одной стороны и антивещества — с другой. Это условие равенства потоков достигается за счет того, что граница раздела не остается неподвижной, сдвигается в ту сторону, с которой поток на неподвижную границу становится меньше встречного потока \*).

Такая картина с резкой границей может рассматриваться лишь как первое приближение к действительности; в этом приближении можно вычислить скорость движения границы, время исчезновения

\*) Концентрация барионов и взятая с минусом концентрация антибарионов вместе образуют непрерывную функцию координат  $f(r)$ :  $f(r) = B > 0$  в одной области  $f(r) = -B < 0$  в другой области,  $f=0$  есть уравнение границы. Функция  $f = B - \bar{B}$  удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial f}{\partial t} = D \Delta f$ ; отсюда легко найти скорость перемещения границы по нормали к поверхности:  $u \text{ grad } f = -D \Delta f$ ,  $u_{\text{норм}} = -|\text{grad } f|^{-1} D \Delta f$ .

«острова» антивещества, окруженного веществом (за счет стягивания границы в точку), наконец, можно вычислить мгновенные потоки вещества и антивещества к границе, а значит, и число актов аннигиляции в единицу времени, отнесенное к единице площади границы раздела. Разумеется, как мы уже сказали, такая картина со строго разделенными частицами и античастицами является лишь первым приближением. Из факта аннигиляции следует существование определенной области перекрытия, где одновременно присутствуют и частицы и античастицы. Можно провести аналогию с пламенем свечи: внутри пламени — избыток горючего, вне пламени — избыток кислорода, а само пламя есть та граница двух сред (окислительной и восстановительной), где идет химическая реакция. Методами теории горения [Зельдович (1949) легко дать оценку для ширины области перекрытия и концентрации частиц и античастиц в этой области. При этом считаем заданным (из решения первого приближения) распределение концентраций вдали от области перекрытия.

Итак, пусть вдали от границы  $n=ax$ ,  $\bar{n}=0$  при  $x>0$ ;  $n=0$ ,  $\bar{n}=a|x|$  при  $x<0$ , где  $n$  — концентрация барионов,  $\bar{n}$  — антибарионов,  $x=0$  — середина зоны, коэффициенты  $a$  слева и справа обязаны совпадать. Скорость аннигиляции  $q=D\nabla n=aD$  частиц/см<sup>2</sup>·сек. Дифференциальные уравнения диффузии имеют вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \beta n \bar{n}, \quad \frac{\partial \bar{n}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \bar{n}}{\partial x^2} - \beta n \bar{n}. \quad (15.2.6)$$

Здесь  $\beta$  есть константа скорости аннигиляции (см<sup>3</sup>/сек). Мы ищем стационарное ( $\frac{\partial}{\partial t}=0$ ) решение этих уравнений с выписанной выше асимптотикой. Из размерности следует, что в плоскости симметрии в середине зоны ( $x=0$ )

$$n = \bar{n} = \sqrt[3]{\frac{Da^2}{\beta}}. \quad (15.2.7)$$

тогда как ширина зоны

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{D}{a\beta}}. \quad (15.2.8)$$

Легко убедиться, что при этом

$$q = \beta n \bar{n}_1 \equiv Da, \quad (15.2.9)$$

как и следовало ожидать. По порядку величины  $\beta = \sigma v \sim \sim 3 \cdot 10^{-16}$  см<sup>3</sup>/сек для аннигиляции при высокой температуре, когда не происходит заметное образование кулоновски связанного «атома»  $p\bar{p}$  (что увеличивает  $\beta$ ). Для оценки рассмотрим области, соответствующие  $M \approx 10^{12} M_\odot$ . Считаем плотность вещества равной кри-

тической плотности,  $\Omega=1$ . Соответственно плотность вдаль от  $x=0$   $n_{\infty} \approx 10^{-6} z^3$  в области, занятой веществом,  $\bar{n}$  — такое же в области, занятой антивеществом. Характерный размер этих областей порядка  $\lambda \sim \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$ , где  $N$  — число барионов в области ( $N \approx 10^{69}$ ), так что  $\lambda \sim 10^{26}/z$  см. Примем  $a \sim \frac{n(\infty)}{\lambda} \approx 10^{-30} z^4$  см $^{-4}$ ;  $q = 10^2 z$  см $^{-2}$ •сек $^{-1}$ .

Подставляя эти цифры в выражения (15.2.7) и (15.2.8), получим  $n(0) = 10^{-42} z^{3/2}$  см $^{-3}$ ,  $x_1 \approx 10^{26} z^{-1/2}$ . Подставляя  $z \approx 10^4$ , получим  $\frac{n(0)}{n(\infty)} \sim \frac{x_1}{\lambda} \approx 5 \cdot 10^{-8} \ll 1$ , что и оправдывает картину явления, положенную в основу расчета.

Выражение для коэффициента диффузии справедливо в ограниченной области  $10^8 > z > 1400$ . При большем  $z$  и при более высоких температурах надо учитывать два обстоятельства.

Первое из них заключается в том, что при температуре выше 1 Мэв в термодинамическом равновесии с протонами находится заметное количество нейтронов, а в областях с антивеществом в равновесии с  $\bar{p}$  есть  $\bar{n}$ . Диффузия  $n$  и  $\bar{n}$  происходит быстрее — перемещение нейтральных частиц не создает возвращающего электрического поля, не требует перемещения  $e^-$  и  $e^+$  для компенсации поля. При температуре ниже 20 Мэв, когда равновесная концентрация адронов (пионов  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ ) мала, коэффициент диффузии нейтронов дается формулой  $D = 5 \cdot 10^{23} \Omega^{-1} z^{-3/2}$ .

Второе обстоятельство связано с тем, что при температуре выше  $3 \cdot 10^8$  К в области, занятой «веществом» (протонами, барионами), наряду с электронами в термодинамическом равновесии есть пары  $e^+e^-$ , общее число  $n_{e^+} + n_{e^-} \gg n_p$ . В компенсации поля, возникающего при перемещении протонов, участвуют все легкие заряженные частицы, коэффициент диффузии протонов увеличивается во много раз.

С учетом обоих обстоятельств к моменту  $z \approx 10^8$  диффузия и аннигиляция устраняют малые изолированные «острова» антивещества, окруженные веществом (или «острова» противоположного знака), и сглаживают градиенты вплоть до масштаба порядка  $5 \cdot 10^{11}$  см. В пересчете на сегодняшний момент этот масштаб  $\approx 5 \cdot 10^{19}$  см (соответствующая характерная масса  $M \approx 10^{-8} M_{\odot}$ ). Выделение энергии при  $z > 10^8$  никак не сказывается на спектре реликтового излучения уже потому, что присутствие электронов и позитронов ускоряет установление термодинамического равновесия.

Какой вывод можно сделать из этих расчетов для зарядово-симметричной Вселенной? Примем за основу, что скопления галактик и большие галактики, т. е. массы порядка  $10^{12} M_{\odot}$ , состоят лишь из одного вида материи — либо из вещества, либо из антивещества; иначе в настоящее время во внутригалактическом газе происходила бы активная аннигиляция, рождались бы в большом

числе энергичные кванты ( $E_\gamma \approx 70-100 \text{ Мэв}$ ) по цепочке  $p + \bar{p} \rightarrow \pi^0 \rightarrow 2\gamma$ . При этом остается еще возможность выбора двух разновидностей симметричной модели. Эти две разновидности соответствуют следующим крайним, предельным случаям (мы не будем здесь обсуждать все возможные промежуточные ситуации).

Первый случай: области указанного размера (соответствующего  $\approx 10^{12} M_\odot$ ) с избытком вещества и области с избытком антивещества заданы изначально, уже вблизи сингулярного состояния.

В этом случае аннигиляция минимальна. При плавном распределении концентрации скорость аннигиляции пропорциональна квадрату волнового вектора фурье-компонент распределения, т. е. пропорциональна  $M^{-2/3}$ . Если к моменту рекомбинации полностью аннигилируют массы порядка  $3M_\odot$ , то массы порядка  $10^{12} M_\odot$  подвергнутся частичной аннигиляции в доле  $\approx (3 \cdot 10^{12})^{-2/3} = 1,5 \cdot 10^{-2}$ . Что произойдет после рекомбинации? В приближении свободного движения атомов водорода (или антиводорода,  $\bar{H} = \bar{p}e^+$ ) с тепловой скоростью характерный размер  $l \sim u_0 t_{\text{рек}} \sim 10^8 \text{ см/сек} \cdot 10^{13} \text{ сек} \sim 10^{21} \text{ см}$ . Между тем в этот же момент  $t_{\text{рек}}$  характерный размер области, содержащей  $10^{12} M_\odot$ , порядка  $L \sim 10^{22} \text{ см}$ . Вблизи границы при плавном распределении плотности  $n = \bar{n} \frac{x}{L}$ , так что доля анниги-

ляции вещества порядка  $\left(\frac{l}{L}\right)^2$ , т. е. порядка  $10^{-5} - 10^{-6}$ . В более поздний период, после вторичной ионизации, можно представить себе, что аннигиляции препятствуют гравитационные и магнитные поля сформировавшихся астрономических объектов.

В таком варианте выделение энергии при аннигиляции невелико, и наблюдения спектра реликтового излучения не позволяют отвергнуть этот вариант. Трудности его лежат в другой плоскости. В этом варианте к моменту рекомбинации флуктуации плотности порядка единицы. Гравитационная неустойчивость немедленно подхватит и усилит флуктуации плотности, обособление скоплений произойдет при  $z$  незначительно меньшем, чем  $z_{\text{рек}}$ . При этом плотность скоплений должна быть порядка плотности вещества в момент рекомбинации, т. е.  $\bar{\rho} \cdot (1400)^3 = 3 \cdot 10^{-20} \text{ г/см}^3$ . В действительности плотность скоплений на несколько порядков меньше! Это возражение приводит Пиблс (1971б).

Другое возражение носит скорее вкусовой, субъективный характер. Интерес к зарядово-симметричной модели связан с предположением о тесной связи и соответствии между законами физики и выбором начального (сингулярного) состояния космологической модели. Законы зарядово-симметричны \*), поэтому предпочтительна и симметричная модель Вселенной как целого. Возникает вопрос: если есть симметрия всей Вселенной, то что нарушает симметрию

\*) См., впрочем, § 8 гл. 23.

отдельных ее частей, особенно таких больших частей, как  $M \approx 10^{12} M_{\odot}$ ? В этом отношении более последовательным является второй предельный случай.

Предположим, что области  $V$  и  $\bar{V}$  в начальном состоянии малы, зато соответственно больше плотность барионов (и соответственно антибарионов) в этих областях. Избыток  $V$  или  $\bar{V}$  в больших областях ( $M \approx 10^{12} M_{\odot}$ ) есть результат флуктуаций числа и размеров малых областей внутри каждой большой области.

Возможной причиной возникновения малых областей с избытком вещества (антивещества) является предпологаемое (по гипотезе Омнеса, см. § 3 гл. 23) разделение горячего вещества нейтральной плазмы на две фазы. Расчеты Омнеса и его сотрудников, в которых большое значение придается движению фазовой границы, приводят к обособлению масс до  $10^{11} M_{\odot}$ . Но движение границы, по мысли авторов, само есть следствие аннигиляции и выделения энергии на границе. Оценка выделения энергии (усредненной по объему, содержащему много областей) дает  $\Delta \varepsilon \approx 20 \varepsilon_{\gamma}$ , где  $\Delta \varepsilon$  — выделившаяся энергия в период  $10^8 > z > 1400$  до рекомбинации и главным образом вблизи нижней границы этого интервала,  $\varepsilon_{\gamma}$  — энергия излучения. Но такое выделение энергии абсолютно нетерпимо. Согласно теории искажения спектра, уже  $\Delta \varepsilon \approx 0,1 \varepsilon_{\gamma}$  дает отклонения от рэлей-джинсовского спектра, во много раз превышающие верхний предел, совместимый с наблюдениями (см. гл. 8).

Наконец, возможен и более формальный подход к проблеме антивещества в рамках несимметричной модели. Предположим, что в среднем по всей Вселенной есть избыток барионов, соответствующий  $10^{-8}$  от числа фотонов. В теории энтропийных возмущений мы полагаем, что концентрация барионов меняется в пространстве,  $n_B(x, y, z) = n_{B_0} (1 + \delta(x, y, z))$ . По определению  $\bar{\delta} = 0$ , так что в пространстве есть как области с  $\delta > 0$ , так и области с  $\delta < 0$ .

Для образования шаровых скоплений (§ 8 гл. 14) существенно среднеквадратичное значение  $\delta M = \sqrt{\bar{\delta}^2(M)}$  для массы  $M \sim 10^5 M_{\odot}$ .

В фурье-разложении  $\delta(M) \sim \sqrt{\bar{\delta}_k^2 k^3}$  для  $k$ , соответствующего массе  $M$ . По порядку величины  $\delta(10^5 M_{\odot})$  имеет значение между 0,01 и 0,1. От выбора этой величины зависит момент образования шаровых скоплений (§ 8 гл. 14).

Далее, известно, что для весьма больших масс — порядка современного горизонта — возмущения малы,  $\delta(10^{24} M_{\odot}) < 10^{-5}$ .

Таким образом, принимая гипотезу Дикке и Пиблса (§ 8 гл. 14) о происхождении сферических скоплений и сравнивая  $\delta(10^5 M_{\odot}) \approx 0,01$  и  $\delta(10^{24} M_{\odot}) < 10^{-5}$ , приходим к выводу о падающем (с ростом  $M$ ) спектре  $\delta(M)$ . Значения  $\delta$ , приведенные выше, даны для момента рекомбинации, до этого момента энтропийные возмущения были заморожены. Ранее нас не интересовали возмущения  $\delta(M)$



для  $M \ll 10^5 M_\odot$ , так как эти возмущения не растут после рекомбинации в силу критерия Джинса.

Теперь, если считать, что спектр  $\delta$  и в области  $M \ll 10^5 M_\odot$  имеет тот же характер, что и при  $M > 10^5 M_\odot$ , то при малых  $M$  возможно  $\delta$  порядка единицы. При знакопеременном  $\delta$  это означает, что есть области, где  $n_b = n_{b_0}(1+\delta) < 0$ , т. е.  $n_b$  становится отрицательным.

Такие области нужно рассматривать как области, занятые антивеществом. «Вмороженность» возмущений  $\delta$  в РД-периоде, т. е. независимость от времени (см. § 4 гл. 10), относится только к достаточно большим массам,  $M > M_\odot$ .

Если  $|\delta(M)| > 1$  при  $M < M_\odot$ , то такие возмущения затухают, причем затухание означает аннигиляцию малых областей с избытком антивещества, вкрапленных в плазму с избытком вещества. Сюняев, Зельдович (1970б), исходя из отсутствия искажений спектра, получили определенные ограничения на величину  $\delta(M)$  в области  $10^{-3} M_\odot < M < 1 M_\odot$ :  $\delta < 10$  на нижнем краю и  $\delta < 0,5$  на верхнем краю указанного интервала масс \*).

Если будет доказано существование энтропийных возмущений с  $M \approx 10^5 M_\odot$ , то ограничения на  $\delta$  при меньших массах и отсутствие областей с антивеществом окажутся особенно существенными. При случайном заполнении Вселенной веществом и антивеществом на ранней стадии (в равновесии) барионы и антибарионы сосуществуют при  $T \gg m_p c^2$ , кажется неизбежным появление областей с избытком барионов. Но возможна и другая картина. Предположим, что первично везде энтропия постоянна и везде есть избыток барионов. Движение вещества ведет к локальному появлению ударных волн, к росту энтропии и появлению флуктуаций энтропии. После выравнивания давления  $n_b$  зависит от координат, однородность утеряна, возникли флуктуации. Но эти флуктуации таковы, что везде  $n_b > 0$ , аннигиляции (при  $T \ll m_p c^2$ ) не происходит.

В заключение подчеркнем, что наблюдения, хотя и недостаточно определенно, указывают на картину эволюции Вселенной с везде положительным барионным зарядом.

### § 3. Адиабатические возмущения, акустические колебания и влияние их на спектр РИ

В связи с теорией образования галактик было выяснено, что необходимая амплитуда возмущений до рекомбинации порядка

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \sim \frac{u \sqrt{3}}{c} \sim 10^{-4} \quad (15.3.1)$$

\*) Эти ограничения связаны с зависимостью от  $z$  количества энергии, искажающей спектр. По сравнению с оригинальной статьей Сюняева, Зельдовича нижняя граница  $10^{-3} M_\odot$  изменена в связи с учетом высокотемпературной диффузии (см. выше). На верхней границе учтено, что при  $\sqrt{\delta^2} < 1$  в гауссовом распределении тем не менее есть области, где  $\delta < -1$ .

Эта амплитуда относится к возмущениям, длина волны которых соответствует массе порядка  $10^{13} M_{\odot}$ . Возмущения меньшей длины волны затухают в РД-плазме вследствие фотонной вязкости и теплопроводности.

Вопрос, который рассматривается ниже, заключается в том, можно ли обнаружить эти коротковолновые возмущения косвенно, по искажениям спектра реликтового излучения.

Как было выяснено раньше (см. гл. 8), с современной методикой наблюдений можно обнаружить выделение энергии порядка  $3-10\% \epsilon_{\gamma}$  при  $1400 < z < 10^4$  и порядка  $100\% \epsilon_{\gamma}$  при  $10^5 < z < 10^7$  \*). Но энергия колебаний равна удвоенной кинетической энергии. По порядку величины плотность энергии колебаний есть

$$\rho u^2 = \rho c^2 \frac{1}{3} \left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right)^2. \quad (15.3.2)$$

Амплитуда акустических волн вблизи порога затухания  $\frac{\delta \rho}{\rho} \sim 10^{-4}$  даст  $\epsilon \sim 10^{-8} \rho c^2 \sim 10^{-8} \epsilon_{\gamma}$ , т. е. весьма малую величину.

Эффект обнаружимого искажения спектра возможен лишь в том случае, если амплитуда коротковолновых возмущений велика — порядка  $\frac{\delta \rho}{\rho} = 0,2-0,3$  для возмущений, затухающих при  $1400 < z < 10^4$ , и  $\frac{\delta \rho}{\rho} \sim 1$  для возмущений, затухающих при  $10^5 < z < 10^8$ .

В линейной теории возмущений затухание в первом (ближайшем к нам) интервале  $z$  имеет место для возмущений с  $10^{12} > M > 10^8 M_{\odot}$ , а во втором интервале для  $10^8 M_{\odot} > M > 10^{-4} M_{\odot}$ . Однако именно потому, что ограничения на амплитуду очень слабые, амплитуда может быть значительной, и линейная теория затухания возмущений оказывается неприменимой.

Какие ограничения на возмущения можно сделать априори, не опираясь на исследования спектра реликтового излучения?

Возмущения плотности связаны с возмущениями метрики. По порядку величины возмущения метрики в момент, когда линейный размер возмущения равен  $l = ct_{\text{рек}} \left( \frac{M}{10^{17} M_{\odot}} \right)^{2/3}$ , равны возмущениям плотности в акустическом периоде, когда амплитуда возмущений метрики не нарастает,  $t > t_{\text{рек}} \left( \frac{M}{10^{17} M_{\odot}} \right)^{2/3}$ .

Возмущения метрики порядка единицы исключаются с большой уверенностью. В самом деле, такие возмущения могут приводить к появлению отдельных коллапсирующих плазменных образований. При  $\frac{\delta \rho}{\rho} \sim 1$  общая плотность таких «черных дыр» космо-

\*) Здесь мы не вдаемся в детали, приводятся значения, относящиеся к  $\Omega \approx 0,3$  (все подробности (см. в гл. 8).

гического происхождения была бы сегодня огромной. Надо учесть, что при раннем коллапсе, на РД-стадии, фотоны давали бы подавляющий вклад в массу таких объектов, предсказываемых общей теорией относительности («отонов»). Общая плотность отонов была бы больше плотности обычного вещества даже в том случае, когда лишь в малой части пространства происходит коллапс и образование отонов [см. Зельдович, Новиков (1967б, 1971), Хоукинг, Карр (1973)].

Итак, с уверенностью можно требовать  $\frac{\delta\rho}{\rho} < 1$ .

Другое ограничение на амплитуду акустических волн возникает по более прозаической причине, и оно, по-видимому, более действенно. Акустические колебания рассматривались выше в линейной теории, справедливой для малой амплитуды. Предполагалось, что амплитуда остается постоянной на протяжении длительного времени, от момента начала акустических колебаний до момента начала диссипации (§ 2 гл. 10). За это время волны малого масштаба — с малой длиной волны и малым периодом — успевают совершить много колебаний. Становятся существенными нелинейные эффекты: превращение синусоидальных волн в ударные [Пиблс (1970)], генерация высших гармоник. Оба эффекта неразрывно связаны между собой. Последовательное и строгое рассмотрение эволюции «акустической турбулентности», совокупности случайных акустических волн дано в работе Захарова и Сагдеева (1970).

Задачу легко решить для упрощенной модели — одномерного движения без учета космологического расширения.

Скорость распространения малого возмущения относительно неподвижной системы равна [см. Ландау и Лифшиц (1953)]

$$\frac{dx}{dt} = b_{\text{зв}} + u = b_0 \left( 1 + \alpha \frac{\delta\rho}{\rho} \right) + \beta b_0 \frac{\delta\rho}{\rho} = b_0 \left( 1 + \gamma \frac{\delta\rho}{\rho} \right), \quad (15.3.3)$$

где  $b_0$  — невозмущенная скорость звука,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — безразмерные коэффициенты порядка единицы. Синусоидальная волна превратится в пилообразную за то время, когда расстояние между вершиной и впадиной волны (т. е. половина длины волны) будет преодолено за счет различия скоростей распространения,  $b_0(1+\gamma\delta^*)$  и  $b_0(1-\gamma\delta^*)$ , где  $\delta^* = \left| \frac{\delta\rho}{\rho} \right|$ . Это время порядка  $t_{\text{зв}} = \frac{1}{\omega\delta^*}$ . На следующем этапе распространение пилообразной волны сопровождается диссипацией акустической волны \*):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\delta^{*2} \rho b_0^2}{dt} = \frac{\rho u^3}{\lambda} = \frac{\rho \delta^{*3} b_0^3}{\lambda} = \omega \rho b_0^2 \delta^{*3}. \quad (15.3.4)$$

\*) Как известно, в ударной волне градиенты автоматически подстраиваются так, чтобы дать диссипацию энергии, следующую из законов сохранения при сколь угодно малых коэффициентах вязкости и теплопроводности [см., например, Зельдович, Райзер (1966)]. На другом языке, образование ударной волны сопровождается появлением в спектре высших гармоник.

Здесь  $\rho u^3$  есть скорость диссипации энергии на единице поверхности ударной волны при амплитуде изменения скорости  $u$  в ударной волне. Это уравнение (в котором систематически опускались численные множители порядка единицы) легко интегрируется. Ответ имеет вид

$$\delta^* = \frac{\delta_0^*}{\delta_0^* + \delta_0^* \omega (t - t_0)} < \frac{1}{\omega (t - t_0)}. \quad (15.3.5)$$

Таким образом, по истечении определенного числа колебаний  $N \sim \omega (t - t_0)$  безразмерная амплитуда должна быть меньше  $1/N$  независимо от начальной амплитуды — таков результат нелинейной теории. Время возникновения ударной волны из гладкой (например, синусоидальной) порядка  $\frac{1}{\delta_0^* \omega}$  и соответствует времени падения амплитуды вдвое; учет периода установления в пределе не меняет результат, относящийся к большой общей длительности процесса.

Какие изменения вносит отказ от упрощенной модели? При учете общего космологического расширения нужно иметь в виду изменение длины волны и частоты \*)  $\lambda \sim \sqrt{t}$ ,  $\omega \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$  и вместо про-

изведения  $\omega (t - t_0)$  будет интеграл  $\int_{t_0}^t \omega dt$ . На нижнем пределе как раз  $\lambda_0 = ct_0$ ,  $\omega_0 t_0 = 1$ , так что

$$N = \int_{t_0}^t \omega dt = \sqrt{\frac{t}{t_0}} - 1 \approx \sqrt{\frac{t}{t_0}} \approx \frac{z_0}{z}. \quad (15.3.6)$$

Здесь  $z_0 = 5 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{M}{M_\odot}}$ , величину  $z$  выбираем порядка  $10^5$  в соответствии с моментом, начиная с которого наступают искажения спектра. Труднее учесть тот факт, что волны распространяются во всех направлениях. Рассмотрение нужно вести на языке генерации гармоник при нелинейном взаимодействии волн.

Эффективное взаимодействие возникает лишь для волн, длительно действующих вместе с постоянным соотношением фаз. Проекция скорости одной волны на направление другой равна  $b_0 (1 + \gamma \delta^*) \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между волновыми векторами. Потребуем, чтобы обе поправки,  $\gamma \delta^*$  и  $(1 - \cos \theta)$ , были одного порядка, чтобы изменение скорости волны компенсировало наклон  $\theta$ . Отсюда получим эффективный угол, при котором происходит взаимодействие:

$$\theta < \sqrt{\gamma \delta^*},$$

---

\*) При этом существенно, что рассматривается РД-период, само расширение не изменяет амплитуду волны.

и соответствующий телесный угол составляет следующую долю от полного:

$$\frac{\pi\theta^2}{4\pi} \approx \delta^*. \quad (15.3.7)$$

В другом варианте теории эта доля равна  $\delta^{*2}$ .

Соответственно для перекачки энергии в высшие гармоники получим

$$\frac{d\delta^{*2}}{dt} = \omega\delta^{*3+n}, \quad (15.3.8)$$

где  $n=1$  или 2. Решение этого уравнения (опять-таки с опущенным численным множителем) есть

$$\delta^* = (N + \delta_0^{*-n-1})^{-\frac{1}{n+1}} < N^{-\frac{1}{n+1}}. \quad (15.3.9)$$

Выпишем максимальную долю  $\varepsilon$  энергии, которая может пойти на искажение спектра (ущевев после более раннего перисда нелинейного затухания \*) при  $z=10^5$  или  $10^6$ . При  $n=1$  и  $M=10^4 M_\odot$   $\varepsilon=0,005$  для  $z=10^5$  и  $\varepsilon=0,05$  для  $z=10^6$ ; при  $n=1$  и  $M=1 M_\odot$   $\varepsilon=0,002$  для  $z=10^5$ . Если же  $n=2$ , то при  $M=10^4 M_\odot$  и  $z=10^5$   $\varepsilon=0,03$ ; при том же  $M$  и  $z=10^6$   $\varepsilon=0,12$ ; соответственно при  $M=1 M_\odot$  и  $z=10^5$   $\varepsilon=0,016$ .

Итак, вывод заключается в том, что с учетом нелинейного затухания акустических колебаний искажения спектра реликтового излучения порядка нескольких процентов могли бы дать лишь волны масштаба от  $10^3 - 10^4 M_\odot$  до  $10^{12} M_\odot$  при достаточно большой (больше 0,2—0,3) начальной амплитуде. Волны меньшего масштаба при любой начальной амплитуде из-за нелинейных эффектов ослабляются в раннем периоде. К тому же амплитуды возмущений порядка единицы исключены, так как они привели бы к образованию отонов.

Уже отмечалось, что адиабатическую теорию возмущений можно рассматривать на всем протяжении эволюции Вселенной от сингулярного состояния. При этом достаточно задать в сингулярном состоянии конечные флуктуации метрики, а флуктуации плотности  $\frac{\delta\rho}{\rho}$  могут быть выбраны равными нулю при  $t \rightarrow 0$ .

Спектр флуктуаций метрики может быть выбран плоским [Гаррисон (1970а), Зельдович (1973а)], с амплитудой возмущений метрики порядка  $10^{-3} - 10^{-4}$  на всех длинах волн. При этом возмущения спектра соответствуют выделению энергии порядка  $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = (10^{-6} - 10^{-8}) \ln \frac{M_2}{M_1}$ , где  $M_1 - M_2$  есть интервал масс таких, что соответствующие возмущения затухают в «чувствительном» периоде

\*) Подчеркнем, что при  $\delta_0 > N^{-\frac{1}{n+1}}$  остающаяся энергия не зависит от начальной.



и явно проявляются в наблюдаемой структуре Вселенной. Возмущения малого масштаба, даже если начальная амплитуда их не мала, затухают задолго до рекомбинации. Они не проявляются как флуктуации температуры. Возможности косвенного обнаружения мелкомасштабных флуктуаций по спектру РИ обсуждены в предыдущих параграфах.

Возмущения малой амплитуды и большого масштаба проявляются в настоящее время ( $z=0$ ) весьма слабо, как малая неравномерность плотности и скорости \*). Рассмотрим возможность их обнаружения с помощью РИ.

Для этого нужно построить теорию углового распределения РИ в возмущенной Вселенной.

Ряд авторов строит такую теорию, начиная с самого общего уравнения распространения излучения в произвольной метрике, зависящей от времени [см. Сакс и Вольф (1967)]. Работа этих авторов замечательна тем, что наряду со сложными расчетами дана ясная и простая интерпретация результатов, которую ниже мы заимствуем.

В предлагаемой книге последовательно проводится противоположный принцип — строятся частные, наиболее простые теории рассматриваемых явлений; ценой потери общности мы стремимся к простоте и наглядности.

Каковы особенности задачи, позволяющие упростить трактовку явления?

В отсутствие возмущений РИ было бы полностью изотропным, не зависело бы от угла. В этой ситуации изменение направления лучей, в частности, упругое рассеяние или фокусировка, не вызывает наблюдаемых эффектов. Об этом говорит основная теорема геометрической оптики — сохранение яркости (потока энергии в единице телесного угла) при преломлении и рассеянии без поглощения.

Теория изотропного фона оказывается во много раз проще теории действия больших масс на излучение отдельных источников. Из сказанного ясно, что никакие покоящиеся (точнее, покоящиеся относительно общего хаббловского расширения, не обладающие пекулярными скоростями) гравитационные линзы не нарушают точной изотропии РИ для земного наблюдателя.

Изменение яркости происходит всегда по типу красного или синего смещения спектра, имеем ли мы дело с доплер-эффектом или с изменением частоты в гравитационном поле — в обоих случаях частоты всех фотонов смещаются в одинаковом отношении, а безразмерные числа заполнения фотонами ячеек фазового пространства не изменяются. В результате планковский спектр остается

---

\*) Если  $\Omega < 1$ , то возмущения малой амплитуды уже не растут и никогда (даже при  $t \rightarrow \infty$ ) не достигнут большой амплитуды по плотности, не приведут к образованию изолированных, гравитационно связанных тел.

планковским, но со смещенным значением температуры. Это смещение температуры может быть различным для различных пучков лучей в зависимости от их «истории», от скорости источника и наблюдателя, от гравитационного потенциала в точках излучения и приема и от нестационарных гравитационных полей на пути.

Гравитационное поле изолированного покоящегося тела не нарушает изотропию, так как синий сдвиг на пути луча, приближающегося к телу, в точности компенсируется красным сдвигом на продолжении пути, когда луч удаляется от тела. Не играет роли и гравитационный потенциал того скопления или сверхскопления, к которому принадлежит наша Галактика вместе с Солнцем и Землей. Он создает только общий, не зависящий от направления синий сдвиг, который нельзя выявить наблюдениями.

В не зависящем от времени гравитационном поле излучение остается в каждой точке равновесным, и, в частности, изотропным, если оно равновесно на бесконечности; происходит лишь общее синее смещение  $\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Phi}{c^2}$  в ньютоновском приближении. Термодинамика в ОТО дает [см. Ландау и Лифшиц (1964)] условие  $\sqrt{g_{00}}T = \text{const}$ . Так как  $g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$ , то этот вывод согласуется с ньютоновским при учете связи частоты и температуры  $T \sim \nu$ ,  $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta\nu}{\nu}$ .

Итак, возможная анизотропия РИ полностью характеризуется распределением наблюдаемой температуры (характеризующей планковское распределение) по небесной сфере  $T(\theta, \varphi)$ . Нет надобности следить за поворотом, сужением или расширением пучка лучей, воспринимаемого наблюдателем, поскольку  $T(\theta, \varphi)$  определяет яркость \*). Но для определения  $T(\theta, \varphi)$  достаточно проследить за красным смещением вдоль луча. Это смещение зависит как от доплер-эффекта, так и от действия гравитационных полей (т. е. искажения метрики) на электромагнитное излучение, на фотоны.

Фотоны являются релятивистскими частицами, поэтому они «чувствуют» не только скалярный гравитационный потенциал (т. е. отличие  $g_{00}$  от 1), но и другие компоненты  $g_{\alpha\beta}$ . В частности, фотоны взаимодействуют с гравитационными волнами, которые не содержат в ньютоновской теории тяготения.

Чтно, однако, рассматривать луч в каждой точке его траектории локально инерционной системе; в этом случае явное влия-

\* в параграфе не рассматриваются физические процессы поглощения фотонов плазмой и рассеяния с изменением частоты. Эти эффекты, и в настоящей главе, могут создавать отклонения спектра от чистого (как показывают наблюдения) все виды возмущений принципа суперпозиции малых возмущений. В данном случае пространственные (угловые) возмущения космологического типа (от тормозных комптоновских) можно рассматривать,



ние метрики, т. е. гравитационных полей, на красное смещение исчезает. Вычисление сводится к суммированию (интегрированию) доплеровского изменения частоты вдоль всей траектории. В целом предлагаемый способ расчета сводится к следующему. Представим себе пространство заполненным совокупностью пробных частиц, на которые не действуют никакие силы, кроме гравитационных. Рассматриваем распространение лучей в этой среде и вычисляем частоту света, измеренную наблюдателями, движущимися вместе с пробными частицами. Изменение частоты на малом отрезке зависит только от мгновенной относительной скорости соседних частиц и вычисляется по доплеровской формуле. Действительно, на отрезке  $dr$  относительное ускорение дает вклад  $\sim (dr)^2$  в изменение частоты света, исчезающий при  $dr \rightarrow 0$  и интегрировании \*).

Не следует думать, что мы пренебрегаем влиянием гравитационных полей: они учитываются точно, хотя и косвенно — через распределение скоростей пробных частиц. В невозмущенном решении поле скоростей вблизи любой частицы задано законом изотропного расширения  $u = H(t)r$ . При наличии возмущений — как продольных, с изменением плотности, так и вихревых, или тензорных (гравитационных волн) — поле скоростей становится анизотропным, характеризуется тензором  $H_{ik}(u_i = H_{ik} r_k)$ , и тензор этот зависит как от времени, так и от координаты  $r$  — одновременно теряется изотропия и однородность невозмущенной модели.

Напомним, что такой метод нахождения красного смещения дает простой способ вывода законов красного смещения в невозмущенной модели (§ 1 гл. 3).

Смысл метода сводится к тому, что движение пробных частиц находится точно и, если нужно, с использованием ОТО. Когда движение частиц найдено, красное смещение вычисляется элементарно.

Дополнительное соображение заключается в том, что при малой амплитуде возмущений изменение траектории луча мало и изменение красного смещения (ведущее к возникновению  $\Delta T$ ), вычисленное вдоль невозмущенной траектории, также мало.

В невозмущенной задаче изменение траектории движения частиц не меняет красного смещения. Вклад в изменение красного смещения от изменения траектории — второго порядка малости и потому может не учитываться. Ниже эти соображения применяются к расчету  $\Delta T(\theta, \varphi)$ , т. е. амплитуды и углового распределения по небу отклонений от изотропии РИ.

---

\*) Относительное ускорение  $\Delta \ddot{x}$  двух соседних частиц пропорционально расстоянию между ними  $\Delta x$ . Дополнительная разность скоростей, зависящая от ускорения, пропорциональна времени пробега света  $\frac{\Delta x}{c}$ . Зависящий от ускорения вклад в красное смещение оказывается  $\sim (\Delta x)^2$ .

Будем рассматривать Вселенную, заполненную веществом с  $P=0$ , что является хорошим приближением после рекомбинации \*). Очевидно, что рассматривать нужно только этот период: до рекомбинации фотоны испытывают многократное томсоновское рассеяние на свободных электронах. После рекомбинации средняя энергия фотонов и в особенности энергия фотонов в рэлей-джинсовской части спектра во много раз меньше энергии ионизации водорода, нейтральный газ прозрачен. Возможность вторичной ионизации газа и рассеяния фотонов при  $z < z_{\text{рек}}$  обсудим отдельно, в связи с конкретными предположениями о возмущениях. Итак, применим изложенный выше принцип к произвольному полю пекулярной скорости пылевидного вещества ( $P=0$ ). Это же вещество играет роль пробных частиц, составляющих систему отсчета. Основное уравнение доплер-эффекта:

$$-\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{c} \frac{du'_n}{dt}, \quad (15.4.1)$$

где  $u'_n$  есть проекция скорости на направление луча.

В системе координат (со штрихом), в которой одна частица ( $x_0$ ) покоится и к тому же равно нулю ускорение этой частицы, разность скоростей соседней частицы и данной целиком определяется пространственной зависимостью скорости. Для частицы в точке  $x_0$   $u(x_0, t)=0$ ,  $u'(x_0, t)=0$ ; для соседних частиц

$$\frac{du'_n}{dt} = c \frac{\partial u'_n}{\partial n}, \quad (15.4.2)$$

где  $\partial n$  — дифференциал длины от частицы  $x_0$  в направлении  $n$ . При переходе в «лабораторную» систему координат мы добавляем к  $u'(x, t)$  зависящую от времени скорость частицы  $x_0$ :

$$u(x, t) = u'(x, t) + u(x_0, t), \quad (15.4.3)$$

поэтому вдоль распространения луча

$$\left. \frac{du_n(x, t)}{dt} \right|_{\text{луч}} = \left. \frac{du'_n}{dt} \right|_{\text{луч}} + \frac{\partial u_n(x_0, t)}{\partial t} = \left. \frac{du'_n}{dt} \right|_{\text{луч}} - c \operatorname{grad}_n \varphi, \quad (15.4.4)$$

где  $\varphi$  — ньютонковский потенциал, описывающий движение (ускорение) частиц.

Интегрирование соотношения (15.4.4) вдоль луча дает относительное изменение частоты и, следовательно, температуры  $\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Delta T}{T}$ .

\*) Напомним, что плотность излучения равна  $2 \cdot 10^{-21} \text{ э/см}^3$  при  $z = z_{\text{рек}} = 1400$ , плотность вещества  $\approx 3 \cdot 10^{-20} \Omega \left( \frac{H}{75} \right)^2$ . Следовательно,  $P < 0,2 \rho c^2$  при  $\Omega > 0,1$ , если  $H \approx 75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ , и  $\Omega > 0,2$  при  $H = 50 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$ . В дальнейшем в ходе расширения приближение становится все более точным.

При интегрировании первый член даст просто разность проекций скорости в начале и в конце пути (в момент  $t_1$ ):

$$\frac{\Delta T}{T} = \Delta \ln v = \frac{-u'_n(0) + u'_n(t_1)}{c} \quad (15.4.5)$$

— элементарный вклад доплер-эффекта. Сложнее обстоит дело со вторым членом, поскольку потенциал зависит не только от координаты, но и от времени и подынтегральное выражение не является полным дифференциалом.

Если длина волны возмущения невелика и направление луча не специально перпендикулярно волновому вектору возмущения, то  $\varphi$  и  $\text{grad}_n \varphi$  являются быстро меняющимися функциями времени. Пусть  $\varphi = \varphi_0(t) e^{i x k(t)}$ , а  $\theta$  — угол между лучом и волновым вектором; тогда

$$\left. \begin{aligned} \text{grad}_n \varphi &= \cos \theta \cdot \varphi_0(t) |k(t)| e^{i x k(t)}, \\ \int \text{grad}_n \varphi \, d\mathbf{r} &= \int \varphi_0(t) \, d\epsilon^{i x k}, \end{aligned} \right\} \quad (15.4.6)$$

причем  $\varphi_0(t)$  и  $|k(t)|$  — медленно меняющиеся (например, степенные) функции времени, а быстрая переменность  $\varphi(x, t)$  вдоль луча зависит от того, что меняется показатель  $e^{i x k(t)}$  в ходе распространения луча.

Интеграл вдоль луча определяется для функции такого вида вкладом пределов [см., например, Зельдович, Мышкис (1972)]

$$\int_a^b \varphi_0(t) e^{i \omega t} \, dt = \varphi_0 \frac{e^{i \omega t}}{i \omega} \Big|_a^b + \frac{\dot{\varphi}_0 e^{i \omega t}}{\omega^2} \Big|_a^b + \dots \quad (15.4.7)$$

Медленно меняющиеся функции в нашем случае пропорциональны степеням времени  $t$ , отсчитанного от сингулярности; поэтому  $\dot{\varphi}_0 \sim \frac{\varphi_0}{t}$ ,  $\ddot{\varphi}_0 \sim \frac{\varphi_0}{t^2}$  и каждый следующий член меньше предыдущего

в отношении  $\omega t = \frac{k c t}{\cos \theta} = \frac{c t}{\lambda \cos \theta}$ . При  $\cos \theta \sim 1$  и для коротких волн отсюда следует возможность оставить только старший член. При этом получим полное  $\frac{\Delta T}{T}$ , интегрируя (15.4.4) вдоль луча и учитывая (15.4.5):

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{c} [-u'_n(0) + u'_n(t_1)] + \frac{1}{c^2} [\varphi(0) - \varphi_1(t_1)]. \quad (15.4.8)$$

В этом приближении результат имеет чрезвычайно простой и ясный вид: изменение частоты есть сумма доплер-эффекта, соответствующего peculiarной скорости, и чисто гравитационного влияния на частоту.

В таком виде результат приведен в тщательно выполненной работе Сакса и Вольфа, цитированной выше, как итог довольно сложных расчетов в рамках ОТО. Отметим, что в этой работе гравитационное смещение содержит коэффициент  $1/3$ . До сих пор не ясно, как классически истолковать этот коэффициент. Применение изложенных принципов к адиабатическим возмущениям большого масштаба, к вихревым возмущениям, к гравитационным волнам имеет в каждом случае свои специфические особенности, которые обсуждаются вместе с конкретными физическими результатами в следующих параграфах.

### § 5. Обнаружение возмущений плотности с помощью реликтового излучения

Рассмотрим возмущение плотности, но не слишком большого масштаба ( $10^{13}M_{\odot}$ — $10^{23}M_{\odot}$ ) и малой амплитуды. Нижний предел интервала соответствует наименьшему не затухающему из-за диссипации масштабу при  $t_{\text{рек}}$ , верхний предел соответствует горизонту  $ct_0$ ,  $t_0$  — сегодняшний момент. Для простоты сначала примем  $\Omega=1$ . Естественнo предположить, что спустя достаточное время после рекомбинации мы имеем дело с растущим возмущением: если, например, в момент рекомбинации растущие ( $\sim t^{2/3}$ ) и убывающие ( $\sim t^{-1}$ ) возмущения были представлены с амплитудой одного порядка, то к настоящему времени амплитуда убывающих возмущений окажется ничтожно малой по сравнению с амплитудой растущих возмущений. Из того факта, что мы имеем дело с растущими возмущениями, вытекают два следствия.

Первое — вполне определенное соотношение между амплитудой и фазой возмущения плотности, с одной стороны, и амплитудой, направлением и фазой пекулярной скорости, с другой стороны. Если записать  $k$ -ю фурье-компоненту возмущения плотности в виде

$$\frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \delta_k(t) \sin[k_k(t) \mathbf{x} + \psi_k] = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \delta_{0k} \sin\left[k_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/3} \mathbf{x} + \psi_k\right], \quad (15.5.1)$$

то скорость

$$\mathbf{u} = \frac{2}{3} \delta_{0k} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/3} \frac{k_0}{t_0 k_0^2} \cos\left[k_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/3} \mathbf{x} + \psi_k\right]. \quad (15.5.2)$$

Здесь  $\mathbf{x}$  — координата (измеренная в см, не сопутствующая),  $\delta_{0k}$  и  $k_0$  — постоянные величины,  $t_0$  — сегодняшний возраст Вселенной ( $\sim 10^{10}$  лет). Рассматриваем плоский мир,  $\Omega=1$ ,  $H=75$  км/сек · Мпс. Итак, сегодняшней амплитуде плотности  $\delta_{0k}$  соответствует также сегодняшняя амплитуда скорости

$$|u|_{\text{max}}|_{t=t_0} = c \delta_{0k} \left(\frac{M}{4 \cdot 10^{23} M_{\odot}}\right)^{1/3} = 4 \cdot 10^2 \delta_{0k} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{1/3} \text{ (см/сек)},$$

причем скорость направлена по волновому вектору возмущения \*). Выражение  $|u|_{\max}$  записано в виде, явно выделяющем масштаб горизонта  $ct_0$ , охватывающий  $M = 4 \cdot 10^{23} M_{\odot}$ .

Второе следствие заключается в том, что в растущем возмущении максимальное воздействие на РИ оказывает ближайший к сегодняшнему дню период. По этой причине также не существенно, имели ли мы дело до рекомбинации с адиабатическими или энтропийными возмущениями, лишь бы они давали растущую моду возмущений в нейтральном газе (после рекомбинации) одинаковой амплитуды. Этот принцип можно распространить и на возмущения плотности, появляющиеся во втором (нелинейном) порядке из вихревых возмущений, но здесь влияние первого порядка вихревых возмущений скорости может оказаться больше.

Итак, мы рассматриваем движение вещества, заданное формулами (15.5.1), (15.5.2), на фоне РИ, которое в первом приближении однородно и изотропно \*\*).

Перейдем от отдельной волны к статистической совокупности волн. Нужно сложить (векторно!) скорости, обязанные возмущениям всех длин волн.

По определению

$$\delta_k(M) = \sqrt{\delta_k^2 \cdot \frac{4}{3} \pi k^3}, \quad \text{где} \quad M = \rho \left( \frac{\pi}{k} \right)^3, \quad (15.5.3)$$

причем

$$\overline{\delta^2(M)} = \frac{4\pi}{3} \int_0^k \delta_k^2 k^2 dk = \int_M^\infty \delta_k^2(M) d \ln M. \quad (15.5.4)$$

Здесь  $\overline{\delta^2(M)}$  есть среднеквадратичное отклонение плотности от средней в масштабе, большем заданного нижним пределом  $M$ . Отсюда получим вероятное значение скорости в большом масштабе:

$$\sqrt{u^2} = c \sqrt{\int \delta_k^2(M) \left( \frac{M}{4 \cdot 10^{23} M_{\odot}} \right)^{1/3} d \ln M}. \quad (15.5.5)$$

\*) В момент рекомбинации, от которого мы начинаем рассмотрение возмущения, плотности и скорости находятся не в том соотношении, которое соответствует чистому растущему возмущению. Поэтому первично возникает суперпозиция растущих и падающих возмущений.

\*\*) Существенно ограничение масштаба длиной волны меньше  $ct_0$ , массой меньше  $10^{23} M_{\odot}$ . В большем масштабе (этот случай будет рассмотрен отдельно) существенно увеличение РИ вместе с веществом. Возмущение, масштаб которого превосходит горизонт  $\lambda > ct_0$ , ненаблюдаемо в пределе  $\lambda \gg ct_0$ , так как соответствует стлчению плотности в точке наблюдения от плотности в области, принципиально ненаблюдаемой. Чтобы отразить это обстоятельство, можно при вычислении амплитуды скорости [см. далее (15.5.5)] либо ограничить интегрирование верхним пределом  $M_{23} = \frac{M}{10^{23} M_{\odot}} = 1$ , либо заменить под интегралом  $M^2$  например на

$$\frac{M^2}{1 + (M/M_{23})^4}.$$

Итак, главное возмущение изотропии наблюдаемого нами РИ зависит от сегодняшнего пекулярного движения самого наблюдателя! Получающаяся при этом угловая зависимость РИ дается простейшим выражением:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{u}{c} = \left( \frac{\Delta T}{T} \right)_0 \cos \theta', \quad (15.5.6)$$

где  $\theta'$  — угол между направлением наблюдения и направлением пекулярной скорости. Наблюдения угловой зависимости интенсивности РИ (его температуры) проводят обычно с помощью антенны, неподвижно зафиксированной относительно Земли. При таком способе действий устраняется ряд экспериментальных ошибок, что существенно для достижения максимальной чувствительности.

Антенна прочерчивает на небесной сфере окружность по мере вращения Земли. Непосредственно измеряется зависимость температуры от времени; эту зависимость разлагают в ряд Фурье, как функцию с периодом в одни звездные сутки, усредняя данные многих суток наблюдений. Рассматриваемый выше тип возмущений, зависящий от сегодняшней пекулярной скорости, соответствует 24-часовой гармонике:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{|u|}{c} \sin \varphi \sin \psi \cos \left( \frac{2\pi t_{\text{часы}}}{24} + \alpha \right) = a \cos \left( \frac{2\pi t}{24} + \alpha \right), \quad (15.5.7)$$

где  $\varphi$  — угол между вектором скорости и осью вращения Земли,  $\psi$  — угол между направлением приема антенны и осью вращения Земли.

Наиболее точные измерения дают (полагаем ориентировочно  $\sin \varphi \sin \psi \sim 0,5$ )  $\frac{|u|}{c} \approx 10^{-3}$ . Неприятная особенность этих измерений заключается в том, что возмущения различного масштаба (например, движение Солнечной системы в Галактике и движение Галактики в местной группе) дают один результирующий вектор скорости. В рассматриваемом приближении угловая зависимость не позволяет разделить вклад в общий вектор скорости отдельных причин.

Тесно связана с предыдущим и вторая трудность. Точное измерение изотропии РИ проводится только в одной точке Вселенной. Насколько статистически весомым является результат? Не может ли измеренное на Земле значение  $|u|$  (или верхняя граница,  $|u| < 300$  км/сек) быть результатом случайной компенсации вклада различных возмущений именно для нашей Галактики, для Земли?

Ответ на этот вопрос может быть только вероятностным. Можно найти вероятность того, что при большой средней (по Вселенной) пекулярной скорости случайно скорость Галактики оказалась малой. При этом весьма существенно, что в принципе измерение

скорости есть измерение трех компонент вектора и эти три компоненты статистически независимы. Пусть среднеквадратичное значение пекулярной скорости по Вселенной равно  $u_0$  и вероятность найти данное значение скорости  $u$  определяется нормальным законом. Тогда

$$dW = p(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z = \\ = \left(u_0 \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)^{-3} \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{u_0^2} \right) \right] du_x du_y du_z. \quad (15.5.8)$$

Вероятность того, что скорость меньше  $u_1$ , где  $u_1 \ll u_0$ , есть

$$W(u_1) = p(0, 0, 0) \frac{4\pi}{3} u_1^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^3. \quad (15.5.9)$$

Высокий показатель степени, равный трем, как раз и получается за счет трехмерности мира (и трех независимых компонент). С небольшой нестрогостью можно сказать, что с вероятностью лучше 0,999 среднее  $u_0$  меньше  $10^{-2}c$ . Если на Земле измерено  $|u| < 10^{-2}c$ , то с вероятностью лучше 0,93 среднее  $u_0$  меньше  $2,5 \cdot 10^{-2}c$ . В действительности в настоящее время мы плохо знаем проекцию скорости на полярную ось, большая часть измерений относится к проекции скорости на плоскость экватора.

В пределе, если о полярной компоненте ничего не известно, оценки ухудшаются: получим  $W(u_1) \sim \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^2$  (степень 2, так как две компоненты); с достоверностью 0,999 найдем  $u_0 < 3 \cdot 10^{-2}c$ ; с достоверностью 0,93 найдем  $u_0 < 4 \cdot 10^{-2}c$  (при тех же условиях, что и выше). Крайне желательно, чтобы были преодолены экспериментальные трудности и выяснена изотропия РИ на всей небесной сфере. Эта задача важна и в связи с некоторыми анизотропными космологическими моделями (см. раздел IV).

Важнейший вывод из предыдущего заключается в том, что в плоской космологической модели ( $\Omega=1$ ) сегодняшняя амплитуда возмущений плотности в масштабе горизонта, несомненно, меньше 0,01. Между тем в масштабах скоплений галактик сегодняшняя амплитуда гораздо больше единицы. Следовательно, спектр возмущений, несомненно, является падающим. Исследование РИ наносит решительный удар по концепции иерархической структуры: в этой концепции предполагается, что галактики образуют скопления, скопления образуют сверхскопления, сверхскопления образуют сверхсверхскопления и т. д., так что в каждом масштабе амплитуда плотности порядка единицы.

Уточним логическую сторону этого опровержения. В его основе, кроме наблюдения изотропии РИ, лежат еще и общие представления об эволюции горячей Вселенной от состояния большой плотности до современного состояния. Эти представления также

в конечном счете основаны на наблюдениях, и прежде всего на наблюдениях спектра РИ.

Прямое исследование распределения скоплений галактик по небесной сфере, проделанное Цвикки, Герцогом и Вилдом (1968), Ю и Пиблсом (1969), Пиблсом (1973б, 1974а), Хаузером и Пиблсом (1973) (см. § 11 гл. 14), также подтверждает отсутствие структурных единиц выше  $M \sim 10^{14} M_{\odot}$ , что противоречит идее иерархической структуры. Однако исследование РИ приводит к тому же выводу с большей точностью и надежностью.

В заключение заметим, что возмущения скорости в принципе можно измерять по наблюдениям далеких галактик, а не РИ. Относительные скорости удаленных галактик измеряются и непосредственно по смещению спектральных линий. Однако использование этих измерений для характеристики возмущений затруднено, так как главная часть измеряемого эффекта связана с невозмущенным хаббловским красным смещением. Чтобы найти пекулярную скорость, нужно вычесть хаббловскую скорость, пропорциональную расстоянию. Очевидно, что такая процедура весьма неточна и оценки получаются грубые. Не следует думать, что ошибка в определении пекулярной скорости соответствует неточности, с которой известна постоянная Хаббла ( $75 \pm 25$  км/сек·Мпс по данным до 1972 г.;  $53 \pm 5$  км/сек·Мпс по данным Сэндиджа 1972 г., см. § 9 гл. 3). В определении  $H$  труднее всего бороться с систематическими ошибками, в особенности в связи с многоступенчатой системой определения шкалы расстояний. Именно с изменением шкалы были связаны драматические скачки от  $H = 560$  км/сек·Мпс в 1930 г. к современным значениям.

Для характеристики возмущений достаточно найти среднеквадратичное отклонение скорости галактик от средней кривой зависимости  $z - t$  в пределах однотипного ряда наблюдений. Такая кривая и положение отдельных точек измерений даны на рис. 18 из статьи Сэндиджа (1972б).

Приписывая все отклонения от прямой пекулярным скоростям, получим по данным работ Сэндиджа (1972б, в), что среднеквадратичное отклонение составляет округленно  $\bar{u}' \leq 0,04 u_H = 0,04 H r$  ( $u_H = H r$  — хаббловская скорость) во всем интервале  $0,03 < z < 0,5$ , т. е. для  $r$  от  $0,03 \frac{c}{H}$  до  $0,5 \frac{c}{H}$  [новые данные см. Сэндидж, Тамман (1974д)]. Из этих данных получаем, что изменения плотности вследствие растущих возмущений порядка

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \sim \frac{t_0 u'}{\lambda} \sim \frac{u'}{H r} \leq 0,04. \quad (15.5.10)$$

Итак, мы получили ограничение на флуктуации плотности большого масштаба из оценки отклонений скоростей удаления скоплений от кривой Хаббла. Для наибольшего масштаба это ограничение



на порядок или полтора слабее того ограничения, которое вытекает из исследования анизотропии РИ. Однако большим преимуществом метода красных смещений галактик является то, что используется много отдельных измерений (практически около 100), тогда как скорость по РИ измеряется для одного только объекта. Поэтому представляется, что метод красных смещений хоть и менее чувствителен, но более надежен (правда, это интуитивное ощущение нелегко выразить в числах).

### § 6. Спектр возмущений и гиперболическая модель с малой плотностью

Измерения РИ приводят к важнейшему выводу относительно малости амплитуды наиболее длинноволновых возмущений:  $\delta(M) \leq 10^{-3}$  для  $M \sim 10^{23} M_{\odot}$ ,  $\lambda \sim ct_0$ ;  $\delta(M) \leq 10^{-2}$  для  $M \sim 10^{20} M_{\odot}$ ,  $\lambda \sim 0,1 ct_1$ ;  $\delta(M) \leq 10^{-1}$  для  $M = 10^{17} M_{\odot}$ ,  $\lambda \sim 0,01 ct_1$ , причем  $ct_0 \sim 5000 \text{ Mpc}$ . Наконец, для  $10^{14} M_{\odot}$  получим  $\delta(M) \leq 1$ .

Здесь возмущения плотности  $\delta(M)$  приведены для настоящего времени. Но скопления галактик с массами порядка  $10^{13} - 10^{14} M_{\odot}$ , несомненно, существуют и достаточно рельефно выделяются на картах неба в настоящее время. Есть основания полагать, что они образовались не позднее  $z_{\text{ск}} \sim 2$  или 4. Это означало бы, что в линейной теории  $\delta(M_{\text{ск}}) \sim 1$  при этом  $z_{\text{ск}}$  (здесь  $M_{\text{ск}}$  — масса скопления), а значит, сегодня ( $z=0$ ) экстраполированное по линейной теории  $\delta(M_{\text{ск}}, z=0) \geq 3-5$ .

Таким образом, на первый взгляд налицо противоречие (хотя и не очень надежное) между оценками  $\delta(M)$  по 24-часовым флуктуациям РИ и прямыми наблюдениями структуры Вселенной.

Вопрос о надежности наблюдений и их статистическом весе кратко обсуждался в предыдущем параграфе. Насколько надежна теория?

В основу были положены два предположения: а) малость возмущений, б) плоская модель с  $\Omega=1$ . Если возмущения не малы, то при  $\delta \approx 1$  в соответствующем масштабе возникают гравитационно связанные образования; будем называть их скоплениями. В скоплениях скорости составляющих его меньших структурных единиц подчинены теореме вириала, не возрастают с течением времени, так как рост возмущений прекращается, но и не убывают в ходе расширения. Таким образом, вывод линейной теории при  $\delta > 1$ , очевидно, уже неприменим и никакого противоречия не возникает.

После образования скоплений нужно рассматривать в рамках линейной теории возмущения большего масштаба, но еще малой амплитуды, для которых скопления являются атомами газа.

Однако еще более важно изменение теории при отказе от рассмотрения плоской модели. Напомним, что оценка массы вещества

в звездах и в газе неизменно дает значения плотности меньше критической (см. § 11 гл. 14).

Отказ от второго предположения ( $\Omega=1$ ) и учет особенностей гиперболической Вселенной ( $\Omega \ll 1$ ), по-видимому, объясняют соотношение между скоростью, измеренной по РИ (и по диаграмме Хаббла), и возмущениями плотности. Характерным для возмущений в мире с  $\Omega \ll 1$  является то, что, начиная с  $z+1 \sim \frac{0,4}{\Omega}$ , возмущения плотности не растут, а пекулярная скорость падает с течением времени (см. гл. 11) в линейной теории.

Значит, в этом предположении можно совместить образование скоплений [т. е.  $\delta(M_{\text{ск}}) \approx 1$  при  $z_{\text{ск}} > 1$ ] с тем фактом, что для больших масштабов ( $M > M_{\text{ск}}$ ), где  $\delta(M) < 1$  при  $z = z_{\text{ск}}$ , возмущения скорости малы. После  $z+1 \sim \frac{0,4}{\Omega}$ , т. е. после выхода на милновское расширение, скорость падает обратно пропорционально радиусу мира, т. е. пропорционально  $z+1$ .

Таким образом, появляется аргумент в пользу выбора  $\Omega \ll 1$ , не зависящий от традиционных методов определения массы скоплений, плотности газа или искривления линии на диаграмме Хаббла. Этот аргумент перекликается с высказыванием Сэндиджа (1972б, в); см. также Сэндидж, Тамман (1974д, е).

В этих работах Сэндидж весьма скептически отзывается о возможности определения параметра ускорения  $q_0$  ( $q_0 = \frac{\Omega}{2}$  для  $P=0$ , см. § 9 гл. 3). Он подчеркивает [см. также доклад Таммана (1973а)], что при средней плотности  $\bar{\rho} = \rho_c$ , соответствующей  $\Omega=1$ , в областях с плотностью больше средней отклонения от хаббловского закона были бы весьма велики. Солнечная система и галактики действительно не расширяются (их плотности на много порядков больше средней), между тем в группах, где  $\bar{\rho} \sim (3-5)\bar{\rho}$ , наблюдается слабо-возмущенное хаббловское расширение.

На другом языке, этот аргумент совпадает с тем, что было изложено выше с помощью свойств решений теории возмущений.

## § 7. Угловое распределение флуктуаций РИ

Реликтовое излучение, вероятно, приходит к земному наблюдателю, не испытывая рассеяния после рекомбинации плазмы, при  $z_{\text{рек}} \sim 1400$ . Поэтому угловое распределение температуры реликтового излучения дает возможность непосредственно «увидеть» (в радиодиапазоне) дозвездную плазму на ранней стадии эволюции.

В частности, можно выяснить, насколько однородной была плотность плазмы на этой стадии, насколько точно скорость соответствовала модели Фридмана.

Локальные отклонения плотности и скорости должны дать локальные (в направлении луча, приходящего от этого места к наблюдателям) флуктуации температуры на небесной сфере. В принципе, изучение таких флуктуаций, зависящих от  $\theta$ ,  $\varphi$  — двух угловых переменных, дает гораздо больше информации по сравнению с измерением одной величины (точнее, одного вектора) — скорости наблюдателя относительно поля РИ.

Функция  $\Delta T(\theta, \varphi)$  характеризует амплитуду и пространственный масштаб возмущений фридмановской модели. Изложение в этом параграфе основано на работе Зельдовича и Сюняева (1970).

Начнем с выяснения соотношения между линейным размером неоднородности в момент рекомбинации  $r_{\text{рек}}$ , размером в настоящее время  $r_0$ , характерной массой  $M$  и углом  $\theta$ , под которым видна такая неоднородность. Принимая, как и везде,  $H=75$  км/сек·Мпс,

$\rho_c = 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>,  $P \ll \varepsilon$  и используя формулы  $\theta = \frac{r_{\text{рек}} H_0}{c\psi}$ ,  $\psi(z \gg 1) = \frac{2}{\Omega z}$  (см. гл. 3), для момента рекомбинации получаем

$$\theta = \frac{H_0 \Omega r_{\text{рек}} z_{\text{рек}}}{2c} = \frac{r_0 \Omega}{2,4 \cdot 10^{28}} = \left( \frac{r_0}{100 \text{ Мпс}} \right) \Omega \cdot 1,3 \cdot 10^{-2}. \quad (15.7.1)$$

С другой стороны,

$$\left. \begin{aligned} M &\approx \left( \frac{r_0}{2} \right)^3 \rho_c \Omega = 10^{-30} \Omega r_0^3 = 5 \cdot 10^{-64} \Omega r_0^3 M_{\odot}, \\ r_0 &= z_{\text{рек}} r_{\text{рек}} = 1400 r_{\text{рек}}, \\ \left( \frac{M}{10^{14} M_{\odot}} \right) &= 150 \Omega \left( \frac{r_0}{100 \text{ Мпс}} \right)^3. \end{aligned} \right\} \quad (15.7.2)$$

Поэтому для момента рекомбинации получим

$$\theta = 2,5 \cdot 10^{-3} \Omega^{1/2} \left( \frac{M}{10^{14} M_{\odot}} \right)^{1/2} \text{ рад} = 10 \Omega^{1/2} \left( \frac{M}{10^{14} M_{\odot}} \right)^{1/2} \text{ угл. мин.} \quad (15.7.3)$$

Силк (1968) первый поставил вопрос о том, что возмущения, приводящие к образованию галактик, должны одновременно давать флуктуации РИ. Он дал оценку амплитуды, соответствующую общему сжатию материи и излучения:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{3} \frac{\delta \rho_{\text{вещ}}}{\rho_{\text{вещ}}} = \frac{1}{3} \delta(M). \quad (15.7.4)$$

Для оценки  $\delta$  рассматривался рост возмущений. Если  $\delta \sim 1$  при  $z \sim 4$ , то при  $z=1400$  было  $\delta \sim \frac{1}{300}$ , а следовательно, ожидаемое (по Силку)

$$\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-3}. \quad (15.7.5)$$

Поисками мелкомасштабных возмущений занимались многие радиоастрономы. Отметим последние работы: Карпенгер, Гулкис, Сато (1973), Бойнтон и Партридж (1973), Парийский (1973). В первой работе измерения проведены на длине волны  $\lambda=3,56$  см и показано, что  $\Delta T/T < 0,7 \cdot 10^{-3}$  в масштабе  $2',3$ . Во второй работе  $\lambda=4$  см,  $\Delta T/T < 3,7 \cdot 10^{-3}$  в масштабе  $80''$ . В третьей работе результат, приведенный автором:  $\Delta T < 1,7 \cdot 10^{-4}$  °К в масштабе  $12 \times 40$  угловых минут. Однако позже Парийский (устное сообщение) несколько изменил свою оценку. С учетом сложного вида диаграммы направленности антенны, его данные, по-видимому, не противоречат  $\Delta T/T \sim (1-5) \cdot 10^{-4}$  в масштабе  $3-5$  угловых минут. Однако даже после этой ревизии верхняя граница наблюдаемых флуктуаций температуры РИ ниже по крайней мере в три раза по сравнению с оценкой Силка.

Означает ли это, что неверна теория образования структуры Вселенной из возмущений? Нет, в действительности оценка Силка нуждается в серьезных изменениях. Проведем анализ этого вопроса.

В соответствии с расчетами Сакса и Вольфа (см. § 4 этой главы) надо учитывать также изменение температуры в ходе распространения света и доплер-эффект, связанный с движением плазмы.

Пока  $r_{\text{рек}} < ct_{\text{рек}}$  (что соответствует  $M \leq 10^{17} M_{\odot}$ ), вполне допустимо ньютоновское рассмотрение плазмы в момент рекомбинации. Движение плазмы до рекомбинации представляет собой суперпозицию стоячих акустических волн. На момент рекомбинации справедливы формулы

$$\overline{\delta_{\text{рек}}^2} = \left( \frac{u_{\text{рек}}}{b} \right)^2, \quad \delta\varphi_{\text{рек}} = - \frac{4\pi G \rho_{\text{рек}} \delta_{\text{рек}}}{k_{\text{рек}}^2}, \quad (15.7.6)$$

где  $\delta_{\text{рек}}$  — возмущение плотности,  $u_{\text{рек}}$  — пекулярная скорость,  $\delta\varphi_{\text{рек}}$  — возмущение гравитационного потенциала,  $k_{\text{рек}}$  — волновой вектор возмущения,  $\rho_{\text{рек}}$  — плотность, — все на момент рекомбинации. Далее,  $b$  есть скорость звука в этот момент,  $b = \frac{c}{\sqrt{3+4\Omega}}$ .

Для более поздней эпохи  $z < z_{\text{рек}}$  можно вычислить возмущение плотности [см. формулу (9.5.10)]:

$$\delta(z) = \frac{3u_{\text{рек}} k_{\text{рек}} z_{\text{рек}} t_{\text{рек}}}{5 \left( z + \frac{2}{5\Omega} + \frac{3}{5} \right)}. \quad (15.7.7)$$

Здесь  $\delta(z)$  есть (вычисленное по линейной теории) возмущение плотности в момент  $z$ . Формула справедлива лишь для  $z \ll 1400$ , т. е. она относится к периоду после рекомбинации, когда колебания РД-плазмы полностью превратились в растущие возмущения в нейтральном газе. В выражении для  $\delta(z)$  учтены переходные процессы в ходе рекомбинации. Соотношение между  $\delta(z)$  и  $u_{\text{рек}}$  при-

ближенно описывает результаты линейной теории возмущений для  $\Omega < 1$ . Это соотношение позволяет определить амплитуду интересующих нас величин  $\delta_{\text{рек}}$ ,  $u_{\text{рек}}$ ,  $\delta\varphi_{\text{рек}}$ , задаваясь моментом образования скоплений или предполагаемым современным значением неоднородности.

Флуктуации температуры РИ состоят из двух частей:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{u_{\text{рек}} \cos \theta}{c}, \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{3} \delta_{\text{рек}} + \frac{\delta\varphi_{\text{рек}}}{c^2}.$$

Они записаны отдельно, потому что в стоячей волне  $u$  и  $\delta$  не коррелированы ( $u \sim \cos kx$ ,  $\delta \sim \sin kx$ ,  $(u\delta) = 0$ ). Между тем  $\delta_{\text{рек}}$  и  $\delta\varphi_{\text{рек}}$  коррелированы между собой, притом так, что гравитационное красное смещение уменьшает флуктуации, зависящие от избытка плотности.

Полная компенсация достигается при  $k_{\text{рек}} = ct_{\text{рек}}$ , т. е. на краю рассматриваемого интервала масс,  $M_{\text{дж}} \approx (1-3) \cdot 10^{16} \Omega^{-2} M_{\odot}$  (при  $\Omega > 0,1$ ); см. § 1 гл. 10.

При  $M \approx 10^{14} M_{\odot}$  членом  $\frac{\delta\varphi_{\text{рек}}}{c^2}$  можно пренебречь. Далее, поскольку скорость звука меньше скорости света, то  $\frac{u_{\text{рек}}}{c} < \delta_{\text{рек}}$ ; значит, вклад доплер-эффекта меньше (хотя и того же порядка) по сравнению с «силковским» изменением температуры  $\frac{1}{3} \delta_{\text{рек}}$ .

Итак, для  $M < 10^{17} M_{\odot}$  подробный анализ подтверждает, по порядку величины, основной результат (15.7.4):  $\frac{\Delta T}{T} \sim \frac{1}{3} \delta_{\text{рек}}$ .

Первая поправка к этому результату заключается в том, что для получения заданного  $\delta(z)$  нужно возмущение плотности  $\delta_{\text{рек}}$  меньшее, чем полагал Силк, благодаря тому, что растущая мода возбуждается движением нейтрального газа после рекомбинации. Поправка (см. § 6 гл. 10) равна  $\left(\frac{M}{M_{\text{дж}}}\right)^{1/2}$ , т. е. порядка 0,1 для  $M = 10^{14} M_{\odot}$

и  $\Omega = 0,3$ . Таким образом, ожидаемая величина  $\frac{\Delta T}{T}$  уменьшается до  $10^{-4}$ . Однако главный эффект, уменьшающий ожидаемое  $\frac{\Delta T}{T}$ , связан с тем, что рекомбинация и исчезновение свободных электронов происходят не мгновенно.

Выше молчаливо предполагалось, что переход от непрозрачной плазмы к абсолютно прозрачному нейтральному газу происходит мгновенно, так что наблюдаются скорость, температура, спектр определенной частицы плазмы. При постепенной рекомбинации все величины усредняются. Скорость, плотность и температура как бы взвешиваются по траектории луча. Функция взвешивания

характеризуется тем, что вес равен половине максимального в пределах  $960 < z < 1135$  [см. цитированную работу Зельдовича и Сюняева (1970)]. За время изменения  $z$  в этих пределах луч проходит путь, равный (для  $\Omega=1$ )  $0,12ct$ , т. е. ненамного меньший, чем характерный размер, соответствующий джинсовской длине волны.

Флуктуации в меньшем масштабе подвергаются сильнейшему усреднению и сглаживанию. По оценкам для  $M=10^{11}M_{\odot}$ , коэффициент уменьшения  $\frac{\Delta T}{T}$  составляет  $10^{-11}$ . Поэтому отсутствие мелкомасштабных флуктуаций температуры РИ не означает отсутствия флуктуаций плотности, температуры и скорости газа после рекомбинации в соответствующем малом масштабе. Эффект сглаживания совершенно исчезает при переходе к крупномасштабным флуктуациям,  $M > 10^{17}\Omega^{-2}M_{\odot}$ .

При данном возмущении плотности возмущение гравитационного потенциала пропорционально квадрату длины волны, т. е.  $\sim M^{1/2}$ . Итак, при  $M > 10^{17}\Omega^{-2}M_{\odot}$  именно «потенциальное», гравитационное красное смещение становится главным.

Результат можно формулировать иначе: для длинных волн мы наблюдаем

$$\frac{\Delta T}{T} \sim \frac{1}{3} \delta \sim \frac{1}{3} \frac{\delta \rho_{\text{вещ}}}{\rho_{\text{вещ}}},$$

но значения  $\delta$  нужно брать на характерный момент, когда длина волны возмущения становится равной горизонту,  $\lambda=ct$ . Для длинноволновых возмущений этот момент наступает намного позже рекомбинации \*).

Поэтому для максимальной массы, соответствующей всей наблюдаемой Вселенной, изотропия РИ дает  $\frac{\Delta T}{T} < 3 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta$  (сегодня)  $< 10^{-3}$ . Для возмущений с характерным размером (в настоящее время) порядка  $0,1ct=500 Mpc$  получим оценку амплитуды возмущений плотности сегодня  $\delta < 0,1$ .

Эта оценка чрезвычайно значительна. С достоверностью можно утверждать, что в масштабе  $500 Mpc$  нет выраженных сверхскоплений!

До недавнего времени эволюция наблюдений (обработки наблюдений) вела к обнаружению все больших структурных единиц, но данные по РИ кладут четкий предел этому процессу.

Наконец, остается недостаточно изученным вопрос о флуктуациях, масштаб которых гораздо больше сегодняшнего горизонта  $ct_0$ . Уменьшение наблюдаемых флуктуаций РИ для возмущений сверхдлинного масштаба можно объяснить тем, что в таком мас-

\*) Рекомбинация не играет роли для длинноволновых возмущений — эволюция материи и излучения по-прежнему идет параллельно, без разделения, пока  $\lambda > ct$ .

штабе происходит главным образом общее движение вещества и излучения, в малой степени ( $\sim \frac{ct}{\lambda}$ ) возникает движение вещества относительно излучения, а только относительное движение дает наблюдательные эффекты!

Амплитуда пекулярной скорости, как отмечалось выше, порядка  $10^{-3}$  с. Это не исключает того, что в масштабе  $1000 ct$  (формально соответствующем массе  $10^{31} M_{\odot}$ ) амплитуда скорости порядка с, амплитуда отклонений плотности и метрики порядка единицы.

При рассмотрении Вселенной как целого мы всегда подчеркивали, что представление о бесконечной, однородной и изотропной Вселенной является экстраполяцией наблюдений, относящихся к ограниченной области. Но всякая экстраполяция содержит ненадежность, притом возрастающую по мере продвижения дальше. Приведенные выше числа являются попыткой полуколичественного выражения ненадежности экстраполяции.

В заключение главы необходимо еще раз отметить следующее. Анализ показывает, что рассмотренная выше адиабатическая теория образования галактик при  $\Omega \geq 0,1$  не противоречит верхней границе  $\Delta T/T \leq 5 \cdot 10^{-4}$ . Численный анализ проведен Пиблсом и Ю (1970), развитие вопроса дано Дорошкевичем, Зельдовичем, Сюняевым.

## § 1. Введение

Гравитационные волны, предсказанные общей теорией относительности, распространяются со скоростью света, характеризуются определенной плотностью энергии и потоком импульса [см., например, Зельдович, Новиков (1971)] или — в хаотическом наборе волн — плотностью энергии и давлением. Отличительная особенность гравитационных волн — их слабое взаимодействие с обычным веществом и между собой.

Сенсационные сообщения Вебера (1969) об открытии гравитационных волн, испущенных ядром нашей Галактики, по-видимому, не подтвердились более поздними опытами \*). Тем не менее эти сообщения чрезвычайно усилили интерес к различным аспектам гравитационных волн и, в частности, к вопросу об их космологической роли.

Мы уже неоднократно упоминали, что во Вселенной могут существовать космологические гравитационные волны с самого начала расширения. Они не имеют каких-либо источников, точнее, их источником являлось сингулярное состояние. Спектр их может быть, вообще говоря, произвольным. Это могут быть как высокочастотные гравитационные волны, скажем, с длиной волны того же порядка, что и у реликтового электромагнитного излучения, так и гораздо более низкочастотные, с длиной волны порядка размеров скоплений галактик и больше.

Не состоит ли Вселенная в основном из гравитационных волн? Не может ли плотность гравитационных волн (плотность энергии, деленная на квадрат скорости света) превышать в настоящее время

---

\*) Обзор экспериментальных данных дан в докладе Тайсона (1973); см. также Брагинский и др. (1974).

Эти работы содержат прямое опровержение утверждения Вебера о том, что он регистрирует гравитационные волны. Воспринимающий элемент, «антенна», в упомянутых работах практически не отличается от веберовской, однако техника регистрации деформаций антенны усовершенствована.

Возможно, что разгадка разногласий связана с помехами, влияющими на аппаратуру Вебера. В этой связи весьма интересен впервые отмеченный Адамянц, Алексеевым и Колосницыным (1972) факт корреляции всплесков Вебера с земной и солнечной магнитной активностью.



плотность обычного вещества или, по крайней мере, плотность электромагнитного излучения?

Каков спектр гравитационных волн? Слабое взаимодействие волн с веществом не позволяет дать прямой экспериментальный ответ на поставленные вопросы. Поэтому в данной главе мы будем обсуждать косвенную информацию, т. е. судить о гравитационном излучении, заполняющем Вселенную, по различным астрофизическим проявлениям. Перечислим различные эффекты:

1) Влияние гравитационного излучения на общее расширение Вселенной и в особенности на возраст Вселенной.

2) Влияние гравитационного излучения (через скорость расширения) на закон роста возмущений, связь с теорией образования галактик.

3) Влияние гравитационного излучения на нуклеосинтез на весьма ранней стадии, при температуре порядка  $10^9$ — $10^{10}$  °K,— также косвенно, через изменение температуры в процессе расширения, но на стадии более ранней, чем в пп. 1), 2).

4) Передача энергии от гравитационных волн галактикам в скоплениях или самим скоплениям.

5) Влияние гравитационных волн на распространение реликтового излучения. Для длинных волн этот подход наиболее информативен. Точность измерения такова, что в области длинных волн удается доказать космологическую малость плотности энергии гравитационного излучения, по крайней мере в указанной части спектра.

Теория в свою очередь приводит к некоторым предсказаниям о гравитационном излучении. Следует рассмотреть такие проблемы:

6) Тепловое коротковолновое гравитационное излучение, аналогичное электромагнитному реликтовому излучению; первым стоит вопрос об установлении термодинамического равновесия вблизи сингулярности.

7) Длинноволновое излучение и его связь с другими типами возмущения метрики, в частности с адиабатическими возмущениями плотности.

8) Генерация гравитационных волн в галактиках и в ядрах галактик.

Для такого полного рассмотрения вопросов, связанных с космологической ролью гравитационного излучения, необходимо напомнить фундаментальные классические результаты, касающиеся гравитационных волн, а именно:

9) Общие выражения и числовые оценки стандартной теории \*).

10) Результаты, относящиеся к эволюции гравитационных волн в расширяющейся Вселенной.

---

\*) Изложенное ниже развивает сведения о гравитационных волнах, содержащиеся у Ландау и Лифшица (1973) и в ТТ и ЭЗ.

Перечисленные 10 пунктов в основном исчерпывают содержание данной главы. Общий вывод, хотя и неокончательный, скорее неутешителен для любителей сенсаций; устанавливается ряд неравенств, ограничивающих плотность гравитационного излучения. Однако ударение следует сделать на тех областях спектра, которые остаются неизученными в настоящее время. В предлагаемой главе намечается программа дальнейших исследований и обсуждаются пути и методы исследования.

Порядок расположения следующих параграфов не соответствует расположению перечисленных 10 пунктов.

## § 2. Общие сведения о гравитационных волнах

В пустом пространстве ( $T_{ik}=0$ ) возможно решение уравнений ОТО с метрикой вида

$$ds^2 = c^2 dt^2 - g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}), \quad (16.2.1)$$

соответствующей слабовозмущенной метрике Минковского. Систему координат можно выбрать таким образом, что уравнения Эйнштейна  $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 0$  в линейном по  $h_{\mu\nu}$  приближении приводят к уравнениям для  $h_{\mu\nu}$  вида

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (16.2.2)$$

Элементарные решения этого уравнения суть

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = h_{\mu\nu}^{(0)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t}, \quad \omega = c|\mathbf{k}|. \quad (16.2.3)$$

Координатные условия, обращающие уравнения Эйнштейна в уравнения (16.2.2), позволяют наложить еще следующие условия на  $h_{\mu\nu}$ :

$$h_\mu^{(\omega)} \equiv h = 0, \quad h_{\mu\nu}^{(\omega)} k^\mu = h_{\mu\nu}^{(\omega)} k^\nu = 0. \quad (16.2.4)$$

Четыре условия (16.2.4) для  $h_{\mu\nu}$  образуют четыре связи, оставляя из шести компонент независимыми только две. Эти две компоненты характеризуют два состояния поляризации плоской гравитационной волны.

Элементарные решения (16.2.3) образуют полную систему (в смысле теории интеграла Фурье), любое решение может быть представлено в виде суперпозиции [линейной комбинации  $\int h_{\mu\nu}(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}$ ] таких решений. При пользовании записью в комплексной форме подразумевается, что  $h_{\mu\nu}$  — вещественная часть комплексного выражения либо что все выражения удовлетворяют соотношению вида  $C(\mathbf{k}) = C^*(-\mathbf{k})$ , — условие, обеспечивающее вещественность интеграла Фурье.

В частности, суперпозицией волн с параллельными  $\mathbf{k}$  можно построить решение вида  $h(\mathbf{n}\mathbf{x}-t)$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор (равный  $\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$  для отдельных волн); зависимость  $h$  от аргумента функции произвольна, за исключением важного условия поперечности  $h_{\mu\nu}, k^\nu = h_{\mu}, k^\mu = 0$  и  $h^\mu_\mu = 0$  в любой точке пространства.

Итак, гравитационная волна распространяется со скоростью света и является поперечной (по отношению к направлению распространения), что окажется существенным при рассмотрении взаимодействия с веществом. Метрика (16.2.1) является синхронной ( $h_{00}=0$ ,  $g_{00}=c^2$ ,  $h_{0\alpha}=g_{0\alpha}=0$ ), что позволяет немедленно определить закон движения одной системы пробных частиц в поле волны: все  $x^\mu(t)=\text{const}$  являются решением, т. е. частицы покоятся в системе (16.2.1), так что изменения взаимных расстояний и относительное движение этих частиц полностью определяются изменением метрических коэффициентов.

В следующем порядке, квадратичном по  $h_{\mu\nu}$ , можно вычислить так называемый псевдотензор энергии-импульса гравитационных волн [см. Ландау и Лифшиц (1973)]. С помощью псевдотензора определяется плотность энергии  $\varepsilon_g$  и плотность потока импульса  $p_{l,g}$  в гравитационной волне. Для плоской гравитационной волны, распространяющейся вдоль координаты  $x^1$ , соответствующее выражение имеет вид [из условия поперечности волны (16.2.4) в ней отличны от нуля лишь компоненты  $h_{22}$ ,  $h_{33}$  и  $h_{23}$ , причем  $h_{22}=-h_{33}$ ]

$$\varepsilon_g = \frac{p_{1,g}}{c} = \frac{c^2}{16\pi G} \left[ (\dot{h}_{23})^2 + \frac{1}{4} (\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33})^2 \right]. \quad (16.2.5)$$

Как подчеркивают Ландау и Лифшиц, псевдотензор (в отличие от истинного тензора) можно обратить в нуль в любой точке путем преобразования координат, соответственно обратится в нуль и (16.2.5). Однако интеграл от псевдотензора энергии-импульса (от  $\varepsilon_g$  и  $p_{1,g}$ ) по пространству, плоскому на бесконечности, имеет инвариантный смысл вектора энергии и импульса  $E, \mathbf{p}$  гравитационного поля внутри рассматриваемого объема (где  $h_{\mu\nu}$  отличны от нуля). При условии сохранения евклидовости на бесконечности вектор  $E, \mathbf{p}$  не зависит от выбора координат.

Пакет почти плоских волн одного направления имеет  $|\mathbf{p}| = \frac{E}{c}$ . В соответствии с тем, что скорость гравитационных волн равна скорости света, масса покоя гравитонов равна нулю. Оговорка «почти» связана с тем, что ограниченность пакета в пространстве в направлениях, перпендикулярных  $x^1$ , требует наличия хотя бы малых компонент волнового вектора, перпендикулярных  $x^1$ .

Если же складываются волны существенно различных направлений, то  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  складываются векторно,  $E = E_1 + E_2$  складываются скалярно и в результате  $E > c|\mathbf{p}|$ ,  $E^2 - c^2 p^2 > 0$ , совокупность

волн разного направления обладает массой покоя. В случае гравитационной волны (одной или совокупности волн) можно ослабить требование к метрике на бесконечности и не требовать ее евклидовости. Достаточно рассматривать объем, все размеры которого велики по сравнению с длиной волны. Усредненный по такому объему, псевдотензор обладает всеми свойствами обычного тензора энергии-импульса, такого, например, как максвелловский тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Это интуитивно очевидное свойство выведено строго и формально в работах Айзаксона (1968а, б) путем разделения метрики на быстро и плавно изменяющиеся компоненты. Это позволяет рассматривать гравитационные волны в искривленном фридмановском мире, их движение в поле тяготения изолированных тел и т. д. Для слабых гравитационных волн в мире Фридмана конкретные решения проведены в § 5 гл. 11. Мы их подробно проанализируем в следующем параграфе. Здесь же заметим, что волны с  $\lambda \ll ct$  на промежутках времени много меньше  $t$  можно рассматривать как волны в плоском неэволюционирующем мире. Поэтому мы прежде всего рассмотрим этот случай.

Для элементарной монохроматической волны

$$h_{\mu\nu} = \text{Re} (\alpha_k h_{\mu\nu}^{(1)} + \beta_k h_{\mu\nu}^{(2)}) e^{ikx - ic|k|t}, \quad (16.2.6)$$

где  $h_{\mu\nu}^{(1)}$  и  $h_{\mu\nu}^{(2)}$  — два единичных тензора, отвечающие двум состояниям поляризации, дающие нуль при свертке с вектором  $k$ . Имеем после усреднения по периоду волны

$$\varepsilon_g = \frac{c^2 \omega^2}{32\pi G} (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2) = \frac{P_{1,g}}{c}. \quad (16.2.7)$$

Для хаотического распределения волн по направлениям (в среднем изотропного, без выделенного направления) поток энергии обращается в нуль, а пространственные компоненты псевдотензора дают изотропное («паскалевское») давление. В итоге получаем

$$\bar{\varepsilon}_g = \bar{3P}_g = \frac{c^2 \omega^2}{32\pi G} \int (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2) \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (16.2.8)$$

В уравнения Эйнштейна для плавно меняющейся части метрики величины  $\varepsilon_g$  и  $P_g$  входят, наряду с соответствующими величинами для «обычной» материи, в правую часть. Подчеркнем, что в уравнения ОТО  $\varepsilon$  входит с коэффициентом  $G$ . Отсюда следует, что при подстановке  $\varepsilon_g$  и  $P_g$ , выраженных через высокочастотные возмущения метрики, гравитационная постоянная сократится, как и следует ожидать.

Связь между плавно меняющимися и высокочастотными нелинейными компонентами метрики есть результат нелинейности уравнений Эйнштейна для пустоты, но в этих последних уравнениях никаких констант нет, так как правая часть равна нулю (в точных

уравнениях до усреднения высокочастотной части по многим длинам волны и перенесения результата в правую часть в виде  $\epsilon_g$  и  $P_g$ ).

Обратимся к космологическим гравитационным волнам.

В космологической задаче в изотропном (в среднем) мире, заполненном одним только гравитационным излучением с частотой  $\omega$ , по порядку величины имеем следующее уравнение эволюции (индексы опускаем):

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} = \left( \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 = \omega^2 \alpha^2 \approx (\dot{h})^2. \quad (16.2.9)$$

Следовательно, достаточно малой амплитуды возмущений метрики:

$$h \sim \frac{1}{\omega t_0} \sim \frac{H}{\omega}, \quad (16.2.10)$$

где  $t_0$  — время с начала расширения,  $H$  — постоянная Хаббла ( $\sim 10^{-18}$  сек), для того, чтобы возникли сильные космологические эффекты. Из (16.2.9) следует, что для  $\omega = 1 \text{ сек}^{-1}$  сильный эффект возникает при  $h \sim 10^{-18}$ , для  $\omega = 10^3 \text{ сек}^{-1}$  (резонансная частота детекторов Вебера) — при  $h \sim 10^{-21}$  и для  $\omega = 10^{10} \text{ сек}^{-1}$  (средняя частота реликтового излучения) — при  $h \sim 10^{-28}$ . Малость безразмерного  $h$  как раз и характеризует невозможность обнаружения космологических гравитационных волн прямыми методами даже тогда, когда они играют большую роль в космологии. С другой стороны, для самых длинных волн — с длиной волны порядка горизонта — нужна амплитуда порядка единицы для заметного космологического влияния. Поскольку для таких волн нет никаких безразмерных величин, отличающихся от единицы, то и влияние их на излучение, приходящее с горизонта, порядка единицы. Мы увидим ниже, что наблюдаемая изотропия реликтового электромагнитного излучения исключает возможность существования длинных гравитационных волн с амплитудой порядка единицы при длине волны порядка горизонта Вселенной. Как уже подчеркивалось, изотропное гравитационное излучение с длиной волны  $\lambda \ll ct$  составляет релятивистский «газ» с  $\epsilon_g = \frac{1}{3} P_g$  и при расширении Вселенной ведет себя вполне аналогично фотонному газу:  $\epsilon_g \sim a(t)^{-4}$ , длина волны  $\lambda \sim a(t)$ . Наряду с той оценкой  $h$ , которая дана выше, интересно рассмотреть также  $\dot{h}$  и  $\ddot{h}$ . Из формулы (16.2.9) сразу видно, что  $\dot{h}$  порядка постоянной Хаббла, если гравитационные волны дают главный вклад в плотность Вселенной и мир является замкнутым или плоским,  $\Omega \geq 1$ . Если же  $\Omega \ll 1$  и (или)  $\epsilon_g \ll \epsilon$ , то  $h \ll H$ .

В гравитационных волнах непосредственно наблюдаемой величиной является  $\ddot{h}_{\mu\nu}$ . Действительно, в любом гравитационном поле можно измерять только относительные ускорения частиц, которые

пропорциональны второй производной от  $h_{\mu\nu}$ . Выберем направление волны вдоль  $x^1$ . Тогда, согласно выражениям (16.2.1), (16.2.3) и (16.2.4), частицы, расположенные перпендикулярно к оси  $x^1$ , будут испытывать относительные колебания. Амплитуды этих колебаний суть  $\frac{dl}{l} \approx \alpha_k$ ,  $\beta_k \approx h$ , где  $l$  — расстояние между частицами. Период этих колебаний есть  $\omega$ . Относительные ускорения частиц, которые могут возникать в космологических гравитационных волнах, ничтожны. Так, для примера, положим  $\omega = 10^3 \text{ сек}^{-1}$ . Мы видели выше, что максимальное  $h$  (приводящее к заметному влиянию на эволюцию Вселенной) есть  $h = 10^{-21}$ . Отсюда относительное ускорение частиц есть  $A (\text{см/сек}^2) \approx h \omega^2 l \approx 10^{-16} l (\text{см})$ .

Как уже отмечалось, хаотический (изотропный в среднем) набор коротких гравитационных волн ведет себя во фридмановской Вселенной как идеальный ультрарелятивистский газ с уравнением состояния  $P = \epsilon/3$ . Следовательно,  $\epsilon \sim [a(t)]^{-4} \sim (1+z)^4$ . Для каждого отдельного колебания длина волны пропорциональна радиусу мира,  $\lambda \sim a(t) \sim (1+z)^{-1}$ ,  $\omega \sim (1+z)$ . Имея в виду, что  $\epsilon \sim h^2 \omega^2$ , получим  $h \sim a^{-1} \sim (1+z)$ , амплитуда волны, выраженная через безразмерное изменение метрики (индексов не пишем), с течением времени падает. Наконец, во время эволюции остается постоянным адиабатический инвариант — отношение энергии волны (в данном сопутствующем объеме) к ее частоте. Этот адиабатический инвариант имеет смысл числа квантов, в данном случае числа гравитонов. Число гравитонов при расширении сохраняется (как для отдельной волны, так и для всего газа) в адиабатическом периоде, когда частота волны больше постоянной Хаббла и длина волны меньше горизонта.

Изотропное хаотическое распределение волн остается изотропным в изотропно расширяющейся Вселенной, однако при любых отклонениях Вселенной как целого от фридмановской однородной и изотропной модели немедленно проявится важнейшая особенность «газа», состоящего из гравитонов. Этот газ является бестолкновительным, изотропия распределения волн по направлениям немедленно нарушается при анизотропном расширении Вселенной или при локально анизотропных воздействиях. Подробнее об этом см. в разделе IV.

В заключение этого параграфа еще раз подчеркнем принципиальную нелокальность гравитационных волн. Локально метрика везде  $n$ , в частности, в поле гравитационной волны может быть приведена к виду метрики Минковского; выбором координат в данной точке можно обратить в нуль символы Кристоффеля. Как известно, величины  $R_{ik,lm}$  образуют тензор; в гравитационной волне эти величины отличны от нуля (пропорциональны  $\ddot{h}$ ), хотя равны нулю некоторые их линейные комбинации, а именно  $R_{ik}$  и  $R$ . Специфика гравитационной волны заключается в том, что все

инварианты, составленные из неисчезающих  $R_{ik,lm}$ , исчезают, равны нулю. Такое поведение локальных величин вызывало в прошлом общее недоверие к теории гравитационных волн. В настоящее время стал общепризнанным и общепонятным принцип нелокальности гравитационной волны. Парадоксы разъясняются при рассмотрении волны в области, вмещающей несколько длин волны. Для интересующихся подробностями вопроса рекомендуем наряду с классическим учебником Ландау и Лифшица «Теория поля» и монографиями перечитать главу о гравитационных волнах в ТТ и ЭЗ.

### § 3. Гравитационные волны в теории малых возмущений космологического решения

В гл. 11 была рассмотрена созданная Лифшицем теория эволюции малых возмущений, наложенных на однородное и изотропное (фридмановское) космологическое расширение.

Отмечалась возможность инвариантно классифицировать возмущения, разделяя их на скалярные (включающие возмущение плотности), векторные (вихревые) и тензорные.

Тензорные возмущения определены таким образом, чтобы из возмущения метрики и волнового вектора нельзя было построить ни скаляра, ни вектора. Этому соответствуют условия (16.2.4). Поэтому тензорные возмущения представляют собой гравитационные волны, а на ранней стадии, когда длина волны больше горизонта, тензорные возмущения есть «то, что с течением времени превратится в гравитационную волну». Рассмотрим подробнее законы эволюции тензорных возмущений и особенно этот переход «будущей» волны в «сущую» волну.

Проследим сперва за соотношением между горизонтом и длиной гравитационной волны. Длина горизонта \*) порядка  $ct$ , длина волны пропорциональна  $a(t)$ , так что мгновенное значение  $\lambda = \lambda_0 a^{-1}(t_0) a(t)$ , где  $a(t_0)$  и  $\lambda_0$  относятся к произвольному моменту  $t_0$ . Как известно,  $a(t)$  растет медленнее, чем  $t$ : как  $t^{2/3}$  при  $P=0$ , как  $t^{1/2}$  при  $P=\epsilon/3$  и как  $t^{1/3}$  при  $P=\epsilon$ . Поэтому для каждой волны можно найти  $t_1$  такое, что при  $t < t_1$   $\lambda < ct$ , но при  $t > t_1$   $\lambda > ct$ . Например, для  $P=\epsilon/3$   $t_1 = \lambda_0^2 / ct_0$ . Удобнее, однако, пользоваться величинами, выраженными в сопутствующей системе координат  $x, y, z$ , и с параметром  $\eta$ , заменяющим время:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2] = a^2(\eta) [d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2],$$

$$d\eta = \frac{c dt}{a(t)}. \quad (16.3.1)$$

\*) Радиус мира нас не интересует! В частности, вблизи сингулярности все результаты для замкнутого, открытого и плоского мира одинаковы, так что можно рассматривать плоский мир с бесконечным радиусом, но конечным горизонтом.

В этой системе координат волновой вектор  $\kappa$  постоянен, так же как и сопутствующая длина волны. Определение горизонта здесь очевидно: расстояние до горизонта просто равно  $\eta$ , так как уравнение распространения света в этой системе есть  $ds = 0$ ,  $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = d\eta$ . Таким образом, естественно различаются период  $\kappa\eta < 1$  (горизонт меньше приведенной длины волны) и период  $\kappa\eta > 1$  (горизонт больше приведенной длины волны). Так как  $\kappa = \text{const}$ , а  $\eta$  растет с ростом  $t$ , то не подлежит сомнению, что сначала  $\kappa\eta < 1$ , а потом  $\kappa\eta > 1$ .

Для слабых гравитационных волн в радиационно-доминированном мире (см. § 5 гл. 11) существуют следующие решения:

$$h_{\alpha}^{\beta} = \text{const} \cdot G_{\alpha}^{\beta} e^{i\kappa x + t|\kappa|} \eta_{\alpha}(\eta), \quad (16.3.2)$$

причем в этом случае  $\alpha = \text{const} \cdot \eta$ . Решениями являются вещественная и мнимая части этого выражения в отдельности. Из решений такого типа, вместе с комплексно сопряженными, можно построить два линейно независимых решения:

$$\left. \begin{aligned} h_{\alpha}^{\beta} &= C_1 G_{\alpha}^{\beta} \cos(\kappa x + \varphi_1) \frac{\sin \kappa \eta}{\kappa \eta}, \\ h_{\alpha}^{\beta} &= C_2 G_{\alpha}^{\beta} \cos(\kappa x + \varphi_2) \frac{\cos \kappa \eta}{\kappa \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (16.3.3)$$

Первое решение остается конечным вблизи сингулярности,  $\eta \rightarrow 0$ . Следовательно, конечные (или малые) возмущения метрики в сингулярном состоянии, соответствующие  $C_1 \neq 0$  и  $C_2 = 0$ , ведут к конечным (или малым) амплитудам гравитационных волн на поздней стадии, при  $\kappa\eta > 1$ .

Подчеркнем, что говорить о плотности гравитационной энергии на ранней стадии, при  $\kappa\eta < 1$ , принципиально невозможно.

Выше рассматривалась эволюция отдельной волны. При малой амплитуде возмущений метрики и соответственно малой амплитуде волн принцип суперпозиции имеет место. Поэтому результаты естественно обобщаются и на хаотическую суперпозицию волн. Условие конечности возмущений метрики вблизи сингулярности накладывает определенные ограничения на хаотичность [оно уже учтено в формуле (16.3.3)]. Оказывается, что этим условием отбираются стоячие гравитационные волны. В самом деле, возьмем самую общую линейную комбинацию комплексных решений для волн с данными  $|\kappa|$  и направлением  $\pm \frac{\kappa}{|\kappa|}$ :

$$f = \frac{C_3}{\kappa\eta} e^{i\kappa x - t\kappa\eta} + \frac{C_4}{\kappa\eta} e^{-i\kappa x - t\kappa\eta} + \frac{C_5}{\kappa\eta} e^{i\kappa x + t\kappa\eta} + \frac{C_6}{\kappa\eta} e^{-i\kappa x + t\kappa\eta}. \quad (16.3.4)$$

Условие вещественности этой комбинации даст  $C_4 = C_3^*$ ,  $C_6 = C_5^*$ . Записывая  $C_3 = Ae^{i\varphi}$ ,  $C_4 = Ae^{-i\varphi}$ ,  $C_5 = Be^{i\psi}$ ,  $C_6 = Be^{-i\psi}$  ( $A, B, \varphi, \psi$  —



вещественные), получим

$$f = \frac{A}{\kappa\eta} \cos(\kappa x - \kappa\eta + \varphi) + \frac{B}{\kappa\eta} \cos(-\kappa x - \kappa\eta + \psi), \quad (16.3.5)$$

т. е. имеются две бегущие волны противоположного направления с произвольными неодинаковыми амплитудами. Такое решение вещественно и удовлетворяет уравнению для волн, но вблизи сингулярности его амплитуда (почти везде) бесконечна. Для того чтобы сформулировать условие ограниченности амплитуды  $f$  при  $\eta \rightarrow 0$  преобразуем предыдущую формулу:

$$f = \frac{\cos \kappa\eta}{\kappa\eta} [A \cos(\kappa x + \varphi) + B \cos(\kappa x - \psi)] + \frac{\sin \kappa\eta}{\kappa\eta} [A \sin(\kappa x + \varphi) - B \sin(\kappa x - \psi)]. \quad (16.3.6)$$

Ограниченность  $f$  требует  $B = -A$ ,  $\psi = -\varphi$ , и получаем

$$f = 2A \frac{\sin \kappa\eta}{\kappa\eta} \sin(\kappa x + \varphi), \quad (16.3.7)$$

т. е. амплитуды двух встречных (бегущих) волн равны и вместе они образуют стоячую волну. Напомним, что такой же вывод получился для акустических волн (скалярных волн с изменением плотности) и привел к предсказанию модуляции амплитуды возмущений плотности после рекомбинации (см. § 6 гл. 10).

#### § 4. Ожидаемая интенсивность реликтового коротковолнового гравитационного излучения

Рассмотрим несколько различных вариантов ответа на вопрос об ожидаемой интенсивности коротковолнового гравитационного излучения. Общим для этих вариантов является выбор начального момента,  $t = t_g = 10^{-43}$  сек, когда начинается рассмотрение. Мы уже неоднократно говорили, что  $t_g$  является нижней границей применимости современной теории тяготения.

Наиболее простой вариант заключается в предположении, что 1) на момент  $t_g$  имеет место термодинамическое равновесие между гравитонами и другими элементарными частицами и античастицами и, к тому же, число сортов различных частиц конечно, а взаимодействие между ними мало (см. § 2 гл. 7).

При температуре выше энергии покоя ( $Mc^2$ ) всех частиц имеем ультрарелятивистский газ. Этот случай рассматривается аналогично тому, как Пиблс рассмотрел вопрос о реликтовых нейтрино в горячей Вселенной (см. § 1 гл. 7).

Пусть при  $T > Mc^2$  плотность энергии всех видов частиц, включая гравитоны, равна  $\epsilon = \kappa^* \sigma T^4$ , где  $\sigma$  — константа для электромаг-

нитного излучения,  $\kappa^*$  приблизительно равно числу сортов частиц. Энтропия гравитонов равна  $\frac{4}{3} \sigma T^3$ , остальных частиц — соответственно  $(\kappa^* - 1) \frac{4}{3} \sigma T^3$ . В ходе расширения энтропия гравитонов в единице объема сопутствующего пространства сохраняется. Между тем все тяжелые частицы и античастицы вымирают, на момент  $T \sim 5-19 M\text{ж}$  остаются только электроны, два сорта нейтрино (и их античастицы) и фотоны (гравитоны учтены отдельно). Эти лептоны (индекс  $l$ ) наследуют энтропию всех тяжелых частиц (см. § 1 гл. 7); поэтому оказывается, что

$$\left(1 + \frac{7}{4} + 2 \cdot \frac{7}{8}\right) \frac{4}{3} \sigma T_l^3 = (\kappa^* - 1) \frac{4}{3} \sigma T_g^3. \quad (16.4.1)$$

В дальнейшем происходит отъединение фотонов и позитронно-электронных пар от нейтрино. При вымирании пар  $e^+e^-$  их энтропия наследуется фотонами, благодаря чему к настоящему времени получается

$$T_g^3 = \frac{11}{4} T_\gamma^3. \quad (16.4.2)$$

Сопоставляя (16.4.1) и (16.4.2), получим

$$T_g = \left(\frac{4}{11} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{\kappa^* - 1}\right)^{1/3} T_\gamma. \quad (16.4.3)$$

Полагая  $\kappa^* \approx 20-40$ ,  $T_\gamma = 2,7^\circ\text{K}$ , получим для сегодняшних гравитонов  $T_g = 1^\circ\text{K}$ . В этом варианте вклад гравитонов в общую плотность пренебрежимо мал на всех стадиях, всегда составляя малую долю полной энергии излучения. Для настоящего момента имеем  $\epsilon_g \approx 0,02\epsilon_\gamma$ .

В дальнейшем рассмотрении нужно подчеркнуть, что представляет интерес не только общая плотность гравитационного излучения, но и спектр его, т. е. распределение энергии по частоте. Влияние гравитационных волн на другие виды материи и способы детектирования гравитационных волн совершенно различны для разных частот. Рассматривая гравитационные волны, находящиеся в начале расширения в термодинамическом равновесии со всеми остальными видами материи и излучения, мы получили, что длина гравитационных волн порядка долей сантиметра (в области, где сосредоточен максимум энергии), т. е. того же порядка, что и для реликтового излучения.

Продолжим рассмотрение такого коротковолнового излучения; предположим, что в момент  $t_g$  равновесие не имеет места. Два крайних предположения заключаются в том, что либо

2) в начальный момент  $t_g$  совсем нет гравитационных волн, а вещество горячее, имеет нормальную энтропию, либо

3) энергия коротких гравитационных волн почти целиком обуславливает общую плотность материи во Вселенной.

Дальнейшее протекание процессов и результирующее состояние, получающееся на сегодняшний день, зависят, очевидно, от скорости релаксации или, точнее, от соотношения между скоростью релаксации и скоростью расширения. Расчет (см. § 2 гл. 7) показывает, что безразмерная величина, произведение скорости релаксации  $\sigma_1 n u$  на характерное время расширения  $t_g$ , порядка единицы \*). В самом деле, превращение двух гравитонов в пару частица — античастица соответствует диаграмме с двумя вершинами; следовательно, сечение пропорционально  $G^2$ . Размерность  $G$  (в системе  $\hbar=c=1$ ) есть  $см^2$ ; значит, чтобы получить сечение, нужно домножить на квадрат энергии:

$$\sigma_1 = G^2 E_g^2.$$

Здесь мы используем тот факт, что все частицы, в том числе и рождающиеся, — ультрарелятивистские, их масса покоя  $m$  не должна входить в ответ.

В момент  $t_g = G^{-1/2}$  соответствующая плотность энергии равна  $\epsilon = G^{-2}$ . Равновесный спектр гравитационных волн (если в них одних содержится энергия, предположение 3) соответствует температуре такой, что

$$\epsilon_g = T^4 = G^{-2}, \quad T = G^{-1/2}.$$

Это значит, что энергия отдельных гравитонов равна  $G^{-1/2}$  и плотность их  $n = G^{-3/2}$ . Соответственно сечение  $\sigma_1 = G^2 E^2 = G$  и общее число других пар, рожденных за время  $t_g$ , равно ( $u=c=1$ )  $n' = \sigma_1 n^2 t_g = G^{-3/2} = n$ . Расчет проведен без безразмерных множителей и с заменой  $V(t)$  — физический объем единицы сопутствующего объема)

$$n'(t_g) = \frac{1}{V(t_g)} \int_{t_g}^{t_1} \sigma_1(t) n^2(t) V(t) dt \rightarrow \sigma_1(t_g) n^2(t_g) t_g,$$

что также может дать только безразмерный множитель. Действительно, так как интеграл расходится степенным образом на нижнем пределе, если заменить  $t_g$  на 0, то, следовательно, величина  $n'$  определяется значением функции при  $t \approx t_g$ . Вывод заключается в том, что число родившихся пар порядка начального числа гравитонов. Очевидно, что при рассмотрении предположения 2) (отсутствие гравитонов в горячем веществе в момент  $t_g$ ) обратный процесс снова окажется порядка единицы. Значит, можно ожидать,

\*) Релаксацию представляем как соударение частиц с рождением или гибелью гравитонов:  $\sigma_1$  — сечение столкновения,  $n$  — плотность частиц,  $u$  — их скорость

что в любом случае плотность энергии коротковолновых гравитонов окажется порядка равновесной, т. е. в соответствии с температурой остального вещества, около  $1^\circ\text{K}$  сегодня.

Отличие может быть, например, в пять раз в ту или другую сторону [для предположения 2) или 3)], но нет малых или больших величин типа  $\frac{Gm^2}{\hbar c}$ , которые входили бы в задачу.

Выше отмечено, что вследствие вымирания частиц с массой покоя  $m \neq 0$  в случае 1) равновесия при  $t_g$  сегодняшняя плотность энергии гравитационных волн  $\epsilon_g \approx 0,02\epsilon_\gamma$ . Можно полагать, что результат  $\epsilon_g < \epsilon_\gamma$  для настоящего времени остается справедливым и тогда, когда  $\epsilon_g \gg \epsilon_\gamma$  в момент  $t_g$ , — начальная ситуация изменится за счет релаксации к равновесию. С другой стороны, вряд ли  $\epsilon_g < < 10^{-3}\epsilon_\gamma$  опять же за счет релаксации, даже если почему-то  $\epsilon_g \equiv 0$  в начальном состоянии (см., впрочем, одну оговорку ниже). Наличие гравитонов, даже в малом количестве, может оказаться существенным при анизотропном расширении, так как гравитоны становятся бесстолкновительными раньше, чем нейтрино (об этом см. раздел IV).

В заключение этого параграфа напомним те ограничивающие предположения, в которых получены изложенные выше результаты:

1) Рассматриваются лишь короткие гравитационные волны (длинные волны будут рассмотрены отдельно, см. далее).

2) Не рассматривается вариант, когда вначале вещество холодное, а энтропия набирается позднее, при  $t_l \gg t_g$ . В этом случае (см. раздел V) отношение  $\epsilon_g/\epsilon_\gamma$  окажется малым:

$$\frac{\epsilon_g}{\epsilon_\gamma} \sim \left( \frac{t_l}{t_g} \right)^{-r} \sim \left( \frac{Gm^2}{\hbar c} \right)^q,$$

где  $r, q > 0$ .

### § 5. Гипотеза равномерного распределения и длинноволновое гравитационное излучение

Формально в теории малых возмущений однородной изотропной космологической модели гравитационные волны независимы от других видов возмущений, а гравитационные волны с различными волновыми векторами независимы друг от друга. Независимость здесь означает, что в дифференциальное уравнение для амплитуды данной волны не входит амплитуда других волн или других видов возмущений. Начальная амплитуда каждой волны также может быть задана произвольно, независимо от других амплитуд.

Тем не менее, задавшись определенной картиной начального состояния, можно сделать правдоподобные выводы об ожидаемых амплитудах на более поздние моменты и, в частности, для нашей эпохи.

Как уже неоднократно подчеркивалось, мы не имеем теории сингулярного состояния и о возмущениях метрики (и, в частности, о возмущениях типа гравитационных волн) в начале расширения вынуждены делать те или иные предположения. Одно из таких предположений было сделано в § 6 гл. 11. Если предположить, что вблизи сингулярности  $g_{\mu\nu}$  близки к фридмановским, но отличия разных компонент независимы друг от друга, то получится вывод, который мы называли «гипотезой равномерного распределения». Гипотеза гласит: в начальный момент возмущения метрики, связанные с возмущениями плотности (скалярные), равны возмущениям метрики, связанным с вихревыми движениями (векторным), и равны возмущениям, связанным с гравитационными волнами (тензорным) [Зельдович, Новиков (1970)]. Возмущения метрики вихревого типа затухают с расширением. Все вопросы, связанные с этим типом возмущений, уже разобраны в предыдущих главах, и мы ими интересоваться здесь не будем.

Перейдем к спектральному подходу, т. е. будем разлагать возмущения на плоские волны. Изотропия пространства приводит к выводу, что амплитуда зависит только от величины, но не от направления волнового вектора.

Гипотеза равномерного распределения говорит о равенстве двух функций — амплитуд скалярных и тензорных возмущений, являющихся функциями  $|\kappa|$ . Рассмотрим момент, когда длина волны становится равной горизонту,  $\lambda = ct$ ,  $\kappa\eta = 1$  (см. § 3 этой главы и § 3 гл. 11). В этот момент относительное возмущение плотности материи равно по порядку величины скалярному возмущению метрики:

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_{\kappa} = h_{\kappa}, \quad \kappa\eta = 1.$$

Согласно (16.3.1) и гипотезе равномерного распределения, в этот момент амплитуда возмущений метрики гравитационной волны равна  $h_{\kappa}$ . Значит, амплитуду гравитационной волны можно выразить через амплитуду возмущения плотности.

Для масштаба, соответствующего скоплениям галактик ( $M \approx 10^{13} M_{\odot}$ , в линейных единицах сегодня  $\lambda \sim 30 Mpc$ ), получим амплитуду гравитационной волны  $\sim 10^{-4}$ ,  $\dot{h} \approx 10^{-4}/t$ ,  $\rho_g \approx 10^{-8} \rho = 10^{-8} \rho_{\gamma}$ . Здесь от отдельных фурье-амплитуд мы перешли к величинам, проинтегрированным по единичному отрезку логарифмической шкалы длин волн.

Величина  $\rho_g$  есть  $\epsilon_g/c^2$ , где  $\epsilon_g$  — энергия гравитационных волн,  $\rho_{\gamma}$  — плотность излучения. Для рассматриваемого масштаба момент  $\kappa\eta = 1$  приходится на период радиационно-доминированной плазмы, так что  $\rho_{\gamma}$  практически совпадает с полной плотностью. Отношение  $\rho_g/\rho_{\gamma}$  остается постоянным и позже, вплоть до настоящего времени. Таким образом, мы приходим к оценке плотности

энергии гравитационных волн в масштабе скоплений галактик на сегодняшний момент:

$$\rho_g (M \approx 10^{13} M_\odot) \approx 10^{-8} \rho_\gamma \approx 10^{-48} \text{ э/см}^3, \\ \epsilon_g \approx 10^{-20} \text{ эрг/см}^3, \quad \dot{h} = 10^{-23} \text{ сек}^{-1} = 10^{-5} H.$$

Таким образом, в том масштабе, в котором известны возмущения плотности, плотность энергии гравитационных волн мала (конечно, все только в гипотезе равномерного распределения). В еще большем масштабе об амплитуде гравитационных волн можно судить по возмущениям реликтового излучения; этот вопрос рассматривается дальше, в § 7. В масштабе, меньшем  $10^{13} M_\odot$ , возмущения реликтового излучения гравитационными волнами наблюдать трудно.

Возмущения плотности в масштабе, меньшем  $M = 10^{13} M_\odot$ , затухают до рекомбинации, но тепло, выделяемое ими при затухании, должно менять спектр реликтового излучения. Такие изменения не наблюдаются, что накладывает ограничение  $\epsilon_{\text{акуст}} < 0,05 \epsilon_\gamma$  в диапазоне масс  $10^{13} M_\odot > M > 10^{-5} M_\odot$ . Гипотеза равномерного распределения дает  $\epsilon_g < 0,05 \epsilon_\gamma$  в том же диапазоне масс.

Если предположить плоский спектр скалярных возмущений метрики, который может объяснить и структуру и энтропию Вселенной (см. § 9 гл. 23), и если считать справедливой гипотезу равномерного распределения, то приходим к выводу, что гравитационные волны вносят малый вклад в общую плотность энергии во всем диапазоне длин волн, от миллиметров до  $10^{10}$  пс. Однако сам этот плоский спектр скалярных возмущений пока не доказан.

## § 6. Генерация гравитационных волн в современную эпоху и оценки общей плотности энергии гравитационных волн

В современную эпоху генерация гравитационных волн происходит двойными звездами и пульсарами, при взрывах сверхновых, а также в ядрах галактик и квазарах. Все эти явления хотя и связаны с космологией лишь косвенно, заслуживают рассмотрения уже потому, что желательно собрать в одном месте всю информацию о гравитационных волнах любого происхождения во Вселенной.

Гравитационные волны некосмологического происхождения рассматривались в ТТ и ЭЗ. Там большое внимание было уделено опытам Вебера по детектированию гравитационных волн; сделаны оценки энергии пакета гравитационных волн, необходимой для возбуждения веберовского детектора; отмечена трудность объяснения результатов Вебера в рамках того, что известно астрофизике. В момент написания ТТ и ЭЗ не было других экспериментальных данных.

В настоящее время можно считать установленным, что всплески и совпадения, наблюдаемые Вебером, не вызваны гравитационными

волнами. Применяя схожие антенны, но изменив способ регистрации, Брагинский с сотрудниками (1974) показал, что статистически значимых совпадений нет. К тому же выводу об отсутствии веберовских всплесков гравитационных волн пришел и Тайсон (1973).

Таким образом, при оценке некосмологического гравитационного излучения нужно обратиться к теории генерации волн, освобождаясь от гипноза первоначальных, неподтвердившихся экспериментальных данных [см. Зельдович, Полнарев (1974)].

Начнем с общих энергетических соображений.

Во всех случаях, кроме столкновения двух «черных дыр», выделение энергии в форме электромагнитного излучения больше, чем в форме гравитационных волн. Это утверждение относится и к столкновениям обычных звезд, и к столкновению белых карликов и нейтронных звезд, и к излучению пульсаров. Значит, плотность энергии гравитационных волн такого происхождения меньше плотности энергии некосмологического (нереликтового) электромагнитного излучения, т. е. существенно меньше  $10^{-18}$  эрг/см<sup>3</sup>, что соответствует  $\rho < 10^{-34}$  г/см<sup>3</sup>.

При столкновении двух черных дыр гравитационное излучение достигает, вероятно, нескольких процентов массы покоя.

Гравитационное излучение может играть роль в эволюции скопления, состоящего из множества черных дыр [Зельдович, Подурец (1964, 1965)]. Но такое скопление теряет устойчивость, когда гравитационный дефект массы достигает нескольких процентов \*). Только часть этой потери энергии приходится на гравитационное излучение.

Следовательно, один важный вывод можно сделать немедленно: некосмологическое гравитационное излучение не может составлять существенную долю всей плотности материи во Вселенной и, следовательно, не может сделать мир замкнутым! Если для этого недостаточно суммарная масса обычного вещества и всех черных дыр всех масштабов, то учет гравитационного излучения, испущенного перечисленными телами, ничего не изменит.

Вместе с тем, если черные дыры дают, к примеру, 10% плотности материи и, в свою очередь, 10% массы черных дыр превратились в гравитационное излучение, то последнее составляет 1% плотности материи, т. е.  $\sim 10^{-32}$  г/см<sup>3</sup>.

Напомним способы наблюдательного обнаружения слабозаимодействующих частиц, которые пригодны также для обнаружения гравитационного излучения. Во всех случаях, рассматриваемых

---

\*) В самом выгодном случае диска дефект массы достигает 40% [Бардин, Вагонер (1971)]. Для тела, состоящего из отдельных фрагментов, дефект массы как в случае диска [Солпитер (1971)], так и в случае сферы [Бисноватый-Коган (19726)] может сколь угодно близко приближаться к  $Mc^2$ .

ниже, основой является влияние любой формы материи и энергии на общую динамику расширения Вселенной.

Возраст, плотность и постоянная Хаббла связаны между собой. В гл. 1 даны формулы, связывающие возраст Вселенной, плотность материи и постоянную Хаббла. Применим эти формулы для того, чтобы из оценок возраста Вселенной оценить плотность материи. Хотя возраст Вселенной (от момента сингулярности) точно и не известен, но для него есть неравенства. С большой вероятностью возраст больше  $(10-12) \cdot 10^{10}$  лет и с абсолютной достоверностью больше  $5 \cdot 10^9$  лет. Последняя цифра представляет собой возраст Солнечной системы.

Отсюда для плотности получается неравенство  $\rho < 2 \cdot 10^{-28}$  г/см<sup>3</sup> при  $H = 75$  км/сек·Мпс и при  $H = 50$  км/сек·Мпс. Под  $\rho$  надо иметь в виду плотность всех видов материи, в том числе и гравитационных волн. Эти величины получены в предположении  $P = \epsilon/3$ , они во много раз превосходят плотность электромагнитного излучения и в этом смысле малоинтересны.

Другой способ связан с косвенным влиянием слабовзаимодействующих частиц и, в частности, гравитационных волн на развитие возмущений плотности. Отсылая за подробностями к работе Гюйо и Зельдовича (1970), напомним суть дела. В стационарной Вселенной возмущения плотности растут по закону  $\frac{\delta \rho}{\rho} \sim e^{\omega t}$ ,  $\omega = \sqrt{4\pi G \rho_{\text{вещ.}}}$ . Естественным обобщением этого закона на случай расширяющейся Вселенной является выражение  $e^{\int \omega dt}$ , согласно с точным расчетом улучшается при введении множителя  $t^{-1/2}$  (см. § 2 гл. 9).

От плотности гравитационных волн зависит закон расширения. Запишем:

$$\rho_{\text{вещ.}} = \rho_{\text{вещ. } 0} (1+z)^3 = \rho_c \Omega_{\text{вещ.}} (1+z)^3,$$

$$dt = \frac{1}{H_0} \frac{dz}{(1+z)^2 \sqrt{1 + \Omega_{\text{вещ.}} z + (\Omega_\gamma + \Omega_g) z(2+z)}}.$$

Здесь  $\Omega_{\text{вещ.}}$  есть отнесенная к критической плотности нерелятивистского вещества (того, которое собирается в галактики),  $\Omega_\gamma$ ,  $\Omega_g$  — то же для электромагнитного излучения и гравитационных волн.

Подставляя выражения  $\omega$  и  $\rho_c$ , получим, интегрируя от момента рекомбинации до настоящего времени (когда и происходит рост возмущений),

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \int \omega dt = \int_{z=0}^{z=z_{\text{рек}}} \frac{\sqrt{\Omega_{\text{вещ.}}} dz}{\sqrt{(1+z) [1 + \Omega_{\text{вещ.}} z + (\Omega_\gamma + \Omega_g) z(2+z)]}}.$$

При  $\Omega_{\text{вещ.}} = 1$ ,  $\Omega_\gamma = \Omega_g = 0$  это дает известный результат:

$$\alpha = \ln(z_{\text{рек}} + 1), \quad e^\alpha = z_{\text{рек}} + 1 \approx 1401.$$



Теперь посмотрим, как влияют поправки. Зададимся для примера  $\Omega_{\text{вещ}} = 0,2$ . Как известно,  $\Omega_\gamma = 10^{-4}$ . Если  $\Omega_g = 0$ , то член с  $\Omega_\gamma$  практически не играет роли:

$$\begin{aligned} \text{при } \Omega_\gamma = 0 & \quad \alpha_0 = 5,6, \quad e^{\alpha_0} = 270; \\ \text{при } \Omega_\gamma = 10^{-4} & \quad \alpha_1 = 5,35, \quad e^{\alpha_1} = 210. \end{aligned}$$

Однако, задавшись  $\Omega_{g2} = 100\Omega_\gamma$  и  $\Omega_{g3} = 1000\Omega_\gamma$ , получим значительное уменьшение роста возмущений:

$$\alpha_2 \approx 2, \quad e^{\alpha_2} = 10, \quad \alpha_3 \approx 1, \quad e^{\alpha_3} = 3.$$

Мы знаем, что скопления галактик сформировались в настоящее время, а скорее даже раньше, при  $z \sim 4$ . Необходимые для этого начальные возмущения тем больше, чем меньше  $e^\alpha$ . В варианте  $\Omega_{g2} = 100\Omega_\gamma$  возмущения плотности на момент рекомбинации должны были достигать  $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 0,1$ ; при адиабатических возмущениях этому соответствует  $\frac{\delta T}{T} \sim 0,03$ . Такие флуктуации реликтового фона исключены имеющимися наблюдениями.

Теория вопроса недостаточно разработана; главный недостаток, однако, заключается в том, что по ходу рассуждений приходится делать много допущений, что снижает доказательную силу аргументации.

Обратимся, наконец, к оценке плотности гравитационного излучения из рассмотрения нуклеосинтеза в ходе космологического расширения.

Напомним, что в § 5 гл. 7 мы рассматривали влияние тяготения, создаваемого неизвестными частицами, на скорость расширения Вселенной и, как следствие этого, на процесс нуклеосинтеза. Вывод состоял в том, что  $\rho_{\text{нестаб}}/\rho_{\text{нст}} < 3-4$ , ибо в противном случае дозвездное вещество более чем на 50% состояло бы из He.

Таким образом,  $\rho_g/\rho_\gamma < 3-4$ . В расчете предполагается, что нейтринный заряд равен нулю, налицо симметрия  $\nu_e = \bar{\nu}_e$  — иначе число вариантов стало бы необозримо.

Итак, есть три метода оценки плотности гравитационного излучения. Общей основой этих методов является усредненное гравитационное поле гравитационного излучения, т. е. эффект, квадратичный по амплитуде  $h$  волны.

Можно ли выбрать из трех методов один, наиболее чувствительный, дающий нижнюю границу для  $\rho_g$ ?

Такой подход был бы неправилен, и не только потому, что каждый метод не является абсолютно надежным и использует дополнительные предположения. Дело в том, что методы не вполне перекрываются, так как относятся к различным участкам спектра. В каж-

дый момент времени  $t$  в уравнениях динамики в плотности  $\epsilon_g$  нужно включать вклад «уже волн»,  $\lambda < ct$ , но не «будущих волн»,  $\lambda > ct$ .

Приведем окончательные результаты (см. табл. XV). Энергию гравитационных волн характеризуем отношением ее к энергии электромагнитного излучения \*) с температурой  $2,7^\circ\text{K}$ . Длины волн приведены к настоящему времени. Напомним, что  $\Omega_\gamma/\Omega_{\text{вещ}}$  лежит в пределах  $5 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-3}$ .

ТАБЛИЦА XV

Ограничения на возможную плотность гравитационных волн во Вселенной

| Метод               | $\rho_g/\rho_\gamma$ | Область спектра                            |
|---------------------|----------------------|--|
| Нуклеосинтез        | $< 4$                | $0 < \lambda < 3 \cdot 10^{17} \text{ см}$ |
| Развитие возмущений | $< 200$              | $0 < \lambda < 5 \cdot 10^{26} \text{ см}$ |
| Возраст Вселенной   | $< 20\,000$          | $0 < \lambda < 10^{28} \text{ см}$         |

## § 7. Влияние гравитационных волн на реликтовое излучение

Как и всякое нестационарное возмущение метрики, гравитационное излучение влияет на реликтовое излучение. По общим законам оптики это влияние приводит к тому, что наблюдаемая температура излучения  $T$  становится различной в разных направлениях. Вид спектра не изменяется; в частности, если спектр был равновесным в момент рекомбинации, то он и остается равновесным, планковским в каждом данном направлении. Теорема Лиувилля в сочетании с ОТО обеспечивает изменение плотности потока фотонов пропорционально  $T^3$  в соответствии с изменением частоты фотонов и температуры.

Таким образом, рассматриваются величины  $T(\theta, \varphi)$  или  $\Delta T(\theta, \varphi) = T(\theta, \varphi) - \bar{T}$  при наличии гравитационных волн. Важнейшие теоретические работы по этому вопросу выполнены в Потсдамской обсерватории Докуром (1969).

Не воспроизводя математические выкладки, дадим качественное описание результатов. Очевидно, что безразмерное изменение частоты данного луча электромагнитной волны или изменение температуры вдоль данного луча выражается через безразмерную амплитуду гравитационной волны  $h$  (для краткости не пишем индексов).

Так как в ходе расширения  $h$  уменьшается, то в ответ входят значения  $h$  на момент рекомбинации, ибо в этот момент гравитацион-

\*) При этом в ответ не входит неопределенность постоянной Хаббла и плотности материи.

ные волны сильнее всего искажают реликтовое излучение. Поскольку итог измерений флуктуаций на сегодняшний момент известен:  $\frac{\Delta T}{T} < 10^{-4}$ , получим оценку  $h(t=t_{\text{рек}}) < 10^{-4}$ , что соответствует на сегодняшний день, с учетом расширения,  $h_0 < 10^{-7}$ . Но плотность энергии гравитационных волн зависит от  $\dot{h}$ , уже поэтому необходимо выяснить, к каким длинам волн и частотам относится оценка.

В случае коротких высокочастотных волн рекомбинацию нельзя считать мгновенной. Мы видим толщу плазмы, дающую вклад в принимаемое нами РИ, на протяжении которой укладывается много длин волн, т. е. видим одновременно несколько слоев с противоположным знаком влияния гравитационной волны. Не ослабленный этим обстоятельством эффект можно наблюдать при  $\lambda_{p, \kappa} > 0,05 ct_{\text{рек}}$ , что в пересчете на сегодняшнюю длину волны даст  $\lambda_0 > 2 \cdot 10^{25} \text{ см}$ . С другой стороны, нужно, чтобы к моменту рекомбинации мы имели дело со сформировавшейся гравитационной волной,  $\lambda_g < ct_{\text{рек}}$ . По совокупности получим ограничение с двух сторон:  $2 \cdot 10^{25} \text{ см} < \lambda < 5 \cdot 10^{26} \text{ см}$  сегодня. При длине волны в этом интервале получим

для энергии гравитационных волн  $\frac{e_g}{e_\gamma} = \frac{\Omega_g}{\Omega_\gamma}$  оценку от  $4 \cdot 10^{-4}$  до  $10^{-6}$ . Наибольшая чувствительность достигается для волн длиной, равной горизонту в момент рекомбинации. Эти волны создают неоднородности температуры  $\Delta T$  в угловом масштабе порядка  $\frac{ct_{\text{рек}}(1+z)_{\text{рек}}}{ct_0}$ , т. е. около 0,03 радиана.

При детальном рассмотрении взаимодействия гравитационной волны с реликтовым излучением выявляются любопытные подробности, связанные с тем, что скорость гравитационной волны равна скорости света. Луч света (радиоволна), распространяющийся под малым углом к одиночной гравитационной волне, длительно подвергается воздействию одной и той же фазы волны, что усиливает воздействие. С другой стороны, гравитационная волна поперечна, что ослабляет ее воздействие на луч, скользящий под малым углом. В результате в окрестности направления распространения одиночной гравитационной волны (примем его за ось  $z$ , т. е.  $\theta=0$  в сферических координатах) появляется своеобразная особенность:  $\Delta T = \Delta T(0) \cos(2\varphi + \alpha)$ . Возмущение температуры остается конечным, но градиент  $\Delta T$  на сфере стремится к бесконечности \*) вблизи оси.

Соответственно для данной длины волны в разложении на сфере по полиномам Лежандра высокие гармоники убывают медленно, по степенному закону, а не экспоненциально с номером гармоники.

\*) Компоненты градиента суть  $\frac{\partial}{\partial \theta}$ ,  $\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ , бесконечность появляется за счет множителя  $\frac{1}{\theta}$ .

Для возмущений, которые становятся гравитационными волнами после рекомбинации, чувствительность, т. е. отношение  $\Delta T/T$ , к амплитуде  $h$  меньше; однако при данном  $h$  меньше и плотность энергии. Для волны длиной  $\lambda = ct_0 = 10^{28}$  см (сегодняшний горизонт) возмущение  $\Delta T$  носит квадрупольный характер — так называемая 12-часовая анизотропия, амплитуда  $\Delta T/T$  порядка самого  $h$ . Оценка из наблюдений дает  $h < 3 \cdot 10^{-4}$  и, соответственно,  $\Omega_g < 10^{-7}$ , так что  $\Omega_g/\Omega_\gamma < 10^{-8}$ .

Ситуация в промежуточной области  $5 \cdot 10^{26}$  см  $< \lambda < 10^{28}$  см ясна из интерполяции между предельными случаями. Волны с  $\lambda > 10^{28}$  см в настоящее время не существуют в том смысле, что соответствующие тензорные возмущения еще не стали волнами. Большая чувствительность флуктуаций температуры к волнам  $\lambda \sim 10^{26} - 5 \cdot 10^{26}$  см связана с тем, что наблюдается искажение метрики в период рекомбинации, когда впервые прекращается взаимодействие электромагнитного излучения с веществом. При этом предполагается, что вторичная ионизация, связанная с образованием скоплений, квазаров или, еще раньше, с ударными волнами, происходит достаточно поздно, при  $z < 10 - 20$ , так что флуктуации не «замываются» последующим рассеянием.

Короткие гравитационные волны,  $\lambda < 2 \cdot 10^{25}$ , дают флуктуации  $\Delta T$  малые, так как эти флуктуации неизбежно «замываются» в процессе рекомбинации, который нельзя считать мгновенным \*). Однако любые гравитационные волны, в том числе и короткие, участвуют в создании квадрупольного возмущения  $\Delta T$  с амплитудой, соответствующей сегодняшнему  $h$ .

Для плотности энергии получим выражение ( $\Omega_g$  определяется гравитационными волнами с длиной больше  $\lambda$ )

$$\frac{\Omega_g}{\Omega_\gamma} < 10^{-8} \left( \frac{10^{28}}{\lambda} \right)^2, \quad \lambda \leq 10^{28} \text{ см},$$

содержащее предельный случай  $\lambda = 10^{28}$  см, рассмотренный выше.

Эту формулу нужно сравнить с табл. XV. Формула дает  $\Omega_g$  при длине волны больше некоторой. В таблице дана плотность энергии для длин волн меньше определенной величины. Таким образом, таблица и формула дополняют друг друга.

## § 8. Пекулярное движение, вызываемое гравитационными волнами

Нельзя ли воспользоваться скоплениями галактик или входящими в эти скопления отдельными галактиками или звездами как детекторами гравитационного излучения? Этот вопрос был

\*) В теорию входит время изменения оптической толщи по рассеянию на пути луча до наблюдателя.

поставлен Рисом (1971) в связи с обсуждением опытов Вебера. Рис дал оценку эффекта для системы свободных частиц, не взаимодействующих ни между собой, ни с другими телами. Если расстояние между частицами равно  $x$ , то гравитационная волна вызывает относительное движение со скоростью  $v = \dot{h}x$  (опускаем множители порядка единицы, учитывающие угол между  $x$  и направлением главной оси тензора деформации гравитационной волны). Эта скорость остается постоянной в течение времени порядка периода гравитационной волны  $\tau = \frac{\lambda}{c}$ . Рис полагает, что скорость, полученная в следующем промежутке времени, статистически независима по величине и направлению.

В этом случае складываются квадраты приращений скорости, и Рис дает оценку скорости, набранной за время  $T$  ( $n$  — число статистически независимых слагаемых,  $n \approx T/\tau$ ):

$$v^2(T) = n \dot{h}^2 x^2 = \frac{T}{\tau} \dot{h}^2 x^2, \quad v = \dot{h}x \sqrt{\frac{T}{\tau}}. \quad (16.8.1)$$

Возьмем верхний предел плотности гравитационного излучения, приравнявая ее критической. Это означает:

$$\frac{v_g}{c^2} = \frac{\dot{h}^2}{G} = \frac{H^2}{G}, \quad \dot{h} \approx H \quad (16.8.2)$$

(см. выше § 2 этой главы). В этом случае  $\dot{h}x \approx Hx$ . Здесь  $Hx$  есть относительная скорость двух тел, соответствующая общему расширению Вселенной. Но, согласно Рису [см. (16.8.1)], относительная скорость может быть еще в  $\sqrt{n}$  раз больше.

Однако предположения Риса, приведшие его к такому выводу, требуют тщательного разбора. В этой задаче необходим спектральный подход. В действительности формуле (16.8.1) соответствует молчаливое предположение о статистической независимости ускорений  $\ddot{h}$  при интервалах времени больше  $\tau$ . Но статистическая независимость означает плоский спектр возмущений в разложении Фурье функции  $\ddot{h}(t)$  в данной точке. Итак,  $\ddot{h}_\omega = \text{const}$  при  $\omega < \tau^{-1}$ . Но в таком случае  $\dot{h}_\omega = \frac{\text{const}}{\omega}$ , а значит, плотность энергии, равная  $\int \dot{h}_\omega^2 d\omega$ , расходится! Еще сильнее расходится при  $\omega \rightarrow 0$  величина  $h_\omega = \frac{\text{const}}{\omega^2}$ . Предположение о независимом наборе скорости в периоды длительностью  $\tau$  оказывается не столь очевидным и безобидным, как это могло показаться.

Структура статистического поля гравитационных волн с плоским спектром мощности  $|\dot{h}_\omega|^2 = \text{const}$  обладает другими свойствами. Ускорение знакопеременно, в ускорении есть антикорреляция.

Скорость остается с течением времени в среднем постоянной, равной  $\sqrt{\dot{h}^2} x = x \sqrt{\frac{\varepsilon_g G}{c^2}}$ , и не нарастает со временем. Растет пропорционально  $\sqrt{t}$  лишь смещение относительно невозмущенного положения.

Таким образом, ответ зависит от предположений о спектре гравитационных волн [см. Зельдович, Полнарев (1974)1].

По данным Сэндиджа (см. § 9 гл. 3), в широком интервале расстояний от 10 до 2000 *Mpc* отличие красного смещения отдельных скоплений от средней кривой порядка 10%. Тот факт, что абсолютное значение постоянной Хаббла нам известно лишь с точностью до десятков процентов не противоречит предыдущему утверждению — главная неопределенность относится лишь к общему масштабному фактору в шкале расстояний.

Только часть отклонений данных для отдельных скоплений на кривой  $\lg z - \lg M$  зависит от пекулярного вклада в относительное движение, и только часть этого последнего может быть обусловлена гравитационными волнами. Поэтому выводы, касающиеся плотности гравитационных волн, основанные на данных Сэндиджа, представляют собой неравенства. Эти данные дают верхнюю границу. Итак, для длин волн  $3 \cdot 10^{25} - 6 \cdot 10^{27}$  см получаем оценку

$$\dot{h}^2 < 0,01 H^2, \quad \Omega_g < 0,01, \quad \frac{\Omega_g}{\Omega_{\text{вещ}}} < 100. \quad (16.8.3)$$

Вернемся к принципиальной стороне вопроса. Заметим, что нельзя использовать для оценок известную малую скорость относительно реликтового излучения нашей Галактики (а вместе с ней и всей местной группы). Дело в том, что гравитационная волна одинаково вовлекает в движение и материальную точку (скопление) и окружающий ее газ (излучение). Локально, в одной точке, относительные скорости излучения и частицы не возникают \*). Измерение относительных скоростей удаленных объектов (при измерении постоянной Хаббла) нельзя заменить локальными измерениями. Есть ли такие условия, когда кинетическая энергия относительного движения монотонно растет в поле гравитационного излучения? Мораль предыдущего изложения заключается в том, что  $\dot{h}$  с течением времени меняет знак и среднее значение  $\int \dot{h} dt$  меньше, чем для «случайного»  $\dot{h}$ .

Монотонный набор энергии при спектре  $|\dot{h}_\omega|^2 = \text{const}$  возможен в том случае, если относительная скорость в движении, не возмущенном гравитационной волной, также меняет свой знак \*\*).

\*) Остаются только более тонкие эффекты, связанные с тем, что газ бесстолкновительный (см. предыдущий параграф).

\*\*) Подразумевается составляющая скорости вдоль заданной оси.

Простым примером является гравитационно связанная система тел (скопление), в которой тела движутся по орбитам более или менее периодически \*). Набор энергии при этом пропорционален спектральной плотности гравитационного излучения в соответствующей области частот. Но совокупность частиц также и излучает гравитационные волны. Набор или отдача энергии зависит от соотношения эффективных температур излучения и частиц. Пусть частицы с массой  $m$  и скоростью  $u$  движутся по траектории радиуса  $R$ . Кинетическая энергия и эффективная температура частиц порядка  $mu^2$ , частота порядка  $u/R$ , соответствующая длина гравитационной волны  $\lambda \approx cR/u$ . По формуле Рэлея — Джинса тепловое излучение с длиной волны порядка  $\lambda$  (от  $\lambda$  до  $\infty$  или от  $\frac{\lambda}{\sqrt{e}}$  до  $\lambda\sqrt{e}$ ) имеет плотность энергии порядка  $\varepsilon_g$ , равн  $= \frac{T}{\lambda^3}$ , что даст  $\varepsilon_{g, \text{ равн}} =$

$$= \frac{mu^5}{R^3 c^3} = \frac{mc^2}{R^3} \frac{u^5}{c^5}.$$

Набор энергии частицами происходит при плотности энергии гравитационных волн, малой по сравнению с плотностью энергии связи частицы на траектории. По теореме вириала энергия связи частицы порядка ее кинетической энергии.

Оценим время, потребное для диссоциации совокупности частиц, как время набора энергии, равной начальной кинетической энергии \*\*). Скорость набора энергии при  $\varepsilon_g \gg \varepsilon_{g, \text{ равн}}$  для широкого спектра гравитационных волн равна

$$\frac{d}{dt} \frac{mu^2}{2} = \frac{GmuR\varepsilon_g}{c^2}. \quad (16.8.4)$$

Соответственно характерное время равно

$$\tau = \frac{mu^2}{2} : \frac{d}{dt} \frac{mu^2}{2} = \frac{uc^2}{GR\varepsilon_g} = \frac{t_0^2}{\Omega_g \tau_0}, \quad (16.8.5)$$

где  $\tau_0$  — период невозмущенного движения частицы,  $\tau_0 = \frac{R}{u}$ . Далее, плотность энергии гравитационного излучения  $\varepsilon_g$  выражена через  $\Omega_g = \frac{\rho_g}{\rho_c} = \frac{\varepsilon_g c^2}{\rho_c}$ , где  $\rho_c$  в свою очередь выражена через возраст Вселенной  $t_0$ ; по порядку величины  $\rho_c \approx (Gt_0^2)^{-1}$ .

Мы достоверно знаем, что  $\Omega_g \leq 1$ . Далее,  $\tau_0 < t_0$  — это неравенство есть прямое следствие обособления скопления от расширяющегося вещества и того факта, что система гравитационно связана. Но согласно формуле (16.8.5) отсюда следует, что  $\tau > t_0$ , т. е. набор энергии за все космологическое время мал.

\*) Точная периодичность имеет место при ньютоновском движении в поле центральной массы или внутри области, где плотность постоянна.

\*\*) При этом не будем учитывать изменение параметров  $u, R$  в ходе диссоциации.

## § 9. Взаимопревращения гравитационных и электромагнитных волн

Процессы взаимного превращения волн представляют интерес в нескольких аспектах. В принципе возможно, что такие процессы идут во Вселенной. Эти процессы обсуждаются как способ лабораторной генерации высокочастотных коротких гравитационных волн. Наконец, детектирование гравитационных волн требует их предварительного превращения в другие формы энергии; в частности, для коротких волн (космологических или созданных в лаборатории) естественно искать способ их превращения в электромагнитные волны.

Важнейший случай — превращение волн при наличии магнитного поля  $\mathcal{H}_0$  постоянного (не зависящего от координат и времени) и поперечного (направленного по оси  $y$ ) по отношению к направлению распространения волн (оси  $x$ ).

Впервые особенность этого явления, связанная с равенством скорости электромагнитных и гравитационных волн, отмечена Герценштейном (1961). Плоская электромагнитная волна в пустом пространстве не излучает гравитационных волн, так как тензор энергии-импульса такой волны не содержит переменного квадрупольного натяжения (которое, как известно, и излучает гравитационные волны). Однако в электромагнитной волне, распространяющейся в постоянном магнитном (или электрическом) поле, появляется переменное во времени квадрупольное натяжение. Подробные уравнения приведены в работе Боккалетти и др. (1970).

Поляризованная электромагнитная волна с амплитудой  $\mathcal{H}_y$  в поле  $\mathcal{H}_0$  дает в максвелловском тензоре натяжений квадрупольный член  $T_{yy} = -T_{zz} = \frac{\mathcal{H}_y \mathcal{H}_0}{4\pi} \cos(kx - \omega t)$ . В уравнении для излучения гравитационных волн [см. Ландау, Лифшиц (1973), ТТ и ЭЗ, стр. 80] этот тензор натяжений входит в правую часть:

$$\frac{1}{2} \square h_{yy} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{yy} = -\frac{2G}{c^4} \mathcal{H}_y \mathcal{H}_0 \cos(kx - \omega t); \quad (16.9.1)$$

аналогичное уравнение имеет место и для  $h_{zz}$ . Поскольку  $\cos(kx - \omega t)$  есть решение уравнения без правой части, т. е. является резонансным членом, то при наличии такой правой части решение имеет вид

$$h_{yy} = ax \cos(kx - \omega t). \quad (16.9.2)$$

Постоянное поле включается в начале координат:

$$x < 0, \quad \mathcal{H} = 0; \quad x > 0, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0. \quad (16.9.3)$$



При этом доля энергии электромагнитной волны, превращающейся в энергию гравитационной волны, равна \*)

$$\alpha = \frac{G \mathcal{H}_0^2 x^2}{c^4}. \quad (16.9.4)$$

Ряд авторов отмечают, что когерентность существенна и для обратного процесса. Гравитационная волна при распространении в поле  $\mathcal{H}_0$  создает возмущения магнитного поля, которые играют роль источников в уравнении электромагнитной волны:

$$\square \mathcal{H}_y = \frac{\omega^2}{c^2} h_{22} \mathcal{H}_0 = \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{H}_0 h \cos(kx - \omega t). \quad (16.9.5)$$

Имеется полная аналогия с предыдущим случаем, энергетический коэффициент обратного превращения совпадает с  $\alpha$ .

В лаборатории и даже в пульсарах  $\alpha$  мало: для  $\mathcal{H}_0 = 10^5$  гс,  $x = 10^2$  см получим  $\alpha = 10^{-35}$ , для  $\mathcal{H}_0 = 10^{13}$  гс,  $x = 10^8$  см соответственно  $\alpha = 10^{-11}$ .

В крайних предположениях о космологическом поле  $\mathcal{H}_0^2 \approx \epsilon_1$  ( $\mathcal{H}_0 = 10^{-6}$  гс сегодня,  $\mathcal{H}_0 = 1$  гс в момент рекомбинации) за космологическое время можно было бы получить  $\alpha \sim 10^{-3}$  при  $z \sim z_{\text{рек}}$ . Такое превращение могло бы быть замечено в реликтовом излучении, причем характерно в этом случае ослабление компоненты радиоволн с одной поляризацией. Однако в среде (электроны, атомы) с проводимостью, отличной от нуля, и диэлектрической проницаемостью, отличной от единицы, когерентность нарушается. По этой причине в космологических условиях коэффициент  $\alpha$  остается неизмеримо малым. Зельдовичем (1973в) отмечена симметрия уравнений (16.9.1) и (16.9.5). Обозначая  $\mathcal{H}_y = f$ ,  $\mathcal{H}_0 \sqrt{G} = p$ ,  $\frac{\hbar}{\sqrt{G}} = g$ , получим уравнения ( $c=1$ ) вида

$$\square f = \omega p g, \quad \square g = \omega p f. \quad (16.9.6)$$

Нормальными модами для такой системы уравнений являются смещенные волны [фазированные гравитационно-электромагнитные волны с одинаковой ( $q$ ) или противоположной ( $r$ ) фазой]. Для них уравнения разделяются:

$$\square q = \omega p q, \quad \square r = -\omega p r. \quad (16.9.7)$$

Таким образом, можно построить изящную точную теорию взаимопревращения волн \*\*). Однако не ясно, где в природе осуществляется рассматриваемая ситуация.

\*) Пользуемся случаем исправить неверное утверждение, содержащееся в ТТ и ЭЗ: вместо  $x^2$  в выражении для  $\alpha$  там фигурирует  $\chi \lambda$ .

\*\*) Коэффициент  $\alpha$  описывает начальную стадию, когда одна волна слаба, а другая мало изменилась.

Если в пространстве присутствуют электроны и атомы, то уравнение электромагнитных волн имеет вид ( $c=1$ )

$$\square \mathcal{H}_\nu = \omega^2 h_{\alpha\beta} \mathcal{H}_\alpha + (a + ib) \mathcal{H}_\nu, \quad (16.9.8)$$

где  $a$  и  $b$  — вещественная и мнимая части поляризуемости среды. Симметрия двух уравнений нарушается, и, как отмечено выше, эффекты становятся ничтожными даже в космологических условиях.

Задача электромагнитного детектирования гравитационных волн близка к предыдущей. Коротко и схематически опишем основные принципы. Подробности см. Брагинский и др. (1973) и Пресс и Торн (1972).

Представим себе резонатор — закрытый металлический сосуд со стенками, имеющими возможно лучшую проводимость. Частные решения уравнений Максвелла в этом сосуде, удовлетворяющие условиям на стенках, имеют вид

$$\mathcal{E}, \mathcal{H} = \varphi_k(t) f_k(\mathbf{x}). \quad (16.9.9)$$

В отсутствие гравитационной волны и потерь уравнение для функции  $\varphi_k$  и решение его имеют вид

$$\frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} + \omega_k^2 \varphi_k = 0, \quad \varphi_k = C_k e^{-i\omega_k t}. \quad (16.9.10)$$

Пусть в резонаторе находится постоянное магнитное поле и он подвергается воздействию гравитационной волны с частотой  $\omega$ . Тогда в уравнении для  $\varphi_k$  появляется правая часть — возбуждающая сила:

$$\frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} + \omega_k^2 \varphi_k = \omega^2 \mathcal{H}_0 h e^{-i\omega t}. \quad (16.9.11)$$

Наилучшим для детектирования является резонансный случай  $\omega = \omega_k$  при начальном  $\varphi_k = 0$ . Решение имеет вид

$$\varphi_k = \text{const} \cdot t \cdot e^{-i\omega_k t}. \quad (16.9.12)$$

Энергия резонансного колебания, накопленная за время  $t$ , пропорциональна  $t^2$ . Если отнести ее к энергии гравитационной волны, прошедшей через резонатор за это время (пропорциональной  $t$ ), получится коэффициент преобразования

$$\alpha = \frac{G \mathcal{H}_0^2 xct}{c^4}.$$

Очевидно, что максимальное значение  $t$  определяется затуханием колебаний в резонаторе. Характерное время затухания  $\tau$  может быть большим! По сравнению с превращением гравитационных волн в электромагнитные в открытом пространстве коэффици-

ент преобразования резонатора больше в  $\frac{\pi}{x} \approx \omega_k \tau = Q$  раз, где  $Q$  — так называемая добротность (число колебаний до затухания).

Видоизменение этого способа заключается в том, что в резонаторе возбуждается  $n$ -е колебание с частотой  $\omega_n$ , а под действием гравитационной волны возникает другое,  $k$ -е колебание с частотой  $\omega_k$ . Резонанс достигается при частоте гравитационной волны  $\omega = \omega_k - \omega_n$  или  $\omega = \omega_k + \omega_n$ .

Возбуждаемое  $k$ -е колебание может иметь отличную от нуля начальную амплитуду  $A_{0k}$ . Тогда после воздействия гравитационной волны приобретенная амплитуда  $\delta A_k$  (которая пропорциональна  $\omega_k \hbar t$ ) складывается с начальной  $A_{0k}$ . При оптимальном выборе фаз энергия, приобретенная за данное время, оказывается больше,  $\Delta E_k \sim \hbar t$ , а не  $\hbar^2 t^2$ . Очевидно, однако, что труднее измерить изменение энергии  $\Delta E_k$  на фоне начальной энергии, отличной от нуля.

Можно возбудить в резонаторе данное  $m$ -е колебание и изучать его изменение под действием гравитационной волны двукратной частоты  $\omega = 2\omega_m$  (частный случай предыдущей формулы  $\omega = \omega_k + \omega_m$  при  $k=m$ ). Такая ситуация называется «параметрический резонанс».

Под действием гравитационной волны медленно меняются амплитуда и фаза электромагнитного колебания в резонаторе:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_k &= A_k(t) \cos [\omega_k t + \psi_k(t)], \\ \frac{dA_k}{dt} &= A_k |\dot{\hbar}| \cos 2\psi_0, \quad \frac{d\psi_k}{dt} = |\dot{\hbar}| \sin 2\psi_0. \end{aligned} \right\} \quad (16.9.13)$$

Здесь  $\psi_0$  есть сдвиг фазы гравитационной волны относительно электромагнитного колебания. В зависимости от выбора  $\psi_0$  электромагнитное колебание под действием гравитационной волны может усиливаться, ослабляться или сдвигаться по фазе. Эффект пропорционален  $\dot{\hbar}$ , т. е.  $\sqrt{\epsilon_g}$ . Использование электромагнитных детекторов, по-видимому, наиболее перспективно для лабораторных опытов по детектированию гравитационных волн, созданных тоже в лаборатории с известной частотой и фазой в высокочастотной области спектра. Однако оценки даже для громоздких устройств с полями  $\mathcal{H} \approx 10^5$  гс, размерами в десятки метров, еще не дают приемлемых результатов, реального проекта пока не существует.

С другой стороны, при детектировании возможного космологического гравитационного излучения с широким спектром принципиальные преимущества резонатора теряются. Его чувствительность велика в узкой полосе частот, усредненная же по спектру чувствительность не лучше, чем для магнитного поля, не ограниченного стенками. Выше для лабораторных условий  $\mathcal{H} = 10^5$  гс,  $x = 100$  см мы нашли коэффициент превращения гравитационных волн в электромагнитные порядка  $10^{-35}$ . Примем плотность кос-

мологических гравитонов  $10^8 \text{ см}^{-3}$ . Поток их через поверхность  $x^2 = 10^4 \text{ см}^2$  равен  $10^{17} \text{ сек}^{-1}$ . Значит, вероятность образования фотонов под влиянием такого излучения во всем объеме равна  $10^{17} \times 10^{-35} = 10^{-18} \text{ сек}^{-1}$ , т. е. один фотон за время, равное возрасту Вселенной. По-видимому, лабораторное обнаружение гравитационных волн и регистрация низкочастотных волн от двойных звезд, пульсаров и взрывов сверхновых \*) намного опередят экспериментальное исследование высокочастотного реликтового гравитационного излучения.

---

\*) Излучение гравитационных волн при взрыве вращающейся сверхновой, превращающейся в диск, см. Туан, Острайкер (1974) и Новиков (1975). По поводу превращений гравитационных и электромагнитных волн см. также Сибгатулин (1974).

# РАЗДЕЛ IV

## АНИЗОТРОПНАЯ КОСМОЛОГИЯ



### ГЛАВА 17

#### ВВЕДЕНИЕ

Есть все основания полагать, что в настоящее время и в недалеком прошлом Метагалактика удовлетворяла наиболее простым, «естественным» предположениям об изотропии и однородности распределения вещества и его движения. При этом мы отвлекаемся от той мелкомасштабной (по сравнению со всей наблюдаемой Метагалактикой) неоднородности, которая проявляется в существовании галактик и их скоплений. Как уже отмечалось, решающим аргументом в пользу изотропии и однородности является изотропия реликтового излучения горячей Вселенной, наблюдаемого на Земле в настоящее время (верхний предел возможной анизотропии излучения  $\frac{\Delta T}{T} \leq 0,003$ .)

Изотропия излучения свидетельствует об одинаковости условий в различных направлениях от нас. Фоновое реликтовое излучение в хорошо изученной области спектра  $\lambda = 20 - 0,25$  см слабо взаимодействует с пылью, нейтральными атомами и плазмой. Это позволяет сделать заключение об изотропии, относящейся к гораздо большему расстоянию, чем это можно сделать по статистике далеких дискретных объектов. Приходящие к нам сегодня кванты испытали рассеяние (в среднем) на таком расстоянии, которое соответствует красному смещению не менее чем  $z=6$  или 8, а может быть,  $z=1400$ . Как будет показано ниже, из наблюдений вытекает, что, начиная с периода  $t \approx 0,01 t_0$  ( $t_0$  — сегодняшний момент), расширение заведомо происходит изотропно, а вероятнее всего, расширение происходит изотропно, начиная, по крайней мере, с  $t \approx 10^{-4} t_0$ .

Таким образом, изотропия и однородность Вселенной в наше время являются наблюдательным фактом. Но, с другой стороны, сам факт изотропии и однородности является загадочным, что особенно подчеркивается в работе Мизнера (1969а).

Действительно, если Вселенная прозрачна, начиная с  $z=7$ , то фотоны, приходящие к нам сегодня по направлениям, разделенным на небе более чем на  $30^\circ$ , исходят из точек, которые в момент выхода квантов (соответствующий  $z \approx 7$ ) находятся на расстоянии большем,

чем оптический горизонт, т. е. не связаны причинной зависимостью. Таким образом, в одной из этих точек не может быть известно, какая температура в другой точке, не может быть никакого механизма выравнивания температуры и вообще любых неоднородностей, и надо предполагать, что строгая изотропия и однородность заложены в сингулярном состоянии.

С другой стороны, предположение о строгой однородности и изотропии сингулярного состояния отнюдь не может считаться доказанным из каких-либо общих принципов. Наблюдательные данные не дают однозначного ответа о сингулярности.

Возникают следующие два вопроса:

1. Действительно ли Вселенная с самого начала расширялась однородно и изотропно [по крайней мере с момента, когда применимы известные в настоящее время наиболее общие законы физики, т. е. когда кривизна пространства-времени  $\sim 1/(10^{-83} \text{ см})^2$ ] и каковы тогда причины строгой однородности и изотропии сингулярного состояния?

2. Если начальные стадии расширения были отличными от фридмановской теории, то какими именно они были и почему в конце концов Вселенная стала однородной и изотропной?

Для выяснения этого необходимо рассмотреть модели, начальные стадии которых нефридмановские, определить, по каким наблюдаемым сегодня свойствам можно судить о ранних стадиях расширения. Кроме того, если в начале расширение действительно было нефридмановским, то надо выяснить те причины, те процессы, которые привели к сегодняшней фридмановской картине.

Если бы удалось показать, что при широком произволе начальных условий космологическое решение должно выходить, в ходе расширения, на фридмановское, то мы могли бы считать, что объяснили свойство однородности и изотропии. Вот почему в последнее время вслед за выяснением всех свойств простейшей фридмановской модели последовало исследование более общих решений.

Мы должны оговориться здесь же, что совокупность всех наблюдательных и теоретических данных заставляет нас склоняться к первой из отмеченных выше возможностей, а именно что с того момента времени, когда применима классическая (не квантовая) ОТО для описания Вселенной, т. е. с  $t_g \approx 10^{-43} \text{ сек}$ , космологическое расширение было однородным и изотропным. Возможные причины однородности и изотропии сингулярного состояния будут рассмотрены в следующем разделе.

В этом разделе рассмотрим возможность ситуации, когда ранние стадии расширения существенно нефридмановские, так как такую возможность, как отмечено выше, пока исключить нельзя. Мы рассмотрим частный случай строго однородных, но анизотропных решений уравнений ОТО. Этот класс решений выделяется не только своей относительной математической простотой, позволяю-

щей во многих случаях исследовать решение до конца. Есть надежда, что АО (анизотропные однородные) космологические решения отражают по крайней мере некоторые существенные особенности общего случая, в котором нет уже и однородности [Халатников, Лифшиц (1970), Белинский, Халатников (1969а, б), Белинский, Лифшиц, Халатников (1972), Зельдович (1970а), Мизнер (1969а, б)].

Как показал Мизнер (1969а), в определенном классе АО моделей с замкнутым трехмерным пространством свет успевает на ранней стадии многократно обойти весь мир, и, следовательно, нет отмеченной выше трудности с наличием оптического горизонта и принципиальной невозможностью выравнивания неоднородностей в большом масштабе, как во фридмановской модели. Правда, как выяснили позднее Дорошкевич, Лукаш, Новиков (1971), класс таких моделей очень узок.

АО модели интересны еще и потому, что в них отсутствие изотропии дает возможность рассматривать первичное магнитное поле, направленные потоки вещества и свободных частиц, ведущих, в частности, к неравновесным процессам, увеличению энтропии и т. д.

Высказывались предположения, что общий неоднородный случай можно будет получить наложением своего рода «возмущений» на однородную модель [Зельдович (1970а), Халатников (1965)]. В следующем разделе будет показано [Белинский, Лифшиц, Халатников (1972)], что вблизи сингулярности в общем неоднородном случае характер деформации подобен деформации в модели «перемешанного мира» (см. гл. 21), которая однородна.

Все это, наряду с возможностью обзримого математического анализа решения, делает рассмотрение АО моделей весьма важным. Вместе с тем уместно сразу предупредить об ограниченной применимости АО моделей к общему неоднородному случаю. Ведь в АО модели однородность уже предполагается. Общий же неоднородный случай должен быть гораздо сложнее. Отдельные аспекты этой проблемы см. в разделе V.

Мы начнем с рассмотрения кинематики расширения АО моделей.

Как и в случае фридмановского решения, начнем с аналогичной ньютоновской задачи [Линден-Белл (1962, 1964), Зельдович (1964б)] и потом перейдем к рассмотрению в ОТО [Шюкинг, Гекман (1958), а затем и многие другие авторы]. Сразу же подчеркнем, что ньютоновская и релятивистская задачи дают здесь во многих отношениях непохожие результаты, в отличие от изотропного и однородного случая.

После рассмотрения основных свойств кинематики АО-моделей и роста возмущений в них рассмотрим особенности физических процессов в этих моделях и наблюдательные предсказания. Последние параграфы этого раздела будут посвящены общему анализу однородных моделей и сравнению с наблюдениями.

Все рассмотрение в этом разделе проводится в рамках классической ОТО, квантовые эффекты не рассматриваются. Теоретические оценки, проведенные в последние годы, показали, что вблизи сингулярности при анизотропной деформации должно происходить интенсивное спонтанное рождение частиц из вакуума благодаря квантовым эффектам. Мы подробно разберем эти эффекты в V разделе книги. Но уже здесь мы должны указать, что спонтанное рождение частиц вблизи сингулярности должно сильно влиять на динамику расширения и на многие физические процессы в анизотропных моделях. Весьма вероятно, что именно этот процесс играет решающую роль в изотропизации АО моделей, а может быть, и в прохождении через сингулярность. Однако, не разобравшись в классических процессах в АО моделях без квантового рождения частиц, нельзя понять те ограничения и те явления, которые связаны с квантовыми процессами. Вот почему мы откладываем рассмотрение квантовых явлений до следующего раздела.



## ПРОСТЕЙШИЕ АНИЗОТРОПНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

## § 1. Ньютоновская теория простейшего анизотропного однородного решения как предельный случай локальной задачи

Выше мы строили космологическое решение в изотропном и однородном случае, начиная с рассмотрения расширения конечного шара. Попробуем построить анизотропное однородное космологическое решение, также исходя из рассмотрения задачи для конечного тела — трехосного эллипсоида с веществом постоянной плотности.

Будем рассматривать вещество без давления,  $P=0$ . Известно (см., например, ТТ и ЭЗ), что в ньютоновской теории добавление (к уже существующему эллипсоидальному распределению однородного вещества) новых слоев с сохранением подобия не меняет гравитационного поля внутри первоначального распределения.

Таким образом, если удастся найти решение для движения вещества однородного эллипсоида, которое все время переводит начальный однородный эллипсоид в однородный же эллипсоид (но другой формы, ориентации в пространстве и размера), то затем, добавляя неограниченно новые слои с сохранением подобия (что никак не сказывается на движении вещества во внутренних частях), мы получим космологическое решение однородное, но с анизотропной, вообще говоря, деформацией.

Рассмотрим однородное вещество, заполняющее трехосный эллипсоид.

Как известно [см., например, Сретенский (1946)], внутри эллипсоида гравитационный потенциал является квадратичной функцией координат:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2} \varphi_{ik} x_i x_k, \quad (18.1.1)$$

причем коэффициенты  $\varphi_0$ ,  $\varphi_{ik}$  не зависят от точки. Оси тензора  $\varphi_{ik}$  совпадают с осями эллипсоида. Если выбрать координатные оси по осям эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , то внутри его

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2} \varphi_{xx} x^2 + \frac{1}{2} \varphi_{yy} y^2 + \frac{1}{2} \varphi_{zz} z^2. \quad (18.1.2)$$

В соответствии с уравнением Пуассона

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 4\pi G\rho, \quad (18.1.3)$$

но сами  $\Phi_{xx}$ ,  $\Phi_{yy}$ ,  $\Phi_{zz}$  не равны между собой: их отношения зависят от отношения осей эллипсоида. Конкретное выражение этих функций через оси эллипсоида дается длинными интегралами, явный вид которых для нас сейчас неважен [см. Сретенский (1946)]. Величина  $\Phi_{ii}$  (здесь нет суммирования по  $i$ !) — наибольшая для направления  $x_i$ , соответствующего самой короткой оси эллипсоида; например, в пределе  $a=b \ll c$  для вытянутого эллипсоида с осью  $z$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2\pi G\rho, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \rightarrow 0, \quad (18.1.4)$$

а для тонкого диска  $a \gg c$ ,  $b \gg c$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G\rho, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \rightarrow 0. \quad (18.1.5)$$

Корректная постановка задачи в ньютоновской теории заключается в следующем: задаемся в начальный момент плотностью  $\rho$  и обобщенным хаббловским линейным [Нарликар (1963)] полем скоростей (которое, как увидим далее, обеспечит нужные свойства решения):

$$u_i = H_{ik}(t_0) x_k. \quad (18.1.6)$$

Эта формула допускает, наряду с деформацией, наличие вращения при  $H_{ik} \neq H_{ki}$ . Зададимся также и уравнением \*) эллипсоида  $A_{ik}(t_0)x_i x_k = 1$ , ограничивающего область, заполненную веществом (внутри), от пустоты.

Выбор формы области в виде эллипсоида обеспечивает квадратичный вид потенциала  $\Phi$ , что приводит к линейной зависимости ускорения от координат:

$$\dot{x}_i = -\Phi_{ik} x_k. \quad (18.1.7)$$

Отсюда следует, что зависимость скорости от координат остается с течением времени линейной: коэффициенты тензора  $H_{ik}$  зависят от времени, но не от координат. Уравнение для  $H_{ik}$  имеет вид

$$\dot{H}_{ik} = -H_{in} H_{nk} - \Phi_{ik}. \quad (18.1.8)$$

В свою очередь линейная зависимость скорости обеспечивает сохранение с течением времени однородности, поскольку  $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\operatorname{div} \mathbf{u} = -H_{ii}$  не зависит от координат (по индексу  $i$  произведено сум-

\*) Удобно записать уравнение эллипсоида в таком виде с учетом того, что оси эллипсоида с течением времени могут отклониться от координатных осей.

мирование). Кроме того, линейная зависимость скорости от координат приводит к тому, что поверхность, ограничивающая вещество, все время остается эллипсоидальной, хотя коэффициенты  $A_{ik}$  меняются с течением времени:

$$\dot{A}_{ik} = -H_{li}A_{lk} - H_{mk}A_{im}. \quad (18.1.9)$$

Следует подчеркнуть, что меняется не только ориентация осей в пространстве, но и форма эллипсоида, характеризующаяся отношением его полуосей. Так, в частном случае, когда в начальный момент вещество покоится, через некоторое время плотность обратится в бесконечность за счет того, что обратится в нуль полуось, которая была наименьшей в начальный момент; две другие полуоси, уменьшаясь, останутся еще конечными, в этот момент эллипсоид вырождается в плоскую фигуру. С другой стороны, предположим, что в начальный момент вещество заполняло шар, так что тензор  $\varphi_{ik}$  был единичным, т. е. изотропным,  $\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi G \rho}{3} r^2$ . Пусть, однако, начальное распределение скоростей анизотропно, т. е. тензор  $H_{ik}$  не единичен. Тогда с течением времени шар, деформируясь, превратится в эллипсоид, а значит, начальная изотропия  $\varphi_{ik}$ , естественно, нарушится.

Система уравнений  $\dot{H} = \dot{H}(H, \varphi)$ ,  $\dot{A} = \dot{A}(A, H)$  становится замкнутой заданием зависимости  $\varphi_{ik}$  от  $A_{ik}$  и  $\rho$ , которая дается теорией потенциала [см. Сретенский (1946)]. Эта зависимость выражается, как известно, эллиптическими интегралами, при этом  $\varphi_{ik}$  симметрична и положительно определена.

Мы не будем разбирать все свойства решения задачи, отсылая интересующихся к работе Зельдовича (1964б). Остановимся, однако, на случае, который интересен с точки зрения приложений к космологической задаче получения однородного анизотропного решения.

Именно рассмотрим сначала случай, когда вращение отсутствует, т. е. тензор  $H_{ik}$  симметричен, главные его оси совпадают с осями эллипсоида \*). Кроме того, ограничимся сначала случаем осевой симметрии  $a=b$  (эллипсоид вращения) и потребуем, чтобы в ходе расширения при очень больших размерах (соответственно  $\rho \rightarrow 0$ ) форма эллипсоида приближалась к форме шара, т. е. наступала «изотропизация» и скорость расширения на бесконечности стремилась к нулю (случай критической плотности). Проще всего рассмотреть не задачу об анизотропном расширении, а обратную задачу о сжатии, а затем обратить время.

Пусть имеется большой шар, слабо деформированный в эллипсоид вращения. Возможны два случая:  $a=b>c$  — сплюснутый, как

\*) Если вращение отсутствует в начальный момент, т. е.  $H_{ik} = H_{ki}$ , то из (18.1.8) следует, что это свойство сохранится и в дальнейшем.

репа, эллипсоид или  $a=b<c$  — вытянутый, как огурец. Вначале в обоих случаях  $|a-c|\ll a$ .

Рассмотрим первый случай,  $a=b>c$ . Как отмечено выше, ускорение по более короткой оси больше,  $\varphi_{xx}=\varphi_{yy}<\varphi_{zz}$ . Следовательно, с течением времени сплюснутость будет возрастать (рис. 53) и тело превратится в некоторый момент  $t_0$  в плоский блин,  $c=0$ . Объемная плотность вещества  $\rho$  в этот момент обращается в бесконечность. Гравитационная энергия блина (отрицательная) конечна. Конечным также является и гравитационное поле в любой точке, несмотря на  $\rho \rightarrow \infty$ . Отсюда видно, что и скорость остается конечной.

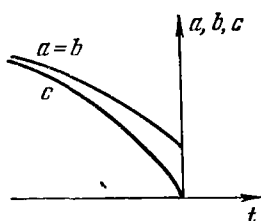


Рис. 53. Сжатие в диск сплюснутого эллипсоида. На графике показано изменение со временем величин  $a$ ,  $b$  и  $c$ ,  $a=b>c$ .

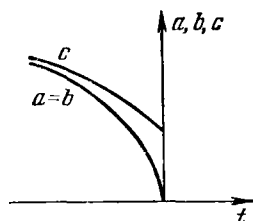


Рис. 54. Сжатие в нить вытянутого эллипсоида. На графике изображено изменение со временем величин  $a$ ,  $b$  и  $c$ ,  $a=b<c$ .

Следовательно, асимптотический при  $\rho \rightarrow \infty$  закон изменения величин  $c$  и  $\rho$  с течением времени есть

$$c \sim t_0 - t, \quad \rho \sim \frac{1}{t_0 - t}. \quad (18.1.10)$$

Во втором случае  $a=b<c$  и  $\varphi_{xx}=\varphi_{yy}>\varphi_{zz}$ . Эллипсоид с течением времени становится все более узким (рис. 54), и при некотором  $t=t_0$  превращается в отрезок нити,  $a=b=0$ ,  $c$  конечно. Поле вблизи длинной нити возрастает неограниченно, как  $1/r$  (расстояние от нити), следовательно, скорость в ньютоновской теории стремится к бесконечности:

$$(\dot{a})^2 \sim \ln \left( \frac{a_0}{a} \right)^2, \quad (18.1.11)$$

где  $a_0$  — величина порядка  $c(t_0)$ .

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда скорость сжатия различна по всем трем осям. Из предыдущего изложения ясен характер этого решения. Ускорение по самой короткой оси будет наибольшим, и тело превратится в некоторый момент  $t_0$  в плоский эллипс,  $c=0$ ,  $a \neq b$  ( $a$  не круг, как было, когда  $a=b$ ). Асимптотический закон (18.1.10), очевидно, будет справедлив и теперь.

Таким образом, случай стягивания в нить в общей ньютоновской задаче является вырожденным, он требует одновременного обращения в нуль двух величин ( $a$  и  $b$ ).

Наличие вращения при обобщенном хаббловском распределении скорости, т. е. случай, когда  $H_{ik} \neq H_{ki}$ , качественно не изменит результат и приведет лишь к тому, что оси эллипсоида будут поворачиваться в пространстве. Бесконечная плотность достигается за счет сжатия вдоль оси вращения.

Вернемся к случаю  $H_{ik} = H_{ki}$ . Теперь остается обратить время (т. е. рассматривать расширение), увеличить неограниченно (добавляя новые слои вещества) размеры эллипсоида в фиксированный момент при фиксированной плотности вещества, и мы получим решение ньютоновской космологической задачи.

Величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  будут (вследствие однородности) характеризовать изменение расстояний между любыми парами точек соответственно по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В силу сказанного в начале параграфа переход от конечного эллипсоида к неограниченному распределению никак не изменит зависимости  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $\rho$  от времени.

Итак, мы получили однородную анизотропную модель в ньютоновской теории. Анализ более сложных АО моделей в ньютоновской теории см. Шикин (1970).

## § 2. Гравитационный парадокс ньютоновской теории

Можно ли было сразу решить задачу для неограниченного распределения, пользуясь уравнениями движения и уравнением Пуассона  $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ , а не рассматривать предварительно задачу об эллипсоидах? Остановимся в связи с этим на некоторых принципиальных вопросах. Прежде всего заметим, что потенциал  $\phi$  и вектор гравитационного поля  $\text{grad } \phi$  являются ненаблюдаемыми величинами.

Наблюдаемыми величинами являются вторые производные  $\Phi_{ik} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_k}$ , от которых зависит относительное ускорение соседних частиц. На  $\Phi_{ik}$  наложено только одно условие (уравнение Пуассона). Следовательно, остается пять степеней свободы (имеем в виду  $\Phi_{ik} = \Phi_{ki}$ ). Таким образом, уравнений механики и уравнения Пуассона недостаточно для решения космологической задачи! Именно этот произвол в выборе  $\Phi_{ik}$  в ньютоновской теории в случае бесконечного однородного вещества и следовало бы назвать гравитационным парадоксом. Обычно гравитационным парадоксом называют расходимости в  $\phi$  или  $\text{grad } \phi$  при бесконечных распределениях вещества. Однако, поскольку  $\phi$  и  $\text{grad } \phi$  ненаблюдаемы, тот факт, что  $|\phi| \rightarrow \infty$ ,  $|\text{grad } \phi| \rightarrow \infty$ , трудностей не вызывает\*), и называть это парадоксом не следует.

\*) В этом смысле высказывания Ландау и Лифшица (1973) о трудностях ньютоновской теории в бесконечном пространстве представляются недостаточно корректными.

Многие авторы рассматривали вопрос об устранении неопределенности  $\varphi_{ik}$  в ньютоновской космологии. Нарликар (1963), например, предлагал потребовать, чтобы величины  $\varphi_{ik}$  были изотропными при анизотропии  $H_{ik}$ . Второй способ заключается в том, чтобы предварительно рассмотреть конечное тело, а затем сделать предельный переход к бесконечности. Так мы поступили в предыдущем параграфе, взяв в качестве конечного тела эллипсоид.

Однако ясно, что любой способ выбора дополнительных условий для  $\varphi_{ik}$  является выходом за рамки собственно ньютоновской теории.

Очевидно, эта неоднозначность ньютоновской теории получается именно в результате рассмотрения бесконечного пространства, заполненного веществом. В задаче с плотностью, достаточно быстро спадающей на бесконечности, где можно поставить условие  $\varphi = 0$  на бесконечности, это условие вместе с уравнением Пуассона полностью определяет потенциал.

Зельманов (1959a) предлагает в качестве дополнительных условий для устранения неоднозначности брать условия, следующие из аналогичной задачи в релятивистской космологии. Очевидно, при этом предполагается уже известным решение релятивистской задачи. Тем не менее такой подход может оказаться полезным для рассмотрения, например, локальных возмущений в той или иной модели, так как позволит применять несравненно более простой аппарат ньютоновской теории. Мы еще вернемся к этому вопросу после рассмотрения релятивистской задачи.

В заключение еще раз подчеркнем, что ньютоновская теория не дает замкнутого решения космологической задачи. Полностью в замкнутом виде задача может быть решена лишь в ОТО.

### § 3. Простейшая релятивистская модель; «вакуумное» решение вблизи сингулярности

\* Мы начнем с рассмотрения анизотропного однородного решения без вращения с евклидовым сопутствующим пространством. Очевидно, в этом случае все точки трехмерного пространства равноправны, т. е. решение действительно однородно, но расширение в разных направлениях может происходить с разной скоростью.

Метрика такой модели может быть записана в виде (скорость света положена равной единице)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx_1^2 - b^2(t) dx_2^2 - c^2(t) dx_3^2. \quad (18.3.1)$$

Функции  $a$ ,  $b$ ,  $c$  зависят только от времени. Если эти функции не все одинаковы, то расширение анизотропно. Уравнения Эйнштейна

могут быть записаны в таком виде:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) = -8\pi G \left( T_1^1 - \frac{1}{2} T \right), \quad (18.3.2)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b} \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} \right) = -8\pi G \left( T_2^2 - \frac{1}{2} T \right), \quad (18.3.3)$$

$$\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c} \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) = -8\pi G \left( T_3^3 - \frac{1}{2} T \right), \quad (18.3.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = -8\pi G \left( T_0^0 - \frac{1}{2} T \right). \quad (18.3.5)$$

Подчеркнем, что в левые части уравнений входят только величины  $\frac{\dot{a}}{a}$  и  $\frac{\ddot{a}}{a}$ , но не сами величины  $a, b, c$ . Это связано с тем, что сопутствующее трехмерное пространство плоское и его кривизна (выражающаяся через  $a, b, c$ ) равна нулю и в уравнениях отсутствует. Проведем анализ этих уравнений.

Предположим, что в некоторый момент члены в правых частях уравнений (18.3.2) — (18.3.5) много меньше, чем слагаемые в левых частях. Тогда мы можем рассматривать эти уравнения без правых частей, т. е. решение для пустого пространства. Такое решение получено Казнером (1921):

$$a = a_0 t^{p_1}, \quad b = b_0 t^{p_2}, \quad c = c_0 t^{p_3}, \quad (18.3.6)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (18.3.7)$$

Соотношение (18.3.7) оставляет из трех величин  $p_1, p_2, p_3$  только одну произвольную, являющуюся свободным параметром, и величины  $p_1, p_2, p_3$  могут быть выражены через этот параметр (обозначим его  $p, 0 < p \leq 1$ ):

$$p_1 = -\frac{p}{p^2 + p + 1}, \quad p_2 = \frac{p(p+1)}{p^2 + p + 1}, \quad p_3 = \frac{p+1}{p^2 + p + 1}. \quad (18.3.8)$$

При этом  $-\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0$ ;  $0 \leq p_2 \leq \frac{2}{3}$ ;  $\frac{2}{3} \leq p_3 \leq 1$ . В решении Казнера система отсчета расширяется по двум направлениям ( $x_2, x_3$ ) и сжимается по третьему ( $x_1$ ). Единственным исключением является вырожденный случай  $p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$ . Однако он соответствует плоскому 4-мерному пространству-времени  $R_{iklm} = 0$ . Преобразованием координат метрика (18.3.1) в этом случае может быть приведена в метрике Минковского. В случае общего казнеровского решения, конечно,  $R_{iklm} \neq 0$ , хотя  $R_{ik} = 0$ . Заметим, что «вакуумное» решение Казнера не содержит изотропного решения  $p_1 = p_2 = p_3$ . Объем элемента сопутствующего пространства в решении Казнера меняется, как  $V \sim t$ .

Теперь можно найти область применимости полученного решения. Сравним, как меняются члены в правых частях уравнений (18.3.2) — (18.3.5) при движении по времени к сингулярности,  $t \rightarrow 0$ , и к бесконечности,  $t \rightarrow \infty$ . В левые части этих уравнений входят величины вида  $\frac{\ddot{a}}{a}$ ,  $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$  и т. п., имеющие порядок  $t^{-2}$ . Пусть тензор энергии-импульса является гидродинамическим и уравнение состояния  $P = \beta \varepsilon$ . Вещество покоится относительно системы отсчета. Тогда величины, стоящие в правых частях уравнений, пропорциональны  $T_i^k \sim V^{-(1+\beta)} \sim t^{-(1+\beta)}$ . Мы видим, что для  $0 \leq \beta < 1$  показатель степени при  $t$  для правых частей уравнений (18.3.2) — (18.3.5) меньше по модулю, чем 2, т. е. меньше, чем для левых частей уравнений. Значит, при продвижении к сингулярности,  $t \rightarrow 0$ , правой частью можно всегда пренебречь по сравнению с левой и решение асимптотически не зависит от наличия вещества, что подчеркивают Лифшиц и Халатников (1963а, б). Эту стадию можно назвать «вакуумной».

При продвижении к  $t \rightarrow \infty$  члены, описывающие материю, уменьшаются медленнее, чем  $1/t^2$ , и наступает момент, когда этими членами нельзя пренебречь. Кончается период «вакуумного» решения. Подробнее этот поздний период расширения мы рассмотрим в следующей главе.

#### § 4. Сравнение ньютоновской и релятивистской задач

Для простейшего случая  $P=0$  точное решение уравнений (18.3.2) — (18.3.5) было получено Шюкингом и Гекманом (1958). Мы рассмотрим прежде всего это решение с целью сравнить его с аналогичной задачей в ньютоновской теории (см. § 1). Кроме того, как мы увидим далее, это решение содержит некоторые основные особенности решений более сложных задач. Решение Шюкинга — Гекмана записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 t^{p_1} (t + t_0)^{2/3 - p_1}, \\ b &= b_0 t^{p_2} (t + t_0)^{2/3 - p_2}, \\ c &= c_0 t^{p_3} (t + t_0)^{2/3 - p_3}, \end{aligned} \right\} \quad (18.4.1)$$

$$\rho = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t(t + t_0)}; \quad (18.4.2)$$

для  $p_1, p_2, p_3$  справедливы соотношения (18.3.7) и (18.3.8). В этом решении вакуумная стадия имеет место при  $t \ll t_0$ . При  $t \gg t_0$  решение изотропизуется и переходит в решение Фридмана.

Сравним релятивистское решение с приведенным выше, в § 1, решением ньютоновской задачи. Для этого будем рассматривать, как и там, не расширение, а сжатие, т. е. обратим время. Как и в



ньютоневском решении, возможны два качественных разных случая. Первый случай связан со специальным, единственным выбором  $p_i$ :  $p_1=0$ ,  $p_2=0$ ,  $p_3=1$ ; зависимость  $a=b$  и  $c$  от времени полностью аналогична в пределе  $t \rightarrow 0$  случаю сплюснутого эллипсоида вращения ньютоновской задачи. Если же  $p_1 \neq 0$ , поведение решения вблизи особенности приобретает совсем другой характер (рис. 55). При больших  $|t|$  имеем  $\ddot{a} < 0$ ,  $\ddot{b} < 0$ ,  $\ddot{c} < 0$  аналогично ньютоновской задаче. Но при некотором  $t$  изменяется знак относительного ускорения по оси  $x_1$  и  $\ddot{a} > 0$ . В момент  $t = \frac{3}{2} |p_1| t_0$  меняется и знак относительной скорости по этой оси — сжатие меняется на растяжение, наступает вакуумная стадия. В пределе при  $t \rightarrow \infty$  расстояние между соседними частицами по оси  $x_1$  растет неограниченно.

Указанные особенности решение имеет при любых допустимых значениях  $p_1$ , за исключением указанного выше случая  $p_1=0$ . Следовательно, в релятивистской задаче, изучаемой здесь, сжатие в нить является общим, а в блин — исключительным случаем. Таким образом, релятивистское решение с вакуумной стадией качественно отличается от решения ньютоновской задачи для эллипсоида. Локальные свойства релятивистского решения не получаются путем ньютоновского рассмотрения задачи, как это было для изотропного однородного случая.

Растяжение по одной оси и сжатие по двум другим на вакуумной стадии (при рассмотрении сжатия вещества) аналогично приливному эффекту во внешнем поле тяготеющего тела. Например, водная оболочка Земли испытывает такие относительные ускорения в поле тяготения Луны. Она вытягивается вдоль линии Земля — Луна и сжимается в перпендикулярных направлениях.

Вернемся к вопросу о причинах несоответствия ньютоновских и релятивистских космологических решений. В рамках ньютоновской механики все линейные размеры, фигурирующие в задаче, можно менять, сохраняя подобие, без изменения локальных свойств решения, т. е. без изменения зависимости от времени величин  $\rho(t)$ ,  $H_{ik}(t)$ ,  $\Phi_{ik}(t)$ .

Почему же получающиеся закономерности не согласуются с релятивистскими космологическими решениями?

В релятивистской теории играет роль скорость света. Точное релятивистское решение задачи о движении конечного объема, заполненного веществом, зависит не только от  $\rho$ ,  $H_{ik}$ ,  $\Phi_{ik}$ , но и от безразмерных критериев вида  $G\rho r^2/c^2$  и  $H_{ik} r/c$ , где  $r$  — характерный размер.

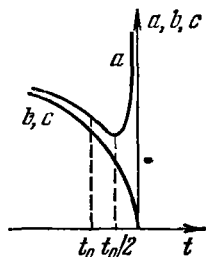


Рис. 55. Сжатие однородного анизотропного вещества в релятивистской задаче. На графике изображено изменение со временем величин  $a, b, c$  для случая  $p_1 = -1/3$ .

Ньютоновские решения являются предельной формой точных релятивистских решений в пределе при стремящихся к нулю критериях, указанных выше. Однако космологические решения должны осуществляться в противоположном предельном случае, когда критерии стремятся к бесконечности. Поэтому эти решения не совпадают с ньютоновскими.

Особенность задачи заключается в том, что в специальном случае симметрии задачи (соответствующей изотропному решению) релятивистские критерии выпадают из формул, относящихся к локальным величинам. Однако этот факт не обобщается на эллипсоидальные решения. Различие между сферическим и эллипсоидальным случаями проявляется, в частности, при рассмотрении гравитационного излучения.

В общей теории относительности при движении сферического слоя вещества поле снаружи не изменяется, поле внутри равно нулю и также не меняется. При движении эллипсоидального слоя квадрупольный момент распределенной массы изменяется, следовательно, должно происходить излучение гравитационной волны.

По-видимому, и поле внутри движущейся эллипсоидальной полый оболочки (равное нулю в ньютоновском приближении) в общей теории относительности отлично от нуля. Происходит нечто вроде проникновения гравитационной волны внутрь полости, хотя строго о волне нельзя говорить на расстояниях меньше  $ct$ , где  $t$  — характерное время движения, и лучше говорить о переменном гравитационном поле.

Рассмотрим тело, для которого в начальном состоянии релятивистские критерии малы. Если это тело сжимается, то плотность и скорость движения нарастают, и поэтому на последних стадиях движение в теле конечной массы может приобрести черты, характерные для анизотропного космологического решения. При этом переменное гравитационное поле от движения внешних оболочек, имеющее «приливной» характер (т. е. растягивающее вещество в одном направлении и сжимающее в двух других направлениях), будет определять динамику движения внутренних слоев.

Качественное отличие первого (вырожденного) случая  $p_1=0$ , когда релятивистское решение аналогично ньютоновскому, от второго (общего) случая  $p_1 \neq 0$ , когда эти решения не похожи, состоит в том, что в первом случае в ньютоновской задаче гравитационное поле и скорость сжатия вблизи  $\rho=\infty$  остаются конечными, во втором случае они неограниченно нарастают.

## МАТЕРИЯ В АНИЗОТРОПНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

## § 1. Изотропизация решения с паскалевским тензором энергии-импульса

Рассмотрим теперь сравнительно поздние стадии расширения анизотропной модели, когда в уравнениях тяготения уже нельзя пренебречь членами в правой части, описывающими тяготение материи, и решение уже не является «вакуумным». По-прежнему считаем материю покоящейся относительно системы отсчета.

Время окончания вакуумного решения при любом гидродинамическом уравнении состояния материи  $P = \beta \epsilon$  легко определить из указанных в § 3 гл. 18 соображений. Этот момент наступает, когда члены в правой части уравнений Эйнштейна сравниваются с членами в левой части. Члены в левой части имеют порядок  $\frac{\ddot{a}}{a} \approx \frac{1}{t^2}$ , члены в правой части  $4\pi G \rho \approx 4\pi G \frac{1}{V_{1+\beta}} = 4\pi G \frac{A}{t^{1+\beta}}$ , где  $A$  — произвольная константа — параметр задачи, описывающий количество материи в модели,  $\beta$  — коэффициент в выражении  $P = \beta \epsilon$ . Приравнявая эти члены, находим момент  $\theta_1$  окончания вакуумного решения:

$$\theta_1 = \left( \frac{1}{GA} \right)^{1/(1-\beta)}. \quad (19.1.1)$$

Конечно, утверждение, что все члены в левой части уравнений имеют порядок не меньше чем  $1/t^2$ , справедливо только в том случае, если показатель  $p_1$  (а значит, и  $p_2$ ) не специально мал по модулю. В противном случае ответ будет зависеть и от  $p_1$ . В случае, когда  $|p_1| \ll 1$ , старшие члены в левых частях уравнений (18.3.2) и (18.3.3) будут иметь порядок  $|p_1|/t^2$ , и мы находим момент  $\theta_2$  начала влияния правых частей в системе уравнений (18.3.2) — (18.3.5):

$$\theta_2 \approx \left( \frac{|p_1|}{GA} \right)^{1/(1-\beta)}. \quad (19.1.2)$$

Эта формула обобщает (19.1.1) на случай малых  $|p_1| \ll 1$ .

Как можно показать, в случае не малых  $|p_1|$  сразу после момента  $\theta_1$  решение быстро приближается к фридмановскому изотропному

решению. Если же  $|p_1| \ll 1$ , то вслед за окончанием вакуумной стадии со сжатием вдоль первой оси и сменой его расширением наступает длительная стадия медленного расширения по двум осям и быстрого расширения по третьей оси, т. е. решение еще сильно анизотропно. К моменту  $\theta_1$ , даваемому формулой (19.1.1), темп расширения по всем трем осям выравнивается и наступает изотропизация. Таким образом,  $\theta_1$  есть всегда для любых  $p_1$  время «изотропизации» анизотропного решения.

Физическая причина сравнительно слабого влияния тяготения материи на динамику расширения в случае  $|p_1| \ll 1$  указана в последнем абзаце предыдущего параграфа.

Очевидно, для приложений наибольший интерес представляет случай горячей модели, когда уравнение состояния есть  $P = \varepsilon/3$ . Точные решения этой задачи были получены Компанейцем и Черновым (1964), Дорошкевичем (1965) и Рубаном (частное сообщение). Мы не будем приводить здесь точные решения, а укажем удобную приближенную запись, хорошо аппроксимирующую решение на всем интервале изменения времени  $0 \leq t < \infty$  и дающую точные асимптотические выражения при  $t \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow \infty$ . Эта приближенная форма записывается в следующем виде:

$$a_i = a_{0i} t^{p_i} (t + t_0)^{1/3 - p_i}, \quad (19.1.3)$$

$$\rho = \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^{4/3} (t + t_0)^{2/3}}, \quad (19.1.4)$$

где  $a_i$  — масштабные коэффициенты вдоль трех осей, а  $p_i$  удовлетворяют соотношениям (18.3.7). При  $t \rightarrow 0$  получаем решение Казнера, как это и должно быть. При  $t \rightarrow \infty$  решение переходит во фридмановское. Время изотропизации  $\theta_1 \approx t_0$ . Это время удобно принять за произвольный параметр задачи.

## § 2. Влияние пространственной анизотропии тензора энергии-импульса на космологическое решение

До сих пор мы рассматривали в космологических задачах лишь гидродинамический тензор энергии-импульса  $(T_{ik})_{\text{гидр}} = (\varepsilon + P) u_i u_k + g_{ik} P$ . Этот тензор пространственно изотропен; для давления выполняется закон Паскаля. Однако, как известно, это условие выполнено далеко не всегда. Например, для однородного магнитного поля, направленного по оси  $x^3$ , тензор энергии-импульса может быть записан в виде

$$-T_1^1 = -T_2^2 = T_3^3 = \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi}, \quad T_0^0 = \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi}, \quad (19.2.1)$$

где  $\mathcal{H}$  — напряженность поля.

Этот тензор неизотропен. По оси  $x^3$  имеется натяжение, «отрицательное» давление, по осям  $x^1$  и  $x^2$  — положительное давление. Другим примером может служить направленный поток релятивистских частиц (например, фотонов или нейтрино), движущихся без столкновений вдоль оси  $x^3$  поровну в обоих направлениях этой оси. Для такого потока тензор энергии-импульса записывается в виде

$$T_3^3 = -\varepsilon, \quad T_0^0 = \varepsilon, \quad \text{остальные} \quad T_k^i = 0. \quad (19.2.2)$$

Здесь положительное давление, равное плотности энергии, имеется лишь в направлении оси  $x^3$ . Вдоль двух других направлений давление равно нулю.

Подчеркнем, что в обоих упомянутых случаях нет направленного потока энергии относительно системы отсчета, все  $T_0^i = 0$ .

Мы увидим далее, что при рассмотрении задач анизотропной космологии возникновение пространственной анизотропии тензора энергии-импульса неизбежно. В частности, рассмотренные выше примеры (19.2.1) и (19.2.2) не искусственны, тензоры такого вида действительно встретятся при дальнейшем изложении. В этом параграфе мы не будем касаться случаев направленных потоков энергии  $T_0^i \neq 0$ , хотя эти случаи важны для космологии, однако они требуют специального подхода и будут рассмотрены далее. В данном параграфе рассматривается влияние пространственной анизотропии на расширение, на ускорение вещества в разных направлениях. Сразу же подчеркнем, что вследствие однородности никакого градиента давления нет, нет и никаких сил, с ним связанных. Влияние анизотропии давления может быть только гравитационным.

Как известно, в ОТО гравитационное поле зависит и от давления (см. § 1 гл. 2 данной книги и более подробно § 5 и § 6 гл. 1 ТТ и ЭЗ). Изотропное положительное давление замедляет расширение. Анизотропия давления должна создавать анизотропию ускорений деформации вещества. Из вида уравнений (18.3.2) — (18.3.5) видно, как влияет анизотропия  $T_k^i$  на относительное ускорение. В самом деле, рассмотрим два решения. Пусть для обоих решений (обозначим их 1 и 2) в некоторый момент времени все первые производные по соответствующим осям равны

$$\left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)_1 = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)_2, \left( \frac{\dot{b}}{b} \right)_1 = \left( \frac{\dot{b}}{b} \right)_2, \left( \frac{\dot{c}}{c} \right)_1 = \left( \frac{\dot{c}}{c} \right)_2 \right]$$

и для плотности энергии и следа тензора имеем  $(T_0^0)_1 = (T_0^0)_2$ ,  $(T)_1 = (T)_2$ . Пусть, далее, в первом решении тензор  $T_{\alpha\beta}$  изотропен:  $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$ , а во втором решении тензор  $T_{\alpha\beta}$  анизотропен. Как повлияет это на ускорения?

Из уравнений (18.3.2) — (18.3.5) находим

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)_2 - \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)_1 &= -8\pi G [(T^1_1)_2 - (T^1_1)_1], \\ \left(\frac{\ddot{b}}{b}\right)_2 - \left(\frac{\ddot{b}}{b}\right)_1 &= -8\pi G [(T^2_2)_2 - (T^2_2)_1], \\ \left(\frac{\ddot{c}}{c}\right)_2 - \left(\frac{\ddot{c}}{c}\right)_1 &= -8\pi G [(T^3_3)_2 - (T^3_3)_1]. \end{aligned} \right\} \quad (19.2.3)$$

Таким образом, возникающая анизотропия относительных ускорений пропорциональна анизотропии  $T^{\alpha}_{\alpha}$  и противоположна по знаку. Очевидно, заметное влияние тензора  $T_{ik}$  на расширение модели возможно лишь в том случае, когда в правой части уравнений (18.3.2) — (18.3.5) есть члены, сравнимые по порядку величины с членами в левой части, так же как это было для изотропного  $T_{ik}$  в анизотропных моделях. Однако анизотропный тензор  $T_{ik}$ , вообще говоря, не может обеспечить изотропизацию решения (если нет других факторов изотропизации, см. об этом далее).

Для иллюстрации сказанного рассмотрим анизотропные космологические решения с приведенными выше тензорами энергии-импульса (19.2.1) и (19.2.2). Первое решение с однородным магнитным полем и метрикой (18.3.1) рассмотрено, например, Розеном (1964).

Пусть поле направлено вдоль оси  $z$  ( $W = \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi}$ ). Решение может быть записано в параметрическом виде:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 \xi^p (\xi + \xi^{-1}), \quad b = b_0 \xi^{1/p} (\xi + \xi^{-1}), \\ c &= c_0 (\xi + \xi^{-1})^{-1}, \\ dt &= \xi_0 \xi^{p + \frac{1}{p} - 1} (\xi + \xi^{-1}) d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (19.2.4)$$

где

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{\kappa W}}{2} \frac{ab}{a_0 b_0} = \text{const}, \quad 0 < p \leq 1, \quad 0 < \xi < \infty.$$

Вблизи сингулярности  $\xi \rightarrow 0$  решение имеет следующий асимптотический вид:

$$a = a'_0 t^{p_1}, \quad b = b'_0 t^{p_2}, \quad c = c'_0 t^{p_3}, \quad (19.2.5)$$

а  $p_1, p_2, p_3$  удовлетворяют соотношениям, аналогичным (18.3.8), причем

$$p_1 = \frac{p(p-1)}{p^2-p+1}, \quad p_2 = \frac{1-p}{p^2-p+1}, \quad p_3 = \frac{p}{p^2-p+1}, \quad 0 < p \leq 1. \quad (19.2.6)$$

Очевидно,  $p_1, p_2, p_3$  удовлетворяют соотношениям (18.3.7) и асимптотическое решение (19.2.5) является «вакуумным». Показа-

тель  $p_1$  всегда отрицателен,  $0 < -p_1 \leq \frac{1}{3}$ , а  $p_2$  и  $p_3$  положительны, причем возможно и  $p_2 > p_3$  и  $p_3 > p_2$ .

Так как решение «вакуумное» при  $t \rightarrow 0$ , то, следовательно, магнитное поле асимптотически при  $t \rightarrow 0$  не влияет на решение. Действительно, в этом случае энергия поля растет, как

$$\mathcal{H}^2 \sim t^{-2(p_1+p_2)}, \quad (19.2.7)$$

и вследствие (19.2.6) имеем  $2(p_1+p_2) \leq 2$ . Поэтому членами в правой части уравнений тяготения можно пренебречь по сравнению с членами в левой части, которые пропорциональны  $\sim 1/t^2$ .

Подчеркнем, что решение с магнитным полем не допускает решения с отрицательным  $p_3$  (вдоль поля). В этом случае энергия поля при  $t \rightarrow 0$  нарастала бы быстрее, чем  $1/t^2$ , и пренебрегать этими членами было бы нельзя.

Когда в ходе расширения в рассматриваемом решении кончается вакуумная стадия, влияние правой части на решение отличается от случая изотропного тензора  $T_{\alpha\beta}$ . Рассмотрим, в чем заключается это влияние. Сравним влияние  $(T_{\alpha\beta})_{\text{м.п}}$  магнитного поля с влиянием изотропного тензора  $(T_{\alpha\beta})_{\text{изотр}}$  с тем же  $\epsilon$  и с тем же средним давлением  $P = \frac{1}{3}\epsilon$  (т. е. с тем же  $T_1^1 + T_2^2 + T_3^3$ , а значит, и с тем же  $T = T_1^1 = 0$ ). Тензор  $(T_{\alpha\beta})_{\text{изотр}}$ , очевидно, описывает релятивистский газ. Подставив (19.2.1) и тензор релятивистского газа в уравнения (19.2.3), получим

$$\Delta \frac{\ddot{a}}{a} = \Delta \frac{\ddot{b}}{b} = 8\pi G \left( \frac{2}{3}\epsilon \right), \quad \Delta \frac{\ddot{c}}{c} = -8\pi G \left( \frac{4}{3}\epsilon \right). \quad (19.2.8)$$

Сильнее всего влияние анизотропии  $T_{\alpha\beta}$  на  $\frac{\ddot{c}}{c}$ , увеличивающее модуль отрицательной величины  $\frac{\ddot{c}}{c}$ . В результате замедленное расширение по оси  $x^3$  переходит в сжатие. По оси  $x^1$ , как и в изотропном случае, сжатие меняется на расширение. И в целом при  $t \rightarrow \infty$  решение снова становится «вакуумным» и имеет вид (19.2.5), только в (19.2.6) надо сделать замену  $p \rightarrow p+1$ , а  $p_2$  и  $p_3$  поменять местами.

Разумеется, рассмотренная задача является модельной, и при  $t \rightarrow \infty$  решение, во всяком случае, неприменимо для описания реальной Вселенной. Однако, как мы покажем в § 3, на некотором интервале времени решение, возможно, имеет отношение к анализу процессов в начале космологического расширения.

Приведем теперь решение для релятивистских частиц, движущихся по оси  $x^3$  с  $T_{\alpha\beta} = \{-T_0^0 = T_3^3 = -\epsilon, T_1^1 = T_2^2 = 0\}$ :

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 \xi^{1/2-p}, & b &= b_0 \xi^{1/2+p}, & c &= c_0 \xi^{p^2-1/4} e^{\xi}, \\ dt &= t_0 \xi^{p^2-1/4} e^{\xi} d\xi, & \kappa e &= t_0^{-2} \xi^{-1/2-2p^2} e^{-2\xi}, \end{aligned} \right\} \quad (19.2.9)$$

где  $a_0, b_0, c_0, t_0 = \text{const}$ ,  $0 \leq p \leq 1/2$ ,  $\kappa$  — постоянная тяготения Эйнштейна.

При  $t \rightarrow 0$  решение асимптотически «вакуумное», с отрицательным показателем  $p_3$  по оси  $x^3$ . При  $t \rightarrow \infty$  решение вновь становится «почти вакуумным», но уже с расширением по оси  $x^3$  по закону  $c \sim t$  и с логарифмически медленным расширением по осям  $x^1$  и  $x^2$ . Качественный анализ влияния анизотропии  $T_{\alpha\beta}$  на решение в этом случае читатель проделает самостоятельно по аналогии с предыдущим.

### § 3. Космологические модели с однородным магнитным полем

До недавнего прошлого проблема спонтанного возникновения магнитного поля в галактиках встречалась с серьезными трудностями (см. § 7 гл. 14). В тот период появился целый ряд работ (как теоретических, так и основанных на обработке наблюдательных данных), в которых рассматривается изначальное магнитное поле, существовавшее до появления галактик, и усилением этого изначального магнитного поля пытались объяснить магнитное поле галактик.

В настоящее время теории генерации и последующего усиления магнитного поля, вероятно, позволяют объяснить наблюдаемые магнитные поля в галактиках. Таким образом, непосредственная причина введения первичного магнитного поля в теоретическую космологию отпала. Тем не менее, конечно, нет никаких доказательств отсутствия изначального слабого межгалактического поля с  $\mathcal{H} \approx \approx 10^{-7}$  гс или меньше для сегодняшнего момента. Более того, появляются работы [см., например, Рейнгардт и Тил (1970), Рейнгардт и Робертс (1972), Рейнгардт (1972)], основанные на обработке наблюдательных данных, в которых высказываются соображения в пользу существования такого поля.

Мы рассмотрим в настоящем параграфе космологические модели с однородным магнитным полем. Упомянем здесь некоторые работы по этой проблеме (список, разумеется, не полный): Брахмачари (1965), Хойл (1958), Розен (1964), Зельдович (1965б, 1969), Халатников (1965, 1967), Дорошкевич (1965), Торн (1967), Якобс (1969).

Важнейшие свойства такой модели заключаются в том, что магнитное поле существует, несмотря на отсутствие электрического тока где бы то ни было, что формально следует из однородности поля  $\text{rot } \mathbf{B} = 0^*$ ). Уравнения ОТО совместно с уравнениями Максвелла приводят к выполнению условия геометрической вмороженности поля (сохранения потока поля через контур, состоящий из данных пробных частиц, образующих систему отсчета, независимо от проводимости вещества или даже в отсутствие вещества).

\* ) Конечное тело при таком условии имеет ток на поверхности.



Зависящее от времени магнитное поле сопровождается появлением электрического поля, однако замороженность поля приводит к тому, что наблюдатель, движущийся вместе с веществом, естественно, никакого электрического поля в своей системе не обнаруживает (это и есть признак замороженности).

Выведем это свойство в ОТО для метрики (18.3.1).

Уравнения Максвелла записываются в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} F^{ik}) = 0, \quad (19.3.1)$$

так как ток отсутствует в силу однородности поля. Теперь предполагаем, что однородное магнитное поле направлено по оси  $x^3$ . Тогда частным решением написанного выше уравнения Максвелла будет

$$\mathcal{H}_{x^3} = \frac{\text{const}}{ab}, \quad \mathcal{E}_{x^3} = \mathcal{E}_{x^1} = \mathcal{E}_{x^2} = 0, \quad \mathcal{H}_{x^1} = \mathcal{H}_{x^2} = 0. \quad (19.3.2)$$

Таким образом, в сопутствующем пространстве магнитное поле не вызывает появления электрического. Силовые линии поля неподвижны относительно системы отсчета.

Другим независимым решением будет замороженное электрическое поле, направленное по любой из осей. Например, для электрического поля по оси  $x^3$

$$\mathcal{E}_{x^3} = \frac{\text{const}}{ab}, \quad \mathcal{E}_{x^1} = \mathcal{E}_{x^2} = 0, \quad \mathcal{H}_{x^1} = \mathcal{H}_{x^2} = \mathcal{H}_{x^3} = 0. \quad (19.3.3)$$

Формально все модели и выводы этого параграфа остаются в силе, если однородное магнитное поле заменить электрическим. Однако однородное метагалактическое электрическое поле должно вызывать появление электрического тока заряженных частиц и быстро затухать. В настоящее время нет никаких оснований предполагать наличие общего электрического поля (в отличие от предположений об общем магнитном поле). Поэтому модель с электрическим полем вряд ли имеет какое-либо отношение к реальности.

Вернемся к модели с магнитным полем и расширяющимся веществом. Заряженные частицы, движущиеся относительно вещества, отклоняются полем, но их энергия, измеренная наблюдателем там, где они в данный момент находятся, по-прежнему только уменьшается в ходе расширения.

Уравнения общей задачи о магнитной модели Вселенной получаются из уравнений (18.3.2) — (18.3.5), где в правую часть надо подставить тензор  $T_k^i$ , являющийся суммой тензора магнитного поля (19.2.1) и тензора энергии-импульса обычной материи, имеющего для релятивистского газа следующий вид:

$$(T_0^0)_{\text{вещ}} = \varepsilon, \quad (T_1^1)_{\text{вещ}} = (T_2^2)_{\text{вещ}} = (T_3^3)_{\text{вещ}} = -P = -\frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсылая за подробностями вычислений к работам Дорошкевича (1965) и Зельдовича (1969), приведем здесь качественные соображения и выводы. Так как мы уже знаем по отдельности анизотропные решения только с обычной материей (§ 1) и только с магнитным полем (§ 2), то нетрудно получить их комбинацию.

Прежде всего, как мы видели в § 2, магнитное поле не допускает решения, в котором при  $t \rightarrow 0$  имеется отрицательный показатель степени в зависимости масштабного фактора от времени вдоль направления поля. Это свойство сохраняется и в рассматриваемом комбинированном решении. Физический смысл этого свойства тот же, что и в § 2: если бы при  $t \rightarrow 0$  уменьшались оба масштабных фактора в направлении, ортогональном полю, то плотность энергии поля  $\varepsilon \sim \mathcal{H}^2$  стремилась бы к бесконечности быстрее, чем  $1/t^2$ , и тяготение, связанное с магнитным полем, изменило бы характер решения, переведя его на «вакуумное» с расширением при  $t \rightarrow 0$  вдоль одного из направлений, ортогональных полю.

Конец вакуумной стадии определяется сравнением одного из членов в правой части (18.3.2) — (18.3.5), т. е.  $(T_i^k)_{\text{поля}}$  или  $(T_i^k)_{\text{вещ}}$ , с  $1/t^2$ . Если первым сравнивается с  $1/t^2$  член  $(T_i^k)_{\text{вещ}}$ , связанный с обычным веществом, то это означает, что к концу вакуумной стадии плотность энергии магнитного поля меньше плотности энергии обычной материи и поле ни на какой стадии не оказывает влияния на динамику расширения. Решение совпадает с описанным в § 1.

Наконец, если первым сравнивается с  $1/t^2$  член  $(T_i^k)_{\text{поля}}$ , связанный с магнитным полем, то поле существенно влияет на расширение. Оно переводит решение с одной вакуумной асимптотики на другую (см. § 2). Лишь после того, как вступают в игру силы тяготения, связанные с материей, решение изотропизуется и приближается к фридмановскому.

Рассмотрим теперь более подробно процесс изотропизации решения [Зельдович (1969)], а именно рассмотрим стадию, когда решение почти изотропно и влияние анизотропии поля мало. Для количественных оценок рассмотрим осесимметричное решение

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) ((dx^1)^2 + (dy^2)^2) - b^2(t) (dx^3)^2 \quad (19.3.4)$$

(поле направлено по оси  $x^3$ ).

Обозначим  $\alpha = \dot{a}/a$ ,  $\beta = \dot{b}/b$ . Уравнения Эйнштейна имеют вид (принято  $8\pi G=1$ ,  $c=1$ )

$$\left. \begin{aligned} (a^2 b)^{-1} \frac{d}{dt} (a^2 b \alpha) &= \frac{\varepsilon}{3} + \omega, \quad \omega = \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi}, \\ (a^2 b)^{-1} \frac{d}{dt} (a^2 b \beta) &= \frac{\varepsilon}{3} - \omega, \quad \varepsilon = \text{const } (a^2 b)^{-1/2}, \\ &\omega = \text{const} \cdot a^{-4} \end{aligned} \right\} \quad (19.3.5)$$

или, если избавиться от  $a$  и  $b$ ,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} + \alpha(2\alpha + \beta) &= \frac{\varepsilon}{3} + \omega, \quad \dot{\beta} + \beta(2\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon}{3} - \omega, \\ \dot{\varepsilon} &= -\frac{4}{3}(2\alpha + \beta)\varepsilon, \quad \dot{\omega} = -4\alpha\omega. \end{aligned} \right\} \quad (19.3.6)$$

В этих обозначениях изотропное решение есть

$$\alpha = \beta = (2t)^{-1}, \quad \omega = 0, \quad \varepsilon = \frac{3}{4t^2}. \quad (19.3.7)$$

Выделим величину, характеризующую изотропное расширение:  $n = \frac{2\alpha + \beta}{3}$  (такими бы были  $\alpha$  и  $\beta$  при изотропном расширении). С другой стороны, выделим безразмерные величины, характеризующие анизотропию:  $r = \frac{\alpha - \beta}{n}$  и  $q = \frac{\omega}{\varepsilon}$ .

После этого точные уравнения приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} 3\dot{n} + 9n^2 &= \varepsilon(1 + q), \\ \dot{\varepsilon} &= -4n\varepsilon, \\ \dot{q} &= -\frac{4}{3}rnq, \\ r\dot{n} + n\dot{r} + 3n^2r &= 2q\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (19.3.8)$$

Кроме того, имеет место еще одно соотношение, являющееся интегралом выписанных выше уравнений:

$$(2\alpha + \beta)^2 - 2\alpha^2 - \beta^2 = \varepsilon + \omega$$

или, в обозначениях  $r$ ,  $n$ ,  $q$ ,

$$3n^2 \left( 1 - \frac{5}{54} r^2 \right) = \varepsilon(1 + q). \quad (19.3.9)$$

Это соотношение следует из условия, что рассматривается мир трехмерно плоский (в изотропном случае это условие превращается в  $\Omega=1$ ). Соотношение (19.3.9) является интегралом системы (19.3.8) и позволяет исключить одно из дифференциальных уравнений, например первое.

В принципе выписанная выше система уравнений (19.3.8) позволяет построить космологическое решение с любым наперед заданным магнитным полем и анизотропией расширения в данный момент и при данной плотности энергии  $\varepsilon$ .

Задавись  $\varepsilon$ ,  $q$ ,  $r$  в произвольный момент  $t_0$ , находим соответствующее  $n$  из последней формулы и далее интегрируем уравнения (19.3.8) в прошлое и в будущее. Единственное ограничение заключается в том, что рассматривается лишь РД-период ( $P = \varepsilon/3$ , т. е.

$z > 2 \cdot 10^4$ ,  $t > t_2 \approx 10^{12}$  сек, см. гл. 6, § 1). Теперь от задачи о плоском мире с анизотропным расширением и магнитным полем перейдем к специфическому случаю слабого поля и малой анизотропии,  $q < 1$ ,  $r < 1$ , и потребуем, чтобы эти условия выполнялись на протяжении всего интервала времени от некоторого момента  $t_1$  до  $t_2$ . За начало интервала  $t_1$  можно выбрать либо «планковское время»  $t_1 = 10^{-43}$  сек, либо момент закалки равновесия между нейтронами и протонами  $t_1 = 1$  сек (см. гл. 7). Выбор зависит от постановки задачи: требуем ли мы, чтобы мир на всем протяжении эволюции от «планковского момента» был максимально близок к решению Фридмана, был максимально упорядочен (в этом случае  $t_1 \approx 10^{-43}$  сек), или мы довольствуемся тем, что магнитное поле не влияет на предсказания теории относительно химического состава первичного вещества (в этом случае  $t_1 \approx 1$  сек).

Математически задача резко упрощается: плотность энергии  $\epsilon$  и общая скорость расширения  $n$  по условию мало отличаются от изотропных:  $n = 1/2t$ ,  $\epsilon = 3/4t^2$ . Подставим эти величины в уравнения (19.3.8), считая  $r$  и  $q$  малыми. Получим

$$\dot{r} = -\frac{r}{2t} + \frac{3q}{t}, \quad \dot{q} = -\frac{2}{3t}rq. \quad (19.3.10)$$

В отсутствие магнитного поля ( $q=0$ ) анизотропия расширения быстро убывает:  $r = r_0 \sqrt{t_0/t}$ . Магнитное поле «консервирует» анизотропию расширения подобно потокам нейтрино и гравитонов. Легко найти квазистационарное решение: очевидно, что при наличии магнитного поля  $r$  стремится не к нулю, а к тому значению, при котором  $\dot{r} = 0$ , т. е.  $r \rightarrow 6q$ .

Подставим это значение  $r$  во второе уравнение (19.3.10), получим

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{4}{t}q^2, \quad q(t) = \frac{q_1}{1 + 4q_1 \ln\left(\frac{t}{t_1}\right)}. \quad (19.3.11)$$

В итоге из (19.3.11) получаем неравенство  $q(t_2) < \left(4 \ln \frac{t_2}{t_1}\right)^{-1}$ ; таким образом,

$$\left. \begin{array}{ll} \text{для } t_1 = 10^{-43} \text{ сек,} & t_2 = 10^{12} \text{ сек} & q'(t_2) < 2 \cdot 10^{-3}, \\ \text{для } t_1 = 1 \text{ сек,} & t_2 = 10^{12} \text{ сек} & q''(t_2) < 10^{-2}. \end{array} \right\} \quad (19.3.12)$$

Отношение энергии магнитного поля к энергии  $\epsilon_{\text{рел}}$  реликтового излучения остается практически постоянным в ходе дальнейшей эволюции вплоть до настоящего времени. Поэтому из (19.3.12) и сегодняшнего значения  $\epsilon_{\text{рел}}$  получаем неравенства для сегодняшнего значения магнитного поля. Плотность энергии  $\epsilon_{\text{рел}} = 4 \times 10^{-13}$  эрг/сек; в двух вариантах  $q'$  и  $q''$  получим для магнитного поля  $\mathcal{H}' < 1,5 \cdot 10^{-7}$  гс и  $\mathcal{H}'' < 3 \cdot 10^{-7}$  гс.

Предполагаемое первичное (космологическое) магнитное поле существенно меньше — порядка  $10^{-9}$ — $10^{-10}$  гс. Такая оценка следует из величины магнитного поля галактик, которая порядка  $10^{-6}$  гс. Но плотность галактик в  $10^5$ — $10^6$  раз больше средней плотности Вселенной. В простейшем случае изотропного сжатия поле возрастает пропорционально  $\rho^{2/3}$ , значит, поле галактик (даже без учета усиления его дифференциальным вращением и динамо-механизмами, см. § 7 гл. 14) в  $10^3$ — $10^4$  раз больше первичного поля.

Итак, вывод заключается в том, что первичное космологическое магнитное поле, необходимое для объяснения магнитного поля галактик, «вписывается» в изотропную модель Фридмана, мало меняя все свойства модели на всем протяжении эволюции.

Легко убедиться также, что такое магнитное поле порядка  $10^{-9}$ — $10^{-10}$  гс вызывает достаточно малую анизотропию расширения: соответствующее  $q=5 \cdot 10^{-6}$ — $5 \cdot 10^{-8}$ . Следовательно, анизотропия расширения  $r \sim 3 \cdot 10^{-5}$ — $3 \cdot 10^{-7}$  в РД-стадии. Позже, когда  $\rho_{\text{вещ}} > \rho_{\text{изл}}$ , стационарное значение  $r$  уменьшается, так как по порядку величины

$$r = \frac{6\varepsilon_{\text{вещ}}}{\varepsilon_{\text{изл}} + c^2 \rho_{\text{вещ}}} = \frac{3\mathcal{H}^2}{4\pi(\varepsilon_{\text{изл}} + c\rho_{\text{вещ}})}.$$

Анизотропия температуры реликтового излучения удобно выражается через параметр  $r$ . В самом деле, пусть мир стал прозрачен в момент  $t_0$  и в этот момент температура равнялась  $T_0$ , излучение было изотропно. После этого получим: для лучей, распространяющихся вдоль осей  $x^1$ ,  $x^2$ ,

$$T' = T_0 \frac{a_0}{a} = T_0 e^{-\int \alpha dt};$$

вдоль оси  $x^3$

$$T'' = T_0 \frac{b_0}{b} = T_0 e^{-\int \beta dt}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T} &= \frac{T' - T''}{T'} = \frac{e^{-\int \alpha dt} - e^{-\int \beta dt}}{e^{-\int \alpha dt}} = 1 - e^{-\int (\alpha - \beta) dt} = \\ &= \int (\alpha - \beta) dt = \int r n dt = \int r \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \int r d \ln t. \end{aligned}$$

Анизотропия реликтового излучения (соответствующая полю  $10^{-9}$ — $10^{-10}$  гс в настоящее время) оказывается  $\frac{\Delta T}{T} < 10^{-6}$ , т. е. далеко за пределами современной точности наблюдений и меньше, чем возможная анизотропия от других причин.

Таким образом, гипотеза первичного магнитного поля не противоречит наблюдениям, так же как она не противоречит предполо-

жению о почти фридмановском выходе из сингулярности (т. е. предположению, что и при  $t=10^{-43}$  сек расширение практически фридмановское). Скептическое отношение к этой гипотезе и желание обойтись без первичного поля, желание объяснить поле галактик динамо-механизмом — все это связано с интуитивными, почти что эстетическими мотивами и с предвидением будущей теории сингулярности. Кажется невероятным, чтобы в этой будущей теории спонтанно появилось магнитное поле, нарушающее симметрию правого и левого. Впрочем, нужно помнить шаткость и субъективность таких эстетических критериев!

#### § 4. Возмущения в анизотропной однородной Вселенной

В предыдущем разделе были рассмотрены вопросы, связанные с флуктуациями в изотропной и однородной модели Фридмана. Однако если начальные стадии космологического расширения были не фридмановские, то, естественно, и законы роста флуктуаций были иными.

В этом параграфе рассматривается космологическая задача о росте возмущений плотности в расширяющейся материи, в среднем покоящейся относительно синхронной системы отсчета, а также изменение амплитуды гравитационных и акустических волн [Лифшиц, Халатников (1963а, б), Дорошкевич (1966), Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1971)].

В разделе о гравитационной неустойчивости фридмановского мира было подробно показано, что при джинсовской неустойчивости причиной роста возмущений плотности является самогравитация возмущений: более плотные комки материи обладают большими полями тяготения, что и вызывает их рост.

Рост возмущений в анизотропном мире носит совсем иной характер.

Цель данного параграфа показать, что рост возмущений плотности материи в анизотропной расширяющейся Вселенной на вакуумной стадии существует, но является кинематическим эффектом, обусловленным движением вещества в гравитационном поле, описываемом решением уравнений тяготения для пустого пространства, и найти законы роста возмущений плотности материи. Ясное понимание процесса роста флуктуаций позволяет продвинуться и в рассмотрении конечной, не малой неоднородности плотности в некоторых частных случаях.

Рассмотрение неоднородных возмущений (т. е. возмущений, зависящих от координат) в анизотропной однородной Вселенной представляет большой интерес.

Такое рассмотрение можно считать первым приближением к решению общей задачи о неанизотропной и неоднородной Вселенной. Нелинейность уравнений ОТО, сложность физических процессов и

математические трудности приводят к тому, что прямое решение общей задачи в настоящее время невозможно. Приходится приобретать сведения о характере решения, рассматривая частные случаи, среди которых почетную роль играют точные решения — как правило, вырожденные, например обладающие инвариантностью типа сферической симметрии, т. е. группой поворота, или пространственной однородностью, т. е. группой сдвига.

Слабовозмущенные точные решения образуют множество гораздо большей мощности (совпадающей с мощностью общего решения), так как возмущения снимают вырождение и не обладают инвариантностью точных решений. Вместе с тем пока возмущения малы, они удовлетворяют линейным уравнениям и после фурье-разложения по пространству приводят к обыкновенным дифференциальным уравнениям для фурье-амплитуд. Поэтому задачи о малых возмущениях соединяют математическую простоту и обозримость решений с большой общностью начальных условий.

Ниже будут рассмотрены малые возмущения плотности материи на фоне расширяющейся плоской анизотропной модели Вселенной. Физическая интерпретация результатов, показывающая, что рост возмущений есть кинематический эффект, может быть полезна при рассмотрении более сложных случаев, в частности задачи об эволюции возмущений на стадии конечной (не малой) неоднородности плотности и конечных возмущений скорости.

Рассмотрим анизотропную однородную модель с обычным веществом. Как уже неоднократно отмечалось, на ранней вакуумной стадии расширения анизотропного мира тяготение вещества не играет роли.

Дадим ньютоновское описание ситуации. Локально наблюдатель чувствует приливные силы, по сравнению с которыми гравитационное взаимодействие соседних объемов пренебрежимо мало. Элемент объема сопутствующей системы координат сжимается по одной оси и расширяется по двум другим осям, так как в общем невырожденном случае для показателей степени  $(p_1, p_2, p_3)$  масштабных факторов  $a \sim t^{p_1}$ ,  $b \sim t^{p_2}$ ,  $c \sim t^{p_3}$  вдоль трех осей имеем

$$-\frac{1}{3} < p_1 < 0 < p_2 < \frac{2}{3} < p_3 < 1. \quad (19.4.1)$$

Для удобства в дальнейшем обозначим  $p_1 = -\alpha$ ;  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$ . Рассмотрим сперва частицы, покоящиеся в сопутствующих координатах, т. е. с постоянными  $x^1 = \xi$ ,  $x^2 = \eta$ ,  $x^3 = \zeta$ . Их «лабораторные» координаты суть

$$x = a\xi, \quad y = b\eta, \quad z = c\zeta.$$

Возьмем пары частиц, расположенные по той или иной оси, например  $\xi_1, 0$ ,  $0$  и  $\xi_2, 0, 0$  или  $0, \eta_1, 0$  и  $0, \eta_2, 0$ .

Их относительное ускорение равно

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_{12}}{dt^2} &= p_1 (p_1 - 1) t^{-2} x_{12} = \alpha (\alpha + 1) t^{-2} x_{12} = \frac{\ddot{a}}{a} x_{12}, \\ \frac{d^2 y_{12}}{dt^2} &= -p_2 (1 - p_2) t^{-2} y_{12} = \frac{\ddot{b}}{b} y_{12}, \\ \frac{d^2 z_{12}}{dt^2} &= -p_3 (1 - p_3) t^{-2} z_{12} = \frac{\ddot{c}}{c} z_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (19.4.2)$$

В ньютоновской интерпретации такое относительное ускорение свидетельствует о действии гравитационного потенциала, удовлетворяющего условиям

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\ddot{a}}{a}, \quad \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = -\frac{\ddot{b}}{b}, \quad \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{\ddot{c}}{c}.$$

В общем случае, согласно (18.3.5), получим  $\Delta \varphi = \frac{4\pi G}{c^2} (\varepsilon + T_a^a)$ , в нерелятивистском веществе  $T_a^a \ll \varepsilon$ ,  $\frac{\varepsilon}{c^2} = \rho$ ,  $\Delta \varphi = 4\pi G \rho$ . На вакуумной стадии отдельные члены вида  $\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right| \gg \Delta \varphi$ , можно поэтому положить  $\Delta \varphi = 0$ . Поскольку  $\Delta \varphi = 0$ , что соответствует уравнению Ньютона для пустоты, локальный наблюдатель может считать, что силы тяготения не связаны с присутствующей материей, и в этом смысле их можно назвать приливными. С точки зрения релятивистской теории гравитационное поле в данной модели является свободным гравитационным полем типа гравитационной волны бесконечно большой длины; это поле не имеет своим источником вещество.

Приливные силы расталкивают покоящиеся в данной системе отсчета частицы по оси  $x$  (замедляя сжатие) и стягивают сопутствующие частицы по осям  $y$  и  $z$  (замедляя расширение). Частицы, движущиеся с произвольной скоростью, испытывают те же гравитационные силы, во всяком случае пока скорость их нерелятивистская.

Обратимся теперь к возмущениям в рассматриваемой модели. Рассматривается казнеровская вакуумная стадия, поскольку последующая стадия быстро переходит в тривиальную фридмановскую модель, и поведение в ней возмущений известно. Как уже упоминалось, на вакуумной стадии гравитационное взаимодействие вещества не играет роли в поведении возмущений точно так же, как оно не играет роли в невозмущенном движении. Покажем это, т. е. покажем, что самогравитация материи не приводит к заметному росту неоднородности. Приближенную оценку роли гравитационного взаимодействия материи получим, взяв мгновенное значение инкремента по формуле Джинса (см. гл. 9)  $\left( \delta = \frac{\Delta \rho}{\rho} \right)$ :

$$\frac{d \ln \delta}{dt} = \sqrt{4\pi G \rho}, \quad \delta \sim \exp \int \sqrt{4\pi G \rho} dt. \quad (19.4.3)$$



Подставим в (19.4.3) зависимость  $\rho$  от  $t$  на вакуумной стадии (см. § 1 этой главы).

В случае пыли подставим  $\rho = \rho_{\text{вещ}}$ , в случае излучения  $\rho = \rho_{\text{изл}}$  по формулам  $\rho_{\text{вещ}} = At^{-1}$ ,  $\rho_{\text{изл}} = Bt^{-4/3}$ . Константы  $A$  или  $B$  выразим через момент изотропизации  $\theta_1$  выхода на решение Фридмана. О том, как это делается, сказано в § 1 этой главы. Используя формулу вида (19.1.1), получаем

$$A\theta_1^{-1} = (6\pi G\theta_1^2)^{-1}, \quad B\theta_1^{-4/3} = 3(32\pi G\theta_1^2)^{-1}.$$

Подставим теперь  $\rho = \rho(t)$  в (19.4.3) с найденными значениями констант и проинтегрируем полученные выражения от нуля до  $\theta_1$ . В результате найдем, что за время от сингулярности ( $t=0$ ) до  $\theta_1$  возмущение  $\delta$  возрастает на конечную величину:

$$\int_0^{\theta_1} \sqrt{4\pi G\rho} dt = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{для} \quad \rho = \rho_{\text{вещ}} \quad \text{и} \quad \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{для} \quad \rho = \rho_{\text{изл}}. \quad (19.4.4)$$

В изотропном мире такой интеграл расходится вблизи нуля. Сравнивая бесконечное значение интеграла в изотропном мире и конечное значение интеграла, т. е. конечный вклад гравитационного взаимодействия  $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ или } \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ , в анизотропном мире, можно сделать вывод о том, что гравитационное действие на возмущение несущественно. При отсутствии гравитационного взаимодействия невозможно говорить о гравитационной неустойчивости однородного мира.

Однако это, конечно, не означает, что и все возмущения не нарастают в анизотропном мире. Мы доказали только, что причиной роста возмущений не может быть гравитация материи. Как мы сейчас покажем, в вакуумном периоде имеются нарастающие возмущения, причем закон этого нарастания даже более сильный по сравнению с нарастанием возмущений за счет джинсовской гравитационной неустойчивости в изотропной модели Фридмана.

Рост возмущений в анизотропной модели имеет существенно иную, не джинсовскую природу. Этот рост связан со сжатием по одной из осей ( $x^1$ ).

Будем говорить сейчас о случае  $P=0$  (пылевидное вещество). Пусть какие-либо частицы пыли обладают малой пекулярной скоростью относительно системы отсчета  $x^1, x^2, x^3$ . Обозначим эту скорость через  $v$ . Тяготение, связанное с возмущением плотности, как мы уже выяснили, несущественно. Поэтому скорость частицы будет меняться, как скорость пробной частицы в невозмущенном решении. Для изменения скорости пробной частицы в невозмущенном решении применимы все рассуждения § 1 гл. 3. Каждая составляющая

скорости по осям  $x^1, x^2, x^3$  меняется обратно пропорционально (соответственно)  $a, b, c$ . Составляющие по  $x^2$  и  $x^3$  затухают, но  $u_{x^1} \sim a^{-1} \sim t^\alpha$  и, следовательно, нарастает. Это нарастание и обуславливает рост флуктуаций плотности. Движения же по координатам  $x^2$  и  $x^3$  затухают, не ведут к нарастанию плотности, и их поэтому можно не учитывать.

Для определения скорости роста плотности найдем, как меняется объем вещества, а для этого прежде всего определим, как меняется координата частицы из-за наличия  $u_{x^1}$ . Физическая скорость  $u_{x^1} = a \frac{dx^1}{dt}$ . Величина  $a \sim t^{-\alpha}$ , а  $u_{x^1} \sim t^\alpha$ ; следовательно,  $\frac{dx^1}{dt} \sim t^{2\alpha}$  и  $x^1 = x_0 + D t^{1+2\alpha}$ . Объем вещества благодаря этому движению меняется иначе, чем в невозмущенном решении. Это отклонение  $\frac{\Delta V}{V} \sim t^{1+2\alpha}$ , где  $V$  — объем в невозмущенном решении. Отсюда окончательно для растущей моды возмущения плотности находим

$$\delta(t) \equiv \frac{\Delta \rho}{\rho} \sim t^{1+2\alpha}. \quad (19.4.5)$$

Имея в виду, что  $0 < \alpha \leq 1/3$ , мы видим, что при падении плотности в  $n$  раз возмущения возрастают в  $n^{1+2\alpha}$ , т. е. в  $n^1 - n^{1/3}$  раз. В изотропной модели с пылью было  $\delta \sim t^{2/3}$ ,  $\rho \sim t^{-2}$ ,  $\delta \sim \rho^{-1/3}$ , т. е. соответствующий рост возмущения происходил только в  $n^{1/3}$  или в 3—5 раз медленнее, чем в анизотропном случае.

Рассмотрим теперь другой тип возмущений в анизотропной модели.

Когда рассматриваются короткие волны в упругой среде (например, в релятивистском газе с  $P = \varepsilon/3$ ) или короткие гравитационные волны (так что длина волны  $l \ll ct$ ), то изменение их амплитуды связано, в силу адиабатической инвариантности, с изменением длины волны и частоты. Длина волны уменьшается и частота увеличивается, если распространение волны происходит вдоль оси  $x^1$ . Видно, что распространение вдоль оси  $x^1$ , так же как и движение пыли вдоль  $x^1$  в предыдущем примере, не является исключительным случаем. В силу чисто геометрических причин при произвольном начальном волновом векторе (с компонентами  $k_{0x} \approx k_{0y} \approx k_{0z}$  одного порядка в момент  $t = t_0$ ) с течением времени происходит рост  $k_x$  и уменьшение  $k_y$  и  $k_z$ . Направление распространения любой волны приближается к оси  $x$ .

Таким образом, асимптотически волновой вектор направлен по оси  $x$  и растет со временем пропорционально  $t^\alpha$ . Скорость гравитационных волн постоянна и равна  $c$ . Скорость упругих волн в высокотемпературной плазме (в газе с  $P = \varepsilon/3$ ) также постоянна и равна  $c/\sqrt{3}$ . Следовательно, в обоих случаях частота растет пропорционально  $k \sim t^\alpha$ ; из адиабатической инвариантности следует, что растет, как  $t^\alpha$ , и энергия гравитационных и упругих волн, заключенная

в данном сопутствующем объеме. Сопутствующий объем растет в невозмущенном решении Казнера как  $t$ .

Плотность энергии гравитационных волн пропорциональна  $(\frac{dh}{dx})^2$ , где  $h$  — безразмерное возмущение метрики:  $dx^2 \rightarrow (1+h) dx^2$ .

Окончательно получим  $h \sim t^{-(1+\alpha)/2}$ ; отношение плотности энергии гравитационных волн к плотности энергии плазмы растет, как  $t^{1/3+\alpha}$ ; в изотропном мире это отношение оставалось постоянным\*).

Для упругих (акустических) волн  $\epsilon \approx \rho c^2 \delta^2$ ; относительная амплитуда коротких волн ( $l \ll ct$ ), к которым применима адиабатическая инвариантность, растет с течением времени, как  $t^{\alpha/2}$ ; в изотропном мире эта амплитуда была постоянной.

Действуя тем же методом, т. е. пренебрегая гравитационным влиянием вещества, легко рассчитать и развитие длинноволновых ( $\lambda \gg ct$ ) возмущений в среде с  $P = \epsilon/3$ . В этом случае можно пренебречь градиентами давления и границы объемов возмущения движутся как свободные частицы. Рассуждения здесь полностью аналогичны случаю  $P=0$ , только теперь плотность связана с объемом соотношением  $\rho \sim V^{-1/3}$ . Получаем для наиболее быстро нарастающей моды возмущений плотности

$$\delta = \frac{\delta \epsilon}{\epsilon} \sim t^{1/3+\alpha} \sim \epsilon^{-(1+\alpha/3)} \quad (19.4.6)$$

вместо  $\delta \sim \epsilon^{-1}$  в модели Фридмана. Интересно заметить, что поведение абсолютных значений возмущений плотности не зависит от уравнения состояния вещества (в пределе длинных волн); для  $P=0$  и для  $P=\epsilon/3$  имеем

$$\rho \delta|_{P=0} = \epsilon \delta|_{P=\epsilon/3} = t^{2\alpha}.$$

Следует также отметить, что, рассматривая движение вещества на фоне невозмущенной метрики, мы не можем описать некоторые типы возмущений, а именно возмущения свободного гравитационного поля модели, т. е. того поля, на фоне которого рассматривается движение вещества. Как мы уже отмечали, это общее поле можно рассматривать как гравитационную волну бесконечно большой длины. Ясно, что для гравитационных возмущений с большой длиной волны ( $\lambda \gg ct$ ) метод адиабатических инвариантов (применяемый выше для анализа волн с  $\lambda \ll ct$ ) неприменим. Такие возмущения всего поля рассмотрены в работе Лифшица и Халатникова (1963а, б). Они также приводят к возмущениям плотности и скорости (за исключением особых случаев, связанных с симметрией задачи). Однако эти моды при расширении нарастают более медленно и не являются главными.

\* ) Напомним, что предполагается плазма с  $P=\epsilon/3$  — с достаточно частыми столкновениями частиц, так что изотропия их распределения и закон Паскаля не нарушаются.

В этом параграфе не рассматриваются другие, более тонкие вопросы, например превращение поперечных волн в продольные. Мы отсылаем за подробностями к работе Дорошкевича (1966).

Сформулируем кратко выводы:

1. В анизотропной космологической модели на ранней стадии рост возмущений — движение вещества и распространение волн — может быть рассмотрен без учета самогравитации вещества, в соответствии с общим выводом о «вакуумности» этой стадии эволюции.

2. Получен закон роста малых возмущений и общее решение для конечных возмущений с давлением, равным нулю. Возмущения растут в 3—5 раз быстрее  $\left[ \left| \frac{d \ln \delta}{d \ln \rho} \right|_{\text{аниз}} = (3-5) \left| \frac{d \ln \delta}{d \ln \rho} \right|_{\text{изотр}} \right]$  по сравнению с изотропной моделью.

3. Объяснены законы изменения амплитуды коротких гравитационных и упругих (акустических) волн.

4. Получен закон роста длинноволновых возмущений в среде с  $P = \varepsilon/3$ . Возмущения растут в 2—3 раза быстрее, чем в изотропной модели.

## § 5. Неустойчивость космологических решений относительно возникновения движения всего вещества

До сих пор предполагалось, что вещество все время в среднем покоится относительно системы отсчета модели, т. е. все  $\frac{dx^\alpha}{dt} \equiv 0$ . Посмотрим, устойчиво ли такое решение.

В предыдущем параграфе было рассмотрено возникновение локальных флуктуаций с  $\lambda \ll ct$  и показана их «кинематическая» природа (в смысле несущественности самогравитации флуктуаций). В этом параграфе будет показано, что анизотропная модель неустойчива в том же приближении (без обратного влияния) и относительно возникновения однородного движения всего вещества в целом, т. е. относительно возмущения с  $\lambda \gg ct$ .

Как и для всякой неустойчивости, в данной задаче нарастают разные моды в зависимости от того, рассматривается ли сжатие всего вещества (коллапс) или расширение (космологическая задача). Для коллапса подобная задача была рассмотрена Лифшицем и Халатниковым (1960, 1963а, б), космологическая задача рассмотрена Новиковым (1970) на основе результатов Лифшица и Халатникова.

Здесь будет рассмотрена космологическая задача; задачу о коллапсе можно найти у Ландау и Лифшица (1973).

Будем рассматривать вакуумную стадию. Наличие материи не влияет на решение, метрика записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - t^{2p_1} (dx^1)^2 - t^{2p_2} (dx^2)^2 - t^{2p_3} (dx^3)^2, \\ p_1 + p_2 + p_3 &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (19.5.1)$$

Предположим теперь, что в некоторый начальный момент времени  $t_0$  есть определенная (малая) скорость всего вещества. Посмотрим, как будет двигаться материя в момент времени  $t \gg t_0$ . Так как рассматриваются ранние стадии расширения, то уравнение состояния полагается равным  $P = \varepsilon/3$ . Уравнения движения вещества записываются в виде [см. Ландау, Лифшиц (1973), стр. 412]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} \varepsilon^{1/2} u^i) &= 0, \\ (P + \varepsilon) u^k \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{1}{2} u^l \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) &= \frac{\partial P}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial P}{\partial x^k}; \end{aligned} \right\} \quad (19.5.2)$$

здесь  $u^i$  — четырехмерная скорость.

Нас интересуют сейчас возмущения длинноволнового типа ( $\lambda \gg ct$ ), т. е. все производные по пространству в системе отсчета (19.5.1), меньше, чем по времени. Таким образом, мы рассматриваем однородное возмущение скорости всего вещества. Если величины в (19.5.2) зависят только от времени, то уравнения легко интегрируются. Считаем, что в начальный момент времени  $t_0$  все физические компоненты скорости одного порядка. Рассматривается расширение модели. При  $t \gg t_0$  решение системы (19.5.2) дает для главных членов по степеням  $t(p_1 - \text{наименьший показатель})$

$$\varepsilon = \varepsilon_{(0)} t^{-2(1-p_1)}, \quad u_\alpha = u_{\alpha(0)} t^{(1-p_1)/2}. \quad (19.5.3)$$

Из решения (19.5.3) и тождества  $u_i u^i = 1$  следует, что

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \sim t^{\frac{1-3p_1}{2}}.$$

Здесь  $v$  — модуль трехмерной скорости, выраженный в единицах скорости света. Таким образом, скорость стремится к световой по закону

$$\sqrt{1-v^2} \sim t^{\frac{3p_1-1}{2}}. \quad (19.5.4)$$

Найдем компоненты трехмерной физической скорости \*) по разным осям координат. Эти компоненты в данном случае суть

$$v^{(\alpha)} = \frac{u_\alpha \sqrt{1-v^2}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}. \quad (19.5.5)$$

Из (19.5.5), подставляя (19.5.3), (19.5.4) и  $g_{\alpha\alpha}$  из (19.5.1), находим, что в первом порядке

$$v^{(1)} \approx 1, \quad v^{(2)} \sim t^{-(p_2-p_1)}, \quad v^{(3)} \sim t^{-(p_3-p_1)}. \quad (19.5.6)$$

\*) Это компоненты, которые измеряет локальный наблюдатель, покоящийся в системе отсчета. Во избежание недоразумений следует подчеркнуть, что это определение не совпадает с данным у Ландау и Лифшица (1973) на стр. 323, где вводятся координатные компоненты 3-скорости.

Для  $v^{(1)}$  более точно можно написать  $v^{(1)} = 1 - \text{const} \cdot t^{3p_1 - 1}$ . Таким образом,  $v^{(1)} \gg v^{(2)}$ ,  $v^{(3)}$  и скорость стремится к световой вдоль оси  $x^1$ , по которой происходит сжатие системы отсчета. Выражения (19.5.3), (19.5.4) и (19.5.6) описывают релятивистскую стадию движения. Эти выражения показывают неустойчивость решения относительно однородного возмущения скорости. Начальные стадии развития такой неустойчивости, когда  $v/c \ll 1$ , не описываются соотношениями (19.5.3) и были получены в предыдущем параграфе.

Вернемся к релятивистской стадии неустойчивости. Обратим внимание на то обстоятельство, что все рассмотрение проводится в системе, относительно которой материя движется с релятивистской скоростью. Это ведет к двум важным следствиям.

Во-первых, собственное время  $\tau$  в сопутствующей системе отсчета (движущейся вместе с материей) отличается от времени  $t$  системы (19.5.1). Связь между временами находится из релятивистского соотношения

$$d\tau = dt \sqrt{1 - v^2}. \quad (19.5.7)$$

Используя (19.5.4), находим

$$\tau \sim t^{\frac{3p_3 + 1}{2}}.$$

Подставляя это выражение в (19.5.3), получаем для плотности энергии

$$\varepsilon \approx \bar{\varepsilon}_0 \tau^{\frac{-4(1-p_1)}{3p_1 + 1}}. \quad (19.5.8)$$

Во-вторых, события, одновременные в системе отсчета (19.5.1), не одновременны в сопутствующей системе. В системе (19.5.1) нет пространственных градиентов плотности и давления — мы выбрали однородное решение. Однако пространственная неоднородность появляется в сопутствующей системе отсчета из-за относительности одновременности. Наличие градиентов давления в сопутствующей системе отсчета ведет к тому, что деформация вещества зависит от уравнения состояния. Поэтому материя с разными уравнениями состояния набирает скорость относительно системы (19.5.1) по разным законам, что легко видеть из уравнений (19.5.2). Например, для пыли с уравнением состояния  $P=0$  из (19.5.2) сразу получаем  $u_\alpha = \text{const}$ , что отличается от (19.5.3), полученного для  $P=\varepsilon/3$ .

Для пыли ( $P=0$ ) изменение компонент скорости вещества в системе (19.5.1) есть чисто кинематический эффект и физическая компонента импульса вдоль данной оси обратно пропорциональна масштабному фактору вдоль этой оси. Поэтому скорость всегда растет вдоль оси, по которой происходит сжатие, и убывает вдоль осей, по которым происходит расширение.

При наличии давления картина осложняется градиентами сил давления в сопутствующей системе, и иногда эффект этих сил мо-

жет превалировать над кинематическим эффектом. Для демонстрации сказанного рассмотрим случай, когда уравнение состояния вещества  $P = \epsilon/3$ , а скорость движения направлена строго вдоль одной из осей (назовем ее  $\alpha$ ). Остальные компоненты скорости тождественно равны нулю. Тогда справедливо решение (19.5.3) и соотношение (19.5.4), только  $p_1$  может принимать любые значения — от  $-1/3$  до 1 в зависимости от того, по какой из осей направлена скорость.

Если бы в росте скорости играл роль только кинематический эффект, физическая скорость росла бы для отрицательных значений  $p_1$  и убывала для положительных. Это действительно имеет место для пыли. Однако из (19.5.4) видно, что в рассматриваемой задаче с  $P = \epsilon/3$  критическим для роста скорости является не нулевое значение показателя, а  $p_1 = 1/3$ .

Таким образом, даже если движение направлено вдоль расширяющейся оси, но расширяющейся не слишком быстро ( $p_1 < 1/3$ ), скорость релятивистского газа относительно однородной системы отсчета растет. Это обстоятельство важно для космологических задач.

Вернемся теперь к тем исходным предположениям, в которых рассматривалась задача.

Первое замечание связано с предположением о том, что материя не оказывает обратного влияния на решение для метрики, т. е. рассматривалась вакуумная стадия. Это предположение справедливо лишь со следующей оговоркой. Мы рассматривали до сих пор метрику вида (18.3.1), в которой трехмерное пространство плоское,

все  $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \equiv 0$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Для такой метрики все  $R^\alpha_\alpha \equiv 0$ , а знач-

ит, и  $T^\alpha_\alpha \equiv 0$ , так как  $R^\alpha_\alpha = \kappa T^\alpha_\alpha$  ( $\kappa$  — постоянная тяготения Эйнштейна). Таким образом, метрика вида (18.3.1) не допускает движения вещества в системе отсчета. Следовательно, строго говоря, движение вещества должно предполагать искривление трехмерного пространства однородной системы отсчета. Если это искривление не влияет на эволюцию модели вблизи сингулярности,  $t \rightarrow 0$ , то оно не влияет и на движение материи, пока расстояния, пройденные материей, малы по сравнению с радиусом кривизны трехмерного пространства. В этом случае все изложенное выше справедливо как первое приближение на вакуумной стадии, хотя и надо помнить, что трехмерное пространство искривлено. Мы увидим в гл. 21, при каких типах искривления трехмерного пространства сингулярность при  $t \rightarrow 0$  действительно имеет описанный выше «казнеровский» характер с  $a \sim t^{p_1}$ ,  $b \sim t^{p_2}$ ,  $c \sim t^{p_3}$  и справедлив проделанный анализ.

При некоторых типах искривления трехмерного пространства (см. гл. 21) кривизна коренным образом меняет характер решения для  $g_{\mu\nu}$  вблизи сингулярности,  $t \rightarrow 0$  [Белинский, Лифшиц, Халатников (1970)]. Решение носит осцилляционный характер и не описывается простыми степенными формулами вида (19.5.1). Хотя в

таких решениях имеется неустойчивость, аналогичная описанной выше, но характер эволюции будет, разумеется, иным.

Второе замечание относится к предположению об однородности скорости в очень большом масштабе,  $\lambda \gg ct$ . Если это условие выполнено в некоторый момент для фиксированного лагранжева масштаба, то оно с течением времени будет нарушено. Тогда в уравнениях (19.5.2) члены с пространственными координатами будут играть основную роль и изменят характер решения. Таким образом, всегда надо помнить об ограниченности применения полученного решения со стороны будущего времени. Разумеется, вакуумные решения во всех случаях ограничены во времени, о чем подробно говорилось выше.

Наконец, в заключение отметим следующее. Мы предполагали, что в некоторый начальный момент  $t_0$  все компоненты скорости одного порядка. Момент  $t_0$  может быть моментом возникновения флуктуации скорости или может совпадать с  $t_g = 10^{-48}$  сек — минимальным временем, возможным в неквантовой космологии (подробнее см. V раздел). Сделанное предположение о компонентах скорости тогда кажется разумным. Однако если стать на точку зрения неограниченной применимости уравнений ОТО вплоть до сингулярности,  $t \rightarrow 0$ , то из предположения об отличии всех компонент скорости материи от нуля в некоторый момент  $t_0$  следует, что наибольшей при  $t \rightarrow 0$  была компонента скорости вдоль оси, по которой происходит наиболее быстрое расширение (показатель степени положительный и наибольший). Тогда мы приходим вблизи  $t=0$  к картине релятивистского движения вещества вдоль оси  $z$ ; скорость движения затухает по мере расширения. Мы не будем подробнее останавливаться на этом \*), так как неограниченная применимость ОТО при  $t \rightarrow 0$  представляется неправомерной. При столь пекулярных начальных условиях для скорости (релятивистское движение вдоль  $z$  при  $t \rightarrow 0$ ) требовалось бы специальное обоснование. Однако при рассмотрении коллапса, в отличие от космологической задачи, такое поведение вещества (движение вещества вдоль оси с наибольшим положительным показателем степени в зависимости от времени), конечно, необходимо.

---

\*) См. об этом в работе Лифшица и Халатникова (1963а, б); конкретные модели построены в работе Гришука, Дорошкевича, Новикова (1968).



## ГЛАВА 20

### ФИЗИКА ПРОЦЕССОВ НА РАННИХ СТАДИЯХ РАСШИРЕНИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ МОДЕЛЯХ

#### § 1. Слабовзаимодействующие частицы в анизотропной космологической модели

При анизотропном начале космологического расширения меняется физика процессов на ранней стадии. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, закон изменения плотности вещества (и температуры) со временем в анизотропных моделях иной по сравнению с изотропными. Во-вторых, оказывается, что в анизотропных моделях чрезвычайно важна роль слабовзаимодействующих частиц (гравитонов, нейтрино), имеющихся в дозвездном веществе [Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1967б), Мизнер (1967)]. Учет этих частиц резко меняет картину анизотропного расширения и физику процессов на ранней стадии. Причина особенного поведения слабовзаимодействующих частиц заключается в том, что разные компоненты импульса свободно летящих частиц в анизотропном решении меняются по-разному и равновесное сферически-симметричное распределение частиц по импульсам превращается в движение преимущественно вдоль одного направления (но поровну в обе стороны). Кроме того, возможно, что в анизотропных решениях при сверхвысоких плотностях вообще отсутствует термодинамическое равновесие. Следствия, к которым приводят эти явления, обсуждаются в последующих параграфах. Сразу же заметим, что если бы анизотропное однородное решение действительно имело место в прошлом, то в результате всех процессов могло бы оказаться, в частности, что современная средняя энергия реликтовых нейтрино существенно больше энергии реликтовых фотонов, соответствующей  $T=2,7^\circ\text{K}$ , при той же примерно средней плотности энергии.

Мы пока оставляем в стороне вопросы, связанные с квантовыми эффектами в начале расширения вблизи сингулярности при кривизнах пространства-времени порядка  $10^{-66}\text{ см}^{-2}$ . Эти эффекты будут рассмотрены в следующем разделе. Дальнейшее изложение основано на цикле работ Дорошкевича, Зельдовича, Новикова (1967б, 1969а).

Начнем рассмотрение с выявления роли слабовзаимодействующих частиц.

Для нейтрино, например, на ранних этапах расширения при больших температурах рассеяние, рождение и аннигиляция идут достаточно быстро, чтобы поддерживать полное термодинамическое равновесие между нейтрино и другими частицами\*); в частности, плотность нейтрино  $\sim T^3$ , средняя энергия  $\sim 5kT$ , распределение по импульсам изотропно. Будем называть эту стадию расширения паскалевской (тензор энергии-импульса изотропен). Начиная с некоторого момента  $t=\tau$  процессы взаимодействия нейтрино становятся медленными по сравнению с расширением и нейтрино являются уже свободными частицами.

Пусть в ходе дальнейшего расширения при  $t > \tau$  свободные частицы не взаимодействуют ни с другими частицами, ни друг с другом. Мы увидим далее, что для нейтрино это предположение не всегда справедливо и картина оказывается более сложной, однако для гравитонов это предположение справедливо всегда.

В изотропном решении «отключения» нейтрино от других частиц не вызывало нарушения равновесия, так как и нейтрино, и  $\gamma$ -кванты, и пары  $e^+e^-$  «остывали» по одинаковому закону (при  $kT > m_e c^2$ ). В анизотропном решении плотность и импульс свободных частиц меняются в соответствии с космологическим расширением; каждая компонента импульса \*\*)  $i_1, i_2, i_3$  меняется обратно пропорционально  $a_1, a_2, a_3$ . На вакуумной стадии  $a_1 \sim t^{p_1}, a_2 \sim t^{p_2}, a_3 \sim t^{p_3}$ ; обозначим  $-p_1 \equiv \alpha$ . Энергия  $E = c|i|$  определяется наибольшей компонентой импульса, так что средняя энергия  $\bar{E} \sim t^{-p_1} = t^\alpha$ . Распределение частиц в импульсном пространстве становится все более анизотропным.

Пусть в момент «отключения»  $t=\tau$  плотность энергии частиц  $\epsilon^*$  составляла долю  $\beta$  от полной плотности энергии. В ходе расширения на вакуумной стадии

$$n^* \sim t^{-1}, \quad E^* \sim t^\alpha, \quad \epsilon^* \sim t^{\alpha-1} \quad (20.1.1)$$

( $n^*$  — плотность частиц). При изотропном тензоре энергии-импульса на вакуумной стадии плотность менялась по закону [см. (19.1.4)]

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^{4/3} \theta^{2/3}} = \frac{K}{t^{4/3}},$$

где  $\theta$  — конец анизотропной стадии расширения \*\*\*) , и мы обозначи-

\*) В анизотропных моделях, в отличие от изотропных, возможны условия, когда вообще нет термодинамического равновесия (подробнее об этом см. далее § 5). Здесь мы считаем, что на ранних стадиях расширения есть термодинамическое равновесие.

\*\*) Мы обозначаем здесь импульс буквой  $i$ , так как буква  $p$  уже занята для обозначения казнеровских показателей. Кроме того, масштабные факторы вдоль осей будут здесь обозначаться через  $a_1, a_2, a_3$ , а не  $a, b, c$ , как раньше. Это позволяет в дальнейшем экономнее вести записи.

\*\*\*) Точнее,  $\theta$  определяется как момент изотропизации в модели, когда при прочих равных условиях при данном  $K$  нет слабозадействующих частиц.

ли  $\frac{3}{32\pi G\theta^{1/2}} \equiv K$ . Для свободных частиц из (20.1.1) находим, что при  $t > \tau$  имеет место соотношение

$$\rho^* = \beta K \tau^{-1/2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1}. \quad (20.1.2)$$

При этом  $\rho^*$  становится главным слагаемым в общей плотности, а тензор энергии-импульса сильно анизотропен:

$$-T_0^0 = \varepsilon \approx c^2 \rho^* \approx T_1^1 \gg T_2^2, T_3^3. \quad (20.1.3)$$

Наличие свободных частиц, плотность энергии которых падает медленнее, чем взаимодействующих, существенно уменьшает период применимости вакуумного решения. Поступая аналогично нахождению момента окончания вакуумного решения при изотропном  $T_{\alpha\beta}$  в § 1 гл. 19, находим момент  $t = q$  окончания вакуумного решения при (20.1.2):

$$q = \theta \left( \frac{\tau}{\theta} \right)^{\frac{1+8\alpha}{8+8\alpha}} \beta^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (20.1.4)$$

Отношение плотности энергии свободных частиц  $\varepsilon^*$  к плотности энергии всех других частиц  $\varepsilon_1$  в момент окончания вакуумного решения есть

$$\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_1} \approx \frac{\beta}{1-\beta} \left( \frac{q}{\tau} \right)^{\alpha + \frac{1}{2}} = \frac{\beta^{\frac{2}{3(1+\alpha)}}}{1-\beta} \left( \frac{\tau}{\theta} \right)^{\frac{2(8\alpha+1)}{3(\alpha+1)}}. \quad (20.1.5)$$

Следовательно, поскольку  $\beta$  не специально мало, то рассматриваемые эффекты сокращают длительность вакуумного решения и приводят к тому, что к концу вакуумной стадии  $\varepsilon^* \gg \varepsilon_1$ .

В модели без свободных частиц за вакуумной стадией наступала быстрая изотропизация решения при  $t > \theta$ . В рассматриваемой модели за вакуумной стадией при  $t > q$  следует стадия, в которой доминирующее влияние в динамике имеют свободные частицы с резко анизотропным тензором энергии-импульса:  $-T_0^0 \sim T_1^1 \gg T_2^2, T_3^3$ .

Космологическое решение с таким тензором энергии-импульса приведено в § 2 гл. 19.

В этом решении гравитация направленного потока частиц ведет к тому, что асимптотическое решение для больших  $t$  имеет вид ( $0 \leq p \leq 1/2$ )

$$\left. \begin{aligned} a_1 &\sim t, & a_2 &\sim (\ln t)^{1/2+p}, & a_3 &\sim (\ln t)^{1/2-p}, \\ \varepsilon^* &\sim t^{-2} (\ln t)^{-1/2-2p^2}, & n^* &\sim t^{-1} (\ln t)^{-p^2-3/4}, \\ E^* &\sim t^{-1} (\ln t)^{1/4-p^2}. \end{aligned} \right\} \quad (20.1.6)$$

Итак, свободные частицы, энергия которых  $E^*$  на вакуумной стадии росла при сжатии по  $x^1$ , при  $t > q$  вызывают такую перестройку

ку решения, в результате которой их энергия начинает быстро падать.

Изменение плотности энергии частиц с импульсом в основном по некоторой ( $j$ ) оси определяется соотношением  $\varepsilon_j^* \sim n j \sim n a_j^{-1}$ . Изменение плотности взаимодействующих частиц определяется соотношением  $\varepsilon_1 \sim n^{1/2}$ . Используя эти соотношения, можно найти, что частицы с импульсом по оси  $x^1$  будут играть доминирующую роль до момента  $t=t_1$ , где

$$t_1 \approx \theta \beta^{p-2/2} \delta^{1/2} [\ln(\beta^{-1} \delta^{-1/2})]^{1/2-p}, \quad \delta = \frac{\tau}{\theta}. \quad (20.1.7)$$

К моменту  $t_1$  плотности энергии частиц с импульсами в основном по осям  $x^1$ ,  $x^2$  сравниваются и сильно превосходят плотность энергии всех других частиц:  $\varepsilon_{x^1}^* \approx \varepsilon_{x^2}^* \gg \varepsilon_{x^3}^*$ ,  $\varepsilon_1$ .

После  $t_1$  основную роль играют частицы с импульсами по оси  $x^2$ :  $\varepsilon_{x^2}^* \gg \varepsilon_{x^1}^*$ ,  $\varepsilon_{x^3}^*$ ,  $\varepsilon_1$ , и снова применимо решение (20.1.6), но с  $a_1$  вдоль оси  $x^2$  и другими значениями параметров. Теперь расширение идет вдоль прежней оси  $x^2$ , а по осям  $x^1$ ,  $x^3$  расширение слабое. Такая перестройка решения вызовет через некоторое время быстрое падение  $\varepsilon_{x^2}^*$ , и снова наступит момент  $\varepsilon_{x^2}^* \approx \varepsilon_{x^1}^*$ . Так две оси будут меняться местами и анизотропия будет «колебательной» с убывающей амплитудой и частотой, пока все плотности энергии не станут одного порядка,  $\varepsilon_{x^1}^* \sim \varepsilon_{x^2}^* \sim \varepsilon_{x^3}^* \sim \varepsilon_1$  ( $\beta$  считаем порядка единицы), после чего наступит изотропизация решения.

Для оценки времени изотропизации  $t_2$  рассмотрим два предельных случая.

1. Пусть в решении (20.1.6) оси  $x^2$ ,  $x^3$  эквивалентны, т. е.  $p=0$ . Тогда уже к концу первого периода «колебаний», когда  $t=t_1$ , оказывается  $\varepsilon^* \approx \varepsilon_1$ , после чего наступает быстрая изотропизация. Следовательно, для осесимметричного случая, т. е. для  $\alpha$ , близких к  $1/3$ , время изотропизации  $t_2$  получается из (20.1.7) при  $p=0$ :

$$t_2 \approx \theta \beta^{-1/2} [\ln(\beta^{-1} \delta^{-1/2})]^{1/2}. \quad (20.1.8)$$

2. Другой предельный случай соответствует  $\alpha=0$ . В этом случае на вакуумной стадии

$$\varepsilon_1^* \approx \varepsilon_2^* = \text{const}, \quad \varepsilon_3^* \sim t^{-2}, \quad \varepsilon_1 \sim t^{-1/2}. \quad (20.1.9)$$

После вакуумной стадии доминирующую роль играют частицы с импульсом не по какой-нибудь одной оси [как в (20.1.6)], а в плоскости  $x^1$ ,  $x^2$ , с одинаковой вероятностью по любым направлениям в этой плоскости. Тензор энергии-импульса частиц при этом есть

$$-T_0^0 = \varepsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = \frac{\varepsilon}{2} \gg T_3^3. \quad (20.1.10)$$

Пренебрегая энергией всех других частиц, получаем точное решение:

$$\left. \begin{aligned} a_1 = a_2 = a_{10} \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^{1/2}, \quad a_3 = a_{30} \left[1 - \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^{-1/2}\right], \\ \kappa e = \frac{4}{9} t_0^{-2} \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^{-1/2} \left[\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^{1/2} - 1\right]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (20.1.11)$$

Момент существенного изменения вакуумного решения есть  $t_0$ . Из (20.1.9) следует, что к моменту  $t_0 \approx \beta^{-1} \theta \delta^{1/2}$  будет  $\epsilon_1^* = \epsilon_2^* \gg \epsilon_3^*, \epsilon_1$ .

При  $t > t_0$  снова, аналогично (20.1.6), расширение идет таким образом, что плотность энергии частиц с импульсами в плоскости  $x^1, x^2$  падает быстрее, чем  $\epsilon_{x^2}^*, \epsilon_1^*$ . К моменту

$$t_1 \approx \beta^{-1/2} \theta \delta^{-1/2} \quad (20.1.12)$$

$\epsilon_1^* = \epsilon_2^* \approx \epsilon_3^* \approx \epsilon_1$  ( $\beta$  — порядка единицы), и наступает изотропизация.

Таким образом, при  $\alpha$ , близком к нулю, когда более быстрое расширение идет то по оси  $x^1$ , то по оси  $x^2$ , но  $\epsilon_1^*, \epsilon_2^* \gg \epsilon_3^*, \epsilon_1$ , для оценки времени изотропизации можно воспользоваться (20.1.12). Следовательно, в этом случае

$$t_2 \approx \theta \delta^{-1/2}. \quad (20.1.13)$$

Время изотропизации в общем случае лежит между значениями (20.1.8) и (20.1.13). Изотропизация решения в общем случае носит колебательный характер, и, когда анизотропия уже мала, решение записывается в виде

$$a_j \sim a_{j0} t^{1/2} \left\{ 1 + b_j t^{-1/2} \sin \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \ln(c_j t) \right] + \dots \right\}. \quad (20.1.14)$$

Значит, изотропное расширение свободных частиц устойчиво.

Наконец, отметим, что для гравитонов «отключение» происходит в условиях, когда существенны квантовые эффекты гравитации (см. § 2 гл. 7). Поэтому гравитоны в момент «отключения» могут и не находиться в равновесии с другими частицами.

При наличии равновесия  $\beta \sim 10^{-2}$ ; если же равновесия нет, то возможно еще большее отличие  $\beta$  от единицы. Если  $\beta \ll 1$ , то после изотропизации все равно должно быть  $\epsilon^* \approx \epsilon_1$ , т. е. сегодняшняя плотность энергии гравитонов порядка плотности энергии квантов, что примерно составляет  $\sim 10^{-12}$  эрг/см<sup>3</sup>, или  $\sim 10^{-33}$  г/см<sup>3</sup>. Это означает, что при  $\beta \ll 1$  распределение импульсов гравитонов анизотропно, и если на момент «отключения» их средняя энергия была порядка энергии других частиц, но была мала их плотность,  $n^* \ll n_1$ , то сегодня также  $n^* \ll n_1$ ,  $\bar{E}^* \gg E_\gamma$ .

До сих пор мы не рассматривали возможности неустойчивости описанных процессов. Само анизотропное вакуумное решение сте-

пенным образом неустойчиво [Лифшиц, Халатников (1963а, б)]. Если начальные возмущения малы, то эта неустойчивость может не успеть проявиться. Но возможны процессы изотропизации строго направленного потока частиц за счет коллективного взаимодействия. Мы этого здесь не рассматриваем. Заметим только, что если такая изотропизация произойдет на стадии  $E^* \gg E_\gamma$ , то и сегодня энергия гравитонов больше энергии  $\gamma$ -квантов.

## § 2. Нейтрино в анизотропном решении

Поведение нейтрино отличается от рассмотренного выше тем, что при анизотропии, сопровождающейся сжатием по одной из осей на ранней стадии, часть нейтрино и летящих навстречу антинейтрино получает такую энергию, что при некоторых условиях снова становится заметной вероятность их необратимого превращения в электроны и позитроны.

Будем предполагать сначала, что гравитонов нет совсем \*), и рассмотрим для определенности поведение электронных нейтрино. Замечание о совместном поведении нейтрино и гравитонов см. в конце этого параграфа.

Момент отключения нейтрино  $\tau$  найдем из условия равенства релаксационного и гидродинамического времен, что дает

$$\bar{f} \equiv n c \sigma \tau = 1. \quad (20.2.1)$$

Здесь  $n$  — концентрация частиц,  $c$  — скорость света,  $\sigma$  — сечение взаимодействия  $e^+ + e^- \rightleftharpoons \nu_e + \bar{\nu}_e$ ,  $\sigma \sim E^2$ . Если  $E < 300$  Гэв, будем считать это условие выполненным (о случае  $E > 300$  Гэв см. конец этого параграфа\*\*).

Будем считать, что  $\tau < \theta$ , так как в противном случае нейтрино отключаются после изотропизации решения и никаких эффектов анизотропии нет. До момента  $\tau$  на паскалевской стадии  $\sigma \sim E^2 \sim t^{-2/3}$ ,  $n \sim t^{-1}$ . В изотропной фридмановской модели  $\sigma \sim E^2 \sim t^{-1}$ ,  $n \sim t^{-3/2}$ . Зная, что во фридмановской модели момент отключения (температура отключения  $\sim 3$  Мэв)  $\tau' \approx 0,1$  сек для  $\nu_e$  или  $\tau' \approx 5 \cdot 10^{-3}$  сек для  $\bar{\nu}_e$ , и воспользовавшись написанными соотношениями, выразим  $\tau$  через  $\tau'$  и  $\theta$ . Получаем

$$\tau = (\tau')^{3/4} \theta^{-1/4}. \quad (20.2.2)$$

Момент отключения определяется плотностью энергии и скоростью объемного расширения, и так как эти величины не зависят от  $a$ , то и  $\tau$  не зависит от  $a$ .

\*) Точнее, к моменту отключения нейтрино плотность энергии гравитонов много меньше  $\epsilon_1$ .

\*\*) Согласно некоторым новым гипотезам, сечение  $\sigma$  растет с энергией,  $\sigma \sim E^2$ , лишь до энергий  $\sim 35$  Гэв, а затем падает. Имея в виду лишь иллюстративный характер численных оценок, мы оставляем в качестве максимального значения  $E \approx 300$  Гэв.

При  $t > \tau$  средняя энергия нейтрино с импульсами вдоль  $x_1$  растет:  $\bar{E}_\nu \sim i_1 \sim t^\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1/3$ . Соответственно увеличивается сечение взаимодействия. Для процесса рассеяния нейтрино

$$\nu_e + e \rightleftharpoons \nu_e + e \quad (20.2.3)$$

сечение пропорционально квадрату энергии  $\nu$  и  $e$  в системе их общего центра инерции:  $\sigma \sim E_{\text{с.и.}}^2$ . В лабораторной системе для релятивистских электронов  $\sigma \sim E_\nu E_e$ . Условие того, что процесс играет роль для нейтрино, есть  $f = \cos \theta_e t > 1$ . В момент отключения  $f = 1$ . Как меняется  $f$  в дальнейшем? Зависимость отдельных величин от времени такова:

$$\sigma \sim E_\nu E_e, \quad E_\nu \sim t^\alpha, \quad \alpha < \frac{1}{3}, \quad E_e \sim t^{-1/3}, \quad n_e \sim t^{-1}.$$

Значит, обязательно  $f$  уменьшается,  $f < 1$  при  $t > \tau$ . Этот процесс (20.2.3) сам по себе не приводит к нарушению условия  $\cos \theta_e t < 1$  и к заметной перекачке энергии свободных нейтрино в пары  $e^+e^-$  (о значении этого процесса при наличии аннигиляции нейтрино см. следующий параграф).

Однако встречные потоки нейтрино и антинейтрино вдоль оси  $x^1$  взаимодействуют. Действительно, для процесса аннигиляции

$$\nu_e + \bar{\nu}_e \rightarrow e^+ + e^- \quad (20.2.4)$$

сечение  $\sigma \sim E_\nu^2 \sim t^{2\alpha}$ , и при сохранении числа частиц условие  $\sigma n c t < 1$  не будет выполняться. Следовательно, процесс (20.2.4) будет приводить на вакуумной стадии к необратимому превращению нейтрино в пары  $e^+e^-$ , которые мгновенно термализуются\*). Найдём скорость роста средней энергии нейтрино  $\bar{E}_\nu$  и уменьшения их концентрации  $n_\nu$  в этих условиях.

В импульсном пространстве распределение нейтрино изображается эллипсоидом с осями  $i_1, i_2, i_3$ . Процесс (20.2.4) в каждый момент ограничивает величину  $|i_1|$  некоторым значением. Для остальных частиц с  $|i_1|$  меньше этого значения справедлива теорема Лиувилля, поэтому  $n_\nu \sim |i_1 i_2 i_3|$ , сечение  $\sigma \sim i_1^2$ . Из условия  $\sigma n c t = 1$  находим

$$E_\nu \sim t^{\alpha/3}, \quad n_\nu \sim t^{-(1+2\alpha/3)}, \quad \varepsilon_\nu \sim t^{-(1+\alpha/3)}. \quad (20.2.5)$$

Из закона сохранения энергии нетрудно вычислить скорость изменения общей плотности энергии пар  $e^+e^-$  и квантов  $\varepsilon_{\nu, e^\pm}$  (находящихся в равновесии) с учетом «подогрева» процессом

\*) Взаимодействие  $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$  приводит к рождению пар мюонов, которые термализуются и после этого распадаются на  $e^+, e^-, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_e, \bar{\nu}_e$ . Энергия этих вторичных нейтрино  $\approx 30 \text{ МэВ}$  много меньше все возрастающей энергии первичных нейтрино, движущихся по оси  $x^1$ .

(20.2.4), а также скорость роста энтропии из-за такого «подогрева». Получаем для  $t \gg \tau$

$$\frac{\epsilon_{\nu, e^{\pm}}}{\epsilon_{\nu}} \approx \frac{4\alpha}{1-\alpha} + \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\frac{1-\alpha}{3}}, \quad (20.2.6)$$

$$\frac{S}{S_0} \approx \left[1 + \frac{4\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1+\alpha}{3}}\right]^{\frac{3}{4}}. \quad (20.2.7)$$

Момент окончания вакуумной стадии  $t=q$  находится так же, как в предыдущих параграфах. Он равен

$$q \approx \theta \left(\frac{\tau'}{\theta}\right)^{\frac{3(1-\alpha)}{4(3-\alpha)}}, \quad \tau' < \theta. \quad (20.2.8)$$

К моменту  $t=q$  отношение плотностей и отношение средних энергий [при немалых  $\alpha$ ,  $\alpha > \left(\frac{\tau}{q}\right)^{\frac{1-\alpha}{3}}$ ] есть

$$\frac{n_{\nu}}{n_{\nu, e^{\pm}}} \approx \frac{\bar{E}_{\nu, e^{\pm}}}{\bar{E}_{\nu}} \approx \left(\frac{\tau'}{\theta}\right)^{\frac{3(3+\alpha)}{3(3-\alpha)}}. \quad (20.2.9)$$

После  $t=q$  расширение идет во всех направлениях и взаимодействие нейтрино и антинейтрино прекращается. Для  $t > q$

$$S(t) \approx S(q), \quad \frac{n_{\nu}}{n_{\nu, e^{\pm}}} \approx \frac{n_{\nu}}{n_{\nu, e^{\pm}}} \Big|_{t=q}, \quad \frac{E_{\nu}}{E_{\nu, e^{\pm}}} \approx \frac{E_{\nu}}{E_{\nu, e^{\pm}}} \Big|_{t=q}.$$

При немалых  $\alpha$  из (20.2.6) следует, что плотности энергии нейтрино, квантов и пар к моменту  $t=q$  одного порядка. Большая анизотропия быстро исчезает, время изотропизации порядка  $q$ . Но поскольку  $n_{\nu} \ll n_{\nu, e^{\pm}}$  [см. (20.2.9)], то  $\bar{E}_{\nu} \gg \bar{E}_{\nu, e^{\pm}}$  и распределение импульсов нейтрино резко анизотропно.

Мы здесь не рассматривали возможности изотропизации направленного потока нейтрино, которая может иметь место.

В написанных соотношениях не учтен фактор  $\beta$ , который для нейтрино может принимать значение (в зависимости от  $\tau$ ) от  $1/4$  до  $10^{-2}$ .

Выше в этом параграфе предполагалось, что при любых энергиях для сечения аннигиляции нейтрино [см. (20.2.4)] справедливо условие  $\sigma_{\nu} \sim E_{\nu}^2$ . Однако это условие выполняется, по-видимому, лишь при  $E_{\nu} \leq 300$  Гэв. При больших энергиях сечение аннигиляции нейтрино или остается постоянным, или даже убывает с ростом энергии.

Как уже отмечалось в сноске на стр. 552, при высоких энергиях сечение зависит от предположений о существовании так называемо-



го промежуточного заряженного  $W^\pm$ -бозона [см. Окунь (1966)] и от конкретного значения его массы. Возможно, сечение убывает уже при  $E_\nu > 35$  Гэв. Мы приведем оценки в предположении, что сечение растет, как  $E^2$ , до 300 Гэв. Оценки показывают, что максимальное увеличение энтропии происходит в следующем случае:

$$\theta = 10^{19} \text{ сек}, \quad \alpha \approx 0,02, \quad \tau = 10^{-28} \text{ сек}, \quad q \approx 200 \text{ сек},$$

$$\frac{S(q)}{S(\tau)} \approx 10^6, \quad \frac{n_\nu}{n_\gamma} \approx 3 \cdot 10^{-8}$$

( $n_\gamma$  — плотность фотонов реликтового излучения). Современная энергия нейтрино  $E_\nu \leq 3 \cdot 10^4$  эв. В рамках рассмотренной схемы всегда  $\frac{S(q)}{S(\tau)} \ll 10^6$ , и энергия нейтрино сегодня  $E_\nu < 3 \cdot 10^4$  эв. Следует, однако, иметь в виду, что в рассматриваемых условиях  $T_e \sim t^{-(3+\alpha)/12}$ , и поэтому для процесса (20.2.3) произведение  $\sigma cnt = \text{const}$ , как и для процесса аннигиляции. Поэтому процесс (20.2.3) также даст вклад в набор энтропии. Однако, поскольку ведущим остается процесс аннигиляции, вклад процесса рассеяния (20.2.3) не может существенно изменить оценок, приведенных выше. Если к моменту отклонения нейтрино плотность энергии гравитонов станет много больше  $\epsilon_1$ , то кинематика расширения будет определяться гравитонами и процессы с нейтрино будут определяться этой кинематикой.

Подытожим кратко сказанное в этом параграфе.

1. Динамика анизотропных космологических моделей и физика процессов в них тесно связаны с присутствием слабовзаимодействующих частиц и с возможной неравновесностью вещества.

2. Энергия слабовзаимодействующих частиц (нейтрино, гравитонов) в настоящее время может сильно отличаться от предсказываемой изотропной моделью и может быть весьма велика при соответственном уменьшении числа этих частиц в единице объема.

3. В анизотропных моделях возможно сильное увеличение начальной энтропии вещества.

### § 3. Влияние вязкости на динамику расширения анизотропных моделей

В работах Мизнера (1967, 1968) развит подход к вопросам поведения слабовзаимодействующих частиц в анизотропных космологических моделях, отличный от изложенного в предыдущем параграфе. Мизнер обращает внимание на то, что при малых отклонениях от равновесной функции распределения частиц рост энтропии можно описать с помощью понятия вязкости. Этот рост тем больше, чем сильнее функция распределения отличается от равновесной, чем больше время релаксации. Однако понятием вязкости

можно пользоваться лишь до тех пор, пока время релаксации меньше гидродинамического. Если, однако, на время забыть об этом ограничении, то расчеты, основанные на понятии вязкости, приводят к выводу, что из-за влияния вязкости набор энтропии всегда столь значителен, что отключения нейтрино на вакуумной стадии не произойдет, рассмотренный в предыдущем параграфе режим не будет иметь места и, вне зависимости от параметров модели, изотропизация происходит при температуре  $T \approx 3 \text{ Мэв}$ . Лишь после изотропизации происходит отключение нейтрино. Согласно этой модели, сегодня нейтрино большой энергии нет.

В настоящем параграфе рассмотрим кратко этот процесс набора энтропии, следуя в основном идеям Мизнера. В следующем параграфе мы рассмотрим кинетическое уравнение для нейтрино в анизотропной космологии и на основе этого, более общего, подхода определим, когда справедливо приближение вязкости, а когда — приближение свободных частиц.

Уравнение сохранения энергии с учетом вязкости в модели с метрикой Казнера (18.3.6), (18.3.7) на вакуумной стадии приводится к виду

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{t} = \frac{4}{3} \frac{\eta}{t^2}, \quad (20.3.1)$$

где  $\varepsilon$  — плотность энергии всех частиц, а  $\eta$  — коэффициент вязкости. Примем (скорость света  $c=1$ )

$$\eta = \frac{1}{3} t^* \varepsilon_\nu = \frac{k}{3} \frac{\varepsilon}{\sigma n_e}, \quad (20.3.2)$$

где  $t^*$  — время свободного пробега,  $\sigma \sim (E_\nu E_e)^m \sim T^{2m}$  — сечение рассеяния  $\nu$  на  $e^\pm$  ( $m > 0$ ),  $n_e$  и  $E_e$  — плотность и энергия рассеивателя (электронов и позитронов),  $k = \varepsilon_\nu / \varepsilon$ ; в равновесии \*)  $k$  может быть выражено через статистические веса нейтрино и остальных частиц плазмы. Считаем (как и Мизнер)  $k = \text{const}$ , т. е. в течение всего процесса количество сортов частиц остается неизменным.

Решение уравнений (20.3.1), (20.3.2) легко получить в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_a \left( 1 + C t^{\frac{2m}{3}} \right)^{\frac{4}{3+2m}} = \varepsilon_a \left[ 1 - k \frac{3+2m}{6m} \left( \frac{t^*}{t} \right) \right]^{-\frac{4}{3+2m}}, \quad (20.3.3)$$

где  $\varepsilon_a = \varepsilon_a(t)$  — адиабатический закон изменения плотности энергии,  $C$  — константа. Из (20.3.3) следует, что при  $C t^{2m/3} \gg 1$

$$\varepsilon \sim t^{-\frac{4}{3+2m}} \quad (20.3.4)$$

независимо от начальных параметров задачи.

\*) Если есть равновесие, то  $k$  совпадает с  $\beta$  из § 1 этой главы.

Мизнер рассматривал случай  $m=0,5$ ,  $k=1$  и получил, что на вакуумной стадии  $\varepsilon \sim t^{-1}$  и нейтрино находятся в равновесии вплоть до изотропизации модели, происходящей вне зависимости от начальных параметров при  $T=3 \text{ Мэв}$ .

В действительности главный вопрос заключается в обоснованности приближений, приводящих к (20.3.4). Из (20.3.3) следует, что рассматриваемый режим устанавливается при  $k \frac{3+2m}{6m} \frac{t^*}{t} \rightarrow 1$ .

В реальных условиях в термодинамическом равновесии находится много частиц (при  $T \sim 0,5 \text{ Гэв}$  в равновесии находятся  $e, \gamma, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \pi$ , при  $T > 3 \text{ Гэв}$  необходимо учитывать также барионы, скалярные и векторные мезоны).

Поэтому, в зависимости от температуры,  $k$  лежит в пределах  $0,25 \geq k \geq 0,025$ . Следовательно, решение выходит на рассматриваемый режим Мизнера при  $\frac{t^*}{t} = 4,8 - 48$  ( $m=1$ ) или при  $\frac{t^*}{t} = 3 - 30$  ( $m=0,5$ ) в зависимости от значения  $k$ , т. е. в условиях, когда применимость понятия вязкости совершенно не очевидна. Неправомомерность макроскопического описания явления с помощью понятия вязкости еще не означает, что выводы Мизнера неправильны качественно, так как возможно существование решения кинетического уравнения со свойствами, подобными свойствам решения, полученного Мизнером. В этих условиях для получения достоверных результатов необходимо исследовать кинетическое уравнение. В то же время открыта и другая возможность, а именно, что осуществляются процессы, описанные в предыдущем параграфе, и нельзя говорить о вязкости. С этой целью исследуем кинетическое уравнение для нейтрино.

#### § 4. Кинетическая теория нейтрино в анизотропной модели; автомодельное решение

Исследование кинетического уравнения для нейтрино проведено в работах Дорошкевича, Зельдовича, Новикова (1968, 1969а, б). Будем рассматривать вакуумную стадию; кроме того, положим  $\alpha = 1/3$ , т. е.  $a_1 \sim t^{-1/3}$ ,  $a_2 = a_3 \sim t^{2/3}$ . Функция распределения нейтрино в импульсном пространстве (плотность  $\omega$ ), соотношенная к ячейке, равной  $(2\pi\hbar)^{-3}$ , определяется кинетическим уравнением

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{i_1}{3t} \frac{\partial \omega}{\partial i_1} - \frac{2}{3} \frac{i_2}{t} \frac{\partial \omega}{\partial i_2} - \frac{2}{3} \frac{i_3}{t} \frac{\partial \omega}{\partial i_3} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)_{\text{ст}}, \quad (20.4.1)$$

где  $\left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)_{\text{ст}}$  — столкновительный член, описывающий изменение функции распределения нейтрино из-за взаимодействия с остальными частицами.

Остальные частицы находятся в термодинамическом равновесии, которое характеризуется заданием температуры  $T$  (в энергетических

единицах). Предположим, что все эти частицы ультрарелятивистские, так что для них имеет место уравнение состояния  $P = \tilde{\epsilon}/3$ , плотность энергии  $\tilde{\epsilon} = \kappa T^4$ ,  $\kappa = b \frac{24\pi}{(2\pi\hbar)^3}$ ,  $b$  — сумма статистических весов. Пренебрежем отличием ферми-и бозе-газов от классического, т. е. заменим  $(e^{E/T} \pm 1)^{-1} \equiv n^*$  на  $e^{-E/T}$  в формулах равновесного распределения и, соответственно, выбросим  $n^*$  во множителях  $(1 - n^*)$ ,  $(1 + n^*)$  в интеграле столкновений. Тогда  $b = \sum g_j$ , где  $g_j$  — статистический вес  $j$ -го сорта частиц ( $g=2$  для  $e^\pm$ ,  $\mu$ ;  $g=1$  для скалярных мезонов и двухкомпонентных нейтрино). При сделанных предположениях

$$k = \frac{g_{\nu\bar{\nu}}}{b + g_{\nu\bar{\nu}}} = \frac{2}{b + 2}.$$

Температура определяется уравнением сохранения энергии:

$$\frac{d\tilde{\epsilon}}{dt} + \frac{4}{3} \frac{\tilde{\epsilon}}{t} \equiv 4\kappa T^3 \left( \frac{dT}{dt} + \frac{1}{3} \frac{T}{t} \right) = Q(\omega, T), \quad (20.4.2)$$

где  $Q(\omega, T)$  — член, описывающий влияние на температуру взаимодействия плазмы с нейтрино. Если предположить, что сечения взаимодействия нейтрино с остальными частицами степенным образом зависят от энергии сталкивающихся частиц в системе центра инерции ( $\sigma = \sigma_0 E^{2m}$ ), то можно убедиться, что система (20.4.1) — (20.4.2) допускает автомодельное решение вида

$$\omega = \omega(q), \quad T \sim t^{-\frac{1}{2m+3}}, \quad (20.4.3)$$

где  $q = t/T$ .

Физическими параметрами, определяющими задачу, являются (при заданной метрике): показатель  $m$ , постоянная  $\sigma_0$  (или несколько постоянных  $\sigma_{0j}$ ) в выражении для сечения взаимодействия, числа  $b$  и  $k$ , характеризующие термодинамику системы. Практически для определения области существования автомодельного решения удобно действовать следующим образом: задаваясь значениями  $\sigma_0$  и  $T = T(t)$ , определять область изменения  $k$ .

Эту общую программу удалось осуществить лишь после дополнительных упрощающих предположений относительно взаимодействия нейтрино с равновесной плазмой и друг с другом.

Задачу удастся решить в двух случаях:

1. Рассматривается только одиночное рождение и гибель нейтрино согласно реакции



где вместо  $n$ ,  $p$ ,  $e$  могут фигурировать и другие частицы, находящиеся в равновесии. Кроме них могут присутствовать и другие частицы, не взаимодействующие с нейтрино.

2. Рассматривается только парная аннигиляция и рождение нейтрино и антинейтрино согласно реакции



с добавочным ограничением на показатель степени в выражении для сечения  $m=1$ . Здесь также допускается присутствие частиц, не взаимодействующих с нейтрино.

Учет рассеяния нейтрино, а также отказ от ограничения условием  $m=1$  во втором случае приводят к большим техническим трудностям, и пока эти варианты не рассмотрены. В задаче только с одним рассеянием (без рождения — парного или одиночного) автомодельного решения, очевидно, нет.

Подробный анализ проведен в работе Дорошкевича, Зельдовича, Новикова (1969а), здесь мы приведем только выводы из этого анализа.

Эти выводы следующие:

1. Автомодельное решение рассматриваемого выше типа при  $m=1$  возможно лишь при  $(1 - k)/k \ll 1$ . Это следует как из задачи 1, так и из задачи 2. По-видимому, учет рассеяния  $e^\pm + \nu \rightleftharpoons e^\pm + \nu$  не сможет заметно изменить этот результат.

2. Из анализа задачи 2 следует существование критических значений показателя степени  $m_0 \approx 0,545$  и  $m_1 = 1,5$  таких, что при  $m < m_0$  автомодельное решение существует при любом значении  $k$ ,  $0 < k < 1$ . При  $m_0 < m < m_1$  автомодельное решение существует лишь при  $1 \geq k \geq k_{\min}$ . Наконец, при  $m > m_1$  автомодельного решения нет вообще.

В работе Дорошкевича, Зельдовича, Новикова (1969а, б) получено общее решение кинетического уравнения для нейтрино в случае задачи 2 и строго показано, что в приближении квазисвободных частиц действительно возникает решение для функции распределения нейтрино, описанное в § 2 этой главы.

Для наиболее важного (реального) значения  $m=1$  (т. е.  $\sigma \sim E^2$ ) и реального  $k = \frac{e_\nu}{e} < 0,25$  при  $\alpha = 1/3$  нет автомодельного решения кинетического уравнения, подобного вязкому решению Мизнера \*).

Физический вывод заключается в том, что когда в анизотропном космологическом решении при  $\alpha$ , близком к  $1/3$ , начинается отклонение от равновесия слабовзаимодействующих частиц, то вскоре эти частицы становятся свободными, число их уменьшается, а средняя энергия растет, как это описано в § 2. Последующие работы Мизнера с сотрудниками [см. Матцнер и Мизнер (1972)] подтвердили этот результат.

\*) Такое решение получается при формальном применении уравнений гидродинамики с вязкостью для значений  $t^*/t > 1$ , что, очевидно, незаконно и приводит, как мы видим из анализа кинетического уравнения, даже к качественно неверному результату.

### § 5. Образование химических элементов в анизотропных моделях

Обратимся теперь к влиянию на ядерные реакции и другие процессы с частицами иного (по сравнению с изотропной моделью) типа расширения материи.

Как уже отмечалось в простейшем случае расширения от сингулярного состояния, согласно решению Казнера с покоящейся материей, объем  $V \sim t$  и, следовательно при  $P = \varepsilon/3$  плотность  $\varepsilon \sim t^{-4/3}$ . В более общем случае, когда материя движется с ультрарелятивистской скоростью относительно однородной системы отсчета, плотность меняется в зависимости от собственного времени  $\tau$  по закону [см. (19.5.8)]

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_0 \tau^{-\frac{4(1-p_1)}{3p_1+1}}. \quad (20.5.1)$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_0 \tau^{-\beta}. \quad (20.5.2)$$

В конце § 5 гл. 19 отмечалось, что в принципе при разном выборе начальных условий величина  $\beta$  может пробегать все значения от 0 до  $\infty$  (т. е.  $-1/3 \leq p_1 \leq 1$ ). Однако при наиболее естественном выборе начальных условий показатель  $\beta$  меняется от 4 до  $\infty$ , т. е.  $-1/3 \leq p_1 \leq 0$ . Разумеется, за первым, «вакуумным» этапом расширения материи в анизотропной модели следуют другие этапы, с иным законом расширения. Имея в виду все сказанное, мы не будем здесь конкретизировать возможные значения  $\beta$  и рассмотрим, как протекают физические процессы в расширяющемся веществе при всем спектре значений  $\beta$ :  $0 \leq \beta < \infty$ .

Начнем рассмотрение с вопроса о термодинамическом равновесии на ранних этапах расширения. Полное равновесие имеет место, если характерное время  $t^*$  любых реакций, устанавливающих равновесие, меньше «гидродинамического» времени  $\tau$ , т. е. времени, протекающего с начала расширения:

$$t^* = \frac{1}{\sigma n} < \tau; \quad (20.5.3)$$

$n$  — плотность частиц,  $\sigma$  — сечение взаимодействия, скорость света равна единице.

В модели Фридмана для  $P = \varepsilon/3$  величина  $n \sim \frac{1}{V} \sim \tau^{-3/2} \sim T^3$  ( $T$  — температура). Поэтому  $n\tau \sim \tau^{-1/2} \sim T$ . Следовательно, если  $\sigma$  растет с энергией или, даже падает, но не быстрее, чем  $T$ , то неравенство (20.5.3) заведомо выполняется при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow \infty$  и в модели Фридмана на ранних этапах имеется полное термодинамическое равновесие \*).

\*) За исключением, может быть, гравитонов (см. раздел 11).

На казнеровском этапе расширения при покоящемся в системе отсчета веществе  $n\tau = \text{const}$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Если  $\sigma$  стремится к константе с ростом энергии или падает, возможны ситуации, когда при  $\tau \rightarrow 0$  нет равновесия между некоторыми сортами частиц или даже всеми частицами.

В общем случае, когда  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_0 \tau^{-\beta}$ , имеем

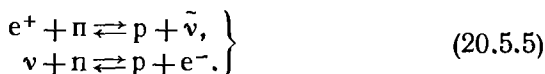
$$n\tau \sim \tau^{-\frac{\beta}{4} + 1}. \quad (20.5.4)$$

Если  $\beta < 4/3$ , то произведение  $n\tau \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ . В этом случае на самых ранних этапах расширения нет термодинамического равновесия и частицы свободны (если только сечение  $\sigma$  не стремится к бесконечности при  $T \rightarrow \infty$ , как  $\sigma \sim T^{\frac{4}{\beta} - 3}$  или быстрее). Если нет термодинамического равновесия, то, вследствие анизотропии деформации, давление анизотропно и необходимо рассматривать эффекты, описанные в § 1 этой главы. Однако для наиболее реального случая ( $\beta > 4$ ) равновесие имеет место, даже если сечение  $\sigma$  стремится к нулю при  $T \rightarrow \infty$  (но не быстрее, чем  $T^{\frac{4}{\beta} - 3}$  или, для больших  $\beta$ ,  $T^{-3}$ ).

Мы ограничимся здесь краткими замечаниями о возможности отсутствия термодинамического равновесия и перейдем к проблеме образования химических элементов в анизотропной космологии.

Если на ранней стадии расширения не было термодинамического равновесия между частицами, то, очевидно, нельзя сказать ничего определенного об исходе ядерных реакций и распространенности химических элементов в дозвездном веществе; все зависит от произвольного «начального» состава частиц материи. Мы будем предполагать в дальнейшем, что термодинамическое равновесие между известными частицами существует (до описанного в §§ 2—4 нарушения равновесия с нейтрино).

Повторим очень кратко описание процесса синтеза элементов, данное в разделе II. В горячей изотропной модели Фридмана процесс образования химических элементов идет в два этапа. На ранней стадии равновесие между нейтронами и протонами поддерживается реакциями слабого взаимодействия:



Характерное время этих реакций для высоких температур (время в сск,  $T_9 = T \text{ K}^\circ / 10^9$ ) есть (индекс «сл» — слабое взаимодействие)

$$\tau_{\text{сл}} \sim \frac{10^5}{T_9^5}. \quad (20.5.6)$$

Равновесное относительное содержание  $n$  и  $p$ :

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{равн}} = e^{-\frac{\Delta mc^2}{kT}} = e^{-\frac{1.8}{T_9}}, \quad (20.5.7)$$

где  $\Delta m$  — разность масс нейтрона и протона.

Изменение температуры в ходе расширения определяется соотношением (см. § 2 гл. 6), связывающим время, прошедшее с начала расширения, и температуру в этот момент:

$$\tau \approx \frac{10^2}{T_9^2}. \quad (20.5.8)$$

Как мы уже отмечали в гл. 6, время существенного изменения температуры плазмы в расширяющемся мире порядка  $\tau$ . Для термодинамического равновесия необходимо  $\tau_{\text{сл}} \ll \tau$ . В начале расширения, при  $T_9 > 10$ ,  $\tau_{\text{сл}} \ll \tau$  и устанавливается термодинамическое равновесие, отвечающее (20.5.3). Когда  $\tau_{\text{сл}}$  становится больше  $\tau$ , термодинамическое равновесие между  $n$  и  $p$  нарушается, реакции (20.5.5) уже не успевают проходить и отношение  $n/p$  «застывает». Приравнявая (20.5.6) и (20.5.8), находим температуру в момент застывания  $T_9 = 10$ . Подставляя это значение в (20.5.7), получаем

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{заст}} \approx e^{-1.8} \approx 0.2. \quad (20.5.9)$$

На втором этапе ядерных реакций в ходе дальнейшего расширения при более низких температурах ( $T_9 \approx 1$ ) становится возможным образование ядер легких элементов.

Большая часть нейтронов захватывается протонами и дает в результате  $\text{He}^4$  (а также некоторое очень малое количество  $\text{He}^3$ ,  $\text{Li}^7$  и  $\text{D}$ ). Если захватываются все нейтроны, то содержание  $\text{He}^4$  по весу

$$Y_{\text{max}} = \left(\frac{2n}{n+p}\right)_{\text{заст}} = \frac{2\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{заст}}}{1 + \left(\frac{n}{p}\right)_{\text{заст}}} \approx 0.33. \quad (20.5.10)$$

В действительности подробные расчеты (см. § 5 гл. 7) показывают, что не все нейтроны успевают захватиться до их распада и образуется несколько меньше гелия ( $Y \approx 0.3$ ), но оценка (20.5.10) вполне удовлетворительна.

В анизотропных однородных моделях скорость изменения плотности вещества со временем иная, чем в изотропной. Это приводит к другому исходу протекания ядерных реакций в расширяющемся веществе и, как следствие, к иному химическому составу первичного вещества.

Простейшие анизотропные модели Гекмана — Шюкинга с плоским сопутствующим пространством (критической плотностью ве-



щества  $\rho_0 = 10^{-29} \text{ г/см}^3$  для сегодняшнего момента) характеризуются одним параметром — моментом времени  $\theta$ , который отделяет период резко анизотропной деформации от периода практически изотропного расширения. Очевидно, что если  $\theta < 1 \text{ сек}$ , то все реакции, важные для образования химических элементов, идут на стадии, когда модель расширяется уже по фридмановскому закону, и исход ядерных реакций будет такой же, как во фридмановской модели. Иной исход будет для анизотропной модели с  $\theta > 1 \text{ сек}$ .

Первые расчеты были сделаны Хоукингом и Тейлором (1966) и Торном (1967). Они были проведены в «канонических» предположениях о частицах (нет неизвестных частиц, и нет большого лептонного заряда) и без учета неравновесных процессов с нейтрино (см. §§ 2—4 этой главы). Проведем оценку количества синтезированного гелия в этих предположениях. На стадии  $t < \theta$  для  $\tau$  вместо (20.5.8) будем иметь

$$\tau = \frac{10^9}{T^3 \theta^{1/2}}. \quad (20.5.11)$$

Эта формула легко получается из (19.1.4) после подстановки в нее  $\varepsilon = \rho c^2 = \sigma T^4$  и решения относительно времени.

Приравнявая  $\tau$  из (20.5.11) и  $\tau_{\text{сд}}$  из (20.5.6), находим температуру закалки  $T_0 = 10 \theta^{1/4}$  (формула справедлива для  $\theta \geq 1 \text{ сек}$ ). После этого для закалки  $(n/p)_{\text{заcl}}$  находим

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{заcl}} = e^{-1.5 \theta^{-1/4}}. \quad (20.5.12)$$

В дальнейшем нейтроны захватываются протонами.

Подставляя (20.5.12) в (20.5.10), находим, что в анизотропных моделях с  $\theta > 1 \text{ сек}$  содержание  $\text{He}^4$  практически составляет 100%. Однако при очень больших параметрах анизотропии,  $\theta > 10^{11} \text{ сек}$ , расширение на стадии захвата нейтронов идет столь быстро [время  $\tau$  в формуле (20.5.11) при фиксированном  $T$  и очень большом  $\theta$  мало], что DD-реакции и захват не успевают пройти. По расчетам Торна (1967), при  $\theta > 10^{11} \text{ сек}$  имеет место почти полное отсутствие  $\text{He}^4$  в первичном веществе. В целом зависимость содержания  $\text{He}^4$  (а также D и  $\text{He}^3$ ) в дозвездном веществе от параметра  $\theta$  показана на рис. 56.

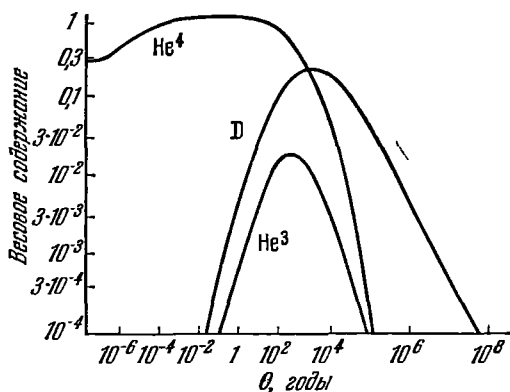


Рис. 56. Относительная весовая концентрация  $\text{He}^4$ , D и  $\text{He}^3$  в дозвездном веществе как функция параметра анизотропии  $\theta$ .

В дальнейшем нейтроны захватываются протонами. Подставляя (20.5.12) в (20.5.10), находим, что в анизотропных моделях с  $\theta > 1 \text{ сек}$  содержание  $\text{He}^4$  практически составляет 100%. Однако при очень больших параметрах анизотропии,  $\theta > 10^{11} \text{ сек}$ , расширение на стадии захвата нейтронов идет столь быстро [время  $\tau$  в формуле (20.5.11) при фиксированном  $T$  и очень большом  $\theta$  мало], что DD-реакции и захват не успевают пройти. По расчетам Торна (1967), при  $\theta > 10^{11} \text{ сек}$  имеет место почти полное отсутствие  $\text{He}^4$  в первичном веществе. В целом зависимость содержания  $\text{He}^4$  (а также D и  $\text{He}^3$ ) в дозвездном веществе от параметра  $\theta$  показана на рис. 56.

Но в реальном случае в анизотропных моделях надо учесть процессы с нейтрино, рассмотренные в предыдущих параграфах данной главы. В этом случае формула (20.5.11) справедлива только до момента закалки. После этого энтропия возрастает, и реальный момент изотропизации  $\theta^*$  не совпадает с  $\theta$ . Так, для параметра  $p_1 = -1/3$  в модели Казнера (см. предыдущие параграфы)

$$\theta^* \text{ сек} \approx (\theta \text{ сек})^{7/10}. \quad (20.5.13)$$

Само наличие направленных потоков энергичных нейтрино, влияя на зависимость  $\tau$  от  $T$  и  $\theta$ , как показывают грубые прикидки при простейших предположениях, не меняет существенно процессов, приводящих к синтезу  $\text{He}^4$ .

Согласно грубым оценкам, если принять во внимание все эти факты, кривая для  $\text{He}^4$  на рис. 56 качественно не меняется, ее правый склон немного смещается влево (под  $\theta$  подразумевается реальный момент изотропизации, т. е. мы здесь и в дальнейшем опускаем звездочку у  $\theta$ ). Однако процессы взаимодействия потоков нейтрино с образовавшимся  $\text{He}^4$  не могут привести к образованию заметного количества других легких элементов (конкретные расчеты, к сожалению, отсутствуют).

Оценки образования  $\text{He}^4$ , проведенные для случая более сложных анизотропных моделей, с искривленным трехмерным пространством, для плотности вещества меньше критической, дают аналогичные изменения содержания гелия в дозвездном веществе. В целом же качественно картина остается прежней. Согласно данным наблюдений, как мы уже видели в § 6 гл. 7, количество  $\text{He}^4$  в дозвездном веществе не более 30% и, вероятно, близко к этому значению. Таким образом, химический состав первичного вещества накладывает сильные ограничения на параметр изотропизации  $\theta^*$ .

Во всех расчетах, о которых говорилось выше, предполагалось, что материя поконит относительно системы отсчета модели.

Однако материя в общем случае движется относительно системы отсчета (см. § 5 гл. 19). Это приводит к возникновению, по крайней мере, еще одного параметра в выражениях типа (20.5.11) и (20.5.12).

Мы рассмотрим для примера самый простой случай: до момента  $t = \theta$  плотность энергии меняется по закону  $\varepsilon = \varepsilon_0 \tau^{-\beta}$ , после этого момента решение изотропизуется и выходит на фридмановское решение.

---

\*) Здесь мы не рассматриваем возможного влияния гипотетических слабо-взаимодействующих частиц (например, гравитонов) и ограничиваемся простейшими предположениями о свойствах нейтрино. Учет всех этих фактов качественно не изменит заключений.

Тогда для  $\tau$  будем иметь

$$\tau = \frac{10^{3k}}{\theta^{\frac{3k}{2}-1} T_9^{3k}}, \quad (20.5.14)$$

где  $k = \frac{4}{3\beta}$  \*).

Далее находим

$$T_{\text{заст}} = 100^{\frac{1,5k-1}{5-3k}},$$

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{заст}} = \exp\left(-1,50^{-\frac{1,5k-1}{5-3k}}\right). \quad (20.5.15)$$

Модели с покоящимся веществом соответствуют  $k=1$ . В принципе возможны модели с  $0 \leq k \leq \infty$ . Заметим, что при  $k > 1$  условия образования  $\text{He}^4$  еще более благоприятны, чем при  $k=1$ . Для  $k \rightarrow \frac{5}{3}$  температура закалки  $T \rightarrow \infty$ . При  $k > \frac{5}{3}$  вообще не было периода равновесия между нейтронами и протонами, и содержание  $\text{He}^4$  в дозвездном веществе определяется начальными условиями для горячей Вселенной.

Хотя в принципе возможны любые значения  $k$ , но наиболее вероятно, как мы уже отмечали в начале параграфа, значения  $0 < k \leq \frac{1}{3}$ , соответствующие  $4 \leq \beta < \infty$ . Такое  $k$  соответствует однородным анизотропным моделям, в которых однородное движение вещества с релятивистской скоростью получается как результат неустойчивости модели по отношению к возникновению такого движения.

Для  $k = \frac{1}{3}$  имеем

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{заст}} = \exp(-1,50^{1/3}); \quad (20.5.16)$$

для  $k \rightarrow 0$

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{заст}} = \exp(-1,50^{1/3}). \quad (20.5.17)$$

Из этих формул видно, что в анизотропных моделях с движением вещества содержание гелия в первичном веществе будет меньше процента, если  $\theta > (10^3 - 10^4)$  сек.

Итак, в анизотропных моделях возможны только три «стабильных» значения распространенности гелия в дозвездном веществе:

1. Около 30%  $\text{He}^4$  для  $\theta < 1$  сек.
2. Почти 100%  $\text{He}^4$  для моделей с покоящимся веществом и с  $100 \text{ сек} < \theta < 10^8 \text{ сек}$ .
3. Отсутствие  $\text{He}^4$  для моделей с покоящимся веществом и с  $\theta \gg 10^8 \text{ сек}$  и для моделей с движущимися веществом и  $\theta \gg 10^3 \text{ сек}$ .

\*) Мы надеемся, что читатель не будет путать эти  $k$  и  $\beta$  с теми, которые использовались в §§ 1 и 3 этой главы.

О том, что дают наблюдения для химического состава первичного вещества, говорилось в § 6 гл. 7. С уверенностью можно сказать, что содержание  $\text{He}^4$  в дозвездном веществе меньше 30%. Поэтому все модели, приводящие к большему содержанию  $\text{He}^4$ , заведомо противоречат наблюдениям. Однако и модели, дающие  $\text{He}^4 < 10-15\%$ , следует считать маловероятными, особенно в том случае, если они дают относительно много D.

Естественно, в этом параграфе мы не говорим об ограничениях на анизотропные модели, даваемые наблюдениями степени изотропии реликтового излучения (об этом см. §§ 8, 9 гл. 21).

## ОБЩИЙ АНАЛИЗ ОДНОРОДНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

## § 1. Понятие однородности космологической модели

До сих пор рассматривались анизотропные космологические модели с трехмерным евклидовым (плоским) пространством. Такое пространство заведомо однородно по своим геометрическим свойствам. В этом пространстве рассматривалось простейшее однородное распределение и движение материи. Однако такие простейшие модели далеко не исчерпывают все возможные типы однородных (но анизотропных, вообще говоря) пространств.

Мы переходим к систематическому рассмотрению других, более сложных случаев.

Понятие пространственной однородности интуитивно кажется очевидным: требуется «одинаковость» свойств модели во всех точках трехмерного пространства в фиксированный момент времени.

Во всех точках должны быть одинаковы как геометрические свойства трехмерного пространства (его кривизна), так и деформация пространства с течением времени, его вращение, распределение и движение в нем материи.

Ясно, что понятие однородности связано с выбором системы отсчета. Если свойства однородности выполнены в некоторой системе отсчета, то переход к другой системе нарушит эти свойства. Таким образом, вопрос — однородна ли модель, заключается в том, существует ли такая система отсчета, в которой выполнены условия однородности.

Попытаемся дать математическую формулировку свойства однородности.

В математике понятие однородности пространства давно исследовано [см., например, книгу Эйзенхарта (1947)]. В применении к ОТО и космологии это понятие также исследовано многими авторами.

Сошлемся здесь на работы Тауба (1951), Зельманова (1959б), Петрова (1966), Гекмана и Шюкинга (1962), Шюкинга и Гекмана (1958), Хоукинга и Эллис (1973), Дорошкевича (1968), Беллинского, Лифшица и Халатникова (1970), Грищука (1967а, в).

Остановимся сначала только на геометрических свойствах трехмерного пространства, важных для рассмотрения однородных моделей. Геометрические свойства трехмерного пространства в двух областях, скажем в окрестностях точек  $A$  и  $B$ , будут одинаковы, если возможно в каждой из этих окрестностей выбрать координатные сетки  $x$  и  $x^*$  соответственно так, чтобы метрические тензоры были одинаковы, т. е. чтобы функциональная зависимость  $g_{\alpha\beta}(x)$  от  $x^1, x^2, x^3$  в окрестности точки  $A$  была точно такая же, как  $g_{\alpha\beta}(x^*)$  от  $x^{*1}, x^{*2}, x^{*3}$  в окрестности точки  $B$ .

Пусть задана система координат  $x$  во всем пространстве. В точке  $A$  известна метрика  $g_{\alpha\beta}(x)$ . Для одинаковости геометрических свойств пространства во всех других точках надо, чтобы в окрестности каждой из них возможно было перечертить координаты, т. е. сделать преобразование, зависящее от координат точки  $B$  ( $b^1, b^2, b^3$ ):

$$x^* = x^*(x, B), \quad (21.1.1)$$

такое, чтобы функции  $g_{\alpha\beta}(x)$  и  $g_{\alpha\beta}(x^*)$  одинаково зависели от своих аргументов. Можно выразить то же самое и другими словами. Преобразование (21.1.1) при тождественности функций  $g_{\alpha\beta}(x)$  от  $x$  и  $g_{\alpha\beta}(x^*)$  от  $x^*$  описывает сдвиг пространства в самом себе, при котором точка с координатами  $x^1, x^2, x^3$  перемещается в другую точку с координатами  $b^1, b^2, b^3$ ; сетка координат преобразуется при этом по закону (20.1.1), и метрика  $g_{\mu\nu}$  остается неизменной, но начало координат, например, лежит уже в другой точке. Для однородности необходима возможность каждую точку пространства совмещать таким образом с любой другой.

Если в трехмерном пространстве, помимо его метрики, заданы другие тензоры, векторы или скаляры (например, тензор энергии-импульса материи), то и они должны обладать аналогичным свойством, т. е. при преобразовании (21.1.1) функциональная зависимость величин от новых координат должна быть такой же, как и от старых.

В четырехмерном мире для выполнения свойства однородности на трехмерных пространственных сечениях необходимо выполнение условия тождественности функциональной зависимости при преобразовании (21.1.1) для величин, описывающих не только кривизны трехмерного пространства, но и кривизну четырехмерного пространства.

Заметим, что если величины, характеризующие четырехмерное пространство-время, однородны на трехмерных пространственных сечениях, то автоматически будет однороден на тех же сечениях и тензор энергии-импульса, так как он выражается с помощью уравнений Эйнштейна через тензор кривизны четырехмерного пространства-времени.

Пусть трехмерное пространство однородно, тогда в окрестности каждой точки его можно смещать в любом направлении на малый

вектор  $\xi^z$ . Этим обеспечивается возможность совмещения данной точки с любой близлежащей. При таком смещении пространства заданием вектора  $\xi^z$  в данной точке и условием однородности в остальных точках смещение однозначно определяется, т. е. определяется вектор  $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x)$  как функция координат. Оказывается, вектор  $\xi^\alpha$  должен удовлетворять уравнениям

$$\xi_{\alpha, \beta} + \xi_{\beta, \alpha} = 0, \quad (21.1.2)$$

где запятая обозначает ковариантное дифференцирование. Вектор  $\xi_\alpha$  носит название вектора Киллинга, а уравнения (21.1.2) называются уравнениями Киллинга. Очевидно, в однородном трехмерном пространстве, задавая в окрестности некоторой точки три некопланарных смещения пространств, можно получить три независимых семейства векторов Киллинга.

Структура однородного пространства или, иными словами, разные типы однородных пространств определяются структурой полей векторов Киллинга. Классификация однородных трехмерных пространств по структуре полей векторов Киллинга была проведена Бианки. Мы дадим здесь эту классификацию применительно к космологии в несколько иной форме, приведенной, например, в работах Эллис и Мак-Коллама (1969), Белинского, Лифшица, Халатникова (1970).

На языке математики описанная выше пространственная однородность космологической модели формулируется следующим образом.

Космологическая модель называется пространственно-однородной, если допускает трехпараметрическую [зависимость от  $b^1, b^2, b^3$  в преобразованиях (21.1.1)] группу движений (т. е. преобразований с сохранением функционального вида метрики), действующую транзитивно (т. е. позволяющую совместить каждую точку с каждой) на пространственноподобных трехмерных гиперповерхностях. Оказывается [см., например, Петров (1966) и упомянутую работу Эллис и Мак-Коллама], что трехмерные сечения, на которых осуществляется однородность, геодезически параллельны, т. е. близкие сечения везде отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии. Поэтому, если провести мировые линии, ортогональные во всех точках к этим сечениям, и выбрать эту конгруэнцию линий за систему отсчета, то метрика в такой системе может быть записана в форме

$$ds^2 = dt^2 + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (21.1.3)$$

иными словами, такая система отсчета «синхронна» по терминологии Лифшица и Халатникова. Трехмерные пространства этой системы отсчета при  $t = \text{const}$  мы выбрали как однородные пространства. Известно (см. ТТ и ЭЗ), что если  $g_{0\alpha} = 0$ , то система отсчета не вращается. Это, однако, вовсе не означает, что материя в однородной космологической модели обязательно не вращается. Ведь материя может двигаться относительно данной системы отсчета. Конечно, в

однородной модели и движение материи должно быть однородным. Как мы увидим далее, при этом не исключается и движение материи с вращением.

Сформулированные выше условия однородности получили название «групповой» однородности. Требование однородности можно было бы сформулировать и по-другому.

Пусть расширение материи в космологической модели начинается от сингулярности. Будем отсчитывать время в каждой точке материи как собственное время этого элемента, начиная от сингулярности. Назовем теперь однородными такие модели, в которых для каждого элемента среды в один и тот же момент собственного времени Вселенная выглядит по всем свойствам точно так же, как и для любого другого наблюдателя в тот же момент его собственного времени. Однако, как заметил Гришук, при выполнении уравнений Эйнштейна этот критерий однородности сводится к «групповому», т.е. все такие модели однородны и в «групповом» смысле \*). На еще одном критерии однородности мы остановимся несколько позже.

Вернемся к групповому критерию. Рассмотрим однородные трехмерные пространства моделей (21.1.3). Так как они однородны, то в них имеются поля векторов Киллинга, удовлетворяющие (21.1.2). Наличие полей векторов Киллинга в трехмерных пространствах позволяет, как показано в цитированных выше работах, записать пространственную часть метрики (21.1.3) в виде

$$dl^2 = \gamma_{ab} (e_a^\alpha dx^\alpha) (e_b^\beta dx^\beta). \quad (21.1.4)$$

Мы условимся в этой главе, что латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, как и греческие. Здесь  $\gamma_{ab} = \gamma_{ab}(t)$  зависят только от  $t$ , величины вида  $e_a^\alpha = e_a^\alpha(x)$  зависят только от пространственных координат, а  $e_a^\alpha dx^\alpha$  — три дифференциальные формы, не меняющиеся при движении, т.е. не меняющие своего вида при преобразовании (21.1.1). Латинский индекс в выражении  $e_a^\alpha$  нумерует дифференциальную форму. Независимость выражений в скобках (21.1.4) при преобразовании (21.1.1) и обеспечивает выполнение одинаковой функциональной зависимости  $g_{\mu\nu}(x)$  от  $x$  и  $g_{\mu\nu}(x^*)$  от  $x^*$ . Далее, оказывается, что для выполнения неизменности дифференциальных форм  $e_a^\alpha dx^\alpha$  при преобразовании (21.1.1) необходимо, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$e_a^\alpha e_b^\beta (\partial_\beta e_a^\alpha - \partial_\alpha e_b^\alpha) = C_{ab}^\alpha. \quad (21.1.5)$$

Здесь выражения вида  $e_a^\alpha$  определяются из соотношений  $e_a^\alpha e_b^\beta = \delta_{ab}^\alpha$ ;  $e_a^\alpha e_b^\beta = \delta_{ab}^\alpha$ ,  $C_{ab}^\alpha$  — константы. Из формул (21.1.5) ясно, что

$$C_{ab}^\alpha = C_{ba}^\alpha. \quad (21.1.6)$$

---

\*) Обратное, вообще говоря, неверно, так как групповой критерий не предполагает обязательно наличия сингулярности.



Кроме того, должно выполняться тождество

$$C_{ab}^f C_{fc}^d + C_{bc}^f C_{fa}^d + C_{ca}^f C_{fb}^d = 0. \quad (21.1.7)$$

В заданном трехмерном однородном пространстве выбор векторов  $e_a^a$  не однозначен, точно так же как и векторов Киллинга. Линейная комбинация  $A_a^b e_b^a$  с постоянными  $A_a^b$ , очевидно, снова удовлетворяет (21.1.5), но с другими постоянными  $C_{ab}^c$ . Классификация однородных пространств состоит в составлении списка констант  $C_{ab}^c$ , удовлетворяющих (21.1.5) и несводимых друг к другу допустимыми преобразованиями.

Анализ этого вопроса показывает, что такой «базисный» набор может быть представлен в виде табл. XVI.

ТАБЛИЦА XVI

Значения структурных констант для разных типов Бианки

| Тип по классификации Бианки | $C_{12}^2 = C_{13}^3$ | $C_{23}^1$ | $C_{31}^2$ | $C_{12}^3$ | Тип по классификации Бианки | $C_{12}^2 = C_{13}^3$ | $C_{23}^1$ | $C_{31}^2$ | $C_{12}^3$ |
|-----------------------------|-----------------------|------------|------------|------------|-----------------------------|-----------------------|------------|------------|------------|
| I                           | 0                     | 0          | 0          | 0          | V                           | 1                     | 0          | 0          | 0          |
| II                          | 0                     | 1          | 0          | 0          | IV                          | 1                     | 0          | 0          | 1          |
| VII <sub>0</sub>            | 0                     | 1          | 1          | 0          | VII <sub>h</sub>            | $a^*)$                | 0          | 1          | 1          |
| VI <sub>0</sub>             | 0                     | 1          | -1         | 0          | III                         | 1                     | 0          | 1          | -1         |
| IX                          | 0                     | 1          | 1          | 1          | VI <sub>h</sub>             | $a \neq 1$            | 0          | 1          | -1         |
| VIII                        | 0                     | 1          | 1          | -1         |                             |                       |            |            |            |

\*) Параметр  $a$  пробегает все положительные значения.

Компоненты  $C_{ab}^c$ , отличающиеся от приведенных в таблице порядком нижних индексов, имеют, согласно (21.1.6), противоположный знак. Остальные компоненты фундаментального набора  $C_{ab}^c$  тождественно равны нулю.

Решение уравнений Киллинга для операторов группы позволяет найти явную зависимость метрики от пространственных координат. Зависимость метрик всех типов от пространственных координат можно найти, например, у Петрова (1966). Мы здесь не будем приводить полностью эти результаты и отметим только важнейшие случаи. Трехмерные пространства моделей типа I всегда являются плоскими пространствами, но тензор скоростей деформации пространственных сечений, вообще говоря, анизотропен. Метрика для этого типа моделей записывается в виде

$$ds^2 = dt^2 + g_{\alpha\beta}(t) dx^\alpha dx^\beta, \quad (21.1.8)$$

где  $g_{\alpha\beta}$  — функции только  $t$ .

Движениями группы здесь являются параллельные переносы в трехмерном пространстве вдоль координатных линий декартовой системы координат. Свойства моделей (21.1.8) подробно рассмотрены в предыдущих главах. Модели с плоским трехмерным пространством содержатся также как частный случай в типе VII<sub>0</sub>, но в этих моделях деформация пространства иная (см. следующий параграф). Трехмерные пространства моделей типа V являются пространствами постоянной отрицательной кривизны, но деформирующимися с течением времени, вообще говоря, анизотропно.

Пространства постоянной отрицательной кривизны содержатся также в моделях типа VII<sub>h</sub>.

Наконец, трехмерные замкнутые пространства постоянной положительной кривизны содержатся в моделях типа IX.

Приведенная выше классификация охватывает все однородные пространства согласно «групповому» определению, приведенному на стр. 569. Грищук (1970) заметил, что следует называть пространственно-однородными модели не только, допускающие трехпараметрическую группу движений, действующих транзитивно на трехмерных пространственноподобных гиперповерхностях, но и допускающие на этих гиперповерхностях группу движений большей подвижности (т. е. 4-или 6-параметрическую \*), даже если она не содержит в качестве подгруппы трехпараметрическую (на трехмерных гиперповерхностях) и поэтому не попала в приведенную выше классификацию.

Действительно, увеличение числа параметров группы только увеличивает симметрию пространства (добавляя, например, к возможности трансляции еще и вращение) и вовсе не нарушает однородности.

Анализ этого вопроса показал, что такое расширение понятия однородности заставляет добавить к девяти типам Бианки лишь космологическую модель следующего вида:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dz^2 - b^2(t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (21.1.9)$$

Трехмерное пространство этой модели является топологическим произведением сферы на прямую. Модели такого вида были рассмотрены Новиковым (1961), Дорошкевичем (1965), Зельдовичем (1965а), Грищуком (1967а), Рубаном (1971) и другими. Эта модель допускает 4-параметрическую группу движений, действующую транзитивно на трехмерных пространственных сечениях. В дальнейшем, говоря о групповом критерии однородности, мы будем понимать его в указанном расширенном смысле и включать в рассмотрение модель (21.1.9).

---

\*) Пятипараметрическая полная группа движений на трехмерных гиперповерхностях невозможна [см. Петров (1966)].

## § 2. Дифференциальный критерий однородности

В литературе встречается критерий однородности, отличный от группового. Он был предложен Зельмановым (1959б) и получил название дифференциального. Согласно этому критерию, модель считается однородной, если трехмерные ковариантные производные от всех скалярных, векторных и тензорных полей по всем пространственным координатам равны нулю.

На первый взгляд этот критерий кажется столь же естественным, как и групповой критерий. Однако дифференциальный критерий накладывает на модели более жесткие требования, чем групповой. Действительно, этот критерий требует, чтобы свойства Вселенной были не только одинаковы в разных точках трехмерного пространства в один и тот же момент времени, но и чтобы при переходе от одной точки трехмерного пространства к другой (в фиксированный момент времени) ориентация векторных и тензорных полей не менялась.

Для пояснения различия между двумя критериями мы приведем пример, который является упрощением примера из работы Грищука (1971).

Пусть в плоском трехмерном пространстве имеется неизменный во времени поток пробных частиц (не создающих поле тяготения). Зададим скорости частиц в декартовой системе координат формулами

$$\left. \begin{aligned} v_x &= a \cos (Az + B), \\ v_y &= a \sin (Az + B), \\ v_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.2.1)$$

Здесь  $a$ ,  $A$ ,  $B$  — постоянные. По абсолютной величине скорость везде одинакова. Векторы скорости лежат в плоскостях  $z = \text{const}$ , в каждой плоскости скорость не зависит от координат  $x$ ,  $y$ . При переходе от одного сечения  $z = \text{const}$  к другому  $z' = \text{const}$  вектор скорости поворачивается, меняется его ориентация. Согласно дифференциальному критерию, эта модель неоднородна, так как производная от вектора скорости по  $z$ -координате отлична от нуля (вектор поворачивается). Согласно групповому критерию, эта модель однородна, ее можно сдвигать в трехмерном пространстве так, чтобы поле скоростей переходило само в себя и каждую точку можно было совместить с каждой. Модель можно сдвигать параллельно вдоль осей  $x$  и  $y$ , а также вдоль оси  $z$ , поворачивая при этом вокруг оси  $z$  на угол  $\alpha = A\Delta z$ . Такая группа движений принадлежит к типу VII по классификации Бианки.

На этом примере наглядно видно различие между критериями.

Подчеркнем, что иногда в нерелятивистской механике поле векторов или тензоров в плоском пространстве называют однородным только в том случае, если производные от компонент тензора по декартовым координатам равны нулю, т. е. когда выполняется

дифференциальный критерий. Нас интересует одинаковость свойств всех точек пространства, а не то, поворачиваются ли векторы и тензоры при переходе из одной точки в другую точку трехмерного пространства.

В приведенном выше примере свойства всех точек пространства явно одинаковы и модель следует считать однородной. Мы поэтому будем в дальнейшем понимать под однородностью однородность в групповом смысле, если не делается специальных оговорок.

Что касается моделей, удовлетворяющих дифференциальному критерию, то Гришук показал, что все такие модели должны быть либо изотропными моделями Фридмана, либо анизотропными моделями с плоским пространством вида (21.1.8), либо моделями вида (21.1.9), либо, наконец, моделями, пространство которых является произведением псевдосферы на прямую, т. е.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dz^2 - b^2(t) [d\theta^2 + \text{sh}^2 \theta d\theta^2]. \quad (21.2.2)$$

Эта модель содержится как частный случай в типе III моделей по классификации Бианки. Таким образом, класс дифференциально однородных моделей уже класса моделей с групповой однородностью, причем все дифференциальные модели однородны и в групповом смысле, если понимать последний так, как это сформулировано в конце предыдущего параграфа.

В заключение параграфа вернемся к примеру векторного поля (21.2.1) в плоском пространстве. Этот пример методически интересен еще и тем, что наглядно демонстрирует, как в одном и том же пространстве (в данном случае в трехмерном плоском) разное задание векторных полей (в данном случае поля скоростей пробных частиц) может приводить к тому, что они будут относиться к разным типам Бианки. Модель с полем (21.2.1) относится, как уже отмечалось, к типу VII; так как при сдвиге по оси  $z$  все пространство надо поворачивать на угол  $\alpha = Az$ . Если же в трехмерном пространстве задать поле скоростей, везде одинаковых и параллельных между собой, то модель будет относиться к типу I. Таким образом, для классификации важны не только геометрические свойства пространства, но, вообще говоря, и свойства всех рассматриваемых векторных и тензорных полей.

### § 3. Динамические свойства однородных моделей вблизи сингулярности

Обратимся теперь к проблеме эволюции однородных космологических моделей во времени.

Для однородных космологических моделей эта задача сильно упрощается по сравнению с общим случаем, так как уравнения Эйнштейна сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для получения этих уравнений в каждой точке трех-

мерных пространственных сечений вводят тройки реперных векторов  $e_\alpha^a$ , где  $e_\alpha^a$  — те же самые величины, которые входят в выражение (21.1.4). После этого все трехмерные векторные и тензорные поля проектируются на эти реперы. Например:

$$T^{ab} = e_\alpha^a e_\beta^b T^{\alpha\beta}; \quad R^{\alpha\alpha} = e_\alpha^a R^{0a}; \quad u^a = e_\alpha^a u^\alpha. \quad (21.3.1)$$

Поднятие и опускание индексов производится с помощью матрицы  $\gamma_{ab}$  или обратной ей матрицы  $\gamma^{ab}$  ( $\gamma^{ab} \gamma_{bc} = \delta_c^a$ ):

$$T_{ab} = T^{cd} \gamma_{ac} \gamma_{bd}. \quad (21.3.2)$$

Прodeлав такое проектирование уравнений Эйнштейна, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [вывод их см. Шюкинг (1963)]:

$$-\frac{d}{dt} D_a^a - D_a^b D_b^a = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_0^0 - \frac{1}{2} T \right), \quad (21.3.3)$$

$$-D_b^c (C_{ca}^b - \delta_a^b C_{fc}^f) = \frac{8\pi G}{c^4} T_a^0, \quad (21.3.4)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d}{dt} (V \bar{\gamma} D_a^b) + \gamma^{bc} (a_{af}^d a_{cd}^f + C_{af}^d a_{ac}^f) = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_a^b - \frac{1}{2} \delta_a^b T \right). \quad (21.3.5)$$

Здесь обозначено:

$$D_{ab} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \gamma_{ab}, \quad (21.3.6)$$

$$a_{ab}^c = \frac{1}{2} (C_{ab}^c + C_{bd}^f \gamma_{fa}^d \gamma^{cd} - C_{da}^f \gamma_{fb}^d \gamma^{dc}). \quad (21.3.7)$$

К этому добавляется уравнение состояния, не нарушающее однородности (в том числе и для бесстолкновительных частиц).

Все величины в (21.3.3), (21.3.5) зависят только от времени и не зависят от пространственных координат,  $C_{ab}^c$  — константы. Подставляя в (21.3.3) — (21.3.5) значения структурных констант из табл. XVI, получаем уравнения, описывающие эволюцию во времени моделей разных типов.

Остановимся на анализе поведения моделей вблизи сингулярности. Поставим следующий вопрос: является ли асимптотика решения вблизи сингулярности  $t \rightarrow 0$  вида (18.3.6) — (18.3.7) применимой и в общем случае анизотропных моделей с искривленным однородным пространством, т. е. представляет ли собой решение вблизи сингулярности расширение по двум направлениям и сжатие по третьему (рассматривается расширение модели от сингулярности)

в общем случае? Анализ этого вопроса проделан Лифшицем и Халатниковым (1963а, б), а затем Дорошкевичем (1968), Грищуком (1970), Эллис и Мак-Колламом (1969) и Мак-Колламом (1971).

Обратимся к уравнениям (21.3.3) — (21.3.5).

Уравнение (21.3.3) не содержит структурных констант  $C_{ab}$ , определяющих тип модели по Бианки. Оно не отличается от уравнения для моделей с плоским пространством, подробно разобранных выше.

Уравнения (21.3.4) не содержат вторых производных по времени от искомым величин  $\gamma_{ab}(t)$ . Они лишь накладывают ограничения на выбор возможных начальных условий. Эти уравнения [см., например, Петров (1966)] не участвуют непосредственно в интегрировании по времени: если они удовлетворяют начальным условиям, а остальные уравнения выполнены в четырехмерной области, то и уравнения (21.3.4) автоматически выполняются в той же области. Структурные константы  $C_{ab}$  существенно входят в уравнения (21.3.5). Рассмотрим эти уравнения.

Предположим, что асимптотика решения вблизи сингулярности носит характер (18.3.6), (18.3.7). Слагаемые в первом члене уравнений (21.3.5) имеют порядок  $\sim 1/t^2$ . Для тензора энергии-импульса можно повторить сказанное в § 3 гл. 18: имеется, вообще говоря, вакуумная стадия вблизи сингулярности, когда членами в правой части (21.3.5) можно пренебречь при  $t \rightarrow 0$ , так как они имеют меньший показатель степени в знаменателе, чем двойка.

Выполнение условий вида (18.3.6), (18.3.7) обеспечивает выполнение уравнения (21.3.3) и обращение в нуль первого члена уравнений (21.3.5). Что касается членов в (21.3.5), содержащих структурные константы  $C_{ab}$ , то здесь, вообще говоря, могут появиться члены, имеющие более высокий порядок, чем  $1/t^2$ . Это связано с тем, что в режиме (18.3.6), (18.3.7) вдоль одного направления масштабный фактор входит с отрицательной степенью  $t$ . Пусть это будет, например, направление вдоль репера с индексом 1. Тогда появляется член вида  $C_{23}^{12} \gamma_{11}^2 / \gamma$ , где  $\gamma$  — определитель матрицы  $\gamma_{ab}$ . Этот член имеет порядок  $\sim t^{-2(p_2 + p_3 - p_1)} = t^{-2(1 + 2 + p_1)}$ . Величина в скобках в показателе степени больше единицы, т. е. весь член имеет порядок больше, чем  $1/t^2$ , и уравнения (21.3.5) не выполняются. Для выполнения этих уравнений необходимо, чтобы была равна нулю константа  $C_{ab}^c (a \neq b \neq c)$ , соответствующая реперу с индексом  $c$ , вдоль которого масштабный фактор имеет отрицательный показатель степени в зависимости от  $t$ . Так, при  $t \rightarrow 0$  отрицательный показатель степени у  $t$  вдоль направления репера с индексом 1 возможен лишь в том случае, если  $C_{23}^{12} = 0$  и т. д.

Теперь одного взгляда на табл. XVI достаточно, чтобы убедиться, что в первых семи типах моделей есть по крайней мере одна константа  $C_{ab}^c (a \neq b \neq c)$  (последние три столбца таблицы), равная нулю. Это делает возможным установление при  $t \rightarrow 0$  в этих типах асимпт-

тотики вида (18.3.6), (18.3.7) с отрицательными показателями степени вдоль соответствующего направления.

Таким образом, подобная казнеровская асимптотика решения является общей для первых семи типов при условии  $T_0^\alpha = 0^*$ ).

Разумеется, при приближении к сингулярности еще до установления асимптотического режима типа Казнера свойства решения уравнений Эйнштейна более сложные, чем для модели с плоским пространством. Подобно тому как в модели с плоским пространством, но с магнитным полем члены в уравнениях с тензором энергии-импульса запрещали асимптотику с отрицательным показателем степени у  $t$  вдоль поля (см. § 2 гл. 18), так и члены с кривизной пространства заставляют решение перестраиваться при  $t \rightarrow 0$  до тех пор, пока не установится режим Казнера с  $p_i < 0$  в «разрешенном» направлении. Мы подробнее остановимся на промежуточных этапах в следующих параграфах.

Оговоримся сразу, что решения уравнений ОТО для первых семи типов моделей допускают в качестве частных вырожденных случаев и иную асимптотику вблизи сингулярности, отличную от казнеровской. Таковы, например, фридмановские решения. Но все эти случаи вырождены, требуют специальных начальных условий. Мы их детально рассматривать не будем, за исключением модели Фридмана (для рассмотрения этого случая есть особые причины, см. предыдущие разделы книги), отсылая за подробностями к цитированным в этом параграфе работам.

Типы моделей VIII и IX не допускают казнеровской асимптотики вблизи сингулярности, так как в этих моделях все структурные константы вида  $C_{ab}^c (a \neq b \neq c)$  отличны от нуля. Эволюция моделей этого типа будет рассмотрена в следующих параграфах.

#### § 4. Модель «перемешанного» мира

Вернемся к одному из вопросов, поставленных во введении к разделу IV. Как там отмечалось, однородность и изотропия Вселенной в больших масштабах требуют специального объяснения. Если считать, что однородность возникает в результате каких-то физических процессов в начале космологического расширения, то для этого требуется, как минимум, чтобы точки, разнесенные на расстояние, соответствующее масштабу однородности, были причинно связаны на момент протекания выравнивающих процессов, т. е. чтобы сигнал, идущий со скоростью света, успел пройти это расстояние за время, протекшее с начала расширения. Конечно, этого условия отнюдь не достаточно для выравнивания неоднородностей;

\*) Заметим, что в случае моделей, в которых материя движется относительно системы отсчета,  $T_0^\alpha \neq 0$  и могут появиться слагаемые, нарушающие казнеровскую асимптотику (18.3.6), (18.3.7). В этом случае асимптотика аналогична модели § 4 гл. 21; см. Лукаш (1974б), Лукаш, Новиков, Старобинский (1975).

более того, Зельдовичем (1970а) показано, что выравнивания всех неоднородностей не происходит, но указанное требование является необходимым.

Наличие оптического горизонта в однородной изотропной модели Фридмана делает принципиально невозможным выравнивание неоднородностей «перемешиванием» в заметных масштабах в начале расширения.

Мизнер (1969а, б) предложил космологическую модель, в которой отсутствует оптический горизонт и возможно перемешивание. Модель Мизнера основана на открытом Лифшицем, Халатниковым и Белинским [см. Халатников, Лифшиц (1970), Белинский, Лифшиц, Халатников (1970), Белинский, Халатников (1969а, б)] решении уравнений Эйнштейна для моделей типа IX Бианки.

Идея Мизнера заключалась в следующем. Пусть на протяжении некоторого промежутка времени модель описывается казнеровским решением с  $p_1=p_2=0$ ,  $p_3=1$ . В этом случае для распространения света вдоль третьей оси получаем из условия  $ds=0$  (полагаем скорость света  $c=1$ )

$$dt = t dx, \quad x = \int_{t_0}^t \frac{dt}{t} \sim \ln \frac{t}{t_0}, \quad (21.4.1)$$

Если  $t_0 \rightarrow 0$ , то  $x \rightarrow \infty$ . Таким образом, вдоль третьей оси свет успевает пройти сколь угодно большое расстояние, если  $t_0$  достаточно мало. В то же время вдоль двух других осей свет успевает пройти лишь малое расстояние, пропорциональное  $\Delta t = t - t_0$ . Если затем решение перестраивается таким образом, что  $p_1=1$ ,  $p_2=p_3=0$ , то свет успевает пройти большое расстояние вдоль первой оси, и т. д.

Мизнер показал, что в принципе возможна такая модель типа IX Бианки с замкнутым трехмерным пространством, которая обладает именно такими свойствами и в которой свет успевает обойти мир много раз по всем направлениям. В такой модели решение вблизи сингулярности уже не описывается казнеровской ситуацией, а на общее расширение модели наложены осцилляции вдоль разных осей. То, что решение для типа IX должно быть не казнеровским (так же как и для типа VIII), ясно из табл. XVI и уравнений (21.3.5). Действительно, для этих типов все  $C_{ab}^c$  ( $a \neq b \neq c$ ) отличны от нуля и установление казнеровской асимптотики невозможно (см. § 3 этой главы).

Поведение решения для модели перемешанного мира вблизи сингулярности исследовалось в работах Халатникова, Лифшица (1970), Белинского, Халатникова (1969а, б), Мизнера (1969а, б), Белинского, Лифшица, Халатникова (1970), Е. Лифшица, И. Лифшица, Халатникова (1970), Дорошкевича, Новикова (1970), С. Новикова (1972), Белинского, Лифшица, Халатникова (1971), Гришука, Дорошкевича, Лукаша (1971), Матцнера, Шепли, Уоррена (1970).



Последние три работы рассматривают общий случай, когда материя движется относительно системы отсчета. Впрочем, это условие не меняет основных черт решения, и мы здесь рассмотрим только случай покоящейся материи.

Анализ показывает, что решение вблизи сингулярности отличается от упрощенной картины, нарисованной выше.

Метрика модели перемешанного мира записывается в синхронной системе отсчета в следующем виде:

$$g_{00} = 1, \quad -g_{\alpha\beta} = \gamma_{ab} e_{\alpha}^a e_{\beta}^b, \\ \gamma_{ab} = \begin{pmatrix} a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & b^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & c^2(t) \end{pmatrix}, \quad e_{\alpha}^a = \begin{pmatrix} \cos x^3 & \sin x^3 \sin x^1 & 0 \\ -\sin x^3 & \cos x^3 \sin x^1 & 0 \\ 0 & \cos x^1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21.4.2)$$

Функции  $a$ ,  $b$ ,  $c$  описывают анизотропную деформацию в каждой точке; их величина характеризует протяженность замкнутого мира в трех ортогональных направлениях. Изменение  $a$ ,  $b$ ,  $c$  с течением времени описывает эволюцию модели.

Мы уже отмечали выше, что вблизи сингулярности тензором энергии-импульса можно пренебречь (вакуумная стадия). Мы выпишем уравнения Эйнштейна для типа IX сразу для вакуумной стадии\*):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} &= 0, \\ \frac{(\dot{a}b\dot{c})}{abc} + \frac{a^4 - (b^2 - c^2)^2}{2(abc)^2} &= 0, \\ \frac{(\dot{a}b\dot{c})}{abc} + \frac{b^4 - (a^2 - c^2)^2}{2(abc)^2} &= 0, \\ \frac{(\dot{a}b\dot{c})}{abc} + \frac{c^4 - (a^2 - b^2)^2}{2(abc)^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21.4.2a)$$

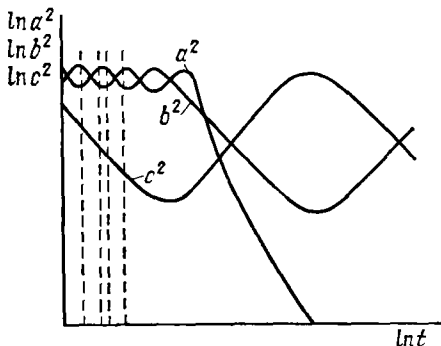


Рис. 57. Эволюция модели «перемешанного» мира при приближении к сингулярности.

(точка — дифференцирование по  $t$ ).

На рис. 57 показано поведение функций  $a(t)$ ,  $b(t)$  и  $c(t)$  (по горизонтали отложен  $\ln t$ , по вертикали — значения функций  $\ln a^2$ ,  $\ln b^2$ ,  $\ln c^2$ ).

Будем рассматривать поведение этих функций при продвижении к сингулярности. Две функции (скажем,  $a^2$  и  $b^2$ ) осциллируют на некотором интервале  $t$  (назовем его большим циклом), в то время как третья ( $c^2$ ) монотонно убывает по мере продвижения к сингуляр-

\* ) О поздней стадии расширения, когда  $T_{ik}$  становится существенным, см. § 7 этой главы.

ности. Затем  $c^2$  начинает возрастать (идем к  $t \rightarrow 0$ ), в то время как одна из осциллирующих функций (например,  $a^2$ ) убывает монотонно. В дальнейшем  $b^2$  и  $c^2$  осциллируют, а  $a^2$  опять убывает монотонно. Через некоторое время снова происходит смена осциллирующих и монотонно изменяющейся функции и т. д. Заметим, что объем мира  $V \sim abc$  меняется монотонно. На небольших участках, когда все три функции изменяются монотонно, решение описывается формулами Казнера [подробнее см. Белинский Лифшиц, Халатников (1970)].

Обозначим  $a^2/b^2 = Q$  в точках максимума функций  $a^2$  и  $P = a^2/c^2$  в точке минимума  $c^2$  в данном цикле. Анализ показывает, что при движении к сингулярности внутри большого цикла амплитуда осцилляций нарастает. Поэтому, если  $Q$  мало в начале данного цикла, то оно становится большим в данном или (за исключением вырожденного случая, о чем говорится далее) в следующем цикле. Поведение модели существенно зависит еще от одного параметра:  $u = k + x > 1$ , где  $k$  — целая часть  $u$ , равная числу колебаний в данном цикле, а  $x$  — дробная часть  $u$ , определяющая параметр  $u$  для следующего цикла:  $u_{s+1} = 1/x_s$  (здесь  $s$  — номер цикла).

Пусть  $Q \gg 1$ ; тогда оказывается

$$P = (4Q_0)^{u^2}, \quad (21.4.3)$$

где  $Q_0$  — амплитуда осцилляций в начале цикла (напомним, что мы идем от больших  $t$  к малым). При переходе к следующему большому циклу оказываются справедливыми соотношения

$$Q_{02} \approx P_1, \quad (21.4.4)$$

т. е. амплитуда осцилляций  $Q_{02}$  порядка  $P_1$  и велика. Для величины  $P_2$  имеем

$$P_2 \approx P_1^{u_2^2}. \quad (21.4.5)$$

Таким образом, величина  $P$  катастрофически быстро нарастает. Для  $s$ -го большого цикла имеем

$$P_s \approx (4Q_{01})^{u_1^2 u_2^2 \dots u_s^2}. \quad (21.4.6)$$

Подчеркнем, что эта формула практически описывает масштаб полного изменения наименьшей в цикле  $s$  функции за время всех циклов от первого до  $s$ -го, так как фактически все изменения амплитуды  $P$  происходят в  $s$ -м цикле, который является ближайшим к сингулярности из всех рассмотренных (хотя за  $s$ -м циклом, конечно, следует  $(s+1)$ -й и т. д.; число циклов бесконечно, если не накладывать ограничений на применимость ОТО, см. следующий параграф).

Приведенные формулы описывают основные характеристики решения при движении к сингулярности.

При движении в противоположном направлении все возрастающую роль в уравнениях тяготения играют члены, описывающие материю, которые мы отбросили. Мы рассмотрим поведение модели на стадии, когда эти члены становятся важными, в § 6 данной главы. Вернемся к анизотропной стадии.

С приближением к сингулярности наблюдается стремительный рост относительных амплитуд колебаний функций  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (рост  $P$  и  $Q$ ). Этот процесс может нарушиться лишь в следующем случае. В каждом цикле числа  $u = k + x$  не целые. «Опасная» ситуация, как показывает анализ (21.4.2а), может возникнуть, если  $u$  очень близко к целому числу, т. е. если  $x$  мал, а именно если  $x$  или  $1+x$  попадает в интервал

$$1 \pm (4Q^*)^{-1}, \quad (21.4.7)$$

где  $Q^*$  — амплитуда осцилляций в конце большого цикла.

Если, в дополнение к этому, в некоторый момент  $t$  в конце цикла все функции оказываются одного порядка ( $a \approx b \approx c$ ), то анализ уравнений (21.4.2а) показывает, что в этом случае может возникнуть осцилляция с малым значением  $Q$  в следующем цикле.

Прежде чем идти дальше, отметим, что именно систематическое возникновение при продвижении к сингулярности таких циклов с малым значением  $Q$  и большим  $u$  (т. е. с большим числом осцилляций) рассматривает Мизнер, имея в виду осуществление идеи «перемешанного» мира. Когда  $Q$  мало, то свойства решения сходны с кэзеровским решением (в этом случае  $c \sim t$ ,  $a$  и  $b$  приблизительно постоянны, слабо осциллируют). В этой Вселенной свет успевает много раз обойти мир вдоль оси  $c$ , осуществляя перемешивание. Если подобные ситуации систематически повторяются, то перемешивание происходит по всем направлениям.

Однако необходимо подчеркнуть, что систематическое возникновение циклов с малым  $Q$  практически невероятно.

Действительно, вероятность того, что в данном цикле  $x$  или  $1+x$  лежит в интервале  $1 \pm (4Q^*)^{-1}$ , есть

$$\omega = \frac{1}{4Q^*}. \quad (21.4.8)$$

Величина  $\omega$  от цикла к циклу катастрофически быстро уменьшается (мы движемся в сторону сингулярности!). Полная вероятность того, что мы попадем в опасную зону (хотя бы один раз! в каком-либо цикле вплоть до сингулярности, определяется суммой ряда

$$\sum \omega = (4Q_1^*)^{-1} + (4Q_2^*)^{-1} + \dots; \quad (21.4.9)$$

эта сумма практически равна первому члену ряда, а так как  $(4Q_1^*)^{-1} \ll 1$ , то она мала,

Вероятность систематического повторения мизнеровской ситуации исчезающе мала. Мы пока не останавливаемся на вопросе о том, что модель «перемешанного» мира нельзя применять неограниченно вплоть до сингулярности, ибо, когда кривизны пространства-времени достигают  $(10^{-33} \text{ см})^{-2}$ , начинают играть роль квантовые эффекты в тяготении (см. раздел V). Некоторые замечания по этому поводу мы сделаем в конце следующего параграфа. Здесь же подчеркнем, что и без ограничений применимости ОТО при случайном выборе параметров модели  $Q$  всегда нарастает при движении к сингулярности.

В заключение параграфа отметим, что подобными же свойствами эволюции вблизи сингулярности обладает и модель типа VIII Бианки.

### § 5. О невозможности «перемешивания» в модели «перемешанного» мира

Модель Мизнера была первоначально задумана для обеспечения возможности «перемешивания» неоднородностей. Для этого необходимо, чтобы сигнал со световой скоростью мог многократно обходить мир (см. § 4 этой главы).

Обратимся теперь к проблеме возможности обхода мира типа IX Бианки сигналом, движущимся со световой скоростью [Дорошкевич, Лукаш, Новиков (1971), Грищук, Дорошкевич, Лукаш (1971)].

Уравнения для нулевых геодезических показывают, что лучи света, вышедшие из некоторой точки и движущиеся вдоль главных осей тензора кривизны трехмерного пространства, всегда будут двигаться вдоль этих направлений.

Для осуществления идеи Мизнера необходимо, чтобы свет большое число раз успевал обходить мир во всех направлениях. Изменение масштабов мира вдоль главных осей тензора кривизны описывается функциями  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$ ,  $c(\tau)$ . Зная эти функции, можно рассчитать, сколько раз свет успевает обойти мир по тому или иному направлению за определенный отрезок времени.

Если в некотором цикле амплитуда  $Q$  мала, то свет может успеть много раз обойти мир вдоль наименьшей оси  $c$ . Действительно, в этом случае (см. § 4) ось  $c \sim t$  и применимы формулы (21.4.1). Однако мы видели, что с огромной вероятностью вблизи сингулярности малые амплитуды  $Q$  никогда не осуществляются.

Возникает вопрос, возможно ли перемешивание, т. е. многократные обходы светом и звуком (так как скорость звука в горячем веществе  $v_{\text{зв}} = \frac{c}{\sqrt{3}}$ ) мира в случае, когда  $Q \gg 1$ .

Рассмотрим распространение света вдоль трех главных направлений модели. В каждом цикле монотонно меняющаяся функция (одна из трех —  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) всегда много меньше осциллирующих,

и наиболее благоприятные условия для обходов светом мира имеются для луча, движущегося вдоль этой оси.

Число обходов светом мира по наименьшей оси  $s$  за время большого цикла, как показано в работах, цитированных в начале этого параграфа, определяется формулой

$$N_s \approx \frac{u_s}{2\pi \sqrt{Q_{0,s}}}, \quad u_s \gg 1. \quad (21.5.1)$$

Для числа обходов по оси  $a$  или  $b$

$$\tilde{N} < Q_{0,s}^{-1/2}.$$

Таким образом, по какому бы направлению свет ни шел, всегда число обходов им мира  $N_s$  в течение  $s$ -цикла удовлетворяет неравенству

$$N_s \leq \frac{u_s}{\pi \sqrt{4Q_{0,s}}} \equiv N_s^*. \quad (21.5.2)$$

Для полного числа обходов светом мира  $N$  вдоль фиксированного направления за все время, начиная от сингулярности и до цикла с номером единица, справедливо неравенство

$$N < \sum_{s=1}^{\infty} N_s^*. \quad (21.5.3)$$

Пусть параметры модели выбираются случайным образом. В работе Дорошкевича, Лукаша и Новикова (1971) показано, что в этом случае при больших  $Q_{0,1}$  с вероятностью, пренебрежимо мало отличающейся от единицы, сумма  $\sum_{s=1}^{\infty} N_s^*$  мала по сравнению с единицей.

Более точно, показано следующее. Вероятность того, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} N_s^* < \tilde{x} \ll 1, \quad (21.5.4)$$

отличается от 1 на величину  $W$  меньшую, чем

$$W < \frac{1}{500 \ln Q_{0,1}} + \frac{1}{\tilde{x} \sqrt{Q_{0,1}}}. \quad (21.5.5)$$

В работе Грищука, Дорошкевича, Лукаша (1971) показано также, что эти оценки справедливы и в более сложном случае, когда имеется движение вещества.

Таким образом, приведенные выражения доказывают, что без крайне специального выбора параметров модели свет ни разу не успевает обойти мир ни по какому направлению за все время,

начиная от сингулярности и до конца анизотропной стадии, когда  $Q$  все еще велико. В период изотропизации модели, когда вступает в игру самогравитация обычной материи, свет, возможно, и успеет один раз обойти мир, но этого явно недостаточно для осуществления идеи Мизнера о перемешивании.

## § 6. Квантовые ограничения для модели «перемешанного» мира

Мы уже неоднократно отмечали, что ОТО заведомо неприменима в масштабах меньших, чем  $l_g \sim 10^{-33}$  см, ибо при этом существенны квантовые флуктуации метрики (подробнее см. §§ 4—7 гл. 23). В частности, если какой-либо масштаб замкнутой однородной модели мира меньше  $l_g$ , то описывать поведение модели в этом масштабе уравнениями ОТО некорректно. Однако в работе Мизнера (1969б) высказано утверждение, что в случае модели перемешанного мира этого ограничения нет и ОТО применима для сколь угодно малых масштабов, вплоть до истинной сингулярности. Этот вывод получен Мизнером из анализа квантования расширения мира в целом (подробно см. следующий раздел). Здесь мы отметим только, что им показано, что если при больших масштабах мира, много больших  $l_g$ , состояние расширения соответствует большому квантовому числу  $n$ , т. е. описывается классическими неквантовыми уравнениями, то по мере продвижения к сингулярности (в прошлое) число  $n$  является адиабатическим инвариантом и, следовательно, с уменьшением масштабов роль квантовых эффектов не возрастает и никакого предела применимости ОТО нет.

Мы считаем, что несмотря на это замечание Мизнера,  $l_g$  является все же пределом применимости неквантовых уравнений ОТО.

Дело в том, что в масштабах  $l < l_g \approx 10^{-33}$  см существуют квантовые флуктуации метрики безотносительно к состоянию расширения всего мира в целом. Например, сегодня такие флуктуации есть в мире в масштабах  $l < 10^{-33}$  см или  $t < 10^{-43}$  сек независимо от масштабов всего мира и состояния его расширения и в этих малых масштабах сегодня неприменима неквантовая ОТО. Это же утверждение можно повторить для любого момента в прошлом. Поэтому, когда какой-либо масштаб во Вселенной в прошлом был меньше  $l_g \approx 10^{-33}$  см или время, протекшее от сингулярности, меньше  $10^{-43}$  сек, то уравнения ОТО для описания эволюции этого масштаба уже неприменимы.

Рассмотрим вопрос о применимости модели перемешанного мира к ранним стадиям расширения реальной Вселенной. В общем случае, когда свет не успевает обойти Вселенную, ограничения, связанные с продолжительностью эволюции во времени, более жесткие, чем ограничения на пространственные масштабы, но и ограничения на пространственные масштабы очень сильные.

Рассмотрим их. Характерный масштаб во Вселенной сегодня есть  $L \sim c/H \approx 10^{28}$  см. По крайней мере, начиная со времени в прошлом, когда этот масштаб был  $\sim 10^{26}$  см, наблюдаемая часть Вселенной расширялась изотропно. Наименьший масштаб применимости некантовой теории, как говорилось выше,  $\sim 10^{-33}$  см или во времени  $10^{-43}$  сек. Таким образом, в течение интервала времени, когда Вселенная, может быть, описывалась моделью перемешанного мира, ее масштаб изменился не более чем в  $10^{26} : 10^{-33} = 10^{59}$  раз. Посмотрим, сколько при этом возможно было циклов осцилляций и сколько раз свет мог бы обойти мир по разным направлениям. Для оценки возможного числа осцилляций мы должны воспользоваться формулой (21.4.6). Как указано в § 4, эта формула дает квадрат изменения масштаба наименьшего размера мира. Для того чтобы получить в левой части величину  $P^{1/2}$  меньше  $10^{59}$  при любом  $Q_0$ , заметно большем 1, необходимо, чтобы было заведомо не более двух-трех циклов с двумя-тремя осцилляциями в каждом цикле. Если же число осцилляций в цикле 8—10, то не могло быть больше одного цикла.

Таким образом, квантовые эффекты в ОТО должны сильно ограничить возможное число колебаний в окрестности сингулярности в космологической модели Мизнера.

В заключение мы еще раз подчеркнем (см. § 5 этой главы), что многократный обход светом и звуком мира невероятен в модели перемешанного мира даже без всяких ограничений на применимость ОТО, т. е. при формальном продолжении решения вплоть до сингулярности.

## § 7. Изотропизация однородных космологических моделей в ходе расширения

В данном разделе мы рассматриваем однородные анизотропные модели с целью их возможного применения для описания ранних стадий космологического расширения. Естественно, что на эту роль могут претендовать модели, которые с течением времени «изотропизируются», приближаются к модели Фридмана. Что следует понимать под терминами «изотропизация», приближение к решению Фридмана?

Наиболее «естественный» ответ заключается в следующем. Изотропизацией в момент  $t_0$  считается близость (с заданной точностью) всех параметров модели (геометрических, динамических, распределения и движения вещества и излучения) к соответствующим величинам во фридмановской модели. Такой подход вполне удовлетворил бы закоренелого теоретика-космолога, но он, по-видимому, слишком строг, когда мы хотим применять наши понятия к реальной Вселенной. Наблюдения, во всяком случае наблюдения сегодняшнего дня, еще очень далеки от возможности проверки *всех* свойств

моделей. Основным орудием астрономов по проверке степени изотропии расширения является реликтовое излучение и, в гораздо меньшей степени, наблюдение галактик и подсчеты радиоисточников в разных направлениях на небе. В последних двух случаях ошибки слишком велики (об этом мы говорили в предыдущих разделах). Косвенным критерием может быть химический состав первичного вещества, ибо, как мы видели в § 5 гл. 20, синтез элементов очень чувствителен к темпу расширения в период протекания ядерных реакций. Разумеется, близость химсостава к предсказаниям фридмановской модели означает только совпадение темпа изменения со временем объема вещества с темпом в модели Фридмана.

При решении вопроса об изотропизации надо иметь в виду, что, согласно астрономическим наблюдениям, если Вселенная и была сначала анизотропной, то изотропизация произошла достаточно рано, при  $z \gg 10^3$  (из наблюдений реликтового излучения, об этом см. далее \*), и, с большой вероятностью, еще гораздо раньше, при  $z > 10^9$  (из данных о химическом составе вещества, см. § 5 гл. 20).

Итак, минимальные требования к тому, чтобы однородная модель по важнейшим используемым в настоящее время наблюдательным свойствам была похожа на фридмановскую, заключаются в следующем. Модель должна достаточно рано (во всяком случае до начала синтеза химических элементов) начать расширяться с заданной точностью изотропно, по темпу это расширение должно быть таким же, как в модели Фридмана, и эти свойства должны сохраняться в течение длительного времени, пока модель меняет свои линейные размеры от начала расширения и до наших дней.

Подчеркнем, что изотропизация должна произойти на стадии, когда расширение происходит с практически параболической скоростью и плотность материи практически равна критической. Что касается «изотропизации» таких параметров, как кривизна трехмерного пространства в разных направлениях, то это пока не требуется в нашем определении. Когда анализ наблюдательных данных покажет, что эти параметры существенны, то их также надо будет ввести в определение, которое следует назвать «практической, наблюдательной изотропизацией».

В литературе по математическому анализу анизотропных моделей есть другие определения изотропизации. Так, иначе определяют изотропизацию С. Новиков (1972), Коллинз и Хоукинг (1973а). Это надо иметь в виду, чтобы при чтении литературы не возникло недоразумений. Среди однородных моделей существуют такие, которые в ходе расширения никогда не похожи на фридмановскую модель по своим свойствам; существуют такие модели, которые с расширением на некотором этапе приближаются по своим свой-

---

\*) Как показано в § 9 гл. 21, при некоторых вероятных предположениях наблюдения реликтового излучения дают гораздо более сильные ограничения.



вам к модели Фридмана, а затем расширение вновь становится резко анизотропным; наконец, есть такие модели, которые после изотропизации все более приближаются к модели Фридмана (или во всяком случае не отдаляются от нее) при  $t \rightarrow \infty$ .

Кажется почти очевидным, что анизотропные модели, приближающиеся к фридмановской при  $t \rightarrow \infty$ , могут входить лишь в те типы по классификации Бианки, которые содержат фридмановскую модель как частный случай. Анализ этого вопроса [Гришук (1967а), Дорошкевич (1968), Мак-Коллам (1971)] показывает, что это действительно так.

Открытые, или «плоские», модели Фридмана входят в типы I, V, VII. Только в моделях этих типов, в принципе, возможно неограниченное приближение к модели Фридмана. Однако в других моделях близость с заданной точностью на длительном промежутке времени возможна. Поэтому все такие модели, которые длительно похожи на фридмановскую, надо проанализировать и сравнить с наблюдениями.

Важнейшей задачей является построить решение для анизотропных моделей, справедливое на всем интервале времени, т. е. проследить весь процесс от сингулярности до изотропизации, и связать начальные данные вблизи сингулярности с параметрами на поздней стадии расширения. Это позволяет выяснить, какие из моделей с заданными вблизи сингулярности параметрами согласуются с данными астрономических наблюдений о степени изотропии космологического расширения, и решить, таким образом, вопрос, насколько общий класс начальных условий для анизотропных моделей может привести к наблюдаемой сейчас картине Вселенной. Процесс изотропизации моделей типа I рассмотрен в гл. 19, 20.

Мы начнем с анализа изотропизации моделей типа V. Затем рассмотрим изотропизацию моделей типов VII и IX. Эти модели в известном смысле являются наиболее общими. Анализ эволюции моделей других классов на предмет их возможной изотропизации является частным случаем анализа для моделей типов VII и IX. На анализе других типов мы здесь останавливаться не будем, читатель может найти эти вопросы в работах Дорошкевича, Лукаша, Новикова (1973), Лукаша (1974а), Мак-Коллама (1971).

Итак, начнем с моделей типа V.

Трехмерное пространство типа V всегда является пространством постоянной отрицательной кривизны. Рассмотрим сначала модели с тензором энергии-импульса идеального газа и с материей, покоящейся в однородном трехмерном пространстве модели, т. е. положим  $T_0^\alpha = 0$ . Тогда, как было показано Дорошкевичем (1968), решение всегда сводится к решению Гекмана — Шюкинга (1962). Это решение может быть записано в виде

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \{dx^{1*} + e^{2x^1} [S^2(t) dx^{2*} + S^{-2}(t) dx^{3*}]\}, \quad (21.7.1)$$

где функции времени  $R(t)$  и  $S(t)$  находятся из уравнений Эйнштейна. Вблизи сингулярности решение имеет вид ( $P < \epsilon$ )

$$R \sim t^{1/2}, \quad S \sim t^{1/\sqrt{3}}, \quad (21.7.2)$$

т. е. имеет казнеровский вид, показатели имеют следующие значения:

$$P_1 = \frac{1}{3}, \quad P_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad P_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \text{Показатели степени в}$$

зависимости масштабных факторов от времени удовлетворяют соотношениям (18.3.6), (18.3.7); наименьший показатель (для оси  $x^3$ ) есть  $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -0,24$ .

На поздних стадиях расширения модель изотропизуется и асимптотически имеет

$$R(t) \sim t, \quad S(t) = \left(1 - \frac{t_\Phi}{t^2}\right). \quad (21.7.3)$$

Для случая пылевидного вещества ( $P=0$ ) решение может быть выписано полностью:

$$\dot{R}^2 = 1 + \frac{2GM}{R} + \frac{a_1^2}{3R^4}, \quad S = \exp\left(a_1 \int \frac{dt}{R^3}\right), \quad (21.7.4)$$

где

$$M = \text{const}, \quad a_1 = \text{const}, \quad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3};$$

постоянная  $t_\Phi$  в асимптотике (21.7.3) в случае решения (21.7.4) выражается через  $a_1$ , если  $M$  мало:  $t_\Phi^2 = a_1/2$

Асимптотика (21.7.3) описывает выход решения на милновскую модель (см. раздел I), когда самогравитацией вещества можно пренебречь и все вещество расширяется, двигаясь по инерции с постоянной скоростью (масштабный фактор  $R$  пропорционален времени). Однако возможна изотропизация решения на гораздо более ранней стадии, когда самогравитацией материи пренебречь нельзя. В этом случае модель сначала приближается к решению Фридмана для открытого мира на стадии, когда в нем еще существенна гравитация материи (см. § 4 гл. 1 и рис. 2), а затем уже, как и всякая открытая модель Фридмана, переходит в модель Милна. Очевидно, нас должен интересовать именно этот случай, ибо если в реальной Вселенной начало расширения и было анизотропным, то изотропизация произошла достаточно рано, когда гравитация материи была существенна.

Указанные свойства легко проследить в решении (21.7.4). В этом решении в выражении для  $R^2$  первое слагаемое описывает энергию разлетающегося вещества, второе слагаемое описывает тяготение материи, а третье — энергию свободного гравитационного поля. Вблизи сингулярности  $R \rightarrow 0$  и первое и второе слагаемые малы по сравнению с третьим, решение анизотропное (казнеровское). Если  $G^2 M^2 \gg a_1$ , то третье слагаемое сначала сравнивается со вторым, но оба они много больше единицы, модель изотропизуется и выходит на промежуточную фридмановскую асимптотику \*) с  $R \sim t^{1/2}$  и самогравитация материи существенна. Лишь затем модель выходит на милновскую асимптотику (21.7.4). Если же  $G^2 M^2 \ll a_1$ , то изотропизация модели наступает в момент, когда третье слагаемое сравнивается с единицей, а самогравитация материи никогда не существенна. Модель сразу с казнеровской стадии переходит на милновскую.

Как мы видим, тип V моделей с  $T_0^a = 0$  допускает лишь единственную асимптотику решения (21.7.2) вблизи сингулярности  $t \rightarrow 0$ . Это ограничение снимается, если допустить возможность движения материи относительно системы отсчета. В конце § 5 гл. 19 мы уже отмечали, что если предположить, что в некоторый момент времени  $t_*$  на вакуумной стадии все компоненты скорости имеют одинаковый порядок величины, то при  $t \rightarrow 0$  наибольшей является компонента скорости вдоль оси, масштабный фактор которой имеет наибольший положительный показатель степени в зависимости от времени. Вещество движется вдоль этого направления с релятивистской скоростью при  $t \rightarrow 0$ . Однако тип V все еще оставляет сильные ограничения на параметры расширения и движение вещества. Так, в этом решении задание параметров расширения модели в некоторый момент однозначно определяет поток вещества в модели. Это связано с тем, что трехмерное пространство модели имеет изотропную кривизну, а это требует точного сбалансирования отдельных факторов, влияющих на кривизну.

В заключение обсуждения модели типа V приведем закон затухания анизотропии расширения для случая горячей Вселенной ( $P = \epsilon/3$ ). Вещество будем считать покоящимся в системе отсчета. Определим «хаббловские константы»  $H_1, H_2, H_3$  вдоль трех координатных осей системы (21.7.1). На вакуумной стадии  $H_1 \neq H_2 \neq H_3$ . Определим отличие  $H_i$  от среднего  $H = \frac{1}{3}(H_1 + H_2 + H_3)$ :  $\Delta H_i = H_i - H$ . На втором этапе в уравнениях Эйнштейна существенны члены с материей, решение быстро приближается к фридмановскому. Закон затухания  $\frac{\Delta H_i}{H}$  следующий [вывод такой же, как вывод формулы

\*) Совершенно аналогична ситуация при  $P = \epsilon/3$ , отличие в том, что  $R \sim t^{1/2}$  в промежуточной асимптотике.

(21.8.3)]:

$$\frac{\Delta H_i}{H} \approx \left(\frac{t_\phi}{t}\right)^{1/2}. \quad (21.7.5)$$

Момент  $t_\phi$ , когда решение выходит на фридмановское, является произвольным параметром модели.

Мы не будем останавливаться больше на типе V, который является очень частным, и перейдем к более общим типам VII, VIII и IX, имеющим анизотропную кривизну. Приведем итоги анализа [Дорошкевич, Лукаш, Новиков (1973)].

Начнем с типа IX. Материю считаем покоящейся в системе отсчета, уравнение состояния  $P = \epsilon/3$ . Картина изотропизации показана на рис. 58.

Как мы видели в § 4 этой главы, эволюция модели этого типа вблизи сингулярности заключается в осцилляциях осей на фоне общего расширения по мере удаления от сингулярности. В некоторый момент  $t^*$ , который является произвольным параметром модели, на решение начинают влиять члены, описывающие тяготение материи. Как видно из рис. 58, на котором изображены логарифмы масштабных факторов вдоль разных осей, после промежуточного этапа

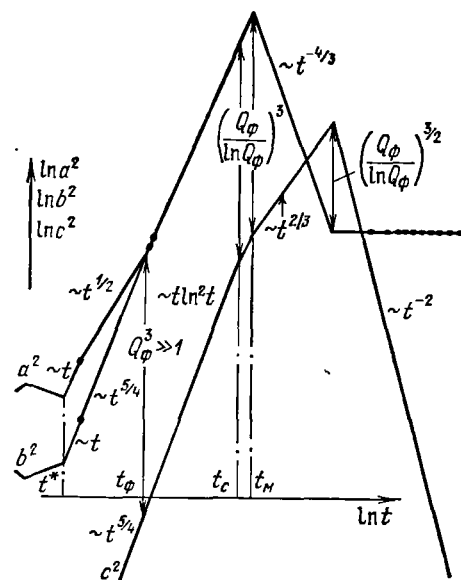


Рис. 58. Процесс «изотропизации» модели типа IX Бианки. На рисунке показана так же эволюция модели после смены расширения сжатием.

две оси сравниваются, начиная осциллировать с малой и быстро затухающей степенным образом амплитудой. После этого все оси с точностью до логарифмических множителей расширяются по фридмановскому закону. Начало этого этапа обозначено через  $t_\phi$ . Далее в течение длительного времени, практически до момента наибольшего расширения модели, когда расширение сменяется сжатием, расширение происходит «почти» изотропно. Это «почти» выражается в том, что после момента  $t_\phi$ , когда  $a=b$ , анизотропия тензора скорости деформации мала и затухает, но очень медленно, пропорционально  $\left[\ln\left(\frac{t}{t_\phi}\right)\right]^{-1}$ . Эта зависимость является очень важной. Следует подчеркнуть, что тензор кривизны трехмерного пространства

моделей и на этом этапе далек от изотропного и, как правило, никогда не становится изотропным в дальнейшем. Именно влияние анизотропии тензора кривизны приводит к очень медленному (логарифмическому) убыванию малой анизотропии деформации с течением времени. О влиянии этого факта на анизотропию реликтового излучения см. в § 9 этой главы. Лишь после смены уравнения состояния, когда в ходе расширения становится  $P=0$  (обозначим этот момент через  $t_c$ ), все отклонения от точного изотропного закона затухают степенным образом. Наконец, с  $t=t_m$  на решение начинают влиять члены, описывающие усредненную кривизну трехмерного пространства. Расширение вновь становится анизотропным, объем расширяющейся модели проходит максимум и вновь сжимается ко второй сингулярности.

Наиболее интересным является то, что при произвольных начальных условиях тяготение вещества не приводит автоматически к такой изотропизации решения, когда все величины  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в течение длительного времени практически равны между собой. Для такой изотропизации необходим весьма специальный подбор начальных условий.

Еще раз подчеркнем, что при произвольных (в широком диапазоне) начальных условиях в решении есть длительный период, когда расширение происходит практически изотропно (с малыми поправками) и хорошо описывается решением Фридмана для критической плотности. Однако главные значения тензора кривизны остаются различными и  $a \approx b \gg c$ .

Рассмотрим теперь эволюцию модели типа VII. Она отличается от описанной выше на двух краях временной шкалы: вблизи самой сингулярности в типе VII решение казнеровское \*), потом возникают осцилляции (только один большой цикл, описанный в § 4 этой главы), затем происходит изотропизация, описанная выше для типа IX. Длительно модель расширяется по Фридману. Однако и здесь анизотропия кривизны трехмерного пространства велика. Наконец, на последнем этапе эволюции, когда начинает влиять на решение средняя кривизна модели, в типе VII<sub>n</sub> решение иное.

Этот третий заключительный этап наступает, если плотность вещества модели не равна критической,  $\rho \neq \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$ . До сих пор расширение протекало практически, как в модели Фридмана с критической плотностью, теперь  $\rho$  начинает заметно отличаться от  $\rho_c$ ,  $(\rho - \rho_c)/\rho \approx 1$ . Обозначим момент, когда это происходит, через  $t_m$  (так же как и в модели IX, см. рис. 58). Он, так же как и  $t_\phi$  и  $t_c$ , является произвольным параметром модели.

\*) Это справедливо для покоящегося в системе отсчета вещества. Более сложный случай рассмотрен Лукашом (19746).

В модели типа VII<sub>n</sub> после момента  $t_m$  (назовем этот этап милновским) амплитуды анизотропии кривизны и анизотропии деформации  $\frac{\Delta H_i}{H}$  застывают \*):

$$\frac{\Delta H_i}{H} = \text{const.} \quad (21.7.6)$$

Величины  $\frac{\Delta H_i}{H}$  имеют порядок величины (обозначим его  $\kappa$ )

$$\frac{\Delta H_i}{H} \equiv \kappa \approx \left( \frac{t_c}{t_m} \right)^{1/2} \frac{8}{8 + \ln(t_c/t_\Phi)}. \quad (21.7.7)$$

Частным случаем (модель типа VII<sub>0</sub>) является случай, когда  $\rho = \rho_c$ ; в этом случае  $t_m = \infty$  и третий этап отсутствует.

Возвращаясь к случаю  $\rho < \rho_c$  и к милновской стадии, важно отметить, что решение (21.7.6) не стремится к фридмановскому, а представляет собой скорее «застывшее» возмущение фридмановского решения на милновской стадии. Действительно, как возмущения кривизны, так и относительная разность хаббловских констант здесь постоянны. Правда, отношение  $c/a$  очень медленно, но неограниченно нарастает при  $t \rightarrow \infty$ , однако сам по себе рост этого отношения еще ничего не означает. Говоря точнее, в любой момент времени  $t$  модель описывается решением Фридмана плюс малые поправки. В § 9 этой главы будет показано, что анизотропия реликтового излучения на этой стадии также мала \*\*).

В заключение еще одно замечание о ранних этапах эволюции модели типа VII.

Снимем ограничение, заставляющее вещество покоиться в системе отсчета. Как показано выше в § 5 главы 19, из-за неустойчивости вещество на казнеровской стадии эволюции модели придет в движение с релятивистской скоростью. Тогда после вакуумной стадии и колебаний из-за анизотропии пространственной кривизны наступает стадия, когда на решение влияет член, описывающий анизотропный поток вещества относительно системы отсчета модели. В этот период, как можно показать, решение описывается формулами  $a \sim t$ ,  $b \sim c \sim \sqrt{\ln t}$ . Поток направлен вдоль оси, по которой происходит сжатие. Его гравитационное влияние таково, что модель начинает расширяться вдоль именно этой оси (a) и очень слабо деформируется вдоль двух других. Это приводит к быстрому падению

\*) Вывод о «застывании» был получен в работе Коллинза и Хоукинга (1973a); см. также Дорошкевич, Лукаш, Новиков (1973).

\*\*) Отметим, что в принципе возможен эксперимент по обнаружению эффекта неограниченного возрастания отношения  $c/a \sim t^{2/3}$  при  $t \rightarrow \infty$ . Действительно, сфера (с радиусом много меньше радиуса кривизны пространства) из покоящихся или медленно движущихся в синхронной системе отсчета частиц должна с течением времени превращаться в эллипсоид с неограниченно нарастающей вытянутостью. Однако такой эксперимент практически поставить нельзя.

скорости потока и выходу решения на последующие этапы, упоминаемые выше. К аналогичным результатам приводит и рассмотрение слабовзаимодействующих частиц (см. §§ 1, 2 гл. 20) в моделях обсуждаемых типов.

В принципе возможно подобрать начальные условия так, чтобы отдельные этапы исчезали или иначе комбинировались. Мы описали лишь наиболее общие случаи эволюции моделей типов IX и VII с течением времени и выбрали параметры моделей таким образом, чтобы модели изотропизовались достаточно рано. Что касается эволюции моделей типа VIII, то ее ранние стадии вплоть до  $t_m$  протекают аналогично моделям типа IX. После  $t_m$  деформация становится анизотропной.

Общий вывод для всех типов заключается в том, что при широком произволе в выборе множества параметров моделей (по мощности это множество совпадает с полным набором произвольных параметров, определяющих модель) модель изотропизуется по характеру деформации и приближается в этом смысле к модели Фрийдмана \*). Однако кривизна трехмерного пространства моделей все время остается анизотропной. Анизотропия кривизны в моделях типа VIII и IX сказывается в том, что  $c \ll a, b$ , — одно из главных значений метрического тензора мало по сравнению с двумя другими. Поскольку в модели типа IX мир «замкнут» в направлении  $c$  на расстояниях порядка  $c$ , то модели типа IX совместимы с наблюдениями лишь при достаточно больших значениях  $c$ . Более сложным является сопоставление с наблюдениями моделей типа VII, которые «открыты» по направлению  $c$ . В этом случае речь идет лишь о периодичности свойств Вселенной с периодом  $\sim c$ .

Лукаш (1974б) показал, что такие модели можно рассматривать как циркулярно-поляризованные гравитационные волны в, соответственно, плоском нестационарном пространстве для модели типа VII<sub>0</sub>, когда средняя кривизна равна нулю, и в пространстве постоянной отрицательной кривизны для модели типа VII<sub>h</sub>, когда средняя кривизна отлична от нуля.

Волновой вектор гравитационной волны  $k$  направлен по оси  $x^3 = z$  и является произвольным параметром моделей. При  $k = 0$  (бесконечно длинные волны) метрика типа VII<sub>0</sub> переходит в метрику типа I, а метрика типа VII<sub>h</sub> — в метрику типа V с однородным сопутствующим пространством постоянной отрицательной кривизны. При  $k \neq 0$  в модели типа VII<sub>0</sub> присутствуют только стоячие волны, тогда как в модели типа VII<sub>h</sub> в однородной синхронно-сопутствующей системе отсчета присутствуют лишь бегущие волны (вдоль оси  $z$ ).

\*) Иной подход к проблеме выбора начальных условий дан в работах С. Новикова (1972) и Богоявленского и С. Новикова (1973). Коллинз и Хоукинг (1973а, б) пришли к выводу, что при их подходе к выбору параметров моделей изотропизирующиеся модели образуют множество меры нуль.

Возможность представления однородных анизотропных космологических моделей как изотропных моделей, на которые наложены те или иные возмущения, уже неоднократно обсуждалась [см., например, Гришук, Дорошкевич, Юдин. (1972); Бергер (1972)]. В наиболее общем виде это было сделано Грищуком (1973), высказавшим гипотезу, что любая однородная анизотропная модель может быть представлена как более симметричная модель с наложенными на нее возмущениями (не обязательно малыми). Рассмотрение Лукаша (1974б, в) позволяет лучше понять физические процессы, происходящие в ходе эволюции модели типа VII и описанные выше. Мы отсылаем интересующихся к цитированным работам.

Из рассмотренного в этом параграфе характера расширения моделей типов VII, VIII и IX следует, что модели типов VIII и IX могут описывать современное состояние Вселенной лишь на «квазиевклидовой» стадии эволюции ( $t_0 < t < t_m$ ), под которой мы понимаем период, когда по динамике эти модели близки к модели Фридмана с критической плотностью. Позднее в ходе расширения ( $t > t_m$ ) сильная анизотропия кривизны трехмерного пространства этих моделей приводит к сильной анизотропии деформации, и такие модели противоречат наблюдениям. Что касается модели типа VII, то она может оказаться совместимой с наблюдениями и на поздней стадии расширения, когда гравитационным влиянием вещества можно уже пренебречь и расширение определяется кривизной трехмерного пространства модели ( $t > t_m$ ; милновская стадия).

В последующих двух параграфах анализируется вопрос, как исследования реликтового излучения могут помочь выяснить, действительно ли ранние стадии расширения Вселенной могли быть анизотропными.

## § 8. Анизотропия реликтового излучения в моделях типа I Бианки с критической плотностью вещества

В этом параграфе вопрос об анизотропии реликтового излучения рассматривается для простейшей модели с плоским сопутствующим трехмерным пространством (типа I Бианки). Это позволит выделить ряд важных особенностей проблемы [Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1967 г)]. В следующем параграфе будут рассмотрены более сложные модели.

Наблюдения показывают, что крупномасштабная анизотропия реликтового излучения меньше, чем  $\frac{\Delta T}{T} \leq 3 \cdot 10^{-3}$ . Таким образом, Вселенная стала прозрачной для реликтового излучения на стадии, когда анизотропия расширения была уже мала.

Следовательно, для сравнения теории с наблюдениями необходимо вывести формулы для расширения модели, когда она уже мало отличается от фридмановской.



Мы напомним формулы для процесса изотропизации модели, учитывающие как возможное наличие упорядоченного магнитного поля (см. § 3 гл. 19), так и направленные потоки релятивистских частиц (см. § 1 гл. 20). Следует особенно подчеркнуть, что если наличие магнитного поля в анизотропной модели не обязательно (наличие его зависит от начальных условий), то, как показано в § 1 гл. 20, анизотропные потоки слабо взаимодействующих частиц неизбежно возникают в результате процессов на ранней стадии анизотропного расширения, и их учет совершенно необходим.

Пусть магнитное поле направлено по оси  $z$  (индекс 3);  $P_1, P_2, P_3$  — давление свободных частиц соответственно по осям  $x, y$  и  $z$ ;  $\epsilon$  и  $P$  — плотность энергии и давление обычной материи;  $W$  — плотность энергии магнитного поля;  $\epsilon \gg W, P_1, P_2, P_3$ ;  $\frac{\dot{a}}{a} \approx \frac{\dot{b}}{b} \approx \frac{\dot{c}}{c}$ , т. е. расширение в первом приближении происходит изотропно.

Напомним некоторые выводы § 3 гл. 19 и § 1 гл. 20. Из (18.3.2) — (18.3.5) следует:

$$\frac{1}{abc} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} \right) abc \right] = \frac{8\pi G}{c^2} (P_1 - P_2), \quad (21.8.1)$$

$$\frac{1}{abc} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{c}}{c} \right) abc \right] = \frac{8\pi G}{c^2} [(P_1 - P_3) + 2W]. \quad (21.8.2)$$

Положим  $P = \epsilon/3$ , тогда  $a \approx b \approx c \sim t^{1/3}$  и ( $t_1$  — параметр)

$$\frac{\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b}}{\frac{\dot{a}}{a}} = 3 \frac{P_1 - P_2}{\epsilon} + 2 \left( \frac{t_1}{t} \right)^{1/3}, \quad \frac{\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{c}}{c}}{\frac{\dot{a}}{a}} = 3 \frac{P_1 - P_3}{\epsilon} + 6 \frac{W}{\epsilon} + 2 \left( \frac{t_1}{t} \right)^{1/3}. \quad (21.8.3)$$

Из этих формул следует, что в отсутствие магнитного поля и потоков релятивистских частиц анизотропия деформации затухает, как  $t^{-1/3}$ . В общем случае главными в анизотропии деформации являются члены, связанные с магнитным полем и анизотропным потоком. Отношения  $\frac{P_1 - P_2}{\epsilon}$  или  $\frac{W}{\epsilon}$  на стадии почти изотропного расширения остаются постоянными (при  $P = \epsilon/3$ ). Поэтому важный вывод заключается в том, что при наличии магнитного поля или потока релятивистских частиц анизотропия деформации на стадии  $P = \epsilon/3$  «консервируется», не уменьшается\*), в то время как без анизотропии  $T_{\alpha\alpha}^B$  анизотропия деформации падала  $\sim t^{-1/3}$ .

\*) Решение (21.8.3) дано с точностью до логарифмических множителей (см. § 3 гл. 19). При учете этих множителей анизотропия падает логарифмически.

Для случая  $P=0$ ,  $a \approx b \approx c \sim t^{1/2}$  имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b}}{\frac{\dot{a}}{a}} &= 6 \frac{P_1 - P_2}{\varepsilon} + \frac{3}{2} \frac{t_1}{t}, \\ \frac{\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{c}}{c}}{\frac{\dot{a}}{a}} &= 6 \frac{P_1 - P_3}{\varepsilon} + 12 \frac{W}{\varepsilon} + \frac{3}{2} \frac{t_1}{t}; \end{aligned} \right\} \quad (21.8.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a-b}{a} &= -6 \frac{P_1 - P_2}{\varepsilon} \frac{t_1}{t}, \\ \frac{a-c}{a} &= -6 \frac{P_1 - P_3}{\varepsilon} - 12 \frac{W}{\varepsilon} \frac{t_1}{t}. \end{aligned} \right\} \quad (21.8.5)$$

Из этих уравнений видно, что анизотропия деформации, связанная с анизотропией  $T_{\alpha}^{\beta}$ , изменяется  $\sim t^{-1/2}$ , т. е. медленнее, чем в случае изотропного  $T_{\alpha}^{\beta}$ .

Итак, во всех случаях анизотропия  $T_{\alpha}^{\beta}$  замедляет изотропизацию решения.

Обратимся теперь к формулам для определения анизотропии температуры реликтового излучения, связанной с анизотропией расширения. Найдем красное смещение для луча света, распространяющегося вдоль  $i$ -й оси. Пусть масштабный фактор вдоль этой оси есть  $a(t)$  и уравнение для света

$$dt = a(t) dx^i. \quad (21.8.6)$$

Пусть источник и наблюдатель покоятся в системе отсчета и разность их координат есть  $\Delta x^i$ . Луч покидает источник в момент  $t$  и воспринимается наблюдателем в момент  $t_0$ . Тогда из (21.8.6) находим

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \Delta x^i. \quad (21.8.7)$$

Для определения красного смещения надо найти с помощью (21.8.7) отношение разности времен  $\delta t_0$  получения двух близких по времени сигналов к разности времен  $\delta t$  их выхода из источников. Из (21.8.7) находим при  $\Delta x^i = \text{const}$

$$\frac{\delta t}{a(t)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}, \quad \frac{\delta t_0}{\delta t} = \frac{a(t_0)}{a(t)}. \quad (21.8.8)$$

Итак, красное смещение определяется отношением масштабных факторов в данном направлении в момент выхода и приема сигнала.

Так как изменение температуры пропорционально красному смещению, то для температуры в момент выхода и приема сигнала

$$\frac{T}{T_0} = \frac{a(t_0)}{a(t)}. \quad (21.8.9)$$

Формулы для анизотропии температуры реликтового излучения получаются следующим образом. Пусть до некоторого момента, соответствующего  $z=z_1$ , Вселенная непрозрачна для излучения и поле излучения изотропно, несмотря на анизотропию деформации. После момента  $z_1$  излучение распространяется свободно, без рассеяния. Тогда для наблюдателя, принимающего излучение много времени спустя в направлении двух осей (скажем  $a$  и  $b$ ), разность температур в этих направлениях есть

$$\frac{\Delta T}{T} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{a-b}{a} \Big|_{z_1}. \quad (21.8.10)$$

Здесь положено  $a=b=c$  при  $t \rightarrow \infty$  (или  $t=t_0$  сегодня).

Полученные формулы приводят нас к следующим выводам. Если резко анизотропная стадия заканчивается до момента, когда плотность энергии излучения совпадает с  $\rho c^2$  обычной материи,  $\rho_{\text{изл}} = \rho_{\text{вещ}}$ , то независимо от конкретного значения этого момента анизотропия деформации будет все время, грубо говоря, порядка единицы, вплоть до момента, когда  $\rho_{\text{изл}} \approx \rho_{\text{вещ}}$ . Действительно, из формул (21.8.3) следует, что на этой стадии (когда  $P = \epsilon/3$ ) малая анизотропия деформации «консервируется». Более точная оценка амплитуды анизотропии деформации требует учета логарифмических множителей, и, как можно показать, анизотропия скоростей деформации падает по логарифмическому закону, как об этом говорилось в § 3 гл. 19 и § 7 гл. 21. Далее после момента  $\rho_{\text{изл}} \approx \rho_{\text{вещ}}$  на стадии, когда  $P=0$ , анизотропия падает по закону [см. (21.8.5)]

$$\frac{a-b}{a} = 6 \frac{\rho_{\text{аниз}}}{\rho_{\text{вещ}}} \sim t^{-1/2}. \quad (21.8.11)$$

Из приведенных формул следует оценка для  $\frac{\Delta T}{T}$ . Если считать, что межгалактический газ непрозрачен для излучения вплоть до момента, соответствующего  $z_1=8$ , то получим

$$\frac{\Delta T}{T} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{a-b}{a} \Big|_{z_1=8} = 6 \frac{\rho_{\text{аниз}}}{\rho_{\text{вещ}}} \Big|_{z_1=8} \approx 50 \left[ \frac{\rho_{\text{аниз}}}{\rho_{\text{изл}}} \frac{\rho_{\text{изл}}}{\rho_{\text{вещ}}} \right]_{t=t_0}, \quad (21.8.12)$$

где  $t_0$  — сегодняшний момент,  $\rho_{\text{аниз}}$  — плотность анизотропного потока частиц,  $\rho_{\text{изл}}$  — плотность  $\gamma$ -квантов с  $T \approx 3$  К и  $\rho_{\text{вещ}}$  — плотность барионов,  $\rho_{\text{вещ}}(t_0) = 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup> (напомним, что расчет ведется для модели типа I и  $\rho = \rho_c$ ).

Из рассмотрения процессов со свободными частицами и нейтрино в гл. 20 следует, что плотность анизотропного потока нейтрино должна составлять сегодня  $\frac{\rho_{\text{аниз}}}{\rho_{\text{изл}}} \approx 0,1 - 1$ . Для второго отношения в квадратных скобках (21.8.12) имеем  $\frac{\rho_{\text{изл}}}{\rho_{\text{вещ}}} \approx 3 \cdot 10^{-5}$ ; отсюда следует:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-4} - 10^{-3} *). \quad (21.8.13)$$

Итак, если анизотропия расширения была велика на стадии, когда нейтрино перестают взаимодействовать с другими частицами, то независимо от конкретного значения момента изотропизации модели \*\*) выражение (21.8.13) дает оценку ожидаемой анизотропии реликтового излучения. Подчеркнем, что для оценки (21.8.13) существенно наличие ионизованного межгалактического газа, становящегося прозрачным при  $z=8$ . Можно получить несколько более точную формулу для  $\frac{\Delta T}{T}$ , чем (21.8.12), если учесть логарифмическое затухание  $\frac{\Delta H_i}{H}$  на РД-стадии (см. предыдущий параграф). Эта более точная формула будет приведена в следующем параграфе.

В анизотропных однородных моделях с евклидовым сопутствующим пространством, в рамках которых получена формула (21.8.13), анизотропия излучения должна носить квадрупольный характер. В направлении наибольшей скорости расширения наблюдается минимум  $T$ , в направлении наименьшей скорости расширения (ортогонально первому направлению) — максимум  $T$ . При измерении отношения  $\frac{\Delta T}{T}$  неподвижной относительно Земли антенной оно должно иметь 12-часовой период.

Обзор результатов измерений крупномасштабной анизотропии реликтового излучения дан Партриджем (1973) (см. табл. XVII). Верхний предел возможной анизотропии, как уже сказано в начале параграфа,

$$\frac{\Delta T}{T} \leq 3 \cdot 10^{-3},$$

и он ненамного превосходит теоретические оценки, приведенные выше. Напомним еще раз, что эти предсказания относятся только к модели с  $\rho_{\text{вещ}} = \rho_c$ . Относительно анизотропных моделей с искривленным пространством оценки будут даны в следующем параграфе.

\*) Формула (21.8.13) не учитывает логарифмические множители. Учет их приводит к формуле, аналогичной (21.9.6).

\*\*) Если момент изотропизации наступает позже момента  $\rho_{\text{вещ}} = \rho_{\text{изл}}$ , то (21.8.13) дает нижнюю границу  $\frac{\Delta T}{T}$ .

ТАБЛИЦА XVII

Измерения анизотропии реликтового излучения по данным  
обзора Партриджа (1973)

| Место проведения<br>эксперимента<br>и дата | Наблюдатели                         | Склоне-<br>ние кру-<br>га ска-<br>нир. | $\lambda$ , см | Амплитуда,<br>$10^{-5}$ °K | Прямое<br>восхож-<br>дение мак-<br>симума |
|--|-------------------------------------|--|----------------|----------------------------|---|
| <b>Дипольная составляющая</b>              |                                     |  |                |                            |   |
| Принстон (1967)                            | Партридж,<br>Вилкинсон              | $-8^\circ$                             | 3,2            | $2,2 \pm 1,8$              | $17^h$                                    |
| Юма (1968)                                 | Дисмукис,<br>Вилкинсон,<br>Партридж | $0^\circ$                              | 3,2            | $2,2 \pm 2,1$              | $2^h(?)$                                  |
|  |                                     | $42^\circ$                             | 3,2            | $1,5 \pm 2,7$              | $8^h(?)$                                  |
| Белые горы (1972)                          | Конклин                             | $32^\circ$                             | 3,8            | $2,3 \pm 0,9$              | $11^h$                                    |
| Принстон (1971)                            | Боун, Фрэм,<br>Партридж             | $0^\circ$                              | 0,86           | $7,5 \pm 11,6$             | $6^h(?)$                                  |
| Техас (на балло-<br>нах) (1971)            | Генри                               | —                                      | 2,9            | $3,2 \pm 0,8$              | $10-11^h$ ,<br>$\delta = -30^\circ$       |
| Лос-Аламос (1968)                          | Бирн,<br>Вилкинсон,<br>Партридж     | $0^\circ$                              | 3,2            | $0,7 \pm 1,2$              | $16^h(?)$                                 |
| <b>Квадрупольная составляющая</b>          |                                     |  |                |                            |   |
| Принстон (1967)                            | Партридж,<br>Вилкинсон              | $-8^\circ$                             | 3,2            | $2,7 \pm 1,9$              | $7^h, 19^h$                               |
| Юма (1968)                                 | Дисмукис,<br>Вилкинсон,<br>Партридж | $0^\circ$                              | 3,2            | $2,1 \pm 2,0$              | $5^h, 17^h$                               |
|  |                                     | $42^\circ$                             | 3,2            | $4,0 \pm 2,4$              | $8^h, 20^h$                               |
| Белые горы (1972)                          | Конклин                             | $32^\circ$                             | 3,8            | $1,35 \pm 0,8$             | $6^h, 18^h$                               |
| Принстон (1971)                            | Боун, Фрэм,<br>Партридж             | $0^\circ$                              | 0,86           | $5,5 \pm 6,6$              | $0^h, 12^h(?)$                            |
| Лос-Аламос (1968)                          | Бирн,<br>Вилкинсон,<br>Партридж     | $0^\circ$                              | 3,2            | $1,9 \pm 1,2$              | $9^h, 21^h$                               |

§ 9. Ожидаемая анизотропия космологического радиоизлучения  
в однородных анизотропных моделях с искривленным  
трехмерным пространством

Обратимся теперь к вопросу об анизотропии микроволнового космологического излучения на поздних стадиях расширения в моделях с искривленным сопутствующим пространством. Прежде всего отметим следующий важнейший факт. Как нами было показано в § 7 этой главы, в моделях с искривленным анизотропным пространством на стадиях, близких к фридмановской, анизотропия дефор-

мации «консервируется» при уравнивании состояния  $P = \epsilon/3$ . Согласно выводам § 7, после момента изотропизации  $t_\phi$  анизотропия деформации убывает только логарифмически на РД-стадии. Следовательно, на всей РД-стадии вплоть до момента, когда  $\rho_{\text{вещ}} = \rho_{\text{изл}}$ , анизотропия деформации будет сравнима с единицей (если только изотропизация не произошла чрезвычайно рано, так что и логарифмический множитель существен) и лишь после момента  $\rho_{\text{вещ}} = \rho_{\text{изл}}$  анизотропия будет падать по закону  $t^{-1/2}$ . На некотором этапе расширения вещество становится прозрачным для фонового излучения и фотоны распространяются свободно. Разная скорость расширения вещества в разных направлениях в момент, когда оно становится прозрачным, приводит к сегодняшней анизотропии фона. В моделях с плоским сопутствующим пространством фотоны, движущиеся вдоль главных осей тензора скоростей деформации, всегда будут двигаться вдоль этих осей. Поэтому, как мы видели в предыдущем параграфе, угловое распределение интенсивности фона по небесной сфере будет соответствовать трехосному эллипсоиду и максимальная разность измеряемых температур фона будет наблюдаться на небе во взаимно перпендикулярных направлениях. В работе Новикова (1968) показано, что в моделях с искривленным сопутствующим пространством анизотропия фона будет, вообще говоря, уже не такой. Таким образом, в анизотропных моделях есть две важнейшие особенности в анизотропии реликтового излучения. Первая связана с «консервацией» анизотропии деформации на РД-стадии, причем консервация вызывается каким-либо анизотропным фактором — либо анизотропией в  $T_{\alpha\beta}$ , либо анизотропией пространственной кривизны. Эта особенность определяет амплитуду  $\frac{\Delta T}{T}$ . Вторая особенность связана с движением лучей в искривленном анизотропно расширяющемся пространстве. Эта особенность вызывает своеобразное угловое распределение  $\frac{\Delta T}{T}$  на небе.

Мы начнем с рассмотрения анизотропного фона для модели типа V Бианки, в которой пространственная кривизна изотропна. Это рассмотрение продемонстрирует основные особенности, которые вносит кривизна трехмерного пространства в угловое распределение  $\frac{\Delta T}{T}$  на небе, и позволит сделать важнейшие выводы для сопоставления с наблюдениями. Затем для выяснения влияния анизотропии кривизны пространства на амплитуду  $\frac{\Delta T}{T}$  мы рассмотрим модели типов VII и IX.

Итак, рассмотрим анизотропную модель типа V с веществом, покоящимся относительно системы отсчета. Напомним, что трехмерное пространство этой модели есть пространство постоянной отрицательной кривизны (не зависящей от направлений в трехмерном пространстве).

На схематическом рис. 59, изображающем координатную плоскость  $x^1$ ,  $x^3$  трехмерного пространства, сплошными линиями показаны лучи света, проходящие в точку наблюдения  $O$ , штрихами — направление координатных линий  $x^3$ , окружность — линия, начинающая с которой лучи фона, сегодня приходящие к наблюдателю, распространялись свободно, без рассеяния. Из рисунка видно, что луч  $BO$  (или  $B'O$ ) шел перпендикулярно оси  $x^3$  в момент, когда вещество стало прозрачным. Поскольку скорость расширения наиболее сильно отличается от средней в направлениях осей  $x^1$  и  $x^2$  (ортогональных  $x^3$ ), то ясно, что наибольшая разность измеренных температур фона будет вдоль направлений лучей  $AO$  (или  $A'O$ ) и  $BO$  (или  $B'O$ ). В других плоскостях, проходящих через  $AOA'$ , картина аналогична, и анизотропия температуры отличается множителем  $\cos 2\varphi$ , где  $\varphi$  — угол между плоскостями. В целом

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T - \bar{T}}{\bar{T}} = A f(\theta) \cos 2\varphi, \quad (21.9.1)$$

где  $A$  — постоянная, определяющая амплитуду анизотропии температуры. По порядку величины для  $A$  справедливы оценки предыдущего параграфа [см. (21. 8. 12)]. Функция  $f(\theta)$  [точное ее выражение см. далее (21. 9. 3)] близка к нулю везде, за исключением области шириной порядка  $2\theta_0$ , где  $\theta_0$  — угол между  $OA'$  и  $OB$  (см. рис. 59), причем

$$\sin \theta_0 = \frac{\Omega (1 + z_1)}{2z_1 + \Omega (1 - z_1) - \frac{4z_1 (1 - \Omega)}{1 + \sqrt{1 + \Omega z_1}}}, \quad (21.9.2)$$

где  $\Omega = \frac{3H^2}{\rho}$ ,  $H$  — постоянная Хаббла при  $t=t_0$ ,  $\rho$  — плотность при  $t=t_0$ ,  $z_1$  соответствует моменту, при котором наступает прозрачность межгалактического газа.

Таким образом, температура фона почти постоянна по всему небу, за исключением пятна размером порядка  $4 \pi \theta_0^2$  с четырьмя чередующимися секторами избытка и недостатка интенсивности.

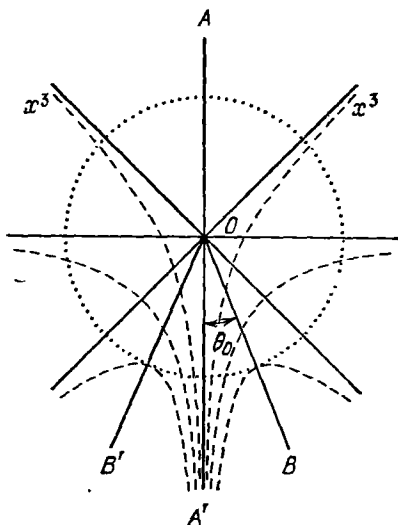


Рис. 59. Движение лучей света (сплошные линии) в искривленном сопутствующем пространстве. Наблюдатель находится в точке  $O$ . Окружность — положение выходящих лучей в момент, когда Вселенная становится прозрачной для излучения.

При  $\Omega \ll 1$  имеем  $\theta_0 \ll 1$ . Для предельного случая, когда вещество становится прозрачным на стадии, уже мало отличающейся по деформации от пустой изотропной модели Милна, функция  $f(\theta)$  (21.9.1) имеет вид [Гришук, Дорошкевич, Новиков (1968)]

$$f(\theta) = (1 + \cos \theta)^2 \left\{ \frac{\cos \theta_0}{1 - \cos \theta \cos \theta_0} - \frac{2}{\sin^2 \theta} \left[ 1 + \frac{\cos \theta_0}{1 - \cos \theta_0} (1 - \cos \theta) \right] \right\}. \quad (21.9.3)$$

Рассмотрим теперь случай, когда вещество движется вдоль координатных линий  $x^3$ , т. е.  $u_3 \neq 0$  [Гришук, Дорошкевич, Новиков (1968)]. Легко видеть, к каким следствиям это ведет. Во-первых, изменится зависимость  $\frac{\Delta T}{T}$  от  $\varphi$ . Вместо (21.9.1) для составляющей  $\frac{\Delta T}{T}$ , связанной с анизотропией деформации, получаем

$$\frac{\Delta T}{T} = f(\theta) (\sin \alpha \cos^2 \varphi + \cos \alpha \sin^2 \varphi), \quad (21.9.4)$$

где  $f(\theta)$  по-прежнему определяется (21.9.3), величина  $\alpha$  зависит от параметров модели (подробнее см. цитированную выше работу). Во-первых, надо еще учесть влияние скорости вещества. С момента  $t_{\text{пр}}$ , когда вещество стало прозрачным, до момента наблюдения  $t_0$  скорость вещества относительно синхронной системы сильно уменьшилась. Скоростью наблюдателя можно поэтому пренебречь в момент  $t_0$  по сравнению со скоростью вещества в момент  $t_{\text{пр}}$ . Таким образом, на рассмотренный выше эффект анизотропии фона, связанный с анизотропией деформации, описываемый (21.9.4), наложится еще доплер-эффект, связанный с движением вещества вдоль линий  $x^3$  \*). Этот эффект при  $u_3 > 0$  ( $u_3$  — скорость по 3-й координате) ведет к дополнительному положительному  $\Delta T_d$  везде внутри указанного выше пятна и отрицательному  $\Delta T_d$  для остального неба. При  $u_3 < 0$  знаки  $\Delta T_d$  внутри и вне пятна будут обратными. Ясно, что при достаточно большом  $u_3$  этот эффект может стать главным и определять анизотропию фона. Для рассматриваемого эффекта на стадии, близкой к модели Милна, имеет место формула

$$\frac{\Delta T_d}{T} = \pm \sqrt{u_3^2} \frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{1 - \cos \theta \cos \theta_0}. \quad (21.9.5)$$

Рассмотренные примеры показывают, что характер анизотропии фона может быть сложным. Обсуждаемая выше космологическая модель предсказывает анизотропию фона, зависящую от многих параметров: параметров самой анизотропной модели, трех парамет-

\*) Мы предположили, что доплер-эффект, связанный с движением наблюдателя, мал также и по сравнению с рассмотренной выше анизотропией фона при  $u_3 \neq 0$ . Если это не так, то надо учесть и движение наблюдателя, что приведет к двубочному дипольному эффекту.



ров, определяющих неизвестное движение Солнца относительно поля излучения, еще трех параметров, определяющих переход к использованной выше системе координат от, например, галактической. Следует иметь в виду, что здесь рассмотрена весьма частная модель и реально число параметров, определяющих анизотропию фона, может быть больше. В качестве примера можно указать на модель типа V, в которой  $u_1 \neq 0$  и  $u_2 \neq 0$ . В такой модели число параметров увеличится еще на два. Возможны и еще более сложные модели. Поэтому сравнение предсказываемой анизотропии фона с наблюдениями представляет весьма сложную задачу.

В качестве возможного метода решения такой задачи можно предложить следующий: часть наблюдений используется для определения параметров выбранной модели с помощью разложения по системе ортогональных функций (например, полиномов Лежандра). Проверка справедливости избранной модели будет состоять в этом случае в сравнении предсказанной анизотропии (с найденными уже параметрами) с остальными наблюдениями.

Наиболее важный вывод из рассмотрения даже простейшей модели типа V заключается в том, что для проверки возможной анизотропии расширения Вселенной на ранней стадии недостаточно выделения 12-часовой составляющей анизотропии фонового излучения при сканировании неба по большим кругам (этого достаточно лишь в простейших моделях типа I, а также в некоторых других, например типа IX) и необходимы поиски пятна с предсказанным распределением  $\frac{\Delta T}{T}$  в нем при почти полной изотропии излучения по остальной части небесной сферы.

Обратимся теперь к более общим моделям типов VII и IX с анизотропной кривизной трехмерного пространства [Дорошкевич, Лукаш, Новиков (1974)]. Анизотропия кривизны в этих моделях, как уже неоднократно подчеркивалось, «консервирует» анизотропию расширения на РД-стадии. Эта «консервация» определяет амплитуду  $\frac{\Delta T}{T}$  и играет ту же роль, что и невзаимодействующие частицы, которые здесь не учитываем.

Будем рассматривать случай вещества, покоящегося относительно системы отсчета модели.

Как показано в § 7 этой главы, анизотропия деформации модели на поздних стадиях практически не зависит от начальных условий. Поэтому амплитуда анизотропии реликтового излучения зависит только от момента начала изотропной стадии  $t_\phi$ , от момента смены уравнения состояния  $t_c$  и от момента наступления прозрачности вещества  $t_{пр}$ .

В конце § 7 этой главы было сказано, что наша эпоха расширения Вселенной может соответствовать либо «квазивевклидовой» стадии

эволюции ( $t_\phi < t < t_m$ ), если сейчас  $\rho \approx \rho_c$ , либо милновской стадии ( $t > t_m$ ) в случае моделей типа VII<sub>n</sub> (если сейчас  $\rho < \rho_c$ ).

Предположим, что сейчас  $\rho \approx \rho_c$  и квазиевклидовская стадия. Тогда теория предсказывает следующие выводы для анизотропии реликтового излучения. Отклонения температуры  $\Delta T$  от минимальной  $T$  должны иметь такой вид:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{8}{8 + \ln\left(\frac{t_c}{t_\phi}\right)} \left(\frac{t_c}{t_{\text{пр}}}\right)^{2/3} \sin^2 \theta. \quad (21.9.6)$$

Угол  $\theta$  отсчитывается от выделенного направления на небе. Это направление также является произвольным параметром модели. Принято  $\Delta T = 0$  при  $\theta = 0, \pi$ .

Таким образом, в этом случае распределение  $\frac{\Delta T}{T}$  по небу квадрупольно. Особенностью этой формулы является крайне слабая зависимость от момента изотропизации модели  $t_\phi$ . Из (21.9.6) следует, что если принять момент просветления вещества совпадающим с моментом рекомбинации \*) и считать  $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-3}$ , то момент изотропизации модели  $t_\phi$  будет близок к квантовой границе применимости ОТО  $t_g \sim 10^{-44}$  сек.

Интересной особенностью модели типа IX является условие  $c \ll a \approx b$  в окрестности максимума расширения (см. § 7 этой главы). Это позволяет свету на поздних стадиях расширения успеть много раз обойти мир по направлению  $c$ . Число обходов определяется формулой  $N \sim \sqrt{\frac{a}{c}} \sim Q^{1/2} \gg 1$ . Так как с наблюдениями совместимо не очень малое  $c$  (скажем,  $c > 400 \text{ Mpc}$ ), то  $N \sim 10$ . Пока неясно, в какой степени астрономические наблюдения ограничивают такую возможность.

Предположим теперь, что сейчас  $\rho < \rho_c$ . Распределение  $\frac{\Delta T}{T}$  по небу в этом случае не будет квадрупольным. На небе образуется пятно, в котором  $\frac{\Delta T}{T}$  много больше, чем на всем остальном небе. Причина образования пятна та же, что в моделях типа V. Она связана с особенностями анизотропного расширения искривленного пространства. Мы будем считать, что  $t_c < t_{\text{пр}} < t_m$ , как это должно быть в реальной Вселенной. Тогда распределение  $\frac{\Delta T}{T}$  по небу следующее:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \kappa \left( \frac{4t_m^2 z_{\text{пр}}}{t^2 z_m \left[ 1 + \cos \theta \left\{ 1 - 2 \left( \frac{t_m}{t} \right)^2 \right\} \right]} + 1 \right) \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta \left\{ 1 - 2 \left( \frac{t_m}{t} \right)^2 \right\}}. \quad (21.9.7)$$

\*) А так должно быть, если нет заметного количества межгалактического газа (см. раздел II этой книги).

Здесь  $z_{\text{пр}}$ ,  $z_{\text{м}}$  — красные смещения, соответствующие  $t_{\text{пр}}$ ,  $t_{\text{м}}$ ;  $t$  — сегодняшний момент. Характер распределения анизотропии по небу показан на рис. 60;  $\frac{\Delta T}{T}$  заметно отлнчно от нуля в пятне (в окрестности  $\theta=\pi$ ) размером  $\theta_1 \approx z_{\text{м}}^{-1} \approx \approx \frac{p}{p_0} = \Omega$ . Максимум  $\frac{\Delta T}{T}$  имеет порядок величины

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\text{max}} \approx \kappa \frac{z_{\text{пр}}}{z_{\text{м}}} \quad (21.9.8)$$

Определение  $\kappa$  — см. (21.7.7). Заметим, что вне угла  $\theta_2 \approx z_{\text{пр}}^{1/2} z_{\text{м}}^{-1/2}$  распределение  $\frac{\Delta T}{T}$  дипольно (если  $z_{\text{пр}}^{1/2} z_{\text{м}}^{-1/2} \ll 1$  \*).

Итак, в обоих случаях, (21.9.6) и (21.9.7), амплитуда  $\frac{\Delta T}{T}$  имеет величину, очень слабо (только логарифмически) зависящую от момента изотропизации  $t_{\text{ф}}$ :

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\text{max}} \approx \frac{8}{8 + \ln \frac{t_{\text{с}}}{t_{\text{ф}}}} \left(\frac{t_{\text{с}}}{t_{\text{пр}}}\right)^{1/2} \quad (21.9.9)$$

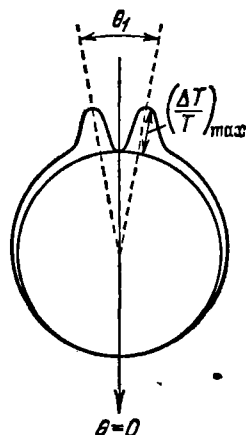


Рис. 60. Распределение анизотропии РИ по небу для модели типа VII<sub>R</sub>.

Эта слабая зависимость есть следствие медленного уменьшения  $\frac{\Delta H_i}{H}$  на второй стадии эволюции. Заметим, что к такому же медленному затуханию  $\frac{\Delta H_i}{H}$  при  $P = \frac{e}{3}$  ведет и наличие небольшого направленного потока нейтрино или гравитонов или направленного потока всего вещества. Таким образом, формулу (21.9.9) можно считать общей.

Какие же все-таки ограничения накладывают наблюдения степени анизотропии реликтового излучения на параметры анизотропных космологических моделей? Напомним, что крупномасштабная анизотропия РИ не более, чем  $3 \cdot 10^{-3}$ .

Прежде всего, важнейший результат заключается в том, что, согласно формулам типа (21.9.6), амплитуда  $\frac{\Delta T}{T}$  может быть мала

\*) Заметим, что если бы было  $t_{\text{пр}} \sim t_{\text{м}}$ , то 
$$\frac{\Delta T}{T} = \kappa \frac{\sin^2 \theta \operatorname{th} \ln \frac{t}{t_{\text{пр}}}}{1 + \cos \theta \operatorname{th} \ln \frac{t}{t_{\text{пр}}}}.$$

Это распределение совпадает с дипольным:  $\frac{\Delta T}{T} \approx \kappa (1 + \cos \theta)$  на всем небе,

за исключением пятна в окрестности  $\theta=\pi$  размером  $\theta \sim \frac{t_{\text{пр}}}{t} \sim z_{\text{пр}}^{-1}$ .

только в двух случаях. В первом случае мал множитель  $\left(\frac{t_c}{t_{\text{пр}}}\right)^{1/3}$ . Это означает, что момент прозрачности наступает много позже момента конца РД-стадии:  $t_{\text{пр}} \gg t_c$ . В свою очередь это возможно только при значительном количестве ионизованного межгалактического газа. Если момент прозрачности  $t_{\text{пр}}$  соответствует  $z_{\text{пр}} \approx 10$ , то  $\frac{\Delta T}{T} < 10^{-3}$  и наблюдаемая степень анизотропии РИ согласуется с любой анизотропной моделью, в которой изотропизация наступает не позже конца РД-стадии, т. е. при  $t_{\phi} < t_c$ .

Если Вселенная прозрачна для реликтового излучения начиная с эпохи рекомбинации водорода (а так, по-видимому, и должно быть), то  $t_{\text{пр}}$  не сильно отличается от  $t_c$  и  $\frac{\Delta T}{T}$  может быть мало, только если велик знаменатель, т. е.

$$\ln\left(\frac{t_c}{t_{\phi}}\right) \gg 1.$$

А это означает, что для получения амплитуды  $\frac{\Delta T}{T}$  заметно меньше единицы необходима чрезвычайно ранняя изотропизация. В этом случае Вселенная должна расширяться изотропно практически с  $t_{\text{пл}} \approx 10^{-44}$  сек, т. е. начиная от границы применимости неквантовой космологии. В случае  $\rho < \rho_c$  столь категоричного вывода сделать нельзя, ибо в этом случае  $\frac{\Delta T}{T}$  близко к максимальному значению только в малом пятне  $\theta_1$ . Вне его  $\frac{\Delta T}{T}$  порядка  $\kappa$ , т. е. существенно меньше. Так как измерения  $\frac{\Delta T}{T}$  не покрывают всего неба, то маленькое пятно с амплитудой  $\frac{\Delta T}{T}$ , скажем,  $10^{-1}$  или даже 1 можно было и пропустить. Для исключения подобной возможности необходимы специальные поиски такого пятна.

# СИНГУЛЯРНОСТЬ И РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ



## Г Л А В А 22

### КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ СИНГУЛЯРНОСТЬ

#### § 1. Введение

Мы обращаемся к рассмотрению важнейшего вопроса космологии — вопроса о начале космологического расширения, вопроса о сингулярности. Обобщающий итог изложенного в предыдущих разделах состоит в том, что Вселенная расширяется изотропно и однородно, начиная, по крайней мере, с момента, когда выполнялось равенство  $\rho_{\text{вещ}} \approx \rho_r \approx 10^{-12} \text{ г/см}^3$ , и с большой степенью вероятности описывалась моделью Фридмана еще гораздо раньше, начиная с эпохи протекания синтеза химических элементов, т. е. с первых секунд расширения и с плотностей порядка  $10^6 \text{ г/см}^3$ .

Что было еще раньше? Расширялась ли Вселенная по Фридману, начиная с сингулярности (или, по крайней мере, с «планковского» момента  $t = 10^{-43} \text{ сек}$ ), или ранняя эпоха была существенно не фридмановской? Проходило ли вещество Вселенной через бесконечно большую плотность (или, по крайней мере, через «планковскую» плотность  $\rho \approx 10^{93} \text{ г/см}^3$ ) или же сжатие Вселенной в еще более раннюю эпоху сменялось расширением при конечной плотности [см., например, Альвен (1971)]?

Согласно модели Фридмана, расширение Вселенной начиналось от сингулярности. Начиная с 30-х годов, на протяжении десятилетий перед космологией стоял вопрос: не является ли наличие сингулярности в начале расширения специальным свойством модели Фридмана (и других достаточно симметричных моделей), не исчезнет ли сингулярность при введении небольших пекулярных скоростей движения материи или вращения?

Аналогия с механической задачей о расширении шара в теории Ньютона подкрепляла такие предположения. Действительно, если рассматривать в теории Ньютона разлет тяготеющих частиц, одновременно вылетающих по радиусам из одной точки, то расширение начинается от сингулярности. Однако при наличии небольших пекулярных скоростей точки пролетают друг мимо друга вблизи центра, плотность частиц всегда конечна и сингулярности не

возникают. Может быть, аналогичная ситуация возможна и в космологической задаче теории Эйнштейна?

Здесь существенно отметить одно обстоятельство, которое подчеркивается Лифшицем и Халатниковым (1963а, б). Если сингулярности в прошлом не было и наблюдаемому расширению Вселенной в прошлом предшествовало сжатие, то космологическая модель, описывающая прохождение вещества через максимум плотности и последующее расширение, должна быть устойчивой, т. е. относиться к «общему решению» по терминологии Лифшица и Халатникова. Иначе говоря, пусть есть какая-то модель без сингулярности, описывающая сжатие вещества до конечной плотности (без сингулярности), а затем его расширение, и пусть малое изменение параметров модели на фазе сжатия приводит к возникновению сингулярности. Тогда, очевидно, эта модель не может осуществляться в действительности, так как всегда найдутся случайные флуктуации, уводящие модель от решения без сингулярности. Таким образом, решение без сингулярности должно быть не исключительным, не вырожденным, а общим, чтобы претендовать на описание реальной Вселенной.

Однако если расширение начинается от сингулярности, то требование общности решения вблизи сингулярности уже не обязательно. Действительно, в этом случае начальные условия, определяющие решение, задаются какими-то неизвестными процессами при огромных кривизнах пространства-времени, т. е. в условиях, не описываемых современной теорией. Возможно, процессы в этом случае приводят к специальным начальным условиям расширения Вселенной, например к почти полной однородности и изотропии [см. Пиблс (1971а)]. Поэтому, если бы даже удалось доказать, что общее решение не содержит сингулярности, то это еще не означало бы, что расширение начиналось не от сингулярности.

Итак, перед космологией стояло два разных вопроса: 1) имеется ли общее (в смысле «устойчивое») космологическое решение без сингулярности? и 2) была ли сингулярность в прошлом в условиях, имеющих место в реальной Вселенной?

В конце 60-х годов был дан положительный ответ на второй вопрос (Пенроуз, Хоукинг, Героч). Было доказано, что расширение Вселенной начиналось с сингулярности (если, конечно, справедлива ОТО, но само изменение ОТО, если это связано с большой кривизной, требует «почти» сингулярности), однако, как именно протекало расширение вблизи сингулярности — по Фридману или более сложным образом, — установлено не было. После этих работ острота первого вопроса для космологии отпала \*). Действительно, структура решения вблизи сингулярности не обязательно соответствует общему решению, и возникает задача: каким-либо способом

---

\*) Общее аналитическое решение с сингулярностью чрезвычайно важно для проблемы гравитационного коллапса.

установить истинный характер начала расширения реальной Вселенной.

В 1972 г. после длительной работы Белинский, Лифшиц, Халатников построили общее (устойчивое) решение с сингулярностью, т. е. дали положительный ответ на первый вопрос.

По своим свойствам общее решение оказалось качественно таким же, как решение вблизи сингулярности для модели «перемешанного» мира (см. §§ 4 и 5 гл. 21).

При дальнейшем изложении мы остановимся на доказательстве наличия сингулярности в прошлом во Вселенной и на физических процессах вблизи самой сингулярности. Можно надеяться, что в будущем анализ этих процессов и следствий из них позволит установить истинный характер расширения Вселенной на самых ранних стадиях, при плотностях, существенно превышающих ядерную.

## § 2. Сингулярность в начале расширения

Предположения о том, что отклонения от фридмановской модели в начале расширения не позволяют избежать сингулярности, высказывались давно. Они основывались в общих чертах на следующих аргументах.

В настоящее время астрономическими методами непосредственно исследуется часть Вселенной, радиус которой меньше, чем гравитационный радиус массы этой части.

Тот факт, что при расширении массы из-под своего гравитационного радиуса сингулярность вначале неизбежна, казался весьма вероятным, хотя строгого доказательства не существовало. Отсюда делалось предположение, что расширение Вселенной начиналось от сингулярности, даже если ранние стадии расширения не описывались моделью Фридмана.

В 1965 г. появилась первая теорема Пенроуза (1965), касающаяся проблемы гравитационного коллапса. В этой теореме доказывалось, что сингулярность неизбежно возникает после сжатия тела до размеров меньше гравитационного радиуса. Вслед за этой работой последовал целый ряд теорем Пенроуза, Хоукинга и Героча, рассматривающих возникновение сингулярности как при коллапсе изолированных тел, так и в космологической проблеме. В 1970 г. Хоукингом и Пенроузом была опубликована обобщающая работа. Сформулированная в ней теорема использует предположения, которые непосредственно проверяемы астрономическими наблюдениями, поэтому она наиболее подходит для обсуждения проблемы сингулярности в космологии. В этой же работе можно найти подробную библиографию.

Все работы рассматриваемой серии используют для доказательства наличия сингулярности геометрические методы, в них не строятся аналитические решения вблизи сингулярности. Таким

образом, доказанные в них теоремы являются теоремами существования, и о структуре сингулярности почти ничего сказать нельзя.

Прежде чем переходить к изложению теоремы Пенроуза — Хоукинга, остановимся на определении понятия сингулярности. Нас интересуют, конечно, истинные сингулярности пространства-времени, т. е. такие, которые объективно существуют независимо от выбора системы отсчета. Их называют истинными сингулярностями в отличие от мнимых, которые связаны с «неудачным» выбором системы отсчета. Прежде всего, существуют чисто координатные сингулярности, подобные пересечению радиальных линий полярной системы в полюсе. Таковы, например, пересечения геодезических линий, образующих синхронную систему отсчета в искривленном пространстве-времени, что особенно подчеркивается Лифшицем и Халатниковым. Несколько другого рода сингулярности, подобные гравитационному радиусу  $r_g$  в системе отсчета Шварцшильда (см. ТТ и ЭЗ). Здесь в системе отсчета Шварцшильда на  $r_g$  гравитационная сила обращается в бесконечность. Таким образом, в системе отсчета имеется физическая особенность. Но эта особенность присуща только системе отсчета, а не пространству-времени. Например, уже давно выяснено, что сингулярность на гравитационном радиусе в сферически-симметричном поле Шварцшильда (см. ТТ и ЭЗ) связана просто с тем, что внутри сферы гравитационного радиуса нельзя продолжать жесткую, недеформирующуюся систему отсчета. Если же перейти в этом поле к системе отсчета из свободно падающих частиц, то никакой сингулярности на гравитационном радиусе нет.

Еще более поучителен следующий пример [Новиков (1964а)]. Рассмотрим в плоском пространстве-времени совокупность частиц, покоящихся в некоторый момент. Частицы начинают двигаться с ускорением, обратно пропорциональным расстоянию от некоторой точки. Это ускорение не гравитационное. Оно постоянно во времени для каждой частицы в ее собственной системе отсчета и равно  $c^2/r$ . Переход от сферических координат  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{\theta}$ ,  $\tilde{\varphi}$  плоского пространства и лабораторного времени  $\tilde{t}$  к сопутствующим координатам рассматриваемой системы отсчета задается преобразованиями

$$\left. \begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{r}{c} \operatorname{sh} \frac{gt}{c}, \\ \tilde{r} &= r \operatorname{ch} \frac{gt}{c}, \\ \tilde{\theta} &= \theta, \quad \tilde{\varphi} = \varphi \end{aligned} \right\} \quad (22.2.1)$$

(здесь  $g$  — постоянная размерности ускорения). Подставляя эти преобразования в  $ds^2 = c^2 d\tilde{t}^2 - d\tilde{r}^2 - r^2(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\varphi}^2)$ , получаем



выражение для  $ds^2$  в нашей системе:

$$ds^2 = \frac{g^2 r^2}{c^2} dt^2 - dr^2 - r^2 \operatorname{ch}^2 \left( \frac{gt}{c} \right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (22.2.2)$$

Мировые линии частиц, образующих эту систему, изображены на рис. 61. Из выражения (22.2.2) следует, что в центре системы  $r=0$  (всего в одной точке!) имеется особенность; здесь  $g_{00}=0$ . Природа этой особенности видна из рис. 61. Эта система отсчета не охватывает всей внутренней светового конуса с вершиной в точке 0. В то время как в координатах  $r, \theta, \varphi, t$  сингулярна «всего» одна точка  $r=0$  при всех  $t$ , в координатах  $\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}, \tilde{t}$  это соответствует всей внутренней полости конуса  $\tilde{r}-\tilde{t} \leq 0$ .

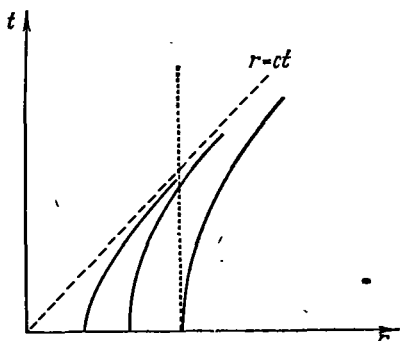


Рис. 61. Мировые линии пробных частиц, образующих систему (22.2.1). Вертикальная точечная линия — мировая линия частицы, покоящейся в лабораторной системе отсчета (тильды у координат опущены).

Как можно, оставаясь в системе  $r, \theta, \varphi, t$ , обнаружить, что она не охватывает целого куска пространства-времени? Это можно сделать, заметив, что частица, свободно «падающая» к сингулярной точке  $r=0$ , достигает этой точки только за бесконечное время наблюдателя, покоящегося в этой системе. Но по собственному времени частица достигает сингулярности за конечный промежуток времени. Убедимся в этом. Возьмем частицу с  $\tilde{r}=\text{const}$ ,  $\tilde{\theta}=\text{const}$ ,  $\tilde{\varphi}=\text{const}$ , т. е. покоящуюся в лабораторной системе. В системе  $r, \theta, \varphi, t$  уравнение ее мировой линии имеет вид  $r = \frac{\tilde{r}}{\operatorname{ch}(gt/c)}$ ,  $\theta=\text{const}$ ,  $\varphi=\text{const}$ . Длина ее мировой линии  $S$ , определяющая ее собственное время  $\tilde{t}=S/c$ , есть

$$S = \int ds = \int_0^{\tilde{t}} \sqrt{\frac{g^2 r^2}{c^2} dt^2 - dr^2} = \int_0^{\tilde{t}} \sqrt{\frac{g^2 r^2}{c^2} - \left( \frac{dr}{dt} \right)^2} dt = \frac{c^2}{g} \operatorname{th} \frac{g\tilde{t}}{c}. \quad (22.2.3)$$

При  $t \rightarrow \infty$  собственное время  $\tilde{t}$  конечно. Дальнейшая «жизнь» частицы после достижения  $r=0$  за конечное собственное время  $\tilde{t}$  не описывается в данной системе, хотя сама мировая линия частицы не встречает здесь никаких особенностей пространства-времени и продолжается дальше (точечная линия выше линии  $r=ct$  на рис. 61). Такие системы получили название геодезически неполных, ибо

некоторые геодезические (например, рассмотренные выше) охватываются ими лишь частично.

Итак, сингулярности в геодезически неполных системах могут быть устранены переходом к другой системе отсчета. Нас сейчас интересуют истинные «инвариантные» неустранимые сингулярности пространства-времени. На первый взгляд, следует называть истинной сингулярностью в пространстве-времени место, где инварианты тензора  $R_{iklm}$ , описывающие кривизну и не зависящие от выбора системы отсчета, достигают бесконечно больших значений (хотя бы один из них <sup>\*</sup>). В этих местах могут нарушаться законы ОТО. Можно ли от такой сингулярности избавиться, просто вырезав кусок пространства-времени вокруг сингулярности? Конечно, такое пространство-время с «дыркой» следует тоже считать сингулярным, хотя в нем нет бесконечных кривизн, но в края дырки упираются мировые линии частиц, и частицы должны здесь «исчезать» или «рождаться». Можно было бы попытаться исключить возможности «дырок», требуя односвязности пространства-времени. Но известно, что возможно многосвязное пространство-время, которое со всех точек зрения следует считать регулярным, в нем нет границ «дырок».

Наиболее естественно считать пространство-время без сингулярности, если все времениподобные мировые линии (а также нулевые) можно было бы продолжать в прошлое и будущее неограниченно до бесконечно собственной длины (для нулевых линий до бесконечного аффинного параметра). Это означало бы, что частицы и фотоны движутся по любым возможным для них путям и нигде не возникают спонтанно и не исчезают ни в прошлом, ни в будущем. В таком пространстве-времени нет ни бесконечных кривизн, ни «дырок». Однако такое требование для мировых линий заведомо слишком сильно и невыполнимо даже в бесконечном плоском евклидовом пространстве-времени.

Действительно, времениподобная мировая линия, достаточно быстро приближающаяся по направлению к нулевой линии (траектории света), будет иметь конечную длину. Но частица, движущаяся по такой линии, будет испытывать неограниченно нарастающее ускорение.

Пусть, например, частица набирает скорость по закону

$$v = c \sqrt{1 - 1/\text{ch}^4 \frac{gt}{c}}, \quad (22.2.4)$$

где  $g$  — постоянная размерности ускорения (но не ускорение самой частицы!). Тогда собственное время частицы  $T$ , протекшее после

---

<sup>\*</sup>) О вычислении инвариантов тензора кривизны см. Петров (1966).

начала ее движения, есть

$$T = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{c}{g} \operatorname{th} \frac{gt}{c}. \quad (22.2.5)$$

При  $t \rightarrow \infty$   $T \rightarrow \frac{c}{g} < \infty$ .

Для ускорения частицы в собственной системе отсчета, т. е. для испытываемой частицей силы на единицу массы, вычисления (см. ТТ и ЭЗ) дают

$$F = \frac{c}{t} \sqrt{\operatorname{ch}^4 \frac{gt}{c} - 1}. \quad (22.2.6)$$

Ускорение частицы равно нулю при  $t=0$  и стремится к бесконечности, когда  $t \rightarrow \infty$ .

Можно считать, что бесконечные ускорения нефизичны, частицы не могут двигаться с неограниченно нарастающим ускорением.

Тогда мы приходим к следующему определению: пространство-время не сингулярно, если любые геодезические времениподобные (т. е. линии для частиц, движущихся без ускорений в собственной системе отсчета) или нулевые линии неограниченно продолжимы в будущее и прошлое до бесконечной собственной длины (до бесконечного аффинного параметра для нулевых геодезических). Такое пространство-время называют причинно геодезически полным. Требования полноты представляются минимально необходимыми для того, чтобы считать пространство-время не содержащим сингулярностей \*).

Надо сразу же оговориться, что пространство-время, не удовлетворяющее этим требованиям, т. е. пространство-время с сингулярностью, не обязательно содержит точки с бесконечной кривизной или «дырки», в которые упираются геодезические. Построены примеры, в которых времениподобная геодезическая быстро подходит к нулевой геодезической и имеет конечную собственную длину.

Но, конечно, с физической точки зрения любое пространство-время, в котором геодезическая мировая линия частицы не может быть неограниченно продолжена по собственному времени этой частицы, следует считать сингулярным, приводящим к нарушению законов сохранения. Мы будем придерживаться этого определения.

Теорема Хоукинга — Пенроуза (1970) в применении к космологической проблеме читается следующим образом.

**Т е о р е м а.** Пространство-время  $M$ , как кусочно-гладкое дифференцируемое многообразие, не может быть причинно геодези-

\*) Заметим, что для описания полного пространства-времени может быть недостаточно одной несингулярной системы отсчета, а потребуются перекрывающиеся системы отсчета, составляющие, как говорят, «полный атлас карт» [см. об этом Пенроуз (1968)].

чески полным, если выполняются уравнения ОТО и следующие условия:

- 1)  $M$  не содержит замкнутых времениподобных кривых;
- 2) для уравнения состояния справедливы условия

$$\varepsilon + \sum P_\alpha \geq 0, \quad \varepsilon + P_\alpha \geq 0, \quad (22.2.7)$$

где  $\varepsilon$  — плотность энергии,  $P_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, 3$ ) — три главных значения тензора давления (так называемая энергодоминантность);

- 3) на каждой времениподобной или нулевой геодезической есть хотя бы одна точка, для которой

$$K_{[a}R_{b]c}K_{d]}K^cK^d \neq 0, \quad (22.2.8)$$

где  $K_a$  касателен к кривой в данной точке,  $[ab]$  — знак альтернирования;

- 4)  $M$  содержит либо а) точку  $p$ , для которой все пучки расходящихся лучей при прослеживании их в прошлом начинают сходиться, либо б) компактную пространственноподобную гиперповерхность.

Разберем условия теоремы.

Требование 1) представляется естественным. Наличие замкнутых линий времени нарушает причинность, и существование таких линий само по себе означало бы некую «сингулярность». Хоукинг и Пенроуз (1970) подчеркивают, что в работе Хоукинга (1966б) доказана теорема о существовании сингулярности в расширяющемся замкнутом мире без условий относительно замкнутых линий времени. Однако там требовалось, чтобы на некоторой компактной пространственноподобной поверхности все вещество расширялось. Формально такая теорема неприменима ко Вселенной (даже если считать ее замкнутой), в которой есть коллапсирующие тела. Эта тонкость существенная для математического доказательства, однако для астрофизика теорема является очень сильным аргументом в пользу того, что образование замкнутых линий времени не есть способ избежать сингулярности.

Требование 2) всегда выполнено для всех известных видов вещества и полей в условиях, когда кривизна пространства-времени далека от «планковских» значений ( $10^{-33}$  см<sup>-2</sup>).

Требование 3) чисто математическое. Оно, по-видимому, справедливо в любом невырожденном решении, и появление геодезической со столь вырожденными свойствами, чтобы вдоль нее всегда выполнялось (22.2.8), вряд ли может быть способом избежать сингулярности. Наконец, требования 4), по существу, являются теми глобальными физическими условиями, которые приводят к появлению сингулярности. Эти условия утверждают, что тяготение всей материи настолько сильно, что сингулярность неизбежна. Условие 4а), в принципе, непосредственно проверяется наблюдениями. Реально это условие может быть проверено ком-

бинацией наблюдательных данных и простейших вычислений. Например, если доказать, что это условие выполняется во фридмановской модели, а затем показать, что, согласно наблюдениям, фридмановская модель применима в прошлом вплоть до момента, когда лучи начинают вновь сходиться (и условие сходимости сохраняется в этой слегка возмущенной модели), то тем самым доказываются выполнение условий 4а).

Мы рассматривали проблему сходимости лучей в прошлом в § 3 гл. 3. При однородном распределении вещества и  $\Omega=1$ , как следует из формул § 3 гл. 3, при красных смещениях порядка  $z \approx 1$  лучи начинают сходиться. Даже если считать, что средняя плотность материи во Вселенной  $\Omega=0,03$ , вся материя входит в галактики и пучки света, не встречающие ни одной галактики, не сходятся в прошлом для  $z$ , превышающих 1, то все равно, перейдя к еще большим  $z > 10-20$ , мы приходим к условиям, когда любые пучки света должны сходиться, и в это время Вселенная расширялась по Фридману. Таким образом, условие 4а) выполняется в реальной Вселенной.

Следовательно, расширение Вселенной началось от сингулярности, во всяком случае постольку, поскольку применимы уравнения ОТО. К сожалению, теорема Хоукинга — Пенроуза практически ничего не говорит нам о структуре сингулярности \*). Она просто утверждает, что по крайней мере одна мировая геодезическая линия частицы или фотона непродолжима неограничено в прошлое (или будущее). Несмотря на возможные экзотические примеры, когда пространство-время подобным образом геодезически неполно, а бесконечных кривизн в нем все же нет, практически все специалисты считают, что в общем невырожденном случае сингулярность означает бесконечную кривизну пространства-времени. Нерешенными в этой теореме остаются следующие вопросы: вся ли материя проходила в прошлом через сингулярное состояние или только часть ее и как проходило расширение вблизи самой сингулярности? Вторая из этих проблем разбирается в следующем параграфе \*\*).

### § 3. Общее космологическое решение с сингулярностью

В § 1 мы уже подчеркивали, что при рассмотрении космологической сингулярности в прошлом в начале расширения нет специальных оснований предполагать, что характер расширения описывается наиболее общим решением, а не каким-нибудь специальным, вырожденным. Характер расширения в этом случае определяется начальными условиями в сингулярности, которых мы не знаем и

\*) Строго говоря, она даже не говорит, была ли сингулярность в прошлом, а не в будущем! [См. оригинальную работу Хоукинга и Пенроуза (1970).]

\*\*) Интересная возможность избежать космологической сингулярности рассмотрена Траутманом (1973) в теории Эйнштейна — Картана, учитывающей влияние спина на геометрию.

которые могут определить характер расширения в соответствии с каким-либо специальным решением, а не наиболее общим. Одну из таких возможностей — интенсивное рождение пар частиц — античастиц вблизи сингулярности, приводящее к изотропному расширению, — мы рассмотрим далее. Но, конечно, решение, описывающее наиболее общий характер расширения от сингулярности, представляет громадный интерес для понимания того, что могло происходить, и, следовательно, для выяснения того, что происходило в действительности. Помимо этого, следует подчеркнуть, что именно общее решение описывает коллапс — сжатие к сингулярности космологической модели (если расширение сменяется сжатием, т. е. если  $\rho > \rho_c$ ), а также и коллапс отдельного тела, сжавшегося под свой гравитационный радиус (см. ТТ и ЭЗ).

Общее решение вблизи сингулярности было построено Белинским, Лифшицем, Халатниковым (1972). В данном параграфе излагаются результаты их работы. Оказалось, что в общем случае при приближении к сингулярности решение, описывающее деформацию, имеет локально, в окрестности каждой точки, тот же характер, что и в модели типа IX или VIII Бианки (модель «перемешанного» мира). Решение состоит из чередующихся «казнеровских эпох» и описывает осцилляционный режим приближения к сингулярности.

Для удобства изложения мы здесь будем описывать сжатие — коллапс. Для описания расширения нужно изменить знак времени.

Общее решение строится следующим образом. Еще в работе Лифшица и Халатникова (1963а, б) приведено так называемое обобщенное решение Казнера. Это решение локально описывает деформацию согласно решению Казнера [см. (18.3.6), (18.3.7)]. Но направление главных осей деформации и величина казнеровских показателей степени  $p_1, p_2, p_3$  меняются от точки к точке трехмерного пространства. Метрика обобщенного казнеровского решения записывается в синхронной системе отсчета в виде

$$g_{\alpha\beta} = a^2 l_\alpha l_\beta + b^2 m_\alpha m_\beta + c^2 n_\alpha n_\beta, \quad (22.3.1)$$

$$a \sim t^{p_l}, \quad b \sim t^{p_m}, \quad c \sim t^{p_n}, \quad (22.3.2)$$

$$p_l + p_m + p_n = p_l^2 + p_m^2 + p_n^2 = 1. \quad (22.3.3)$$

Греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3;  $p_l, p_m, p_n$  — функции пространственных координат; пространственные векторы  $l, m, n$  — тоже функции пространственных координат, они являются единичными векторами. Выпишем теперь уравнения Эйнштейна для синхронной системы отсчета (скорость света равна 1):

$$-\frac{\partial}{\partial t} D_\alpha^\alpha - D_\alpha^\beta D_\beta^\alpha = 8\pi G \left( T_0^\alpha - \frac{1}{2} T \right), \quad (22.3.4)$$

$$D_{\alpha;\beta}^\beta - D_{\beta;\alpha}^\beta = 8\pi G T_\alpha^0, \quad (22.3.5)$$

$$-\frac{1}{Vg} \frac{\partial}{\partial t} (Vg D_\alpha^\beta) - p_\alpha^\beta = 8\pi G \left( T_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta T \right). \quad (22.3.6)$$

Здесь  $D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}$ ; точка с запятой означает ковариантное дифференцирование в трехмерном пространстве с метрикой  $g_{\alpha\beta}$ ;  $p_{\alpha\beta}$  — трехмерный тензор кривизны Риччи, построенный из  $g_{\alpha\beta}$ .

Мы будем исследовать решение уравнений Эйнштейна вблизи сингулярности. Оценки показывают, что в этом случае компонентами тензора энергии-импульса в уравнениях (22.3.4) и (22.3.6) можно пренебречь по сравнению с членами в левых частях уравнений («вакуумная стадия»). Уравнение (22.3.5) пока рассматривать не будем. Оно позволяет вычислить распределение и движение материи после того, как решение для  $g_{\alpha\beta}$  уже найдено. Итак, рассмотрим уравнения (22.3.4), (22.3.6) без правых частей. Если в (22.3.6) пренебречь  $p_{\alpha}^{\beta}$ , т. е. считать  $p_{\alpha}^{\beta} = 0$ , то решение (22.3.4), (22.3.6) будет обобщенное казнеровское решение (22.3.1) — (22.3.3). Предположим, что на некотором интервале изменения  $t$  решение (22.3.1) — (22.3.3) справедливо и  $p_{\alpha}^{\beta}$  можно пренебречь. Будем продолжать решение к сингулярности  $t \rightarrow 0$  и определим границу применимости (22.3.1) — (22.3.3). Для этого мы в каждой точке трехмерного пространства будем проектировать все тензоры на направления векторов  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ . Для того чтобы решение (22.3.1) — (22.3.3) удовлетворяло уравнениям (22.3.4), (22.3.6), надо, чтобы диагональные проекции тензора Риччи были меньше остальных слагаемых в (22.3.6), а эти слагаемые имеют порядок  $1/t^2$ . Поэтому должны выполняться условия

$$p_l^l < t^{-2}, \quad p_m^m < t^{-2}, \quad p_n^n < t^{-2}. \quad (22.3.7)$$

Что касается недиагональных компонент, то, как показывает анализ [см. оригинальную работу Белинского, Лифшица, Халатникова (1972)], ими вообще можно пренебречь в главном порядке всегда при продолжении решения к сингулярности, если только ими можно было пренебречь в начальный момент \*). Итак, в главных порядках мы должны рассматривать четыре уравнения: для нулевой компоненты (22.3.4) и три диагональные проекции  $ll, mm, nn$  уравнений (22.3.6).

В диагональных проекциях тензоров Риччи  $p_l^l, p_m^m, p_n^n$  есть члены вида

$$A = \left( \frac{\mathbf{l} \text{ rot } \mathbf{a} \mathbf{l}}{bcl [\mathbf{m} \mathbf{n}]} \right)^2 \quad (22.3.8)$$

и такие же члены с круговой заменой вектора  $\mathbf{l}$  на  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  и соответствующих скалярных функций  $a, b, c$ .

В обобщенном казнеровском решении одна из функций  $a, b, c$  растет, а две другие падают, когда  $t \rightarrow 0$ . Пусть растущей будет  $a$ .

\*) Надо все время помнить, что мы исследуем общее решение. Конечно, всегда возможны те или иные вырожденные случаи, но они требуют специального подбора начальных условий, и мы сейчас на них не останавливаемся.

Подстановка (22.3.2), (22.3.3) в (22.3.8) показывает, что этот член  $A$  при уменьшении  $t$  растет, как

$$A \sim t^{-2} (|p_1| + 1). \quad (22.3.9)$$

Величина в скобках в показателе (22.3.9) больше 1, т. е.  $A$  растет быстрее  $t^{-2}$  при  $t \rightarrow 0$ . Поэтому в некоторый момент член  $A$  сравняется с остальными членами уравнения (22.3.6), которые росли, как  $t^{-2}$ , и применимость казнеровского решения нарушится. В эту эпоху надо учитывать влияние на решение члена  $A$ . Четыре уравнения:  $0=0$ ,  $l=l$ ,  $m=m$ ,  $n=n$  (которые только и важны в главных порядках) — теперь запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} &= 0, \\ \frac{[(\dot{a})bc]}{abc} + \frac{\lambda^2 a^2}{2b^2 c^2} &= 0, \\ \frac{[a(\dot{b})c]}{abc} - \frac{\lambda^2 a^2}{2b^2 c^2} &= 0, \\ \frac{[ab(\dot{c})]}{abc} - \frac{\lambda^2 a^2}{2b^2 c^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22.3.10)$$

где  $\lambda = \frac{(l \operatorname{rot} l)}{(l[mn])}$ , а точка означает дифференцирование по  $t$ . Эти уравнения совпадают с соответствующими уравнениями для модели типа IX Бианки (§ 4 гл. 21) для периода, когда одна казнеровская эпоха сменяется другой. Единственное отличие состоит в том, что в уравнениях (22.3.10)  $\lambda$  есть функция пространственных координат. Однако для локальных свойств решения это не имеет значения. Поэтому смена «казнеровских эпох» происходит точно так же, как и в модели «перемешанного» мира. В итоге эволюция при приближении  $t$  к нулю локально в каждой точке происходит качественно так же, как и в модели «перемешанного» мира, описанной в § 4 гл. 21.

Следует только добавить, что учет недиагональных проекций уравнения (22.3.6) (которые являются величинами следующего порядка малости) приводит к следующему выводу. При смене «казнеровских эпох» поворачиваются также направления векторов  $l$ ,  $m$ ,  $n$  в каждой точке. Заметим, что такой же поворот имеется и в случае однородной модели типа IX, когда вещество движется относительно модели.

Итак, локально, в каждой точке пространства, в общем случае при приближении к сингулярности решение, описывающее метрику, имеет осциллирующий характер и изображено на рис. 57.

Для описания расширения от сингулярности надо изменить знак времени.

В заключение параграфа еще раз подчеркнем, что начало расширения Вселенной вовсе не обязательно описывалось общим решением. Об этом подробно говорилось в начале параграфа.



## Г Л А В А 23

### ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ВБЛИЗИ СИНГУЛЯРНОСТИ И РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

#### § 1. Введение

Общая теория относительности приводит к выводу о том, что Вселенная в прошлом находилась в сингулярном состоянии. Этот вывод основан на классических уравнениях ОТО и на определенных представлениях о правой части уравнений, описывающей поведение вещества, т. е. частиц и полей, заполняющих пространство.

Сингулярность означает, по-видимому, достижение бесконечных значений кривизны пространства-времени и бесконечной плотности вещества, по крайней мере, в рамках вышеописанной теории. Тем самым становится невозможным продолжить решение еще дальше в прошлое.

В предыдущей главе мы подчеркивали, что более модное и более точное определение сингулярности заключается в том, что не могут быть продолжены мировые линии частиц, в том числе нулевые линии — траектории частиц с нулевой массой покоя.

Но в физике известны законы сохранения зарядов, которые на языке частиц формулируются как непрерывность мировой линии частицы, как невозможность для этой мировой линии где-то начаться или окончиться. Значит, нужно избежать сингулярности или изменить ее. Но, с другой стороны, когда кривизна и плотность приближаются к бесконечности, вполне вероятно и возможно, что исходные положения (ОТО, свойства вещества) изменятся. Таким образом, вблизи сингулярности нужно и можно ожидать выхода за рамки тех представлений, которые использовались ранее. Ранее рассматривались процессы рождения и аннигиляции пар нуклонов и антинуклонов, позитронов и электронов в горячем веществе при  $z \sim 10^{13} - 10^9$ , процессы нуклеосинтеза, поведение нейтрино (особенно в анизотропных моделях). Эти процессы идут вблизи сингулярности по космологической шкале времени,  $t \ll t_0$ . В самом деле, процессы идут в период  $t \sim 10^{-6} - 100$  сек, тогда как  $t_0 \sim 5 \cdot 10^{17}$  сек. Но эти процессы происходят в условиях, когда действительна классическая ОТО. Поэтому они изложены раньше и не попадают в данный раздел.

Мы начнем здесь изложение с рассмотрения космологических следствий теорий Хагедорна и Омнеса. Затем здесь будут рассматриваться специфически квантовые явления в гравитационном поле. При этом сперва будут рассмотрены необходимые следствия экспериментально установленного факта квантования различных полей (электромагнитного, нейтринного и т. д.). Метрика и геометрия пространства-времени при этом будут считаться классическими, детерминированными. Точнее, мелкомасштабная флуктуирующая часть метрики (гравитационные волны) рассматривается квантовым образом вместе с электромагнитным и другими полями на фоне детерминированной усредненной метрики.

Исследуется обратное влияние квантовых полей на метрику. В определенных условиях это влияние можно рассматривать как поправки к классическим уравнениям ОТО. В § 7 кратко рассматривается квантование Вселенной как целого — рассмотрение эволюционных путей как траекторий, имеющих различную вероятность или, точнее, комплексную амплитуду вероятности. Уилер ввел понятие сверхпространства траекторий. Мизнер рассматривает минисверхпространство, ограничиваясь однородными моделями Вселенной. Так как Вселенная велика — даже если она замкнута, она содержит порядка  $10^{80}$  барионов и  $10^{90}$  фотонов, — то такой глобальный подход без учета локальных эффектов (наступающих раньше) представляется нефизичным (ср. § 6 гл. 21).

Естественно задать вопрос, не могут ли другие законы физики измениться вблизи сингулярности. В § 8 дан обзор имеющихся в литературе предположений о нарушении закона сохранения барионного заряда. Рождение барионов (не компенсированное рождением антибарионов) в количестве порядка  $10^{-8}$  от количества других частиц могло бы объяснить наблюдаемую в настоящее время удельную энтропию Вселенной. Цель авторов заключается в том, чтобы, задавшись начальным зарядово-симметричным состоянием Вселенной, получить (в результате эволюции с несохранением барионного заряда) Вселенную с избытком вещества над антивеществом.

Проблема состояния Вселенной вблизи сингулярности еще очень далека от окончательного разрешения. Поэтому возможны и существуют диаметрально противоположные гипотезы. Наряду с описанной выше зарядово-симметричной гипотезой (и зарядово-симметричными гипотезами Альвена — Клейна и Омнеса) возможна и 100%-ная зарядово-несимметричная космологическая гипотеза. В этой последней рассматривается холодное начальное состояние Вселенной и единый спектр возмущений геометрии и плотности. Длинноволновая часть спектра ответственна за образование галактик, коротковолновая часть спектра дает акустические волны. Эти волны, затухая, создают энтропию.

В данной главе рассмотрение явлений вблизи сингулярности послужило поводом к расшатыванию классических теорий. По этому

принципу в ней (§§ 10 и 11) рассмотрены и некоторые другие предложения, выходящие за рамки стандартной теоретической физики, даже если они не связаны прямо с сингулярностью. К этим предложениям относится прежде всего «теория стационарного состояния» (Steady State Theory) и теория «С-поля», развитые Хойлом и др. (§ 10). Рассмотрен так называемый принцип Маха — гипотеза прямого влияния всей Вселенной на каждое локальное явление. Конкретное проявление этой связи Дирак усматривает в численных совпадениях между локальными физическими константами и величинами, характерными для Вселенной как целого.

В § 12 рассматриваются некоторые обобщения ОТО и возможное космологическое значение этих обобщений.

В § 13 рассматриваются экзотические модели Вселенной с необычной топологией. Интересные идеи по некоторым затронутым вопросам читатель найдет, например, в книгах Уилера (1968), Шамы (1971), Вайнберга (1972). О новых явлениях в связи с современной теорией элементарных частиц см. Киржниц, Линде (1974), Зельдович, Кобзарев, Окунь (1974).

В заключение этих вводных замечаний авторы хотят еще раз подчеркнуть свою позицию.

Мы глубоко убеждены, что в необычных условиях вблизи космологической сингулярности должны видоизменяться не только известные фундаментальные физические законы, но и такие физические понятия, как метрическое непрерывное пространство-время и т. п., и мы излагаем в этой главе попытки анализа таких видоизменений, в том числе и наши собственные попытки.

Мы полагаем, что вне таких экзотических условий в диапазоне различных физических параметров, достигнутых в лаборатории или надежно проверенных исследованиями ближайшего космоса, фундаментальные физические законы общеприменимы для описания эволюции Вселенной [см. Гинзбург (1971)]. Теории, основывающиеся на других предпосылках, критикуются в данной главе.

## § 2. Космологические следствия теории Хагедорна

Для теории Хагедорна (§ 4 гл. 6) характерны две особенности:

1) максимум температуры порядка  $kT \sim m_{\kappa} c^2$ ,  $T_{\max} \sim (1-2) \times 10^{12}$  °К;

2) «мягкое» уравнение состояния,  $P \ll \epsilon$ , при температуре, приближающейся к максимуму.

При температуре ниже  $T_{\max}$ , т. е. при  $T < 5 \cdot 10^{11} - 10^{12}$  °К, термодинамические свойства не отличаются от свойств обычной теории, рассматривающей конечное небольшое число сортов частиц. Таким образом, теория нуклеосинтеза и теория реликтового излучения остаются без изменения. Однако есть и проблемы, зависящие от того, был ли период, когда  $T > T_{\max}$ .

Первая особенность существенна для вопроса о количестве кварков или партонов, остающихся после охлаждения. Если принять массу кварка  $M_q$ , то при  $T_{\max}$  доля свободных кварков в равновесии (по отношению ко всем частицам) порядка

$$\exp\left(-\frac{M_q}{kT_{\max}}\right) \sim \exp\left(-\frac{M_q}{M_\pi}\right).$$

Следовательно, при достаточно большой массе кварка (или партона),  $M_q > 50 m_\pi$ ,  $M_q > 7 M_p$ , начальное равновесное количество кварков меньше того, которое в обычной теории (где  $T \rightarrow \infty$ ,  $\frac{M_q}{kT} \rightarrow 1$  вблизи сингулярности) имеется после закалки. На это обстоятельство указывают Фраучи, Стейгман, Бакалл (1972).

Если бы опыты на ускорителе или в космических лучах доказали существование стабильных тяжелых свободных кварков, а поиски остановившихся кварков подтвердили бы отношение  $\frac{Q}{B} \ll 10^{-9}$ , то теория Хагедорна явилась бы якорем спасения современной космологии. Однако, как уже отмечалось, стабильные тяжелые кварки не обнаружены, и, следовательно, это предсказание теории Хагедорна повисает в воздухе. Отсутствие холодных кварков в такой ситуации не является подтверждением теории Хагедорна. Заметим, что и логически теория Хагедорна плохо согласуется с гипотезой кварков; если барионы состоят из кварков, то резонансы — возбужденные состояния барионов — нельзя рассматривать как независимые, невзаимодействующие частицы.

Обратимся ко второй особенности. Изменение уравнения состояния вблизи сингулярности несколько меняет закон расширения, зависимость плотности и радиуса от времени. Однако при фиксированных сегодняшних значениях плотности и параметра Хаббла все изменения строго локализованы в области  $T \sim T_{\max}$ , никаких изменений на стадии нуклеосинтеза и рекомбинации не происходит.

Может ли теория Хагедорна менять картину развития возмущений?

В термодинамической теории равновесных возмущений давление и упругость  $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} = b^2\right)$ , где  $b$  — скорость звука) существенны. Именно градиент давления  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = b^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$  препятствует возникновению флуктуаций плотности. При заданной, равной  $kT$ , энергии каждой акустической моды в термодинамическом равновесии соответствующее отклонение плотности от среднего значения обратно пропорционально скорости звука. Следовательно, термодинамические флуктуации в теории Хагедорна существенно больше (в пределе  $\rho \rightarrow \infty$  в бесконечное число раз) по сравнению с теорией невзаимодействующих частиц.

В космологии, однако, нет условий для осуществления термодинамического равновесия флуктуаций на ранней стадии.

Более естественная постановка вопроса заключается в задании начального возмущения метрики. Напомним, что, согласно решению Лифшица (см. § 3 гл. 11), вблизи сингулярности возмущение метрики остается постоянным, не обращается ни в нуль, ни в бесконечность.

Этот период длится до тех пор, пока  $bt < \lambda$  и  $\frac{\delta\rho}{\rho} < 1$ . Так как  $b < c$  во всяком случае возмущение метрики постоянно, пока между соседними участками (например, максимумом и минимумом плотности) нет обмена информацией. Этот результат мы формулировали ранее так, что в этом периоде отдельные участки возмущенного фридмановского решения развиваются независимо, сохраняя свою метрику. Крайняя оценка  $\lambda > ct$  (со скоростью света вместо скорости звука) справедлива при любом уравнении состояния.

Найдем характерную длину волны в момент, когда уравнение состояния Хагедорна сливается с обычным,  $P = \varepsilon/3$ . В этот момент  $T \approx 10^{12}$  °K,  $t = 10^{-4}$  сек,  $n_b = 10^{24}$  см<sup>-3</sup>, число частиц в объеме  $N = = n(ct)^3 = 3 \cdot 10^{33}$ , масса возмущенной области  $M = 10^{-23}$   $M_\odot$ , т. е. масса возмущенной области ничтожна! Но для всякой большей массы данное возмущение метрики доживет, не изменяясь, до того периода, когда все резонансы аннигилируют и распадутся, т. е. до того, как исчезают эффекты, характерные для теории Хагедорна. Вопросы образования галактик и флуктуаций реликтовой температуры суть те вопросы, в которых теория возмущений связана с наблюдениями. В этой области можно быть уверенным, что теория Хагедорна не изменяет выводов, сделанных ранее.

### § 3. Космологические выводы из теории Омнеса

Теория Омнеса (см. § 3 гл. 6) с самого начала возникла как космологическая теория. Автор поставил задачу объяснить структуру Вселенной (ее деление на галактики, скопления галактик) неустойчивостью горячей адронной плазмы, без каких-либо произвольных предположений о начальных возмущениях метрики плотности или барионного заряда! Предполагается зарядово-симметричная Вселенная, структура которой на современном этапе соответствует разбиению на области, содержащие вещество, и области, содержащие антивещество.

В настоящее время отнюдь не доказано само существование неустойчивости симметричной ( $B = \bar{B}$ ) горячей плазмы, лежащее в основе теории Омнеса \*). Но и при наличии неустойчивости последовательное рассмотрение следующих стадий приводит, по-видимому, к выводам, не согласующимся с наблюдениями: масса отдельных

\*) Напоминаем критическую работу Богдановой и Шапиро (1974).

обособляющихся объектов (галактик) слишком мала ( $<10^9 M_\odot$ ), плотность их слишком велика ( $>10^{-20} \text{ г/см}^3$ ), велика аннигиляция и выделение энергии в плазме, что не согласуется с планковским спектром реликтового излучения.

Однако для того, чтобы обосновать эти пессимистические выводы, необходимо более подробно рассмотреть теорию процессов, возникающих в случае неустойчивости плазмы.

В данном параграфе мы не будем подвергать сомнению саму неустойчивость при температуре выше  $\sim 0,3 M_p c^2$ , т. е.  $10^{12}$ — $3 \cdot 10^{12} \text{ }^\circ\text{K}$ . (Об этом см. § 3 гл. 6.) Рассмотрим макроскопическую сторону дела — размер возникающих неоднородностей барионного заряда, амплитуду плотности  $B$  и  $\bar{B}$ , кинетику разделения и аннигиляции в последующем периоде.

При этом совершенно необходимо пользоваться спектральной теорией, т. е. рассматривать фурье-амплитуды флуктуаций (превышение числа барионов над антибарионами)  $b_k$  и соответствующие величины

$$b(M) = \sqrt{\int_{k=k_0/V\epsilon}^{k=k_0} b_k^2 k^3 dk}, \quad (23.3.1)$$

характеризующие амплитуду флуктуации в данном масштабе  $k_0$ . Будем и впредь (как это мы делали в III разделе книги) характеризовать масштаб той массой, которая содержалась бы в шаре радиусом  $1/k_0$  при средней плотности вещества (и антивещества, если прав Омнес) во Вселенной в настоящее время. В момент возникновения барионной неустойчивости при  $kT \sim 0,3 M_p c^2$  (или выше) уравнения диффузии барионов и антибарионов приводят к неустойчивости зарядово-симметричного состояния. Омнес рассматривает взаимодействие барионов и антибарионов между собой. Естественно, что коэффициент диффузии становится функцией концентраций.

Итак, уравнения для концентрации барионов  $B$  и антибарионов  $\bar{B}$  имеют вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\text{div } Q + \Phi, \quad \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\text{div } \bar{Q} + \Phi. \quad (23.3.2)$$

Здесь  $Q$  есть диффузионный поток барионов,  $\bar{Q}$  — антибарионов,  $\Phi$  — разность числа рождающихся пар и числа аннигилирующих пар. Очевидно, в обоих уравнениях  $\Phi$  одно и то же. Поток  $Q$ , как обычно, зависит от градиента  $B$ , но вследствие взаимодействия \*) зависит и от градиента  $\bar{B}$ :

$$Q = -\alpha(B, \bar{B}) \text{grad } B - \beta(B, \bar{B}) \text{grad } \bar{B}. \quad (23.3.3)$$

\*) Без взаимодействия было бы в нижеследующем уравнении  $\beta=0$ ,  $\alpha=D=\text{const}$ ,

Соответственно

$$Q = -\beta(B, \bar{B}) \text{grad } B - \alpha(B, \bar{B}) \text{grad } \bar{B}. \quad (23.3.4)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты переноса, которые в силу зарядовой симметрии зависят от  $B$  и  $\bar{B}$ . Вычитая одно уравнение из другого и обозначая  $b = B - \bar{B}$ , получим

$$\frac{\partial b}{\partial t} = [\alpha(B\bar{B}) - \beta(\bar{B}B)] \text{grad } B - [\alpha(\bar{B}B) - \beta(B\bar{B})] \text{grad } \bar{B}. \quad (23.3.5)$$

В это уравнение  $\Phi$  прямо не входит. Однако благодаря явлению аннигиляции и рождения пар, происходящему весьма быстро, мы уверены, что при каждой данной температуре и данном значении  $b$  мгновенно устанавливается локальное термодинамическое равновесие, при котором  $\Phi \cong 0$ . Таким образом, косвенно мы используем  $\Phi$  для того, чтобы утверждать, что всегда с хорошей точностью интересующие нас функции зависят от следующих переменных:

$$\left. \begin{aligned} B &= B(b, T), \quad \bar{B} = \bar{B}(b, T), \\ \alpha &= \alpha(B, \bar{B}, T) = \alpha(b, T), \\ \beta &= \beta(B, \bar{B}, T) = \beta(b, T), \\ \alpha - \beta &= D(b, T). \end{aligned} \right\} \quad (23.3.6)$$

Последнее соотношение определяет коэффициент диффузии  $D$ . При низкой температуре  $B=b$ ,  $\bar{B}=0$  при  $b>0$ ;  $B=0$ ,  $\bar{B}=-b$  при  $b<0$ . При малом  $b \ll \gamma$  очевидно  $D=D(T)$ , т. е. не зависит от  $b$ .

Однако при высокой температуре (независимо от того, находимся ли мы в устойчивой или неустойчивой области) статистическая физика дает (см. § 5 гл. 6; функция  $f(T)$  — степенная функция  $T$ )

$$B\bar{B} = f(T) e^{-\frac{2Mc^2}{kT}} \equiv q^2(T), \quad (23.3.7)$$

$$B = \frac{b}{2} + \sqrt{4q^2 + b^2}, \quad \bar{B} = -\frac{b}{2} + \sqrt{4q^2 + b^2}. \quad (23.3.8)$$

Функция  $q^2(T)$  сильно зависит от  $T$ ; взаимодействие барионов, точнее, та его часть, которая имеет противоположный знак для  $B$  и  $\bar{B}$ , не влияет на величину произведения  $B\bar{B} = q^2$ .

Главное изменение в области неустойчивости, типичное для теории Омнеса, заключается в том, что зависимость  $D(b, T)$  имеет необычный вид ( $D_0$  и  $b_0$  — постоянные):

$$D = -D_0 \left( 1 - \frac{b^2}{b_0^2} \right). \quad (23.3.9)$$

Отрицательный знак  $D = -D_0$  при  $b=0$  как раз соответствует не-

устойчивости зарядово-симметричного состояния. Те два значения  $b = \pm b_0$ , при которых  $D=0$ , соответствуют равновесным составам барионных и антибарионных капель после разделения.

В результате в период неустойчивости ( $T > 350 \text{ Мэв}$  по оценке Омнеса) все пространство разделится на две равные по объему области — одна, заполненная веществом, точнее, горячей плазмой с избытком барионов ( $b = +b_0$ ), другая — антивеществом ( $b = -b_0$ ). Говорить о «каплях» антивещества, вкрапленных в вещество, было бы неточно: при равных объемах столь же часто встречаются изолированные области («капли») вещества, со всех сторон окруженные антивеществом.

Нужно решить два вопроса: 1) каков характерный размер  $r$  областей, занятых веществом и антивеществом? и 2) каков средний избыток вещества или антивещества в больших областях (размера  $R \gg r$ ), содержащих много капель? На первый вопрос легко дать правдоподобный ответ:  $r \sim \sqrt{D_0 t}$ . В адронной стадии коэффициент диффузии определяется столкновениями сильновзаимодействующих частиц; сечение не меньше, чем  $10^{-26} \text{ см}^2$ , скорость частиц мало отличается от скорости света. Температуре  $350 \text{ Мэв}$  соответствует время  $t = 10^{-6} \text{ сек}$ , плотность  $5 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3$ , при средней энергии частиц  $10^3 \text{ Мэв} = 10^{-3} \text{ эрг}$  плотность частиц равна  $3 \cdot 10^{39} \text{ см}^{-3}$ . Полагая, что адроны составляют одну треть, получим длину пробега  $10^{-13} \text{ см}$  и окончательно характерный размер

$$r \approx \sqrt{\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-13} \cdot 10^{-5}} = 10^{-4} \text{ см.}$$

Капля такого размера содержит избыток барионов порядка  $b_0 r^3 = 3 \cdot 10^{38} \cdot 10^{-12} = 3 \cdot 10^{26}$  штук, что соответствует 500 граммам.

При высокой температуре имеет место термодинамическое равновесие как внутри областей с избытком  $B$  и  $\bar{B}$ , так и на границе этих областей. Везде аннигиляция компенсирована рождением пар.

В ходе дальнейшего расширения происходит охлаждение. Теплопроводность осуществляется фотонами, пробег которых больше пробега адронов; температуру можно считать постоянной. В каждой из областей аннигиляция заканчивается истреблением тех частиц, которые в данной области находятся в меньшинстве. Необратимо распадаются и тяжелые сильновзаимодействующие мезоны. Остаются области, содержащие только  $B$  (но не  $\bar{B}$ ) наряду с лептонами и фотонами, и области, содержащие только  $\bar{B}$  (но не  $B$ ). На границе областей происходит необратимая аннигиляция  $B$  и  $\bar{B}$ , перетекающих из глубины соответствующих областей. При температуре выше  $3 \text{ Мэв}$  протоны превращаются в нейтроны, позже остаются только протоны (а в  $\bar{B}$ -областях — антипротоны), диффундирующие медленнее, чем нейтроны. Одно из следствий гипотезы Омнеса, отмеченное им же, заключается в том, что нейтроны ан-



нигилируют, а потому не образуется  $\text{He}^4$ . Без аннигиляции на границе сохранялась бы масса ( $\approx 500 \text{ г}$ ) характерных областей, а размеры росли бы в соответствии с расширением. Аннигиляция приводит к тому, что к моменту  $t_1$  усредняется состав по большим областям

$R \sim \sqrt{D_1 t_1}$  или  $\sqrt{\int_0^{t_1} D dt}$  ( $R \gg r$ ). Но в большой области средний барионный заряд меньше! Здесь-то и возникает вторая задача — об амплитуде длинноволновых возмущений. Было бы неправильно считать, что малые области распределены совершенно случайно и отклонения от среднего  $|\Delta n| = \sqrt{n}$ , где  $n = \frac{R^3}{r^3}$  — число малых областей в одной большой области. Мы уже отмечали в главе 12, что нельзя подсчитывать флуктуации, рассматривая резкую границу шара, так как поверхность шара  $R^2$ , число малых объемов, пересекаемых поверхностью,  $n_S = \frac{R^2}{r^2}$  и  $|\Delta n_S| = \sqrt{n_S}$ . Правильный подход заключается в том, чтобы найти амплитуду длинных волн [малые  $k$  в фурье-представлении  $e^{ikx}$  или  $\cos(kx + \varphi)$ ]. Из нелинейного уравнения диффузии с  $D = D_0 \left(1 - \frac{b^2}{b_0^2}\right)$  видно, что длинные волны могут возникнуть из коротких. Для этого нужно, чтобы векторная сумма  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}$ . Так как уравнение для изменения  $b$  со временем имеет вид

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \text{div } \mathbf{D} \text{ grad } b, \quad (23.3.10)$$

то получим

$$\frac{db_k}{dt} = k \frac{D_0}{b_0^2} \iiint b_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) k_3 d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3. \quad (23.3.11)$$

Важно то, что амплитуда  $b_k$  содержит множитель  $k$ , так что  $|\bar{b}_k^2| \sim k^2$ . Интеграл оценим, учитывая, что на размерах  $r$  достигнуто насыщение диффузии, концентрация равна  $b_0$ , что означает  $b_k^2 k_r^3 = b_0^2$  для  $kr=1$ . По порядку величины получим отсюда ( $V=R^3$ ,  $v=r^3$ )

$$b_R = \sqrt{b_k^2 k_R^3} = \sqrt{b_0^2 \frac{k_R^5}{k_r^5}} = b_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{5/2} = b_0 \left(\frac{V}{v}\right)^{-1/2}. \quad (23.3.12)$$

Закон убывания флуктуаций с увеличением объема оказался значительно более резким, чем для независимых случайных объемов  $\left(\frac{V}{v}\right)^{-1/2}$ , но ненамного сильнее, чем для поверхностных флуктуаций.

В результате локальной аннигиляции концентрации  $B$  и  $\bar{B}$ , равные  $b_0$ , составляют долю порядка 0,1 концентрации фотонов. В настоящее время  $b/\gamma \sim 10^{-8}$  или  $10^{-9}$ . Из формулы (23.3.12) следует, что такая концентрация получится после усреднения по объе-

мам, которые в  $10^{9 \cdot \frac{6}{5}} \approx 10^{11}$  раз больше первоначальных. При этом каждый характерный объем содержит массу барионов или антибарионов всего в  $500 \text{ г} \cdot 10^{9 \cdot 0.2} \approx 5 \cdot 10^4 \text{ г}$ .

Неумолимый вывод заключается в том, что диффузионные процессы совершенно недостаточны для того, чтобы создать разделение вещества и антивещества в макроскопических размерах. Омнес дает для конца стадии диффузионной аннигиляции  $b/\gamma \approx 10^{-8}$  при температуре  $30 \text{ кэВ}$ , размер  $R \approx 3 \cdot 10^3 \text{ см}$ , что соответствует массе барионов  $M \approx 30 \cdot 10^6 \text{ г}$ . Эти оценки мало отличаются от приведенной выше оценки по соотношению между  $b/\gamma$  и  $M$ . Однако представляется возможным, что при  $T = 3 \text{ кэВ}$  процесс диффузионной аннигиляции должен пойти дальше: коэффициент диффузии (рассчитанный по взаимодействию электронов и позитронов с излучением) порядка  $10^8 \text{ см}^2/\text{сек}$ , космологическое время  $t \sim 3000 \text{ сек}$ , что дает  $R \sim \sqrt{Dt} \sim 5 \cdot 10^5 \text{ см}$ .

Начальный радиус  $r = 10^{-4} \text{ см}$  увеличивается за счет расширения в отношении обратных температур:  $r' = 10^{-4} (350 M_{\text{эВ}}/30 \text{ кэВ}) = 1 \text{ см}$ . Получим  $\frac{b}{\gamma} = 0,1 \left(\frac{r'}{R}\right)^{3/2} \approx 10^{-15}$ . Такая оценка уже необратимо расходится с реальной Вселенной.

Омнес (1971а—в) полагает, что после достижения  $b/\gamma = 10^{-8}$  вступает в действие новый, гидродинамический механизм разделения — коалесценция, слияние областей вещества между собой и, соответственно, слияние областей антивещества. Предполагаемый механизм связан с выделением энергии при аннигиляции на поверхности раздела. При рассмотрении принято вспоминать поведение капель воды на раскаленной плите, их движение под влиянием испарения — феномен Лейденфроста (1745—1794). Плоская поверхность раздела при этом по симметрии не сдвигается. Однако если поверхность искривлена, то возникнет повышение давления, более сильное с той стороны, которая охвачена поверхностью, поверхность раздела будет перемещаться так, что радиус кривизны ее уменьшится. Таким образом, выделение энергии аннигиляции феноменологически действует наподобие поверхностного натяжения, вызывая движение, уменьшающее поверхность раздела вещества и антивещества.

Омнес полагает, что за счет этих механизмов к моменту рекомбинации размеры областей увеличиваются (с учетом также и общего расширения) до  $10^{22} \text{ см}$  при малом изменении  $b/\gamma$ . Это соответствует обособлению масс около  $10^{11} M_{\odot}$  — порядка масс больших галактик.

Надежный расчет коалесценции весьма труден. Можно опасаться резкого преувеличения эффекта в расчетах Омнеса; к тому же аннигиляция на предыдущем этапе, до начала движения, по-видимому, проходит глубже, чем предполагает Омнес.

Однако еще важнее трудности, с которыми встречается теория симметричной Вселенной при сопоставлении с наблюдениями.

По формулам Омнеса коалесценция сопровождается выделением энергии аннигиляции, в 20 раз превышающей плотность лучистой энергии в планковском спектре к данному моменту. Рассматривая теорию плазмы, мы показали, что уже выделение  $0,1-0,05\epsilon_\gamma$  должно приводить к заметным искажениям спектра реликтового излучения в хорошо исследованной длинноволновой части спектра (см. § 2 гл. 15).

Таким образом, необходимое для теории Омнеса выделение энергии в сотни раз больше верхнего предела, совместимого с наблюдениями.

В ряде работ Стейгмана (1971, 1973) последовательно показано, что и наблюдения гамма-лучей говорят против зарядово-симметричных моделей Вселенной. Важный момент, относящийся к симметричным теориям, отметил Бардин [цитируем по Филду (1973а)]: в таких теориях в момент рекомбинации вещество и антивещество разделены, в промежутке — около границ — плотности гораздо меньше средних, так что возмущения плотности порядка  $\frac{\delta\rho}{\bar\rho} \sim 1$ .

Но в таком случае образование гравитационно связанных объектов происходит быстро, и теория приводит к большим их плотностям ( $\sim 10^{-21} \text{ г/см}^3$ ), что больше средней плотности галактик, не говоря уже о средней плотности скоплений.

В целом, при всей красоте замысла, теория Омнеса встречается с такими трудностями, которые заставляют отказаться от предлагаемой им картины эволюции Вселенной.

#### § 4. Квантовые явления в сингулярных состояниях метрики и гравитационного поля

Выше неоднократно отмечалось, что в экстремальных условиях вблизи сингулярности необходимо учитывать одновременно и ОТО и квантовые эффекты. Учет квантовых эффектов может внести принципиальные изменения в выводы классической ОТО.

В какой области можно ожидать существенных эффектов? ОТО не вносит в теорию новых физических констант, кроме уже известных \*): скорости света  $c$  и ньютоновской постоянной тяготения  $G$ . Планк ввел свою знаменитую постоянную  $\hbar$  в теорию излучения в 1899 г. (сейчас принято пользоваться величиной  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-27} \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ ). Он отчетливо понимал значение идеи квантования для всей физики, всего естествознания.

\*) Космологическая постоянная  $\Lambda$ , если она отлична от нуля, существенна лишь в очень больших масштабах, где нет квантовых явлений.

Рассматривая  $c$ ,  $G$ ,  $\hbar$  как три равноправные фундаментальные величины, Планк показал, что через них могут быть выражены величины любой размерности. В частности, через  $c$ ,  $G$  и  $\hbar$  можно выразить единицы длины  $l_g$ , времени  $t_g$ , массы  $m_g$ , плотности  $\rho_g$ :

$$\left. \begin{aligned} l_g &= \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см}, \\ t_g &= \frac{l_g}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,3 \cdot 10^{-44} \text{ сек}, \\ m_g &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ з}, \\ \rho_g &= \frac{m_g}{l_g^3} = \frac{c^5}{G^2 \hbar} = 5 \cdot 10^{93} \text{ з/см}^3. \end{aligned} \right\} \quad (23.4.1)$$

Легко заметить сходство закона Кулона  $U = \frac{e^2}{r}$  и ньютоновского  $U = \frac{Gm^2}{r}$ ; так как  $e^2$  и  $Gm^2$  одной размерности, то, очевидно,  $\frac{Gm^2}{\hbar c}$  есть безразмерная величина, подобно знаменитой  $\frac{e^2}{\hbar c} = \alpha = \frac{1}{137}$ . Для элементарных частиц  $Gm_e^2/\hbar c = 2 \cdot 10^{-45}$ ,  $Gm_p^2/\hbar c = 6 \cdot 10^{-39}$ . Условие  $Gm_g^2/\hbar c = 1$  дает характерную массу  $m_g$ , приведенную выше. Длина  $l_g$  есть «комптоновская длина волны» массы  $m_g$ , а именно  $l_g = \hbar/m_g c$ . Наконец, в теории элементарных частиц применяется еще один способ выражения. Примем  $\hbar=c=1$ . В такой системе единиц длина и время имеют одинаковую размерность, обратную размерности массы,  $l=t=m^{-1}$ . Произведение  $Gm^2$  безразмерно, следовательно, размерность  $G$  есть  $m^{-2}=l^2$ . Соответствующие  $G$  «площадь», «сечение» равны  $2,5 \cdot 10^{-66} \text{ см}^2$ .

Эти величины характеризуют область, в которой принципиальную роль играют квантовые эффекты в гравитации: нужно, чтобы кривизна пространства-времени была порядка  $R_{\alpha\beta}^0 \sim l_g^{-2} \sim 10^{66} \text{ см}^{-2}$ . Такая ситуация может возникнуть в вакууме, но в вакууме она «не обязательна». С другой стороны, если плотность вещества достигает порядка  $\rho_g$ , то соответствующая кривизна (порядка  $l_g^{-2}$ ) следует из уравнений ОТО и в этом смысле «обязательна».

Насколько просто найти область, где важны квантовые явления, настолько же трудно выяснить, что именно происходит в этой области [С. Де Витт, Уилер (1968), Гинзбург, Киржниц, Любушин (1971)]. Здесь становится трудно даже сформулировать проблему. Вся обычная (в том числе и квантовая) физика рассматривается

в рамках заданного пространственно-временного многообразия. В квантовой физике классические траектории и поля заменяются понятием волновых функций, с помощью которых можно высказывать вероятностные предсказания о результатах опытов. Однако координаты и время рассматриваются как обыкновенные детерминированные величины (С-числа).

Искривление пространства-времени, зависящее от усредненных величин, не меняет принципиальной стороны дела, если это искривление меньше  $l_g^{-2}$ . Между тем в квантово-гравитационной области сами пространство и время, возможно, приобретают вероятностные, недетерминированные свойства.

В космологии выход состоит в том, чтобы задавать вопросы (и вычислять величины), относящиеся к тому периоду, когда мир уже вышел из сингулярного состояния, когда нигде нет ни грандиозной кривизны, ни огромной плотности материи.

Такой подход был бы похож на теорию  $S$ -матрицы. Как известно, Гейзенберг предложил рассматривать лишь состояния до и после столкновения элементарных частиц, отказываясь от детального описания самого акта столкновения. Ценность такого подхода заключается в том, что доказывается принципиальное существование ответа, однако для получения конкретного ответа этого недостаточно \*)! Квантово-гравитационная теория необходима именно в космологии, поскольку имеется уверенность, что Вселенная (повидимому, можно даже усилить: *вся Вселенная, все вещество Вселенной!*) прошла через состояние, анализ которого требует этой теории. Такое рассмотрение тем более необходимо, что выше мы видели, как велико разнообразие классических (не квантовых) космологических решений. Может быть, квантово-гравитационная теория сингулярного состояния укажет условия выбора из этого множества.

Законченной квантово-гравитационной космологической теории в настоящее время не существует, есть лишь отдельные результаты, излагаемые ниже. Однако и в таком несовершенном виде можно усмотреть указания на то, что, может быть, окажутся запрещенными анизотропные сингулярные метрики, останется разрешенным только квазизотропное решение [см. Зельдович (1970в, 1973а), Лукаш, Старобинский (1974)]. Намечается подход к объяснению энтропии Вселенной (§ 9 этой главы). Следовательно, несомненно огромное значение рассматриваемой проблемы для космологии (опосредствованно, через длинную цепочку выводов — и для наблюдательной космологии). Общий характер данной книги заключается в том, что излагаются (наряду с твердо установленными фактами) также гипотезы и вопросы, подлежащие исследованию.

---

\*) В теории  $S$ -матрицы получено много важных конкретных результатов, но и в области элементарных частиц этой теории недостаточно!

Поэтому мы, не колеблясь, посвящаем следующие параграфы квантово-гравитационной теории.

Примером для такой теории служит квантовая электродинамика, где удалось получить замечательное согласие с опытом специфических эффектов, предсказанных теорией в конце 40-х годов. Мы имеем в виду прежде всего лэмбовский сдвиг уровней водородного атома и аномальный магнитный момент электрона. Успех достигнут путем последовательного применения квантовой теории с преодолением трудностей (что потребовало введения новых понятий: перенормировки массы, перенормировки заряда, поляризации вакуума). Однако не потребовалось вводить элементарную длину, не потребовалось отказываться от общих принципов квантовой механики. Квантовая электродинамика является вдохновляющим примером для будущей квантово-гравитационной теории.

В ряде работ развивается логическая схема такой теории и вычисляются квантово-гравитационные поправки к величинам, наблюдаемым в лабораторных опытах. Первый шаг был сделан в 30-х годах; была проквантована линейная теория гравитационных волн. При этом гравитационные волны рассматривались как малые возмущения геометрии плоского пространства или как постороннее (не геометрическое) тензорное поле, вложенное в плоское пространство. С сегодняшней точки зрения результаты тривиальны: энергия гравитонов равна  $\hbar\omega$ , они являются бозонами со спином 2 и нулевой массой покоя и т. п. В следующем порядке оказывается существенной нелинейность исходной классической теории (ОТО): гравитоны сами обладают массой и импульсом (хотя масса покоя их и равна нулю) и являются, следовательно, источником гравитационного поля. Последовательный учет этого факта начат Фейнманом (1963) и доведен до ясности в последнее время Фаддеевым и Поповым (1967) и Де Витом (1967 а, б).

Специфические квантово-гравитационные эффекты в лабораторной физике (да и в астрофизике, за вычетом теории сингулярностей) малы. Деятельность Фейнмана и ряда других авторов вдохновлялась скорее эстетическими целями, что Фейнман и не скрывает.

В космологии ситуация существенно иная: при  $t \sim t_g$  квантово-гравитационные эффекты порядка единицы, и представляет интерес даже грубое представление о характере этих эффектов. Как будет показано ниже, наиболее важным эффектом, вероятно, является рождение частиц или пар частиц в сильных гравитационных полях.

Влияние гравитационного поля на движение частиц и распространение волн полностью описывается заданием метрики пространства-времени. Постоянная  $G$  не входит в уравнения движения частиц и распространения волн в заданном пространстве-времени \*).

---

\*) Величина  $G$  появляется лишь в обратной задаче влияния вещества на метрику.

Самое общее представление о процессе рождения частиц можно получить, начиная с рассмотрения классической (не квантовой) линейной волны. В плоском пространстве-времени волна распространяется так, что сохраняются ее энергия и частота в отдельности. В искривленной и нестационарной метрике существует важный предельный случай геометрической оптики, если длина волны и период малы по сравнению с размером области, в которой происходит заметное отклонение от евклидовой геометрии, и по сравнению со временем, за которое метрика изменяется. Геометрическая оптика содержит два понятия:

1) понятие о лучах, являющееся для волнового пакета аналогом понятия траектории для частицы;

2) понятие адиабатического инварианта, относящееся к амплитуде и интенсивности волнового поля. Энергия волнового поля изменяется пропорционально его частоте.

Следовательно, отношение энергии к частоте является инвариантом, остается постоянным в геометрической оптике.

Но это отношение как раз пропорционально числу квантов поля:

$$E = n\hbar\omega, \quad \frac{E}{\omega} = nh. \text{ Классическая геометрическая оптика включает}$$

в себя сохранение числа квантов, хотя в этой теории и не рассматривались никакие квантовые эффекты \*). Но при быстром изменении метрики адиабатическая инвариантность нарушается, а значит, меняется число квантов, они рождаются или уничтожаются. Важно, что изменение числа квантов происходит без каких-либо внешних источников поля (движущихся зарядов и т. п.), только за счет взаимодействия с геометрией пространства-времени.

В квантовой теории обозначим волновую функцию низшего состояния (вакуума) через  $\Psi_0$ , а состояния с частицей — через  $\Psi_1$ . При рассмотрении переменной метрики и рождения частицы возникает суперпозиция:

$$\Psi_0(t = -\infty) \rightarrow \Psi(t) = C_0(t)\Psi_0 + C_1(t)\Psi_1. \quad (23.4.2)$$

По правилам квантовой теории вероятность найти частицу равна  $|C_1|^2$ , соответственно и энергия поля  $T_{00} \sim |C_1|^2$ . Но в выражениях тензора натяжений есть и недиагональные члены; например,

$$T_{xx} = A(C_0 C_1^* + C_0^* C_1) + B|C_1|^2. \quad (23.4.3)$$

В начале процесса при малых  $|C_1|$ , нарушается обычное условие энергодоминантности (см. стр. 614), возможно  $|T_{xx}| > |T_{00}|$ . Рождение частиц и коэффициенты типа  $C_1$  зависят от соотношения между частотой волн  $\omega_1$  (соответствующей разности энергий состояний

\*) Этот аспект связи между классической и квантовой теориями рассмотрен в статье Парадоксова (1966) «Как квантовая механика помогает понять классическую». Общее выражение числа фотонов в произвольном электромагнитном поле см. Зельдович (1965а).

$\Psi_1$  и  $\Psi_0$ ) и скоростью изменения метрики  $r$ :

$$\omega = (E_1 - E_0)/\hbar, \quad C_1 = C_1(\omega/r). \quad (23.4.4.)$$

Для типичной для космологии степенной зависимости метрики от времени характерное время изменения метрики равно времени  $t$ , прошедшему с момента сингулярности. Следовательно, неадиабатичны волны с  $\omega < \frac{1}{t}$ ,  $k < \frac{1}{ct}$ . Считая, что в этой области рождается в среднем по одному кванту на моду, получим порядок, величины плотности энергии рожденных квантов  $\epsilon = \hbar\omega k^3 = \frac{\hbar}{c^3 t^4}$ .

Заметим, что, хотя речь идет о рождении частиц в гравитационном поле, величина  $G$  не вошла в ответ!

Отметим, далее, сильную зависимость  $\epsilon$  от  $t$ . Строго говоря, мы нашли (по порядку величины) плотность энергии частиц, родившихся за время между  $t$  и  $2t$  (или  $\frac{t}{\sqrt{e}}$  и  $t\sqrt{e}$ ). Здесь возникает огромное различие между задачей о коллапсе (сингулярность в будущем) и космологической задачей (сингулярность в прошлом).

В задаче коллапса рассматривается период, когда  $t < 0$ , время отрицательно (положено, что сингулярность отвечает  $t=0$ ). В данный момент  $t_0$  частицы, родившиеся давно (например, в период раньше  $2t_0$  или  $5t_0$ ), дают малый вклад в  $\epsilon$ . Скорость рождения частиц быстро возрастает; в каждый данный момент главную роль играют частицы, родившиеся в самое последнее время, например в интервале  $2t_0 < t < t_0$  (напоминаем,  $t < 0$ ,  $t_0 < 0$ ). Формула  $\epsilon = \frac{\hbar}{c^3 t^4}$  имеет место хотя бы как порядковая оценка. Рассматривая дальше задачу о коллапсе, можно спросить: когда родившиеся частицы сами существенно повлияют на метрику? До сих пор мы рассматривали распространение «пробных» волн (ср. «пробные» частицы) в заданной метрике.

В уравнениях ОТО степенные решения соответствуют тому, что компоненты тензора кривизны порядка  $(ct)^{-2}$ . В правой части уравнений ОТО находится  $\frac{G\epsilon}{c^2}$ . Подставляя выражение  $\epsilon$  и приравнявая

правую и левую части, получим характерное время, которое выражается через  $G$ ,  $\hbar$ ,  $c$ , а следовательно, не может отличаться от  $t_g$ .

Итак, в задаче о коллапсе уже проясняется то новое, что должна принести квантово-гравитационная теория.

При приближении к сингулярности в силу нарушения адиабатичности рождаются новые частицы — фотоны, электрон-позитронные пары, пары  $\nu\bar{\nu}$ , гравитоны. Их плотность энергии при  $t \rightarrow 0$  растет быстрее, чем плотность энергии «вещества», заполнявшего пространство вдали от сингулярности и сжатого по адиабатическому



закону. При приближении \*) к  $t_g$  влияние новорожденных частиц становится преобладающим и действует на дальнейшее изменение метрики даже в том случае, если до  $t_g$  «вещество» не влияло на метрику, происходил вакуумный подход к сингулярности (см. § 3 гл. 18).

В принципе мы можем продвинуться дальше, в интервал  $t_g < t < 0$ , решая совместно уравнения изменения метрики и рождения частиц.

Совершенно иная ситуация возникает при попытке применить теорию рождения частиц к космологии. Начнем рассмотрение в момент  $t_1$ . Примем, что в этот момент задана метрика; например, в пространственно-однородной задаче заданы значения кривизны и скоростей расширения (по разным направлениям) и структурные константы, характеризующие тип пространства. Пренебрежем плотностью энергии и импульса вещества в момент  $t_1$  в соответствии с «вакуумным» характером решения. За время с  $t_1$  до  $2t_1$  в вакууме возникнут частицы с плотностью энергии, по порядку величины

$$\epsilon \sim \frac{\hbar}{c^3 t_1^4}.$$

Подчеркнем, что в космологической задаче эта формула действует очень недолго: в более поздний момент  $t_2$ ,  $t_2 > t_1$ , плотность энергии недавно рожденных частиц  $\epsilon' = \frac{\hbar}{c^3 t_2^4}$ , но рожденные ранее (при  $t \sim t_1$ ) частицы не исчезают — они расширяются и дадут  $\epsilon'' = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{4/3} \frac{\hbar}{c^3 t_1^4} = \hbar c^{-3} t_2^{-4/3} t_1^{-1/3}$ .

Оказывается, что  $\epsilon'' > \epsilon'$ . Плотность энергии в данный момент  $t$  (в отличие от задачи коллапса) радикально зависит от момента включения рождения частиц, от того, в каком смысле и как происходило включение.

Итак, в задаче о коллапсе, по крайней мере до поры до времени (до  $t_g$ , а может быть, и дальше), возможен анализ явления безотносительно к границам существующей квантово-гравитационной теории. В космологии Вселенная в каждый момент «помнит» начальные условия.

Наряду с этими общими соображениями можно отметить важный конкретный факт. В теории распространения волн — а следовательно, и в теории рождения частиц — существует весьма важный принцип конформной инвариантности. Подробно этот принцип разбирается в § 19 этой главы. Этот принцип позволяет пойти дальше соображений размерности и выявить качественное различие между

---

\*) Здесь подразумевается  $t_g = -\sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$ ,  $t_g < 0$ .

сингулярностями фридмановского и анизотропного (казнеровского) типа \*).

Конформным называется изменение метрики, заключающееся в изменении масштаба всех длин и времен, причем это изменение масштаба может быть различным в разных мировых точках, но обязано быть одинаковым в данной точке для всех пространственных направлений и времен. Так, например, плоский мир Минковского можно преобразовать в «конформно-плоский» мир:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \rightarrow ds^2 = a^2(x, y, z, t) (dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2).$$

Подчеркнем, что при таком преобразовании существенно меняется геометрия, — речь идет не о преобразовании координат, а об установлении соответствия между различными четырехмериями. Конформно-плоский мир имеет отличный от нуля тензор кривизны  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , выражающийся через производные функции  $a(x, y, z, t)$ . В конформно-плоском мире особенно просто рассматривается распространение волн со скоростью света: луч, подчиняющийся условию  $ds=0$ , соответствует решению  $e^{ikx - i\omega t}$  в мире Минковского. Такое же решение имеет место и в конформно-плоском мире: если  $ds=0$ , то и  $a(x, y, z, t)ds=0$ . Распространение волн в плоском мире Минковского не сопровождается рождением частиц. Следовательно, рождения безмассовых частиц нет и в конформно-плоском мире.

Начальная стадия фридмановской модели описывается метрикой

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (23.4.5)$$

Такая метрика является конформно-плоской; введем

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad d\eta = \frac{dt}{a} \quad (23.4.6)$$

и, выразив  $a(t)$  в функции  $\eta$ ,  $a(t) = b(\eta)$ , окончательно получим

$$ds^2 = b^2(\eta) (d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2), \quad (23.4.7)$$

что и требовалось. Напротив, казнеровское решение

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} dx^2 - t^{2p_2} dy^2 - t^{2p_3} dz^2 \quad (23.4.8)$$

нельзя привести к такому виду, его метрика не является конформно-плоской.

Во фридмановском решении частицы с нулевой массой покоя не рождаются совсем, а частицы с ненулевой массой покоя не рож-

\*) Напомним, что, задавшись вопросом о характере общего решения уравнений ОТО, Лифшиц, Халатников и их сотрудники пришли к выводу об анизотропном типе особенности. В коллапсе должно осуществляться общее решение, в космологии может осуществляться тот или иной частный тип решения вблизи сингулярности (см. гл. 22).

даются практически\*). Сделанные выше размерные оценки рождения частиц в действительности относятся только к анизотропной сингулярности.

Это результат можно наглядно истолковать в терминах гидродинамики. Рождение частиц можно назвать проявлением вязкости вакуума: при деформации вакуума выделяется тепло, растет энтропия. В гидродинамике известны два типа вязкости: первая, связанная со сдвиговой деформацией элемента объема жидкости, и вторая, связанная с изменением плотности, т. е. со всесторонним расширением или сжатием. Известно, что ультрарелятивистский газ не имеет второй вязкости.

Этот результат можно перенести и на «вакуум ультрарелятивистских частиц», т. е. на проблему рождения. В решении Казнера происходит деформация сдвига и имеет место рождение частиц. В решении Фридмана расширение изотропно, могла бы работать только вторая вязкость, но она отсутствует, а потому и не происходит рождения частиц. Рождение частиц в изотропных моделях рассматривали Л. Паркер (1968, 1969, 1971—1973), Гриб, Мамаев (1969, 1971), Черников, Шавохина (1973), в анизотропных моделях — Зельдович (1970в), Зельдович, Старобинский (1971), Ху, Фуллинг, Л. Паркер (1973), Ху (1974), Бергер (1974).

Подчеркивая различие рождения частиц в анизотропной и в изотропной сингулярности, мы основываемся на малости безразмерной величины  $\frac{Gm^2}{\hbar c}$  для всех известных частиц. В этой связи следует отметить, что ряд авторов высказывали гипотезу о существовании сверхтяжелых частиц с массой  $M$  как раз такой, что  $\frac{GM^2}{\hbar c} \approx 1$ .

Это значит, что  $M$  равно «планковской» единице массы  $10^{-5}$  г. Отсюда название гипотетических частиц «планкеоны» — Станюкович (1965, 1966б); Марков (1966) называет эти частицы «максимоны». По нашему мнению, теория не дает указаний на существование таких элементарных частиц. Стремясь к ортодоксальности и к минимуму гипотез, ниже мы не рассматриваем возможное влияние таких частиц на физические процессы.

Выше отмечались трудности решения космологической задачи с учетом рождения частиц.

Можно выдвинуть гипотезу, согласно которой в природе осуществляется изотропный выход из сингулярности — именно потому, что в противном случае рождение частиц привело бы к внутренним противоречиям теории. Такая гипотеза была высказана Зельдовичем (1970в) и подробно проанализирована Лукашом и Старобинским (1974).

\*) Нас интересуют столь высокие частоты  $\omega \sim t^{-1} \sim t_g^{-1}$ , по сравнению с которыми  $mc^2/\hbar$  частиц пренебрежимо мало.

Рассмотрим начальный этап космологической задачи — выход из сингулярности.

В этом случае неизвестно решение, начинающееся с  $t=0$  и учитывающее квантовые эффекты. Как мы уже отмечали, уравнение для «вязкой» (зависящей от рождения частиц) плотности энергии имеет в казнеровской метрике следующий вид:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\hbar}{c^3 t^5} - \frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{t}. \quad (23.4.9)$$

Такое уравнение не имеет решения, удовлетворяющего  $t=0$ ,  $\varepsilon=0$ . Включим процесс в какой-то выбранный момент:  $t=t_1$ ,  $\varepsilon=0$ . Решение имеет вид

$$\varepsilon = \frac{(t-t_1)\hbar}{c^3 t_1^5}, \quad \left(1 + \frac{1}{5}\right)t_1 > t > t_1, \quad (23.4.10)$$

$$\varepsilon = \frac{\hbar}{c^3 t_1^5 / s t^{4/s}}, \quad t > \left(1 + \frac{1}{5}\right)t_1. \quad (23.4.11)$$

Частицы, родившиеся вблизи  $t_1$ , не исчезают! С течением времени эти частицы становятся главными, определяющими динамику расширения, — когда  $\varepsilon \approx 1/Gt^2$  (см. § 1 гл. 19). Из этого условия получаем, что решение становится изотропным в момент

$$t_2 = t_1^4 t_{\text{пл}}^{-3}. \quad (23.4.12)$$

Казнеровское решение становится изотропным за счет квантового рождения частиц. Чем меньше  $t_1$ , тем меньше  $t_2$ ; при  $t_1 = t_{\text{пл}}$   $t_2 = t_{\text{пл}}$ . При  $t_1 \rightarrow t_{\text{пл}}$  исчезает область существования казнеровского решения. Такой результат, вероятно, означает, что квантовые эффекты заставляют анизотропные сингулярные решения (те самые решения, которые отвечают наиболее общей восьмифункциональной асимптотике) для космологической задачи.

Решения, которые при этом «выживают», включают в себя фридмановское решение, но не ограничиваются этим наиболее узким классом. Точнее, следует предположить, что истинное решение будет локально изотропным. Для Вселенной в целом такое рассуждение приводит к квазиизотропному решению, свойства которого описаны выше.

Там же отмечено, что эти свойства хорошо согласуются с тем, что известно о современной Вселенной. Остаются неизвестными масштаб и амплитуда отклонений метрики от однородной, однако есть и определенные нетривиальные результаты, например отсутствие вихря скорости \*). Таким образом, глубокие теоретические сооб-

\*) Уточним: в квазиизотропном решении вблизи сингулярности вихрь оказывается равным нулю всегда ( $t > 0$ ) и везде, если вещество, заполняющее мир, является идеальной жидкостью с определенным паскалевым давлением  $P=f(\rho)$  без вязкости и с постоянной энтропией. В этой связи интересна гипотеза Чибисова (1975) о нулевых вихрях.

ражения, в принципе, могут (подчеркнем, что в настоящее время мы находимся на уровне гипотез) привести к следствиям, существенным для поздних стадий.

В такой концепции остается, однако, без объяснения величина энтропии. Другой подход к этой проблеме описан в § 9 этой главы.

В теории хотелось бы иметь объяснение всех важнейших свойств Вселенной. Однако, в частности, без объяснения остается спектр возмущений, приводящих к образованию галактик. Конформная инвариантность строго доказана для уравнений Дирака (для нейтрино, а также — в пределе больших импульсов,  $p \gg mc$ , — и для других частиц со спином  $1/2$ ) и для электромагнитных уравнений Максвелла. Ситуация сложнее для гравитационных волн (см. § 18 этой главы).

Вопросы, затронутые здесь в общих чертах, качественно, ниже рассматриваются количественно, с формулами\*).

Авторы не обольщаются: математическое изложение гипотез не делает их в действительности надежными и доказанными, поскольку некоторые самые глубокие вопросы остаются без ответа.

## § 5. Рождение заряженных частиц в электродинамике

Рождение частиц в гравитационных полях является чрезвычайно экзотическим процессом с точки зрения лабораторной физики; нет надежды на экспериментальное изучение процесса в ближайшем будущем. Между тем рождение частиц в электромагнитных полях наблюдается экспериментально. Теоретические предсказания современной квантовой электродинамики проверены и подтверждены на опыте. Поэтому квантовую электродинамику можно считать «старшим братом», хорошим примером для теории квантово-гравитационных явлений. Напомним вкратце, какие идеи и результаты известны в электродинамике; значительная часть их имеет свои аналоги в теории гравитации.

Ни читатель, ни авторы не должны иметь и не имеют иллюзий — нижеследующее не научит вычислять эффекты, не заменит учебники, такие, например, как учебники Ахиезера и Берестецкого (1969), Берестецкого, Лифшица, Питаевского (1968). Экспериментально хорошо изучена аннигиляция  $e^+ + e^- = 2\gamma$ . По общим принципам квантовой теории отсюда следует также возможность обратного процесса  $2\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ . Если кинетические энергии  $e^+$ ,  $e^-$  в системе ц. и. порядка  $mc^2$  ( $e^+$  и  $e^-$  релятивистские, но не ультрарелятивистские), то сечения прямого и обратного процессов одного порядка, а именно порядка  $\frac{e^4}{m^2 c^4} = r_0^2$ , где  $r_0$  — так называемый «классический радиус» электрона ( $e^2/r_0 = mc^2$ ). На языке диаграмм рождение пар описывается рис. 62.

\*) О применении гамильтонова формализма см. Райан (1972).

Развитие событий во времени происходит снизу вверх. Волнистые линии представляют собой «входящие» в реакцию фотоны. Прямая линия изображает движение электрона. Позитрон можно описывать как «электрон, движущийся по времени в противоположную сторону». Зависимость волновых функций от времени определяется множителем  $e^{-iEt/\hbar}$ . Изменение знака времени (направления стрелки) эквивалентно изменению знака энергии. Позитрон, по Дираку, есть дырка в море электронов с отрицательной энергией. Эти соображения не есть доказательство, но, может быть, они помогут интуитивно примириться с тем, что позитрон — нормальный, движущийся вперед во времени — можно описывать линией электрона, движущегося вспять из будущего в прошлое.

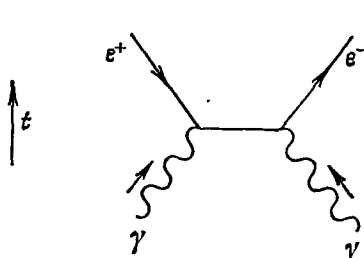


Рис. 62. Диаграмма Фейнмана для рождения пар  $e^+e^-$ .

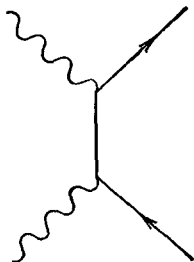


Рис. 63. Диаграмма рассеяния фотона на свободном электро-  
троне.

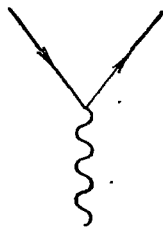


Рис. 64. Рождение пары  $e^+e^-$  меняющимся электрическим полем.

В процессе участвуют два фотона, есть две «вершины» — две точки, в которых сходятся одна фотонная и две электронные линии. В каждой вершине взаимодействие пропорционально заряду электрона  $e$ , итого при двух вершинах матричный элемент пропорционален  $e^2$ , сечение или вероятность процесса пропорциональны  $e^4$ . Заметим, что, «положив на бок» диаграмму рис. 62, получим рис. 63 — диаграмму для процесса  $e^- + \gamma = e^- + \gamma$ , т. е. комптоновского рассеяния фотона на свободном электро-троне. Два процесса — рождение пар и рассеяние — тесно связаны.

Существует ли рождение пар в более низком, первом порядке, т. е. по диаграмме рис. 64? Вершина типа рис. 64 возможна, но при этом необходимо, чтобы электромагнитное поле, которое изображено волнистой линией, не было полем свободного фотона, полем свободно распространяющейся электромагнитной волны. Свободный фотон характеризуется релятивистским соотношением между энергией  $E$  и импульсом  $p$ ,  $E=pc$ , поскольку скорость его равна скорости света  $c$ . Рождение пары  $e^+e^-$ , у которой  $E_+ + E_- > (p_+ + p_-)c$ , свободным фотоном несовместимо с законами сохранения.

Однако это не значит, что процесс с вершиной типа рис. 64 вообще невозможен. Энергия фотона задана и везде одинакова, если задана частота колебаний системы, излучающей фотон. Импульс фотона задан (и соответствует вышеприведенной формуле) только вдали от излучающей системы. На расстоянии  $r$  неопределенность импульса порядка  $\Delta p = \frac{\hbar}{r}$ . Поэтому электромагнитное поле вблизи излучающей системы (на расстоянии порядка  $\frac{c}{\omega}$ , что в случае  $\hbar\omega \sim 2mc^2$  даст характерную длину  $\frac{\hbar}{mc}$ ) способно рождать пары по типу рис. 64.

Более того, таким образом могут рождаться пары  $e^+e^-$  и в том случае, когда излучения реальных фотонов (способных уйти на бесконечность) вообще нет!

Такая ситуация возникает при 0—0-переходах. Здесь первый нуль есть спин возбужденной системы, второй нуль — спин системы в основном состоянии. Нулевой спин означает полную сферическую симметрию системы. Классически можно представить себе сферически-симметричное заряженное облако, совершающее радиальные колебания. Внешнего излучения, очевидно, нет — ведь поле излученной волны должно быть поперечно (перпендикулярно направлению распространения). Однако электрическое поле внутри облака есть, и оно периодически изменяется. Такое поле способно вызвать рождение пары. Процесс наблюдается на опыте; хорошо известны возбужденные состояния ядер углерода  $C^{12}$  и кислорода  $O^{16}$ , превращающиеся в основное состояние путем испускания пары  $e^+e^-$ .

Во всех случаях, изложенных выше, энергия фотона (или фотонов) — свободного или несвободного — превышает сумму масс частиц  $e^+$  и  $e^-$ , иначе рождение было бы энергетически невозможно. Но у фотонов энергия связана с частотой:  $E = \hbar\omega$ . Значит, необходима достаточно высокая частота поля:  $\omega > \frac{2mc^2}{\hbar}$  или  $\omega_1 + \omega_2 > \frac{2mc^2}{\hbar}$ .

Квантовая природа фотонов здесь несущественна!

Представим себе когерентную электромагнитную волну такого типа, как испускается лазером. С одной стороны, можно сказать, что число заполнения  $N$  — число фотонов на одной моде электромагнитного поля — велико. Но при  $N \gg 1$  можно говорить о классической электромагнитной волне. Если вероятность процесса подсчитана для одного фотона (или для двух встречных фотонов), то при переходе к  $N$ -фотонному состоянию вероятность увеличивается в  $N$  раз (в  $N_1 N_2$  раз при столкновении двух пучков с числами заполнения  $N_1$  и  $N_2$ ).

Таким образом, получается выражение для вероятности рождения пар в классических электромагнитных полях — пропорциональное плотности энергии, т. е.  $E^2$  для рис. 64 и пропорциональ-

ное  $E^4$  для рис. 62 (в последнем случае не различаем  $E_1 \sim E_2 \sim E$  в двух встречных лучах). Поле должно быть высокочастотным:  $\omega > \frac{2\hbar}{mc^2}$  в случае рис. 64,  $\omega > \frac{\hbar}{mc^2}$  в случае рис. 62. В такой теории условие на частоту, содержащее постоянную Планка  $\hbar$ , есть следствие применения квантовой механики к электронам и позитронам.

Возможно ли рождение пар статическим полем с  $\omega=0$ ? Такой процесс возможен, но он имеет принципиально иной механизм. Представим себе постоянное (в пространстве и во времени) электрическое поле  $\mathcal{E}$ . Пусть в точке  $x_0$  родилась пара (для этого нужна энергия  $2mc^2$ ). Перемещение позитрона из  $x_0$  в  $x_1$  сопровождается выделением энергии  $e\mathcal{E}(x_1-x_0)$ . Перемещение электрона из  $x_0$  в  $x_2$  сопровождается выделением энергии  $-e\mathcal{E}(x_2-x_0)$  \*). Таким образом, необходимая затрата энергии при рождении покоящегося позитрона в  $x_1$  и покоящегося электрона в  $x_2$  есть

$$\Delta E_0 = 2mc^2 - e\mathcal{E}(x_1 - x_2). \quad (23.5.1)$$

Если  $x_1 - x_2$  мало, процесс невозможен без какого-то дополнительного источника энергии. Если  $x_1 - x_2 > \frac{2mc^2}{e\mathcal{E}}$ , то  $\Delta E_0 < 0$ , но из положения легко выйти: на таком расстоянии электрон и позитрон движутся с конечной скоростью, энергия каждого из них больше  $mc^2$ .

Таким образом, рождение пар статическим полем энергетически возможно. Однако при этом первое условие заключается в том, чтобы область пространства, занятая полем, была достаточно велика (разность потенциалов больше  $\frac{2mc^2}{e}$  — больше  $10^6$  в). При этом  $e^+$  и

$e^-$  рождаются на определенном расстоянии и лишь после этого ускоряются. Очевидно, что классически нельзя себе представить одновременное возникновение разных зарядов в разных точках пространства. Нарушается не только причинная связь, нарушается (в каждой точке в отдельности — не в системе в целом) сохранение заряда при попытке классического описания процесса.

Следовательно, для понимания процесса и здесь необходима квантовая механика движения электрона и позитрона. Область пространства (при малых  $x_1 - x_2$ ), где электрон и позитрон по энергетическим соображениям не могут находиться классически, они проходят туннельно, под барьером. Из этих соображений можно определить вероятность рождения пары: главный множитель есть

$$W \sim \exp\left(-\frac{\beta \Delta x mc}{\hbar}\right), \quad \text{где } \Delta x = \frac{2mc^2}{e\mathcal{E}} \text{ — ширина барьера, } \frac{\hbar}{mc} \text{ — ха-}$$

\*) Представьте себе, что они родились в  $x_0$ , а потом перемещались; энергетический баланс зависит от их пути.



ракторная длина волны ( $3,7 \cdot 10^{-11}$  см),  $\beta$  — численный коэффициент порядка единицы. Характерное поле, при котором вероятность рождения не слишком мала, порядка  $10^{15}$  в/см.

Такой процесс до сих пор не наблюдался. Развитие лазерной техники позволяет надеяться на его осуществление в ближайшие 10—20 лет \*).

Подробные расчеты процесса проделали Никишов (1969), Нарожный и Никишов (1970). В непосредственной близости к атомному ядру электрическое поле значительно больше приведенной выше характерной величины; около ядра урана поле достигает  $10^{18}$  в/см! Однако поле ядра быстро убывает с расстоянием. Поэтому спонтанное рождение пар  $e^+e^-$  в поле ядра могло бы происходить лишь для гипотетических ядер с зарядом (атомным номером) больше 170.

Рождение пар в электромагнитном поле тяжелых ядер рассмотрено в обзоре Зельдовича и Попова (1971), там же см. ссылки на оригинальные работы. Рождение пар статическим полем нельзя представить в виде суммы диаграмм типа рис. 64 (с одной фотонной линией), рис. 62 (с двумя фотонными линиями) и т. д. \*\*).

Обратимся к предельному случаю низкочастотного слабого поля, т. е. к условиям, когда можно пренебречь рождением реальных пар электронов и позитронов. Квантовая механика предсказывает своеобразное явление — виртуальное рождение пар. Наглядно можно представить себе, что пары рождаются и тут же исчезают. Нет свободных заряженных частиц, но все же в среднем по времени появляются плотность заряда и электрический ток, отличные от нуля. Это явление принято называть «поляризацией вакуума». Полезно обратиться к принципиальным основам. Теория элементарных заряженных частиц симметрична относительно знака заряда. «Положительный» знак заряда позитрона — это условность, преобладание электронов и протонов (по крайней мере в нашей окрестности, см. главу о зарядовой симметрии) отражает начальные условия Вселенной, а не локальные законы физики.

Отсюда следует, что вакуум должен быть электрически нейтральным.

\*) Отметим, что в плоской волне какой бы то ни было интенсивности рождение пар невозможно. Это видно уже из того, что при определенном преобразовании Лоренца (т. е. для наблюдателя, движущегося в направлении распространения волны) напряженность электрического и магнитного поля данной волны может быть сделана как угодно малой. Для того чтобы с помощью лазерного луча рождал пары, надо столкнуть два встречных сфокусированных пучка лучей. Вопрос рассмотрен, в частности, Багровым, Бозриковым, Гитманом (1973).

\*\*) Формально это проявляется в том, что вероятность процесса  $W \sim \exp\left(-\frac{E_c}{E}\right)$  нельзя разложить в ряд по степеням  $E$ .

Однако электрические и магнитные поля, очевидно, нарушают зарядовую симметрию вакуума \*). При наличии полей появляются заряды и токи. Эти заряды и токи должны выражаться через электромагнитные поля \*\*). При этом самые общие свойства — векторный и тензорный характер рассматриваемых величин, инвариантность теории относительно калибровки потенциала и т. п. — сильно ограничивают вид формул, связывающих поля и вакуумные токи.

Будем характеризовать поле с помощью 4-вектора  $A_i = (A_\mu, A_0 = \varphi)$ . Наряду с  $A_i$  векторами являются также  $\square A_i$   $\square \square A_i$  и т. д. — пока мы ограничиваемся величинами, линейными по полю. Следовательно, для вакуумного тока можно предложить формулы (индекс в скобках «в» — вакуум)

$$J_{(в)} = \alpha_0 A, \quad J_{(в)} = \alpha_1 \square A, \quad J_{(в)} = \alpha_2 \square \square A, \dots \quad (23.5.2)$$

Из них выражение с  $\alpha_0$  отпадает в силу калибровочной инвариантности. Только сами поля, электрическое и магнитное, имеют физический смысл, могут быть локально измерены и однозначно определены; вектор-потенциал  $A$  определен неоднозначно, следовательно, соотношение с  $\alpha_0$  не может иметь место.

Любопытна ситуация с  $\alpha_1$ ; согласно уравнениям Максвелла

$$\square A = 4\pi j = 4\pi (J_{вн} + J_{(в)}). \quad (23.5.3)$$

В правой части стоит полный ток, т. е. сумма «внешнего» тока заряженных частиц  $J_{вн}$  и вакуумного тока  $J_{(в)}$ . Если, в свою очередь,  $J_{(в)}$  выражается формулой с  $\alpha_1$ , то получим

$$\square A = 4\pi j_{вн} + 4\pi \alpha_1 \square A, \quad \square A = 4\pi j_{вн} / (1 - 4\pi \alpha_1) = 4\pi j_{набл}. \quad (23.5.4)$$

Все формулы электродинамики сохраняются, но вместо  $J_{вн}$  фигурирует пропорциональная ему величина  $j_{набл}$  (наблюдаемый ток), отличающаяся множителем  $(1 - 4\pi \alpha_1)^{-1}$ . Наблюдаемый заряд каждой элементарной частицы отличается на тот же множитель от «истинного», «первоначального», «голого» заряда — происходит так называемая перенормировка заряда.

Коэффициент перенормировки одинаков для всех заряженных частиц, определить его экспериментально невозможно; расчет дает  $\alpha_1 < 0$ ,  $j_{набл} < j_{вн}$ , поляризация вакуума частично экранирует го-

\*) Остается филологический вопрос: следует ли называть вакуумом пространство, в котором существует электромагнитное поле? Примем здесь такое соглашение. В вакууме не должно быть свободных заряженных частиц, хотя и не исключено электромагнитное поле, а следовательно, присутствие фотонов. Таким образом, здесь следовало бы точнее сказать «вакуум заряженных частиц». В основных главах, посвященных теории тяготения, «вакуумом» называется пространство, в котором отсутствуют какие бы то ни было свободные частицы и поля.

\*\*) Об эффективных зарядах, появляющихся при рассмотрении уравнений Максвелла в кривом пространстве, см. Зельдович (1972в).

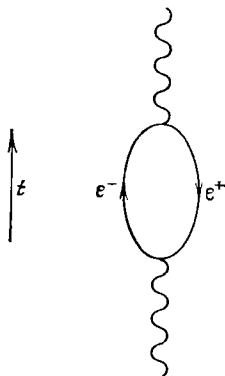
лый заряд. При последовательном проведении расчетов [Ландау, Померанчук (1955)] оказывается, что экранировка расходится (логарифмически); в этом смысле не существует логически замкнутой, последовательной квантовой электродинамики. Однако можно построить расчеты так, чтобы во все наблюдаемые величины (сечения рассеяния, уровни энергии и т. п.) входил наблюдаемый заряд частиц, и такая теория согласуется с опытом \*).

Следующий член формулы с  $\alpha_2$ , дает реально наблюдаемые эффекты. Одной из компонент 4-вектора  $j$  является плотность заряда. Формула с  $\alpha_2$  дает вакуумную плотность заряда, отличающуюся (как функция координат) от плотности внешнего заряда. Именно член с  $\alpha_2$  (и, в принципе, следующие) экспериментаторы называют «поляризацией вакуума». Этот член изменяет распределение потенциала около атомного ядра и вследствие этого сдвигает атомные уровни. Такой сдвиг наблюдается в настоящее время. Рассматриваемый эффект составляет около 2,5% всего квантовоэлектродинамического сдвига в атоме водорода. Однако точность расчетов и наблюдений столь велика (лучше 0,01%), что вклад поляризации вакуума установлен вне всяких сомнений.

В ионах с большим зарядом ядра и в особенности в ионах с мюоном вместо электрона на орбите эффект поляризации вакуума еще больше.

Выше рассматривались лишь линейные по потенциалу и полю слагаемые  $j_{(в)}$ . На языке диаграмм они соответствуют рис. 65: линия электромагнитного поля прерывается образованием виртуальной пары  $e^+e^-$  (возникает  $j_{(в)}$ ), затем пара снова превращается в поле —  $j_{(в)}$  появляется в правой части уравнения для  $A$ . Перенормировку заряда можно рассматривать как следствие того, что фотон (или в более общей формулировке — поле) часть времени проводит в виде пары: поскольку в эту часть времени фотон (поле) не взаимодействует с другими, реальными заряженными частицами, эффективное взаимодействие — а значит, и наблюдаемый заряд — уменьшается.

Рис. 65. Образование виртуальной пары  $e^+e^-$ .



\*) Уточним: не существует теории без параметра обрезания (на малых длинах или на больших импульсах). Однако если такой параметр введен, то отношение  $j_{набл}:j_{вн} \sim \left(1 - \frac{2e_{набл}^2}{3\pi\hbar c} \ln \frac{\Lambda}{m_e c}\right)^{1/4}$ . Ошибки в теории, в которой фигурирует  $e_{набл}$ , порядка  $\frac{m_e c}{\Lambda}$ . Не существует теории с  $\Lambda \rightarrow \infty$  («замкнутой»), но существует практически удовлетворительная теория с  $m_e c \ll \Lambda \leq m_e c \exp\left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)$ .

Наряду с линейными эффектами, есть и слагаемые в плотности заряда, пропорциональные третьей степени электромагнитного поля (и более высоким нечетным степеням). Включая в рассмотрение еще взаимодействие этого  $j_{(в)}$  с полем, получим эффекты, соответствующие диаграмме с четырьмя фотонными (полевыми) линиями (рис. 66). Такая диаграмма описывает рассеяние света на свете,

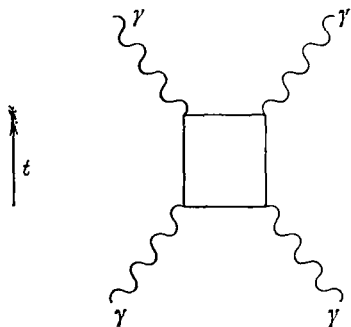


Рис. 66. Нелинейные процессы в электродинамике; рассеяние света на свете.

не наблюдавшееся до сих пор, а также рассеяние света электрическим полем ядра. Последний процесс, предсказанный Дельбрюком, успешно наблюдался в лаборатории.

Эти процессы можно трактовать как нелинейность электродинамики: в лагранжиане появляются члены  $\sim (\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2)^2$  и  $(\mathcal{E}\mathcal{H})^2$  и более высокого порядка. Соответственно в уравнениях Максвелла появляются кубические члены.

В электродинамике есть случаи, когда поле можно рассматривать классически: уже указывалось, что так можно действовать при больших числах заполнения. Не нужно квантовать также электростатическое поле, например кулоновское поле ядра или постоянное магнитное поле. Квантовые эффекты в этих случаях связаны с применением квантовой механики к электронам и позитронам. Однако если условия таковы, что реальное рождение пар не происходит, то эти эффекты можно выразить через мгновенные значения полей и их производных.

В этом смысле говорят о квантовых поправках к уравнениям Максвелла: вакуумный ток выражают через поля и помещают в левую часть уравнений, оставляя в правой части лишь ток реальных частиц:

$$F_{i; k}^k = -4\pi j_i \rightarrow F_{i; k}^k + 4\pi j_{(в) i} = -4\pi j_{i, вн}. \quad (23.5.5)$$

Очевидно, что такая процедура с  $j_{(в)} = f(F)$  возможна лишь до тех пор, пока не становится существенным рождение реальных пар.

Эти пары неотличимы от внешних зарядов. Число пар, их движение, создаваемый ими ток — все эти величины зависят от всей предыстории поля, их нельзя выразить через мгновенные локальные величины. Поэтому для задач с рождением пар квантовые эффекты обязательно требуют изменения правой части. Последовательное описание рождения пар включает поляризацию вакуума как первую стадию. Только при совместном рассмотрении поляризации вакуума и рождения пар устраняются парадоксы кажущегося нарушения причинности и локального несохранения заряда. В таком

случае все эффекты — и виртуальные и реальные — рождения пар целесообразно собрать в одном месте, в правой части уравнения, как разные части вакуумного тока.

Вакуумный ток в данный момент в данной точке оказывается сложным нелинейным нелокальным функционалом электромагнитного поля в прошлом, в области влияния, примыкающей к данной точке.

Ток  $j_{(v)}$  удовлетворяет принципу причинности и сохранению заряда. В такой концепции можно считать, что уравнения Максвелла не изменяются. Квантовые эффекты создают отличную от нуля правую часть (ток) даже при отсутствии заряженных частиц в исходном состоянии. Именно такая трактовка, приспособленная к случаю больших эффектов и рождения реальных пар, послужит нам моделью при рассмотрении квантовых явлений в гравитационном поле вблизи сингулярности.

Мораль, следующая из истории развития электродинамики, сводится к двум тезисам: 1) рассматриваются те (и только те) эффекты и поправочные члены, которые являются прямым, необходимым, неизбежным следствием неизменного начального предположения об исходном взаимодействии электромагнитного поля с заряженными частицами; 2) опыт во всех деталях подтверждает теоретические выводы, полученные таким путем. Продолжением данного параграфа может служить статья Зельдовича (1972б) в сборнике «Магия без магии».

## § 6. Математическая теория рождения частиц

Данный параграф ориентирован на читателя, интересующегося также и методической стороной теории. Все общезначимые соображения изложены ранее, в § 4; читатель, интересующийся только результатами и общими идеями теории, без ущерба может пропустить нижеследующее. В изложении следуем работе Зельдовича и Старобинского (1971).

Пусть мы имеем пространственно-плоскую однородную метрику вида

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 - b^2(t) dy^2 - c^2(t) dz^2, \quad (23.6.1)$$

где  $a, b, c$  как функции  $t$  в задаче о рождении частиц считаем произвольными. В этой метрике рассмотрим скалярное безмассовое поле, удовлетворяющее конформно-инвариантному уравнению

$$\left( \square - \frac{R}{6} \right) \varphi = 0, \quad (23.6.2)$$

что соответствует лагранжиану

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ g^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k} + \frac{R}{6} \varphi^2 \right]. \quad (23.6.3)$$

О происхождении и роли добавки  $R/6$ , где  $R$  — скалярная кривизна, см. работы Пенроуза (1964), Тагирова и Черникова (1968), в которых показано, как эта добавка обеспечивает конформную инвариантность.

Заметим, что простейшие волновые уравнения для поля со спином  $1/2$  (нейтринное поле) и для векторного поля (уравнения Максвелла) являются конформно-инвариантными без всяких добавок, но рассмотрение их слишком сложно.

Произведем преобразование метрики к более удобным переменным:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{\sqrt[3]{abc}} &= g_1, & \frac{b}{\sqrt[3]{abc}} &= g_2, & \frac{c}{\sqrt[3]{abc}} &= g_3, \\ d\tau &= \frac{dt}{\sqrt[3]{abc}}, & \varphi &= \frac{\psi}{\sqrt[3]{abc}}. \end{aligned} \right\} \quad (23.6.4)$$

В новых переменных

$$ds^2 = (abc)^{2/3} [d\tau^2 - g_1^2 dx^2 - g_2^2 dy^2 - g_3^2 dz^2]. \quad (23.6.5)$$

Уравнение для  $\psi$  имеет вид (при  $g_{1,2,3}$ , зависящих только от  $\tau$ )

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \frac{1}{g_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{g_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{g_3^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + Q(\tau) \psi = 0, \quad (23.6.6)$$

где

$$Q(\tau) = \frac{1}{18} \left[ \left( \frac{g'_1}{g_1} - \frac{g'_2}{g_2} \right)^2 + \left( \frac{g'_1}{g_1} - \frac{g'_3}{g_3} \right)^2 + \left( \frac{g'_2}{g_2} - \frac{g'_3}{g_3} \right)^2 \right]^*).$$

Пространственная однородность позволяет искать частные решения в виде

$$\psi = e^{ikr} \chi_k(\tau). \quad (23.6.7)$$

Уравнение для  $\chi$  имеет вид (индекс  $k$  опускаем)

$$\chi'' + \left[ \frac{k_1^2}{g_1^2} + \frac{k_2^2}{g_2^2} + \frac{k_3^2}{g_3^2} + Q(\tau) \right] \chi = 0. \quad (23.6.8)$$

Величину  $\frac{k_1^2}{g_1^2} + \frac{k_2^2}{g_2^2} + \frac{k_3^2}{g_3^2}$  удобно назвать частотой и обозначить  $\omega^2(\tau)$ . Конформная инвариантность теории использована выше для того, чтобы уменьшить с трех до двух число функций, от которых нетривиально зависит решение. Действительно, в последнее уравнение входят три функции, но они связаны одним тождеством  $g_1 g_2 g_3 = 1$ .

Решение уравнений ищем по методу Лагранжа, т. е. в виде решений, справедливых в адиабатическом приближении, умноженных на функции времени.

\*) Штрих означает дифференцирование по  $\tau$ .

Итак, по определению

$$\chi_k(\tau) = \frac{\alpha(\tau)}{\sqrt{2\omega}} e^{-i \int \omega d\tau} + \frac{\beta(\tau)}{\sqrt{2\omega}} e^{i \int \omega d\tau}. \quad (23.6.9)$$

На две функции  $\alpha$  и  $\beta$  накладываем дополнительное условие:

$$\chi'_k(\tau) = -i\omega \left( \frac{\alpha(\tau)}{\sqrt{2\omega}} e^{-i \int \omega d\tau} - \frac{\beta(\tau)}{\sqrt{2\omega}} e^{i \int \omega d\tau} \right). \quad (23.6.10)$$

Сопоставляя с полным выражением для  $\chi'_k$ , получим уравнение, связывающее  $\alpha'$  и  $\beta'$ .

С учетом этого уравнения получим окончательно систему

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{2} \left( \frac{\omega'}{\omega} - i \frac{Q}{\omega} \right) e^{2i \int \omega d\tau} \beta - i \frac{Q}{2\omega} \alpha, \\ \beta' &= \frac{1}{2} \left( \frac{\omega'}{\omega} + i \frac{Q}{\omega} \right) e^{-2i \int \omega d\tau} \alpha + i \frac{Q}{2\omega} \beta. \end{aligned} \right\} \quad (23.6.11)$$

Рассмотрим общие свойства системы. Она имеет точный интеграл

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = \text{const}. \quad (23.6.12)$$

При итеративном решении, задавшись начальным условием  $\alpha=1$ ,  $\beta=0$  при  $t=\tau=-\infty$ , получим (при малых  $\frac{Q}{\omega^2}$  и  $\frac{\omega'}{\omega^2}$ )

$$\beta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\tau} \left( \frac{\omega'}{\omega} + i \frac{Q}{\omega} \right) e^{-2i \int \omega d\tau} d\tau. \quad (23.6.13)$$

Эти свойства имеют ясное истолкование. В классической теории решения  $\alpha e^{-i \int \omega d\tau + ikr}$  и  $\beta e^{i \int \omega d\tau + ikr}$  соответствуют распространению волн в противоположных направлениях. Пока  $\alpha = \text{const}$ ,  $\beta=0$ , имеем одну волну, адиабатически изменяющуюся в переменной метрике.

Условие  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = |\alpha_{-\infty}|^2$  означает, что одновременно рождаются две волны противоположного направления, так что общее количество движения поля не изменяется: если начальная волна несла импульс  $c\hbar|\alpha_{-\infty}|^2$ , то добавились волны, несущие  $c\hbar(|\alpha|^2 - |\alpha_{-\infty}|^2)$  и  $c(-\hbar)|\beta|^2$ ; суммарный их вклад равен нулю. Сохранение количества движения является естественным следствием однородности пространства.

Другим проявлением попарного рождения волн является тот факт, что в дифференциальные уравнения, связывающие  $\alpha$  и  $\beta$  между собой, входят экспоненты удвоенной частоты. Следовательно, амплитуда  $\beta$  зависит от фурье-компоненты изменения метрики с уд-

военной частотой. На квантовом языке можно сказать, что у внешнего гравитационного поля заимствуются порции энергии, равные  $2\hbar\omega$ , в соответствии с тем, что кванты скалярного поля рождаются парами, с энергией  $\hbar\omega$  каждый.

Если бы при  $t = -\infty$  была задана стоячая волна вида  $\sim \alpha_0 \sin(\omega t + \delta) \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} + \kappa)$ , то при  $t = +\infty$  получилась бы также стоячая волна, амплитуда которой может быть больше или меньше начальной амплитуды  $\alpha_0$ , в зависимости от начальной фазы.

Возмущение метрики происходит во вполне определенный период времени, характеризуемый видом функций  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Поэтому в формулировке задачи нет группы сдвига по времени и возникает зависимость от начальной фазы. Результаты для бегущей комплекс-

ной волны вида  $\alpha_{-\infty} e^{-i \int \omega d\tau + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ , очевидно, не зависят от начальной фазы. Изменение энергии бегущей волны под действием возмущения метрики всегда положительно и равно усредненному по фазе  $\delta$  изменению энергии стоячей волны; оно и вычислено.

Конформная инвариантность теории проявляется в том, что в уравнения входят только разности скоростей расширения, разности постоянных Хаббла по различным осям.

До сих пор рассматривалась задача о классическом поле. После фурье-разложения уравнение, характеризующее амплитуду данной пространственной моды, есть уравнение гармонического осциллятора. Спектр гармонического осциллятора эквидистантен:  $E = (1/2 + n^*)\hbar\omega$ , где  $n^*$  — целое число. В полном соответствии с этим энергия данной волны может принимать собственные значения  $E = \text{const} + n^*\hbar\omega$  в соответствии с числом  $n^*$  квантов поля с данным волновым вектором. Хорошо известно, что в случае осциллятора между результатами квантовой и классической теорий есть далеко идущее совпадение. Расчеты по теории квантованных полей (слишком сложные для данной книги) приводят к результатам, совпадающим с классическими, описанными выше, при условии правильного выбора начальной амплитуды  $\alpha_{-\infty}$ , соответствующей энергии  $\frac{\hbar\omega}{2}$ .

В космологические задачи входят плотность энергии и другие компоненты тензора энергии-импульса, зависящие от рассматриваемого поля. Эти величины получаются сложением вклада отдельных мод, т. е. интегрированием в пространстве волновых векторов  $\mathbf{k}$ . Такие интегралы оказываются расходящимися, так, например, сумма нулевых энергий  $\hbar\omega/2$  всех возможных колебаний бесконечна.

Поэтому возникает необходимость перенормировки теории, при этом такой, которая оставляла бы в силе все общие свойства результата. Предлагается каждой данной волне с импульсом  $\mathbf{k}$  сопоставлять волну с большим импульсом  $n\mathbf{k}$  и, соответственно, меньшей амплитудой  $\alpha_{-\infty}/\sqrt{n}$ . Вычитая из энергии  $\mathbf{k}$ -волны энергию  $n\mathbf{k}$ -волны,



уничтожим нулевую энергию; аналогично устраним и другие расходимости. В конечных результатах полагаем  $n \rightarrow \infty$ . Достоинство метода заключается в том, что на всех этапах рассматриваются решения полевых уравнений (и для  $k$ -волны и для  $nk$ -волны). Это обеспечивает конформную инвариантность и выполнение законов сохранения.

С другой стороны,  $k$ -волна подвергается нетривиальному воздействию гравитационного поля, тогда как  $nk$ -волна при  $n \rightarrow \infty$  ведет себя строго адиабатично. Поэтому энергия новых волн, рожденных гравитационным полем ( $|\beta|^2, |\alpha|^2 - |\alpha_{-\infty}|^2$ ), остается нетронутой, не подвергается вычитанию при такой процедуре ренормализации. Этот метод подобен методу Паули — Вилларса, с той разницей, что не вводятся большие массы, а значит, сохраняется конформная инвариантность теории. Паркер, Фуллинг (1974), Фуллинг, Паркер (1974) нашли другое обоснование предлагаемого способа перенормировки.

## § 7. Сверхпространство и минисверхпространство

Квантование эволюции Вселенной как целого — такова конечная цель теории сверхпространства, развиваемой, начиная с 1960 г., Уилером [обзор см. Мизнер, Торн, Уилер (1973)] и его последователями.

Для решения этой задачи Уилер использует формулировку квантовой теории, предложенную Фейнманом в 1948 г., — формулировку, в которой связь с классической теорией проявляется наиболее ярко.

Классическую теорию (механику, электродинамику и даже общую теорию относительности) можно формулировать в виде «принципа наименьшего действия».

При заданных начальном и конечном состояниях рассматриваемой системы осуществляется то движение, для которого интеграл  $\int \mathcal{L} dt$  экстремален. Квантовая теория является вероятностной. В ней осуществляются и такие процессы (например, прохождение под барьером), которые невозможны в классической теории.

Фейнман предлагает рассматривать абсолютно все траектории, ведущие из начального состояния в конечное. В понятие «все» попадают, например, в задаче о свободной частице, на которую не действуют никакие силы, движения по зигзагу, с переменной скоростью и т. д. Для каждой траектории вычисляется интеграл  $\int \mathcal{L} dt$ . Вероятность попадания из данного начального состояния в данное конечное дается квадратом величины  $|G(x_1, x_2)|$ , а сама  $G$  есть сумма

$$G(x_1, x_2) = \sum \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L} dt\right), \quad (23.7.1)$$

взятая по всем траекториям. Фейнман показывает, что такая формулировка эквивалентна традиционной шредингеровской или гейзенберговской квантовой механике. Ясно, что наибольший вклад в сумму дают те траектории, для которых фазовый множитель  $\frac{1}{\hbar} \int \mathcal{L} dt$  почти одинаков, отличается меньше чем на  $\pi$ . В этом случае экспоненты просто складываются. Если в совокупности траекторий  $\frac{1}{\hbar} \int \mathcal{L} dt$  меняется сильно, соответствующие экспоненты в сумме уничтожают друг друга. Очевидно, что близкие значения  $\int \mathcal{L} dt$

дают именно те траектории, которые близки к экстремальной, т. е. к классической. Принцип Фейнмана можно применить и к сложной системе. Полная характеристика сложной системы требует задания большого числа параметров. Следовательно, надо рассматривать «траекторию» в пространстве большого числа измерений.

Уилер смело обобщает эту идею на Вселенную как целое — 4-мерное многообразие, вместе с веществом, содержащимся в этом многообразии. Пространство, точками которого являются все возможные состояния Вселенной, названо сверхпространством. Линия — траектория в этом пространстве — представляет собой один вариант эволюции Вселенной, вообще говоря, не удовлетворяющей уравнениям ОТО. Однако вычисление интеграла действия и отбор групп траекторий, дающих главный вклад в  $G(x_1, x_2)$ , приводят (благодаря правильному выбору  $L$ ) к траекториям, соответствующим ОТО. Одновременно можно, в принципе, определить и степень квантовых отклонений от классической траектории.

Практическое проведение такой программы в общем случае связано с гигантскими трудностями, не преодоленными в настоящее время. Например, одна и та же картина эволюции в общем случае может быть по-разному параметризована, можно по-разному выбирать последовательность трехмерных сечений; не ясно, как в общем случае уберечься от описания одного и того же явления разными траекториями в сверхпространстве; не ясно, как быть с открытым, бесконечным миром.

Мизнер поставил задачу ограниченную, но реальную: он рассматривает эволюцию замкнутого однородного мира, типа IX Бианки. Предполагается, что мир все время остается однородным и тип его не меняется. Мгновенное состояние описывается теперь тремя параметрами  $a, b, c$ . Следовательно, в этом приближении бесконечномерное сверхпространство свелось к пространству трех измерений — «минисверхпространству» Мизнера.

Квантовую теорию в этом случае можно формулировать с помощью фейнмановских траекторий в минисверхпространстве, но можно также писать уравнение Шредингера для волновой функции  $\Psi(a, b, c, t)$ .

Квадрат модуля  $\Psi$  дает вероятность того, что мир в данный момент  $t$  имеет определенные значения  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . В уравнении Шредингера (или в функции Лагранжа) фигурирует кинетическая энергия, зависящая от импульсов  $p_a$ ,  $p_b$ ,  $p_c$  или соответствующих скоростей  $\dot{a}$ ,  $\dot{b}$ ,  $\dot{c}$ . Роль потенциальной энергии играет вклад пространственной кривизны, т. е. величины типа  $\frac{a^2}{b^2 c^2}$  и т. д. Вблизи нулей  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , т. е. вблизи сингулярности, потенциальная энергия бесконечна. Особенность квантовой задачи состоит в том, что в принципе возможен переход от коллапса к космологическому расширению подобно тому, как заряженная частица может быть рассеяна на кулоновском центре. Впрочем, аналогия здесь не точна, ведь рассеяние частиц возможно и в классической теории, частица может пролетать «сбоку» от кулоновского центра. Между тем в задаче ОТО коллапс однородного мира неизбежно приводит к бесконечной плотности, объем мира  $V$ , пропорциональный  $abc$ , обращается в нуль.

Как помогает в данном случае квантовая теория минисверхпространства? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно прежде всего выяснить, насколько «квантовым» является мир. Общеизвестно, что основное квантовое состояние (нижнее, номер один) любой системы не похоже на классическое. Напротив, высоковозбужденные квантовые состояния с большими квантовыми числами (и их суперпозиции) описывают классическое движение. Дадим оценку номера того квантового состояния, которое соответствует усредненному движению мира в настоящее время.

Грубая оценка дает кинетическую энергию \*) ( $a \approx b \approx c$ )

$$\mathcal{E} = \frac{C^2 V}{G} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{C^2 \dot{a}^2 a}{G}. \quad (23.7.2)$$

Импульс  $p_a$ , соответствующий координате  $a$ ,  $p_a = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{a}} = \frac{C^2 \dot{a} a}{G}$ . По порядку величины

$$a p_a = n \hbar, \quad n = \frac{C^2 \dot{a}^2 a^2}{G \hbar} = \left( \frac{T}{t_{\text{пл}}} \right)^2 \approx 10^{120}, \quad (23.7.3)$$

где  $T$  — возраст Вселенной,  $T \sim 10^{17}$  сек,  $t_{\text{пл}} = \sqrt{\frac{G \hbar}{c^5}} = 10^{-43}$  сек (для оценки принимаем  $\dot{a} = aT^{-1}$ ,  $a = cT$ ). Квантовые поправки к движению мира как целого в настоящее время порядка  $n^{-1} = 10^{-120}$  и невообразимо малы. Число  $n$  — номер уровня — является адиабатическим инвариантом. Действительно, в казнеровском решении и в решении Лифшица, Халатникова, Белинского  $V \sim a^3 \sim t$ ,  $a^2 \dot{a} = \text{const}$  (в самом грубом приближении, полагая  $a \approx b \approx c$ ).

\*) Здесь  $C$  — скорость света, в отличие от  $c$  — одного из параметров задачи.

Характерные параметры наибольшего сжатия в такой теории определить гораздо труднее. Простейшая оценка состоит в том, чтобы положить  $a \sim b \sim c \sim l_{пл} \sim \sqrt{\frac{G\hbar}{C^3}} \sim 10^{-33}$  см, что даст  $t_1$  — время остановки:

$$\frac{t_1}{T} = \left(\frac{l_{пл}}{CT}\right)^3 = \left(\frac{t_{пл}}{T}\right)^3; \quad t_1 = t_{пл} \left(\frac{t_{пл}}{T}\right)^2 = 10^{-163} \text{ сек.} \quad (23.7.4)$$

Возможно, что параметры зависят именно от анизотропии сжатия, т. е. от того, что  $a, b, c$  различны, тогда как выше мы приближенно, усредняя по циклам и эрам решения Лифшица, Халатникова, Белинского, считали  $a \sim b \sim c$ .

Но и в этом случае получится  $t_1 \ll t_{пл}$ .

Такой результат не удивителен, так как Вселенная представляет собой огромный — самый большой — объект. Но тогда естественно, что для Вселенной в целом квантовые эффекты возникают позже (ближе к сингулярности), чем для ее частей. Поэтому вряд ли верна буквально теория минисверхпространства Мизнера, основанная на классических уравнениях ОТО. Вероятно это направление возродится позже, когда будут достаточно исследованы локально-квантовые эффекты.

## § 8. Гипотеза несохранения барионов и зарядовая несимметрия элементарных частиц

Радикальным решением вопроса о зарядовой симметрии Вселенной является отказ от сохранения барионного заряда. Одновременно отпал бы и важнейший мотив — непрерывность барионных мировых линий — для поисков теории перехода через сингулярность.

Рассмотрим вкратце некоторые работы, в которых делается попытка развить гипотезу несохранения барионного заряда.

В первой работе — Сахарова (1967а) предполагается, что возможен процесс  $p \leftrightarrow 2\mu^+ + \mu^-$ . Во второй работе — Кузьмина (1970) вводится процесс  $\chi^0 \rightarrow N \text{ (или } \bar{N}) + l + \bar{l}$ , где  $\chi^0$  — истинно нейтральный фермион,  $N$  ( $\bar{N}$ ) — барион (антибарион),  $l$  ( $\bar{l}$ ) — лептон (антилептон). Наконец, в недавних работах Пати, Салама (1973) возможность несохранения барионного заряда связывается с гипотезой, согласно которой барионы состоят из кварков с целыми электрическими зарядами.

Конечной целью упомянутых работ является получение современного зарядово-несимметричного состояния в предположении начального симметричного состояния горячей плазмы. Нужно подчеркнуть, что для получения этого результата необходимо, но недостаточно ввести несохранение барионов.

В самом деле, в теории элементарных частиц можно переносить частицу с правой стороны на левую сторону, превращая ее в анти-

частицу. Следовательно, наряду с процессами рождения и уничтожения барионов, идут и процессы рождения и уничтожения антибарионов.

До 1964 г. догматом веры было к тому же равенство всех вероятностей и сечений, относящихся к частицам и античастицам. В такой теории зарядовая асимметрия, очевидно, не возникнет и после того, как будет сделано предположение о несохранении барионного заряда.

Однако в настоящее время мы знаем на основе точных лабораторных экспериментов, что нет точной симметрии свойств частиц и античастиц. Согласно современной теории, точно равны массы частиц и античастиц, равны по величине и противоположны по знаку заряды частиц и античастиц. Более того, равны полные вероятности распада нестабильных частиц и античастиц. Однако при наличии нескольких вариантов распада проявляется нарушение зарядовой симметрии. Так, например, экспериментально достоверно установлено, что вероятность распада долгоживущего нейтрального каона  $K_L$  на  $\pi^-$ ,  $e^+$ ,  $\nu_e$  больше, чем на  $\pi^+$ ,  $e^-$ ,  $\bar{\nu}_e$ , в отношении 1,003. Следовательно, в принципе можно представить себе, что  $W^+$  и  $W^-$  — бозоны, у которых есть несколько каналов распада, — имеют различную вероятность распада с изменением барионного заряда. Пусть вероятность процесса  $W^+ = p + \nu$  больше вероятности процесса  $W^- = \bar{p} + \bar{\nu}$  и это компенсируется обратным соотношением вероятностей  $W^+ = e^+ + \nu$  и  $W^- = e^- + \bar{\nu}$ . При распаде смеси из равного числа  $W^+$  и  $W^-$  может возникнуть избыток  $p$  и  $e^-$  над  $\bar{p}$  и  $e^+$ , т. е. возникнет обычное вещество.

Ожидаемый эффект ничтожен, и, по-видимому, объяснить таким образом асимметрию Вселенной не удастся. Дело в том, что происходит перемножение малых величин, нагромождение маловероятных гипотез. Прежде всего, несохранение барионного заряда до сих пор не наблюдалось. При несохранении барионов любое ядро способно распадаться, например:

$$\text{He}^4 = p + p + \text{энергия}.$$

Эксперимент приводит к суровым ограничениям: вероятность распада такого рода меньше  $10^{-37} \text{ сек}^{-1}$ , что соответствует времени жизни больше  $10^{30} \text{ лет}$ . Отсюда вытекает малая вероятность самого элементарного процесса  $W^+ = p + \nu$  или  $2\mu^+ + \mu^- = p$  или других подобных процессов.

Все остроумие цитированных выше работ заключается в преодолении этого кажущегося противоречия. Можно ли совместить значительную вероятность процессов несохранения барионного заряда (необходимую для того, чтобы процесс мог играть космологическую роль) с наблюдаемой стабильностью нуклонов и ядер? Предположим, что кварки способны распадаться на  $n$  лептонов,

$q \rightarrow nl$ , и взаимодействие распада пропорционально малой константе  $g_*$ , так что время жизни кварка  $\tau_q \sim g_*^{-2}$ .

Барион состоит из трех кварков; динамика взаимодействия кварков предполагается такой, что кварк и дикуарк гораздо тяжелее, чем трикуарк, т. е. барион:

$$m_q \gg m_B, \quad m_{2q} \gg m_B, \quad m_{3q} \approx m_B.$$

В таком случае распад

$$B \rightarrow (3q) \rightarrow (2q) + nl$$

энергетически запрещен. Барион либо распадается целиком, т. е. так, что все три кварка превращаются в лептоны, например:

$$B \rightarrow 3nl,$$

либо совсем не распадается. В такой схеме распад бариона есть процесс третьего порядка, и грубая оценка даст

$$\tau_B \sim g_*^{-6}, \quad \tau_B \approx \tau_q^3 \left( \frac{\hbar}{m_B c^2} \right)^{-2}.$$

Значит, полагая, например,  $\tau_q \approx 10^{-8}$  сек, получим  $\tau_B \approx 10^{38}$  сек, что не противоречит опыту [Пати, Салам (1973)].

Такая гипотеза является необходимым — с точки зрения космологии — дополнением идеи кварков. Спонтанный распад кварков, если такие частицы вообще существуют, нужен для объяснения отрицательного результата поисков свободных кварков\*).

Вернемся к вопросу о возможном объяснении избытка барионов.

Асимметрия — различие между частицами и античастицами — во всех случаях мала. Выше написано, что в принципе такое отличие есть, но надо уточнить: в теории сильного и электромагнитного взаимодействий отличия нет, оно появляется только как малая поправка в процессах слабого взаимодействия. Наконец, асимметрия частиц и античастиц не нарушает термодинамики применительно к стационарному, равновесному состоянию. Если  $w_1$ -вероятность процесса  $W^+ = p + \bar{\nu}$  больше  $w_2$ -вероятности процесса  $W^- = \bar{p} + \nu$ , то обязательно  $\sigma_1$ -сечение  $\nu + p = W^+$  также больше  $\sigma_2$ -сечения  $\bar{\nu} + \bar{p} = W^-$ . По-видимому, равновесная концентрация  $p$  и  $\bar{p}$  останется одинаковой в статическом случае и при учете того, что теория несимметрична. Это утверждение подобно точной теореме о равенстве масс частиц и античастиц. К сожалению, нет работ, в которых исследовались бы термодинамические выводы зарядово-несимметричной теории.

\*) Другой выход заключается в предположении, что барионы состоят из двух кварков и одного антикварка ( $B = 2q\bar{q}$ ), барионный заряд целый и они нестабильны, несмотря на точное сохранение барионного заряда.

Вернемся к космологии. Избыток барионов над антибарионами может получиться лишь в связи с тем, что задача нестационарна, происходит расширение, задана «стрела» времени! Но это значит, что появится еще один множитель меньше единицы. Дальнейшая дискуссия о теории, не сформулированной количественно ее авторами, вряд ли целесообразна. Никто до сих пор не показал, что можно совместить наблюдаемую стабильность ядер в лаборатории и состав Вселенной с зарядово-симметричным сингулярным состоянием.

Но высшая ирония заключается в том, что после экспериментального открытия зарядовой несимметрии в физике частиц сама идея зарядово-симметричной Вселенной в значительной мере теряет свою привлекательность!

### § 9. Холодная Вселенная и спектр возмущений

Рассмотрим гипотезу о холодном веществе, состоящем из одних только барионов (без примеси антибарионов), вблизи сингулярности.

Эта гипотеза противоположна гипотезам о зарядово-симметричной Вселенной, изложенным выше.

Сосуществование противоположных гипотез в одной книге отражает всю трудность вопроса о состоянии Вселенной и заполняющего Вселенную вещества вблизи сингулярности. Последовательное логическое и математическое развитие каждой гипотезы и ее следствий до сопоставления с наблюдениями является единственным способом выяснения истины. Возрождение гипотезы холодной Вселенной только отчасти связано с трудностями других, «горячих» теорий. «Холодная» гипотеза естественно сочетается с предположением об изотропном (фридмановском) характере расширения вблизи сингулярности.

Изотропия означает макроскопическую упорядоченность начального состояния, малая начальная энтропия соответствует упорядоченности на микроскопическом уровне!

В настоящее время Вселенная является «горячей», удельная энтропия велика.

Неотъемлемой частью гипотезы о холодном начале эволюции является объяснение того, когда и как возникла современная большая энтропия, когда и как Вселенная стала горячей. Предполагается, что это произошло при  $t'$  таком, что  $10^{-6} \text{ сек} \gg t' \gg t_{\text{пл}} = 10^{-48} \text{ сек}$ , в результате превращения в тепло энергии малых возмущений.

Для этого необходимы возмущения той же амплитуды, что и для образования скоплений галактик, но предельно малой длины волны. Предположение о едином спектре возмущений в широчайшем диапазоне длин волн приводит к разумному объяснению величины энтропии.

Привлекательность такой теории (или гипотезы) состоит в том, что находит естественное объяснение очень своеобразный состав вещества в адронной эре.

Мы отмечаем, что в адронной эре при  $T \geq m_p c^2$  на  $10^8$  антибарионов приходится  $10^8 + 1$  барион, и это соотношение с характерным избытком барионов имеет место везде. При рассмотрении вопроса об антиматерии во Вселенной был сделан вывод, что маловероятно существование макроскопических областей с избытком антибарионов.

В рассматриваемой здесь гипотезе холодное вещество везде состоит из барионов. В результате его нагревания возникают пары  $B\bar{B}$ ; очевидно, что при этом везде сохраняется избыток барионов, соответствующий их начальной плотности.

Если дополнительно предположить, что лептонный заряд исходного холодного вещества того же порядка, что и барионный, или равен нулю, то после нагрева получится вещество с почти одинаковой плотностью нейтрино и антинейтрино. Исследование нуклеосинтеза приводит к выводу, что состав с  $v \approx \bar{v}$  наиболее вероятен.

Для того чтобы теория нуклеосинтеза осталась действительной, необходимо, чтобы нагревание вещества и переход от холодной модели к горячей происходили бы достаточно рано, при температуре выше  $10 \text{ Мэв}$ , т. е. не позднее  $t = 0,01 \text{ сек}$  после сингулярности. При этом полностью обеспечено и установление равновесного планковского спектра излучения. Гипотеза естественно приводит к этим результатам.

Что можно предположить об источнике нагрева? В данном параграфе предлагается гипотеза, основанная на экстраполяции возмущений плотности и метрики от масштабов скоплений галактик до самого малого масштаба, равного среднему расстоянию между соседними барионами. Эти возмущения наложены на однородное и изотропное фридмановское решение. Предполагается, что исходный холодный барионный газ подчиняется известному предельному жесткому уравнению состояния [Зельдович (1961)]  $\epsilon = P = \frac{n^2}{m^2}$ , где  $n$  — плотность барионов,  $m$  — величина размерности массы, порядка массы покоя бариона; принято  $\hbar = c = 1$ .

Длинноволновая часть спектра возмущения ответственна за образование скоплений галактик. Необходимо, чтобы начальное возмущение метрики и геометрии было (в нужном масштабе) порядка  $b \approx 10^{-4}$ . Этому соответствует возмущение плотности в том же масштабе, достигающее  $b = 10^{-4}$  к моменту, когда длина волны сравнивается с «горизонтом»  $ct$ . Во время периода  $\lambda > ct$  возмущение метрики постоянно, что с очевидностью следует из отсутствия взаимодействия между частями Вселенной, находящимися на расстоянии  $\lambda$  друг от друга. Между тем  $\frac{\delta \rho}{\rho}$  в этом периоде



растет, причем закон роста зависит от уравнения состояния  $\left(\frac{\delta\rho}{\rho} \sim t^{1/2} \text{ для } P=\varepsilon; \frac{\delta\rho}{\rho} \sim t \text{ для } P=\frac{\varepsilon}{3}\right)$ . Поэтому удобно характеризовать начальный спектр именно возмущениями метрики. При этом нет надобности уточнять, к какому именно моменту времени эти возмущения относятся.

Предлагается считать начальные возмущения метрики не зависящими от масштаба \*). Нужно подчеркнуть, что «независимость» есть частный вид функции; в этом месте делается еще одно определенное произвольное предположение, которое, по крайней мере в настоящее время, не обосновано фундаментальной теорией, наблюдения дают только косвенные намеки в пользу предположения о постоянстве  $b$  в ограниченном интервале масс от  $10^{12} M_{\odot}$  до  $10^{23} M_{\odot}$ , т. е.  $10^{23} n^{-1/2} < \lambda < 10^{26} n^{-1/2}$ . Между тем для предлагаемой гипотезы нужно экстраполировать спектр возмущений к массе, равной массе одного бариона, т. е.  $10^{-57} M_{\odot}$ .

Итак, все предположения перечислены. Покажем, как производится вычисление. Будем систематически опускать все численные множители и пользоваться системой единиц  $\hbar=c=1$ , сохраняя обычные обозначения  $G$  для постоянной тяготения и  $m$  (без индекса) для массы протона. Обозначим безразмерную величину  $g = Gm^2 \left( = \frac{Gm^2}{\hbar c} \right) = 10^{-38}$ .

Невозмущенная динамика расширения дается формулами

$$\rho = n^2 m^{-2} = G^{-1} t^{-2}, \quad n = m G^{-1/2} t^{-1}. \quad (23.9.1)$$

Флуктуации плотности выражаются через флуктуации метрики  $b$  (ср. гл. 11, § 3):

$$\delta\rho = b G^{-1} \lambda^{-2}. \quad (23.9.2)$$

Отсюда получим для наиболее коротких волн ( $\lambda_{\min} = n^{-1/2}$ ) и притом в течение того периода, когда  $\lambda_{\min} > t$ , а следовательно,  $b = \text{const}$ :

$$\delta\rho = b G^{-1/2} m^{3/2} t^{-1/2} \quad (23.9.3)$$

и, соответственно,  $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim t^{1/2}$ .

Найдем момент  $t_1$ , когда возмущения превращаются в акустические волны. Условие

$$\lambda_{\min} = n^{-1/2} = t_1 \quad (23.9.4)$$

вместе с выражением для  $n$  дает

$$t_1 = G^{1/2} m^{-1/2}, \quad \rho_1 = G^{-1/2} m, \quad \delta\rho_1 = b C^{-1} m, \quad \frac{\delta\rho}{\rho} = b. \quad (23.9.5)$$

\*) От масштаба не зависит безразмерная величина возмущения метрики  $h(M)$ , но не фурье-компонента  $h_k$ ; связь их:  $h = \sqrt{(h_k)^2 k^3}$  (см. гл. 12).

Последнее выражение можно было написать сразу: известно, что в момент перехода от автомоделных к акустическим возмущениям возмущение плотности (безразмерное) как раз равно возмущению метрики.

Подсчитаем акустическую энергию и затем температуру и энтропию, получившуюся при затухании акустических колебаний, превращающихся в другие формы энергии:

$$\varepsilon_{\text{ак}} = \frac{(\delta\rho)^2}{\rho} = b^2 G^{-1/2} m = T^4, \quad * \\ T = b^{1/2} G^{-1/4} m^{1/4}, \quad T^2 = b^{1/2} G^{-1/2} m^{1/2}. \quad (23.9.6)$$

Безразмерная энтропия равна

$$S = \frac{T^2}{n} = b^{1/2} G^{-1/2} m^{-1/2} = b^{1/2} g^{-1/2} = 10^{14.25} b^{1/2}. \quad (23.9.7)$$

Итак, для того чтобы получить значение  $S$ , соответствующее наблюдениям (для круглого счета выберем его равным  $10^{8.25}$ ), необходимо выбрать  $b = 10^{-4}$ , что и утверждалось в начале параграфа.

Остановимся на мотивировке проделанного расчета.

Наиболее важный вопрос заключается в том, что вправе ли мы ограничиваться длиной волны  $\lambda \geq \lambda_{\min} = n^{-1/2}$ . Ответ связан с определенными представлениями о состоянии вещества с предельно жестким уравнением состояния. Главный вклад в плотность энергии такого вещества дает статическое векторное поле, источником которого являются барионы. Мезоны, соответствующие этому полю, названы вектонами [Кобзарев, Окунь (1962)], поле кратко называем вектонным.

Статическое поле подобно кулоновскому полю заряда (отличие заключается в конечном радиусе действия векторного поля), и потому это поле не флуктуирует и не квантуется. У вектонного поля есть поперечные степени свободы, подобные электромагнитным волнам, однако их возбуждение означало бы начальную температуру, отличную от нуля. Вернемся к статическому полю; оно однозначно зависит от распределения барионов в пространстве. Поэтому барионы вместе со своим полем образуют систему, в которой число степеней свободы равно числу барионов. Этому и соответствует (как в теории теплоемкости твердого тела) выбор минимальной длины волны \*). Именно возмущение распределения барионов для длинных волн соответствует флуктуациям плотности. Возмущения с  $\lambda_{\min} = n^{-1/2}$  являются коротковолновым краем спектра, длинно-

---

\*) Условие заключается в том, что интеграл  $V \int_0^{k_m} k^2 dk$ , дающий число волн в объеме  $V$ , равен  $nV$  — числу барионов в этом объеме.

волновая часть которого вызывает образование скоплений галактик. Формулировка, касающаяся не зависящих от масштаба флуктуаций метрики  $h_1 = b = 10^{-4} = \text{const}$ , удобна и легко запоминается, однако надо подчеркнуть, что здесь приходится делать произвольное предположение, оправданное только последующим совпадением значения удельной энтропии с наблюдаемым. Можно сформулировать исходную гипотезу как предположение о степенной зависимости флуктуаций плотности от массы (точнее — от числа барионов):

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = b N^{-1/2} g^{1/2} \left( \frac{t}{t_{\text{пл}}} \right)^{1/2}, \quad (23.9.8)$$

в области  $t < t_1$  (так что имеет место жесткое уравнение состояния) и  $\lambda > \lambda_{\text{min}}$ , т. е.  $N > 1$ . Как уже отмечалось, нужные нам флуктуации меньше тех, которые получились бы при наивном подходе:  $\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{\delta N}{N} = N^{-1/2}$ . Момент  $t_1$  можно записать как

$$t_1 = G^{1/2} g^{-1/2} = 10^{9,5} G^{1/2}. \quad (23.9.9)$$

Здесь  $G^{1/2}$  есть планковская единица времени  $t_{\text{пл}}$ , равная  $0,5 \cdot 10^{-43}$  сек. Как видно из выражения для  $t_1$ , существенны процессы, происходящие значительно позднее  $t_{\text{пл}}$ , а именно при  $t_1 = 10^{-34}$  сек, когда уже нет эффектов, связанных с квантованием самого пространства-времени или с поправками к общей теории относительности.

В момент  $t_1$  среднее расстояние между соседними барионами равно  $3 \cdot 10^{-24}$  см, т. е. гораздо меньше комптоновской длины волны бариона  $\left( \frac{\hbar}{mc} = 2 \cdot 10^{-14}$  см ). В более точной формуле для уравнения состояния

$$\varepsilon = n^2 m^{-2} + n^{4/3} + mn \quad (23.9.10)$$

последние два члена меньше первого в  $10^{20}$  и  $10^{30}$  раз, что и показывает главную роль векторного поля в плотности энергии \*).

Для расчета энтропии точный момент затухания акустических волн и превращения их в тепло не играет роли. Если затухание происходит позднее, при  $t > t_1$ , то адиабатическое уменьшение плотности энергии акустических волн происходит по закону  $\varepsilon \sim n^{4/3}$ ,  $S = \varepsilon^{3/4}/n = \text{const}$ .

До затухания число фотонов на каждую моду акустических колебаний равно  $\frac{\varepsilon_{\text{ак}}}{n\omega} = b g^{-1/2} = 10^{15}$ . После затухания возникает планковское равновесие, возбуждаются новые степени свободы

\*) Малость барионного вклада по сравнению с энергией векторного поля как раз и позволяет не учитывать флуктуаций плотности, зависящих от дискретности, «штучности» отдельных барионов.

(поперечные векторные колебания, электромагнитные волны, пары  $e^+e^-$ , пары  $\nu\bar{\nu}$ , пары  $B\bar{B}$ ) с импульсом порядка  $T$ , т. е. с длинами волн порядка  $T^{-1} \ll \lambda_{\min} = n^{-1/2}$ , зато энергия каждой степени свободы в среднем оказывается меньше одного кванта поля (тождественно меньше 1 для фермионов и порядка  $1/20$  для бозонов около максимума и в среднем, хотя в рэлей-джинсовской области  $\frac{kT}{\hbar\omega} > 1$ ).

Возбуждение большого числа степеней свободы с одновременным уменьшением числа элементарных возбуждений на моду от  $10^{16}$  до 1 — в этом заключается необратимый процесс возникновения энтропии из когерентных колебаний. Оценки амплитуды колебаний для длинных волн подробно рассмотрены в главе, посвященной образованию скоплений галактик.

В области, промежуточной между  $\lambda_{\min}$  и большими длинами волн, возмущения, соответствующие  $b \sim 10^{-4}$ , затухают, не оставляя наблюдаемых следов. Предлагаемая гипотеза задает величину этих возмущений.

Отметим, что в момент  $t_1$  возникает энтропия, но плотность энергии и давление определяются еще векторным полем, тепловая энергия составляет долю  $b$  от полной энергии. Переход к радиационно-доминированной ситуации происходит позже, в силу того что  $\epsilon_{\text{вект}} \sim \sim n^2$ ,  $\epsilon_{\text{тепл}} \sim n^{1/3}$ . Значит,  $\epsilon_{\text{вект}} > \epsilon_{\text{тепл}}$  начиная с момента  $t_2$ , когда

$$n < n_2 = b^{3/2} n_1 = 10^{-6} n_1, \quad t_2 > b^{-1/2} t_1 = 10^6 t_1 = 10^{-28} \text{ сек.}$$

Остается неясным, являются ли возмущения метрики скалярными (терминология Лифшица) или они удовлетворяют принципу равнораспределения, — тогда плотность гравитационных волн сравнима с плотностью электромагнитного излучения (хотя и меньше), спектр не похож на планковский и имеет максимум при  $\lambda \sim 100 \text{ см}$ .

В заключение напомним, что гипотеза, изложенная в настоящем параграфе, использует недоказанные предположения (уравнение состояния барионов, спектр возмущений), поэтому обязательной она не является. Следует, однако, уже здесь указать на соображения, которые высказал Грищук (1974) и которые мы подробнее разбираем в § 18. Согласно этим соображениям, уравнения для гравитационных волн не являются конформно-инвариантными: напомним, что равная нулю масса покоя соответствующих частиц (гравитонов) есть условие, лишь необходимое для конформной инвариантности. Как следствие, гравитоны рождаются также и в изотропной сингулярности, т. е. в решении Фридмана вблизи  $t=0$ . Спонтанное рождение гравитонов отсутствует лишь в том частном случае, когда отсутствует скаляр кривизны,  $R=0$ , а для этого нужно, чтобы  $P=\epsilon/3$ .

В анизотропном мире рождение фотонов, нейтрино и других частиц путем обратного влияния на метрику переводит мир на реля-

сы изотропного расширения. Согласно Гришуку, рождение гравитонов путем обратного влияния на метрику переводит изотропное произвольное расширение на рельсы изотропного расширения с  $R=0$ ,  $P=\epsilon/3$  и лишь после этого эффективно выключается. Это соображение накладывает существенное ограничение на уравнение состояния при учете фактического, известного из наблюдений, состояния Вселенной. В частности, изложенная выше в данном параграфе картина холодного предельно жесткого барионного газа существенно меняется. Уравнение состояния  $P=\epsilon=n^2m^2$  приводит к обильному рождению гравитонов, которое прекратится лишь после того, как удельная энтропия достигнет значения  $S = \frac{n_g}{n_b} \cong (Gm^2)^{-1/2} = 10^{18}$ , что резко превышает наблюдаемое значение ( $\sim 10^9$ ).

Если же уравнение состояния не является предельно жестким, то при  $P=\epsilon/3$  (начиная с самой сингулярности) рождения гравитонов вовсе нет. При  $P<\epsilon/3$  — например, в модели Халдорна (см. § 2 этой главы) — роль гравитонов порядка единицы вблизи сингулярности, но затем, по мере расширения, роль гравитонов уменьшается и становится гораздо меньше единицы, когда кончается адронный период. Таким образом, соображения Гришука специфически исключают только жесткое уравнение состояния.

Является ли это исключение окончательным? В работе Гришука отмечается существование таких модификаций ОТО (совпадающих со стандартной ОТО вне сингулярности), при которых рождение гравитонов в изотропном случае запрещено. В связи с тем, что вопрос поставлен лишь очень недавно и до конца еще не выяснен, мы ограничимся здесь сказанным.

## § 10. Теория стационарной Вселенной

Один из способов решения проблемы сингулярности заключается в том, чтобы избавиться от сингулярности вовсе. Доказательство существования сингулярности основано на предположении об уравнении состояния вещества, заполняющего Вселенную. Вводя гипотетическое поле с отрицательной плотностью энергии, можно избежать космологической сингулярности \*). Теория такого рода — теория стационарной Вселенной (СВ) или, на языке авторов, «Steady State Theory» — была разработана Хойлом (1948) и Бонди и Голдом (1948). В течение двух десятилетий значительная часть теоретических и наблюдательных работ была посвящена проверке, развитию и критике теории стационарной Вселенной.

\*) Выводы, касающиеся коллапса изолированных тел большой массы и плотности (например, звезд, исчерпавших горючее), при этом сохраняются.

Уже по этой причине необходимо изложить ее содержание и современные взгляды на нее.

В теории СВ принимается метрика ( $c=1$ )

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (23.10.1)$$

Из формулы видно, что пространство (сечение  $t = \text{const}$ ) является плоским, Вселенная однородна и изотропна — можно смещаться по координатам  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и поворачиваться в этом пространстве. Эти свойства СВ-модели являются общими с моделью Фридмана.

Новым свойством, специфичным для СВ, является группа сдвига по времени. Все свойства метрики одинаковы в любой момент  $t$ . Заменяя  $t$  на  $t + \tau$ , необходимо лишь переопределить координаты:

$$x' = e^{H\tau} x, \quad y' = e^{H\tau} y, \quad z' = e^{H\tau} z. \quad (23.10.2)$$

Метрика СВ описывает расширение Вселенной, красное смещение спектральных линий; значение постоянной Хаббла равно  $H$  — коэффициенту в показателе  $e^{2Ht}$ ; при этом  $H$  оказывается постоянной величиной, не меняющейся в ходе эволюции \*). Однородность Вселенной, т. е. группу пространственных сдвигов, Бонди и Голд (1948) называют «космологическим принципом». Обобщая этот термин, Бонди называет «совершенным космологическим принципом» полную группу сдвигов по пространству и времени, характерную для метрики СВ.

С помощью уравнений ОТО найдем тот тензор энергии-импульса, ту правую часть уравнений, которая необходима для того, чтобы имело место (23.10.1) с  $H = \text{const}$ . В соответствии с общими формулами раздела I получим

$$\frac{1}{2} H^2 = \frac{4\pi G \epsilon}{3c^2}, \quad H^2 = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\epsilon + 3P), \quad (23.10.3)$$

откуда следует, в частности,  $P = -\epsilon$ . В величины  $\epsilon$  и  $P$  здесь входит космологическая постоянная, если она отлична от нуля:

$\epsilon_\Lambda = \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda$ ,  $P_\Lambda = -\frac{c^4}{8\pi G} \Lambda$ . Метрика СВ является как раз точным решением для пустого мира с положительной космологической постоянной  $\Lambda = \frac{3H^2}{c^2}$  (см. об этом гл. 4).

---

\*) Метрику Фридмана — Леметра можно записать в виде, схожем с (23.10.1), заменяя  $Ht$  на  $\int H(t) dt$ . Сингулярность решения Фридмана проявляется, в частности, в том, что  $H \rightarrow \infty$  при некоем  $t$ , которое можно выбрать за нуль в отличие от СВ.

Однако авторы СВ предлагают свою теорию для описания реальной, наблюдаемой, «нашей» Вселенной, содержащей материю, звезды, барионы, реликтовое излучение.

Так как для обычной материи, плотность которой не менее  $3 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$ ,  $P_{\text{вещ}} \ll \epsilon_{\text{вещ}}$ , то в составе тензора энергии-импульса должно быть поле («С-поле»), у которого  $P_C = -\epsilon_{\text{вещ}} - \epsilon_C$ . Такое поле нарушает одно из предположений, лежащих в основе теорем о необходимости сингулярности [см. (22.1.7)]; формально именно поэтому становится возможным решение без сингулярности в прошлом и будущем.

Важнейший момент заключается в том, что авторы СВ требуют истинной, физической, а не только метрической и геометрической стационарности. Они не ограничиваются заданием метрики (23.10.1).

По теории СВ необходимо, чтобы вечно, от  $t = -\infty$ , сохранялась одна и та же средняя плотность вещества  $\rho_{\text{вещ}}$  и (добавлено после 1965 г.) реликтового излучения  $\rho_{\text{рел}}$ . Если рождения барионов не происходит, то для плотности  $\rho_{\text{вещ}}$  имеет место уравнение

$$\frac{d\rho_{\text{вещ}}}{dt} = -3H\rho_{\text{вещ}}, \quad \rho_{\text{вещ}} = e^{-3Ht} \text{const}, \quad (23.10.4)$$

что несовместимо с идеологией СВ. Авторы делают добавочное предположение о рождении барионов из С-поля:

$$\frac{d\rho_{\text{вещ}}}{dt} = -3H\rho_{\text{вещ}} + A, \quad \frac{d\epsilon_C}{dt} = -C^2 A - 3H(\epsilon_C + P_C). \quad (23.10.5)$$

Подобрав подходящее  $A = 3H\rho_{\text{вещ}}$ , можно тождественно удовлетворить обоим условиям стационарности,  $\frac{d\rho_{\text{вещ}}}{dt} = 0$ ,  $\frac{d\epsilon_C}{dt} = 0$ , при учете связи  $P_C$  и  $\epsilon_C$ , следующей из уравнений ОТО \*). Однако при этом пришлось ввести неизвестный ранее процесс рождения вещества из С-поля. Теория СВ по этой причине называют также теорией непрерывного творения материи. Конкретный вид члена  $A$  и его зависимость от  $\epsilon_C$ ,  $\rho_{\text{вещ}}$  или других величин остаются неопределенными: можно положить  $A = B\epsilon_C$  и считать  $\epsilon_C$  не зависящим от координат. В этом случае рождение происходит равномерно по всему пространству; в работе Хойла и Нарликара (1963) авторы полагают  $A = B\epsilon_C \rho_{\text{вещ}}$ , рождение происходит преимущественно там, где уже велика плотность вещества. Независимо от этого ответственным за рождение является С-поле, член описывающий рождение должен входить с плюсом в уравнение для вещества и с минусом в уравнение для энергии С-поля, иначе нельзя совместить решение с уравнениями ОТО \*\*).

\*) Плотность излучения  $\rho_{\text{изл}} \ll \rho_{\text{вещ}}$ , учет  $\rho_{\text{изл}}$  не изменит сути дела.

\*\*) Глубокая причина заключается в том, что уравнения ОТО содержат в себе закон сохранения энергии.

Сначала теория СВ попала в руки (точнее, была создана руками) астрономов и проверке подвергались космологические выводы. Совершенный космологический принцип является весьма жестким утверждением: средняя плотность галактик, средняя их светимость, число и свойства радиоисточников и т. п. должны быть неизменными, в далеком прошлом они должны быть такими же, как в настоящее время.

Предсказывается определенная кривая  $\log N - \log S$  для числа радиоисточников. Оказалось, что предсказанная зависимость не согласуется с наблюдениями (см. § 8 гл. 3). В теорию СВ нельзя ввести функцию эволюции источников для согласования с наблюдениями — отдельные источники эволюционируют, но Вселенная в целом, в среднем, стационарна! Теория СВ предсказывает параметр ускорения  $q_0 = -1$ , что также не согласуется с наблюдениями (см. § 9 гл. 3).

Точность наблюдений невелика, статистическая обработка сложна, поэтому споры вокруг наблюдений продолжают. Однако, как нам кажется, главные и непреодолимые трудности теории СВ выявляются при попытке конкретизировать на уровне элементарных частиц и теории поля те гипотезы, которые приходится вводить.

Дифференциальное уравнение для  $\frac{d\rho_{\text{вещ}}}{dt}$  может относиться к средней плотности, но рождение каждого отдельного бариона представляет собой микроскопический взрыв. Если рождаются пары барион — антибарион, то должна происходить в определенной доле случаев аннигиляция раньше, чем какой-либо механизм пространственно разделит барионы от антибарионов.

Аннигиляционное излучение специально искали и не нашли на уровне в 1000 раз ниже того, который соответствует полной аннигиляции.

Рождение барионов (без антибарионов) означало бы нарушение сохранения барионного заряда. Следовательно, по общим принципам, возможен и обратный процесс превращения барионов в  $S$ -поле. Такой процесс наблюдался бы как радиоактивный распад ядер, стабильных в обычном смысле \*). Как уже упоминалось, такой процесс не обнаружен, несмотря на специальные поиски.

Реликтовое излучение и его равновесный планковский спектр естественно объясняются в эволюционной космологии. В стадии радиационно-доминированной плотной плазмы происходит установление равновесия. В теории СВ, прозрачной для радиоволн вплоть

---

\*) Отметим также, что гипотеза спонтанного излучения частиц нуклонами в переменном гравитационном поле Метагалактики выдвигалась Станюковичем (1965). Здесь мы ограничимся ссылкой на обсуждение этой концепции — см. Зельдович и Смородинский (1966а, б) и Станюкович (1966а).



до очень большого красного смещения порядка  $z \sim 100$ , спектр реликтового излучения не поддается объяснению \*).

По совокупности наблюдательных данных и теоретических соображений теория стационарной Вселенной может считаться опровергнутой.

Надо отдать должное интеллектуальной смелости ее авторов; дискуссии вокруг теории СВ были полезны и способствовали общему подъему космологии.

## § 11. Принцип Маха и совпадения больших чисел физики и космологии

Отношения между астрономией и физикой сложны и многообразны, в том числе и в психологическом аспекте. Астроном с удовольствием применяет новинки физики (экспериментальной и теоретической) для своей науки — от спектрального анализа до счетчиков фотонов, от классической механики до квантовой физики. И вместе с тем в астрономах зреют гроздь — не гнева, но желания реванша, конечно, — ничто так не ценится астрономами, как возможность активно вмешаться в физику. Не брать у физиков, а дать им нечто новое! На этом пути у астрономии есть великолепные достижения, примерами могут служить закон тяготения, определение скорости света и многое другое. Попытки продвинуться в том же направлении и дать астрономическое объяснение важнейшим физическим величинам и явлениям продолжаются и до сих пор. Авторы их заслуживают глубокого уважения уже за смелость постановки задачи. Здесь мы рассмотрим две связанные между собой идеи — принцип Маха и связь константы тяготения со свойствами Вселенной как целого. Космология является той областью, в которой одновременно играют роль законы тяготения, квантовой механики и теории элементарных частиц, как это мы уже подробно обсуждали в § 4 этой главы. Напомним, что из констант  $G$ ,  $\hbar$ ,  $c$  и массы покоя элементарной частицы можно составить безразмерную величину  $g = \frac{Gm^2}{\hbar c}$ . Эта величина составлена по образу и подобию безразмерной величины, характеризующей электромагнитное взаимодействие, — так называемой постоянной тонкой структуры  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ , где  $e$  — элементарный заряд.

Величина  $\alpha$  впервые появилась в атомной спектроскопии как отношение магнитной энергии электрона, от которой зависит тон-

\*) Попытки объяснить излучение с температурой  $3^\circ\text{K}$  конденсацией твердого водорода не выдерживают критики; в соответствующей работе Хойл и Нарликар (1963) не рассматривают оптических свойств кристаллов водорода, резко отличающихся от свойств черного тела. Для превращения энергии в излучение с планковским спектром нужно многократное рассеяние или поглощение и переизлучение. Авторы СВ не решили этот вопрос.

кая структура линий, к электростатической ( $\sim \alpha^2$ ). Еще важнее тот факт, что отношение электростатической энергии электрона в водородном атоме к энергии покоя электрона порядка  $\alpha^2$ . Константа  $\alpha$  равна  $1/137$ . Именно тот факт, что  $\alpha < 1$ , позволил последовательно создать нерелятивистскую квантовую теорию атома, являющуюся хорошим приближением, а уже после этого развить релятивистскую теорию Дирака и затем квантовую электродинамику и теорию перенормировки. Будь  $\alpha > 1$  или  $\alpha \sim 1$ , нерелятивистская теория не могла бы существовать, все этапы теории были бы перемешаны, физика оказалась бы бесконечно труднее! С ситуацией большой безразмерной константы физики столкнулись в сильном взаимодействии и в ядерной физике — и действительно, эти области до сих пор отстают от атомной физики (не в идейном смысле, конечно, а в смысле точности предсказаний).

Возвращаясь к астрофизике и тяготению, убедимся в сходстве  $\alpha$  и  $g$ : кулоновское взаимодействие двух частиц есть  $e^2/r$ , гравитационное взаимодействие  $Gm^2/r$ , так что  $Gm^2$  играет ту же роль, что  $e^2$ , и имеет ту же размерность. В § 4 были вычислены значения  $g$  для массы протона и массы электрона:

$$g_p = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} = 6 \cdot 10^{-39}, \quad g_e = \frac{Gm_e^2}{\hbar c} = 2 \cdot 10^{-45}. \quad (23.11.1)$$

В обоих случаях получаем необычайно малую величину. Естественной мерой является натуральный логарифм:

$$-\ln g_p = 87,9, \quad -\ln g_e = 102,8. \quad (23.11.2)$$

Итак, даже логарифм  $g$  сильно отличается от единицы; для двух частиц  $p$  и  $e$  логарифмы отличаются не сильно. В дальнейшем будем отличать их, округленно примем

$$g = 10^{-40}, \quad -\ln g = 92. \quad (23.11.3)$$

Среди физиков существует убеждение, что безразмерные величины, существенно отличающиеся от единицы, подлежат объяснению, являются предметом (по крайней мере) качественной теории. Это убеждение наталкивает на мысль, что близость больших безразмерных чисел \*) из различных явлений природы указывает на наличие внутренних связей между этими явлениями и может служить маяком, указывающим путь развития науки.

Пример такого подхода дает Ландау: он обращает внимание на то, что  $\alpha \sim (\ln g)^{-1}$ . Далее подводится идейная основа под это совпадение. В определенном варианте квантовой электродинамики

\*) Для краткости будем везде говорить о больших числах, переворачивая малые:  $\frac{\hbar c}{e^2} = \alpha^{-1} = 137$ ,  $\frac{\hbar c}{Gm^2} = g^{-1} = 10^{40}$  и т. д.

наблюдаемый заряд элементарной частицы  $e$  ограничен неравенством, в которое в знаменателе под логарифмом входит «импульс образования» — предельный импульс, при котором еще верна теория.

В этом смысле электродинамика с неограниченными импульсами неполна, незамкнута — она приводит к выводу, что наблюдаемый заряд обязан равняться нулю. В этом контексте соотношение между  $\alpha$  и  $g$  Ландау истолковывает так, что гравитационные эффекты ограничивают максимальные импульсы; электродинамика в строгом смысле существует лишь при одновременном учете роли тяготения (см. § 5 гл. 21).

В качестве другого примера использования больших чисел, относящегося к астрономии, отметим оценку максимальной массы белого карлика (Ландау—Чандрасекар). Солпитер показал, что предельное число нуклонов в белом карлике по порядку величины равно  $N = g_p^{-1/2} \approx 10^{57}$ , что соответствует массе Солнца и близко к пределу, вычисленному точно. В этот расчет входит  $g_p$ , относящееся к нуклонам (протонам), так как электроны в белых карликах с  $M \approx M_\odot$  релятивистские и их масса не должна входить в ответ. В оценке опущены численные множители типа 2, 3,  $\pi$  и отношения атомного веса к атомному номеру. Однако еще раньше Дирак смело применил идеологию больших чисел к космологии. Конкретно это применение будет рассмотрено ниже. При отсутствии логически замкнутой теории намеки или указания на роль больших чисел неоднозначны.

Одно направление заключается в выводе свойств Вселенной из теории тяготения, т. е. в предположении, что величина  $g$  является основой космологии.

Однако есть и другая гипотеза — предположение об определенной роли Вселенной в локальных законах. Эта гипотеза называется принципом Маха.

В зародыше принцип Маха содержался в знаменитом вопросе Ньютона: почему во вращающемся теле есть центробежная сила и кориолисовы силы? Возникает дилемма: либо вращение абсолютно, т. е. центробежные силы возникают при вращении относительно «абсолютного» ньютонова пространства, либо играет роль вращение относительно всех остальных масс Вселенной?

Опыт показывает, что вращение тела относительно неподвижных далеких звезд приводит к появлению центробежной силы и сил Кориолиса. Вопрос состоит в том, есть ли эти силы при вращении тела в мире, в котором нет звезд — ни далеких ни близких, нет никакой материи, кроме рассматриваемого тела.

Очевидно, что прямо, экспериментально ответить на этот вопрос нельзя, такого мира нет, опыт навсегда останется воображаемым, мысленным. Тем не менее теоретический вопрос остается. Но в общей теории относительности силы инерции и тяготение тесно связаны между собой (см. об этом в ТТ и ЭЗ, особенно § 10 и приложение

к нему). Не удивительно, что возник вопрос, не зависят ли силы инерции и тяготение от Вселенной как целого.

Но в таком случае величина  $g$ , характеризующая тяготение, может зависеть от больших чисел, характеризующих Вселенную как целое. Принцип Маха, возможно, перекликается с проблемой больших чисел в локальной лабораторной физике. Так получился набор вопросов под общим названием «многоликий Мах».

Две постановки вопроса о больших числах рассмотрим последовательно. Начнем с фактической стороны дела. Одно большое число  $g^{-1} = 10^{40}$  найдено выше. В качестве числа, характеризующего Вселенную, Дирак рассматривает общее число нуклонов во Вселенной (если Вселенная замкнута!). Он получает его, принимая за радиус отношение  $\frac{c}{H} = 10^{28}$  см, критическая плотность  $10^{-29}$  г/см<sup>3</sup> соответствует  $n = 10^{-5}$  см<sup>-3</sup> нуклонов, так что

$$N = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{c}{H} \right)^3 n = 4 \cdot 10^{79} \approx g^{-2}, \quad (23.11.4)$$

— впечатляющее совпадение, которое Дирак считает слишком хорошим, чтобы быть случайным.

Подставим в (23.11.4) выражение плотности нуклонов, соответствующее критической плотности  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ . Выражение для плотности нуклонов есть  $n_c = \frac{3H^2}{8\pi G m_p}$ , откуда

$$N \sim \frac{c^3}{HGm_p}. \quad (23.11.5)$$

Опуская численные множители, после простых выкладок получим другое замечательное соотношение, эквивалентное (23.11.4):

$$\left. \begin{aligned} H \left( \frac{1}{\text{сек}} \right) &= \frac{m_p c^2}{\hbar} \frac{G m_p^2}{\hbar c} = g \frac{m_p c^2}{\hbar}, \\ T (\text{сек}) &= \frac{1}{H} = \frac{\hbar}{m_p c^2} g^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (23.11.6)$$

Аналогичное соотношение приведено у Станюковича (1965), соотношение (23.11.6) имеется у Гамова (1948, 1968). Совпадение мало изменяется, если вместо  $\bar{g}$  взять отношение  $\frac{G m_p^2}{e^2} = 0,8 \cdot 10^{-36}$ , как это сделано в первоначальной работе Дирака. Современное изложение см. Дирак (1974).

Гамов называет «темпоном» единицу времени  $\frac{\hbar}{m_p c^2} \approx 10^{-24}$  сек, характерную для нуклона. Возраст мира, измеренный в темпонах,  $\sim 3 \cdot 10^{41}$  (безразмерное число) напоминает характерную для гравитации величину  $g^{-1} = 10^{40}$ .

Уточним физические идеи, связанные с этими совпадениями. Само понятие общего числа нуклонов имеет смысл только для замкнутого мира. Вычисление  $N$  по формуле (23.11.5) справедливо — хотя бы по порядку величины — тогда, когда горизонт порядка радиуса мира, т. е. возраст составляет долю порядка единицы от полного цикла расширения и сжатия мира. В однородном открытом (гиперболическом) или плоском мире не существует «общего числа барионов» — эта величина бесконечна!

В замкнутом мире можно предположить, что соотношение для  $N$  имеет какой-то физический смысл и (с постоянным коэффициентом порядка единицы) имеет место всегда.

Соотношение между  $N$  и  $H$  с течением времени изменяется ( $N$  постоянно,  $H$  меняется; отношение возраста мира к темпу лишь по порядку величины равно  $g^{-1}$ , коэффициент меняется по мере изменения  $H$ ).

Однако возможна и другая интерпретация, и для плоского мира она является единственно возможной, если поверить в соотношение (23.11.6) как закон природы. Величина  $H$  в плоском мире не постоянна,  $H = \frac{2}{3T}$ . Справа стоят так называемые физические константы  $G, \hbar, c, m_p$ . Значит (по мнению ряда авторов), по крайней мере одна из них в действительности не постоянна! Надо подчеркнуть, что такое предположение требует откровенного отказа от современной физической теории \*). В пользу такой концепции нет никаких других аргументов, кроме упомянутого совпадения.

Возможна переменность  $G$ , и ее следствия широко обсуждались. Из формулы следует, что  $5 \cdot 10^9$  лет \*\*) тому назад  $G$  было в 1,5—2 раза больше. При сохранении момента вращательного движения Земли вокруг Солнца большему  $G$  соответствует меньшее (в 1,5—2 раза) расстояние Земли от Солнца. По теории внутреннего строения звезд светимость Солнца также зависит от  $G$ , притом весьма сильно — приблизительно как  $G^7$ . Таким образом, количество солнечного тепла, падающее на единицу поверхности Земли, в теории с переменным  $G$  меняется, как  $G^9$ .

Геологические и палеонтологические данные решительно противоречат этому. Кроме того, непосредственные радиолокационные наблюдения движения планет Солнечной системы, проведен-

\*) Дирак (1937) в первой своей работе совершенно четко формулирует отказ от общей теории относительности. Но в таком случае за попытку объяснить «большие числа» приходится платить ценой отказа от ясной теоретической интерпретации принципа эквивалентности и от всех других достижений ОТО.

Радиоастрономы обещают в ближайшие несколько лет проверить непосредственно, изменяется ли  $G$  так, как это предсказывают Дирак, Дикке и др. В настоящее время нет реальных причин для сомнения в ортодоксальной ОТО. О последних результатах см. Шапиро (1972). Точность измерений еще недостаточна для категорических выводов.

\*\*) Примерный возраст Солнечной системы, возраст Земли.

ные Шапиро (1972), дают для верхнего возможного предела  $\dot{G} = (4 \pm 2) \cdot 10^{-11} \text{ лет}^{-1}$ .

Наконец, существует попытка прочесть формулу для  $H$  так: современная эпоха, жизнь, человек, цивилизация и сама возможность изучения природы и писания формул и книг (в том числе и данной) появляются лишь тогда, когда  $H$  падает до величины порядка  $g^{-1} m_p c^2 / \hbar$ . В горячей Вселенной образование галактик и звезд происходит лишь после рекомбинации протонов и электронов, т. е. после окончания радиационно-доминированной стадии. Действительно, этот момент (при  $\Omega=1$ ) соответствует космологическому времени  $t=5 \cdot 10^{12} \text{ сек}$ . Выраженный в темпонах возраст равен  $5 \cdot 10^{36}$ , что также еще не сильно отличается от  $g^{-1}$ , или  $g_p^{-1}$ , или от  $\frac{e^2}{G m_p^2} = 1,25 \cdot 10^{36}$ ; на это совпадение указал Гамов.

Такое утверждение вполне совместимо с обычной физикой, с законами природы, в которых  $G$ ,  $\hbar$ ,  $c$ , заряды и массы частиц являются константами. Соотношение (23.11.6) в действительности представляет собой утверждение, относящееся к удельной энтропии вещества, заполняющего горячую Вселенную. Но удельная энтропия есть локальная величина, ее можно определить и в открытом и в замкнутом мире (в отличие от общего числа барионов  $N$ ). Таким образом, соотношение (23.11.6) выгодно отличается от соотношения (23.11.5).

Численно соотношение (23.11.6) эквивалентно (разумеется, приближенно) соотношению  $s = \frac{n_\gamma}{n_B} = \left( \frac{G m^2}{\hbar c} \right)^{-1/4} = g^{-1/4}$ . Последнее

было получено Зельдовичем и Новиковым (19676) как вывод из схемы, предпосылки которой в настоящее время представляются маловероятными; однако как эмпирическая формула утверждение остается верным. В теории с космологической постоянной, отличной от нуля (гл. 4), можно предположить, не нарушая принципа постоянства констант, что  $\epsilon_\Lambda \approx \frac{m^2 G c^4}{\hbar^4}$ . В модели Леметра — Петросяна —

Солпитера — Шкловского — Кардашева (см. § 2 гл. 4) при  $\epsilon_\Lambda < 0$  получается период замедленного расширения. Возраст Вселенной в этот момент и характерное время последующего расширения удовлетворяют соотношению (23.11.6) [Зельдович (1968)]. Однако в последние годы не подтвердились те исходные наблюдательные данные (концентрация квазаров при  $z=1,95$ ), на которых основывались авторы, возрождавшие модель с задержкой расширения и  $\Lambda \neq 0$ .

Вернемся к многоликому принципу Маха.

Суть этого принципа состоит в следующем: инерция тела определяется его взаимодействием (гравитационно-инерционным) с другими телами Вселенной. Этот принцип сыграл большую эвристиче-

скую роль в создании Эйнштейном ОТО. Но после создания теории относительности выяснилось, что принцип Маха в ней не содержится! Рассмотрим вопрос несколько подробнее.

Что значит утверждение: инерция определяется взаимодействием с другими телами? Прямолинейный ответ на этот вопрос состоит в следующем: инертная масса тела, т. е. мера его сопротивляемости действующей силе, определяется его взаимодействием с другими телами. Если бы этих тел не было, то не было бы инертной массы у пробного тела. С другой стороны, «инерция тела должна возрастать по мере скопления весомых масс вблизи него» [Эйнштейн (1966)].

Оба последних утверждения не выполняются в теории относительности. Во-первых, в пустом пространстве справедлива СТО, где тела обладают инерцией, где во вращающейся системе есть силы Кориолиса и центробежные силы. Во-вторых, одна и та же сила, например сила сжатой пружины, всегда сообщает данному телу одинаковое ускорение, независимо от близости тяжелых масс или отсутствия их. Значит, инерция тела не возрастает «по мере скопления весомых масс вблизи него». Противоположное утверждение Эйнштейна связано с ошибочной интерпретацией полученной им формулы [на эту ошибку указывали Бранс (1962), Дикке (1962)]. С этой точки зрения, каждое подтверждение теории относительности есть удар по принципу Маха.

Иначе обстоит дело с некоторыми другими физическими идеями, которые иногда связывают с принципом Маха. Так, Эйнштейн [(1966)] пишет, что, с точки зрения Маха, следует ожидать, что «тело должно испытывать ускоряющую силу, когда близлежащие массы ускоряются; эта сила по направлению должна совпадать с направлением ускорения».

Вращающееся полое тело должно создавать внутри себя «кориолисово поле сил, стремящееся отклонить движущиеся тела в направлении вращения...».

Оба эффекта имеют место в ОТО (см. ТТ и ЭЗ). Но они не связаны с изменением инертных свойств тела, а описывают изменение инерциальной системы отсчета при движении тяготеющих масс. Иначе говоря, масса пробного тела остается неизменной, но инерциальная система отсчета будет разная в зависимости от наличия и движения окружающих тел. Принципиально эти эффекты, указанные Эйнштейном, того же характера, что и изменение инерциальной системы в присутствии неподвижной тяготеющей массы (скажем, вблизи невращающейся планеты). Инерциальная система свободно падает в поле тяготения массы, в то время как в отсутствие массы она совпадала с инерциальной системой на бесконечности. Очевидно, такое изменение инерциальной системы никак не связано с изменением инерциальных свойств тела, которые являются мерой сопротивляемости тела ускоряющим (негравитационным) силам.

Итак, принципа Маха в ОТО нет. Поэтому нельзя согласиться с теми, кто ОТО считает теорией, подтверждающей принцип Маха. Впрочем, поскольку уравнения ОТО считаются верными, спор становится схоластическим, любые предсказания об исходе того или иного реального или мысленного опыта не меняются от того, какие слова «приговаривают» авторы расчетов\*).

Другая точка зрения на принцип Маха более радикальна. Придерживающиеся ее авторы считают ОТО неверной или неполной именно потому, что в ОТО не учтено в явном виде (а не только через влияние на метрику) воздействие далеких масс на инерцию и тяготение. Эти авторы считают существование решения для пустого пространства (ср. выше) недостатком ОТО, который будущая теория сможет преодолеть.

Спор с будущей теорией всегда затруднителен, он подвергает испытанию чувство юмора и порядочность спорящих. Опасно оказаться в роли критика Латунского, выступающего со статьей «Ударим по пилатчине» и громящего ненапечатанный роман Мастера\*\*).

И все же не для нападения на нерожденные теории, а в защиту ОТО следует отметить факты, неблагоприятные для критиков ОТО.

ОТО не встречается ни с экспериментальными опровержениями, ни с логическими трудностями. Поэтому нет реальных объективных побудительных причин для замены ее «более маховской теорией».

Если же обратиться ко Вселенной, в которой мы живем, то в ней фактически далекие звезды и реликтовое излучение выделяют в каждой точке одну «покоящуюся» (в среднем относительно материи) систему координат. Не только вращение, но и поступательное движение относительно далеких звезд может быть обнаружено и измерено, хотя на локальные законы природы они и не влияют! В покоящейся системе мы во всех направлениях наблюдаем изотропное красное смещение света далеких галактик, температура радиопфона во всех направлениях равна  $2,7^\circ\text{K}$ . В равномерно поступательно движущейся системе в направлении движения мы наблюдали бы анизотропию красного смещения галактик, температура фона была бы выше  $2,7^\circ\text{K}$  (а в противоположном направлении — ниже).

Таким образом система, связанная с реликтовым излучением, с общей массой далекого вещества, действительно физически преимущественна и она инерциальна в каждой точке. Может быть, это как-то можно трактовать в духе подтверждения принципа Маха? Мы думаем, что этого делать нельзя. Прямолинейное применение принципа Маха в такой редакции ведет к следующему. Раз выделена преимущественная система, то даже движение по инерции по отношению к ней (а не обязательно с ускорением или вращением) должно вести к отличию в новой системе локальных

\*) М. Булгаков, Мастер и Маргарита.

\*\*) О принципе Маха см. также Уилер (1964), Мизнер, Торн, Уилер (1973).



физических законов от законов в системе преимущественной. Но этого нет — законы физики инвариантны относительно преобразований Лоренца, т. е. относительно перехода к движущейся системе. Таким образом, принцип Маха (если бы он оказался верным) должен был бы вернуть нас не только к Ньютону, но и, вероятно, к Аристотелю — во Вселенной можно было бы определить абсолютный покой. Если опыт показывает лоренц-инвариантность законов природы (а это так!), то он прямо указывает на независимость законов от влияния далеких тел. Тем самым подрывается привлекательность объяснения частной группы явлений влиянием далеких тел.

Резюмируя, мы не считаем вероятным радикальный пересмотр ОТО в направлении идей Маха. Проблему больших чисел мы считаем реальной лишь в формулировке, связывающей локальные свойства и не требующей переменности физических величин (констант). Теория Бранса — Дикке, в которой вводится специальное скалярное поле, осуществляющее воздействие далекого вещества, будет рассмотрена в § 15 этой главы.

## § 12. ОТО и структура (топология) мира как целого

Вопрос о структуре мира как целого является одной из важнейших проблем, лежащих на грани между естественными науками и философией. Этот вопрос получил новый смысл, новое содержание в начале века в связи с созданием теории относительности.

До этого считалось самоочевидным, что пространство является евклидовым трехмерным, а время является независимой переменной. Специальная теория относительности изменила это наивное (с сегодняшней точки зрения) убеждение, пространство и время оказались объединенными в единое 4-мерное многообразие. Конкретным выражением этого объединения явилось установление закона преобразования координат и времени при переходе к движущейся системе координат. Эти преобразования были найдены Пуанкаре из условия инвариантности уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Принято говорить о преобразованиях Лоренца, учитывая заслуги Лоренца в развитии теории электронов и электромагнетизма. Бессмертный вклад Эйнштейна, в силу которого именно он по справедливости является творцом теории относительности, заключается в осознании универсальности связи пространства и времени. Эйнштейн понял, что речь идет не о свойствах одного частного поля (электромагнитного), а об общих свойствах всей природы, всех частиц и полей. Не случайно, что только Эйнштейн, исходя из законов ОТО, высказал идею эквивалентности массы и энергии ( $E = mc^2$ ) и без колебаний применил это соотношение к атомным ядрам, несмотря на отсутствие конкретной теории ядерных сил.

Вернемся к вопросу о структуре мира. В этом частном вопросе создание специальной теории относительности дало удивительно мало! Возникло представление о 4-мерном псевдоевклидовом многообразии (пространство Минковского), в котором можно по-разному выбирать ось времени  $t$  и соответствующее ортогональное трехмерное многообразие — «пространство». Однако в этой картине по-прежнему не возникает сомнения в том, что время и каждая из трех пространственных декартовых координат в жесткой инерциальной системе отсчета могут изменяться от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Специфические свойства пространства Минковского (преобразований Лоренца) приводят к тому, что сохраняется понятие абсолютного прошлого и абсолютного будущего. Не возникает специально вопрос о топологии пространства-времени \*). До создания общей теории относительности проблема структуры Вселенной понималась как пространственное распределение и эволюция вещества и полей, наполняющих Вселенную. Структура самого пространства (и времени) казалась самоочевидной.

В схематическом изложении выше в этом параграфе мы не упоминали о высказываниях Лобачевского, Больяи, Римана, о неопубликованных идеях Гаусса; глубокие идеи творцов неевклидовой геометрии предвосхищали в этом вопросе ОТО, эти идеи будут обсуждаться ниже в рамках ОТО. Итак, именно ОТО поставила вопрос о структуре самого пространства и времени. Локально вопрос формулируется как вопрос о метрике и геометрии 4-мерного пространства-времени. Как обобщающий вывод из опыта принимается трехмерность пространства, псевдоевклидовость четырехмерия и его непрерывность (и дифференцируемость). Отсюда уже с логической неизбежностью вытекает специальная теория относительности для малых масштабов.

История науки показывает, что всякий переход к новой области исследования приводит к формулировке новых законов и, главное, новых понятий. Хрестоматийные примеры — большие скорости и СТО, малые (атомные) масштабы и квантовая механика. Переход к изучению больших масштабов привел как раз к созданию ОТО.

Здесь не место останавливаться на своеобразной промежуточной области — теории тяготения в узком смысле. При плотности вещества, реально существующей в природе, благодаря высокой чувствительности опыта гравитационные эффекты удастся наблюдать и в малых пространственных масштабах: так, например, в опытах Кавендиша в масштабах лаборатории наблюдаются эффекты взаимодействия, энергия которого составляет долю порядка  $10^{-25}$  от энергии покоя ( $mc^2$ ). В этой промежуточной области можно поль-

---

\*) Формально вопрос о топологии пространства можно поставить и в ньютоновской физике. Речь идет о специальных побудительных причинах постановки такого вопроса.

зоваться линеаризованной теорией тяготения, ОТО в полном объеме не необходима.

Средняя плотность вещества во Вселенной на 30 порядков меньше плотности свинцовых шаров, с которыми экспериментировал Кавендиш.

Однако обратимся к масштабу, в котором сейчас ведутся астрономические исследования. В этом масштабе (порядка  $10^{28}$  см) энергия гравитационного взаимодействия порядка энергии покоя. Соответственно порядка единицы искривление пространства-времени, предсказываемое ОТО.

Именно возможность большого искривления пространства-времени, т. е. существенного отклонения его глобальных свойств от евклидовых, естественно и неизбежно приводит к вопросу о топологии пространства-времени.

В частном случае однородной и изотропной модели мы уже столкнулись с этим вопросом: при плотности больше критической ( $\Omega > 1$ ) метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (23.12.1)$$

Безразмерной инвариантной мерой искривления является произведение кривизны  $a^{-2}$  (размерность  $\text{см}^{-2}$ ) и квадрата масштаба ( $\text{см}^2$ ). Ситуацию можно сформулировать так: локальные исследования обнаруживают ту систему отсчета, в которой наблюдатель покоится относительно окружающего его вещества и излучения \*). Эти же наблюдения показывают однородность Вселенной (независимость свойств относительно сдвигов в трехмерном пространстве) и изотропию ее (независимость свойств от поворотов в этом пространстве). Таким образом, «сопутствующее» пространство, в котором имеют место однородность и изотропия, определено реальными измерениями. Далее, измерения средней плотности вещества, гравитационных эффектов и, в принципе, также метрики в близкой к нам окрестности дают кривизну избранного трехмерия. Предположим здесь, что измерения дадут с определенностью  $\Omega > 1$ , хотя сегодня точность измерений недостаточна и  $\Omega < 1$  кажется даже более вероятным.

Вывод о том, что мир является замкнутым, получается при этом благодаря экстраполяции: свойства метрики в нашей окрестности нужно экстраполировать на далекие области, пользуясь локально установленной однородностью мира.

Локальные наблюдения плюс наблюдениями же установленная однородность привели к выводу, что в метрике, выписанной выше, коэффициент при угловой части ( $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ ) равен  $a^2(t) \sin^2 r$ . Но функция  $\sin r$  обращается в нуль при  $r = \pi$ , метрика непродолжи-

\*) Переход к движущейся системе (лоренц-преобразование) нарушил бы однородность и изотропию распределения вещества и потоков излучения.

ма при  $r > \pi$ . Соответственно следует, что полный объем  $V = 2\pi^2 a^3$ , а также вытекают все другие следствия, характерные для замкнутого мира (см. гл. 2).

Такова логическая цепочка, которая с необходимостью приводит к выводу о замкнутости мира при  $\Omega > 1$ .

Итак, есть случай, когда топология, отличная от евклидовой, необходима. Далее следует естественное обобщение: можно искать *возможные* топологические неевклидовы модели и в том случае, когда необходимыми они не являются.

Приведем простейший пример: пусть локальные исследования дают  $\Omega = 1$  и, соответственно, плоскую метрику трехмерия:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - b^2(t) [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \equiv \\ &\equiv dt^2 - b^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \end{aligned} \quad (23.12.2)$$

Эта метрика, очевидно, совместима с евклидовой топологией, в которой  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $-\infty < z < \infty$ .

Однако возможна (хотя и не необходима) топология замкнутого трехмерия. Для этого делают отождествление:

$$\left. \begin{aligned} x+k, y, z &\equiv x, y, z, \\ x, y+p, z &\equiv x, y, z, \\ x, y, z+n &\equiv x, y, z. \end{aligned} \right\} \quad (23.12.3)$$

В сопутствующем трехмерии выделяется параллелепипед периодичности с координатным объемом  $kpn$  (или  $b^3(t)kpn$  в физическом пространстве в данный момент  $t$ ). Этот случай называется «трехмерный тор».

Таким образом, можно предположить, что существует плоское замкнутое трехмерное пространство. Следует подчеркнуть, что при выполнении условий (23.12.3) мы имеем дело именно с замкнутым плоским пространством, а не с периодически повторяющейся структурой в неограниченном плоском пространстве. Это значит, что при выполнении (23.12.3) в мире существует ограниченное количество галактик, а не повторяющийся до бесконечности набор одинаковых совокупностей галактик. Мир (23.12.3) не имеет границ и разрывов. В этом случае наблюдения дают много изображений, «духов», соответствующих каждому объекту данного типа, который одновременно виден с разных сторон и в разные моменты времени за счет свойств распространения лучей (см. об этом ниже). В принципе ситуация не отличается от предсказаний теории сферического замкнутого мира — модели Леметра с космологической постоянной (см. гл. 4). Напомним, что специальные поиски совпадающих объектов в противоположных участках неба, предпринятые в связи с этой моделью, не привели к положительному результату.

Итак, выше необходимость рассмотрения топологии пространства-времени Вселенной обоснована с общих позиций истории и философии науки и проиллюстрирована простыми примерами. Количество различных топологических вариантов 4-мерного пространства-времени необычайно велико, и на первый взгляд в космологии открывается огромное количество возможностей. Мы отсылаем за подробностями к книгам Пенроуза (1968), Хоукинга, Эллис (1973). В действительности уже минимальная информация о фактических свойствах Вселенной сильно ограничивает безбрежный простор топологических структур. Но, что особенно важно, теория эволюции Вселенной оказывается почти не зависящей от топологии. Именно этим и объясняется сравнительно малое число работ по данному вопросу. Здесь отметим работы Шювегеша (1966), Паала (1971), Зельдовича и Новикова (1967б, в), Соколова и Шварцмана (1974), Соколова (1970), Соколова и Старобинского (1975).

Будем рассматривать пространственно-однородный мир, а затем слабовозмущенный пространственно-однородный мир.

Отметим прежде всего, что условие пространственной однородности выделяет параллельные трехмерные многообразия (пространства в разные моменты времени), на которых осуществляется однородность, и ортогональную к ним одну определенную ось времени (см. выше). По оси времени «отождествления» (такие, как описаны выше), вероятно, запрещены законами физики и исключаются. Этот запрет обосновывают обычно принципом причинности. Действительно, пусть на оси времени  $t_2 > t_1$ . После отождествления  $t_2 = t_1$  оказывается, что будущее и прошлое выделены только локально, а в целом, глобально, они перепутаны. Вмешательство в физические явления в момент  $t_2$  в точке  $x$  вызывает изменения в момент  $t_1$  в той же точке  $x$ , т. е. в прошлом.

На самом деле замкнутость линий времени может носить гораздо более «хитрый» характер, чем в рассмотренном простейшем примере. Могут, например, замыкаться не все линии времени, а только некоторые (при отсутствии однородности). Подробности см. в упомянутых выше книгах Пенроуза и Хоукинга и Эллис. Здесь же мы отметим, что соотношения между замкнутостью линий времени и принципом причинности отнюдь не столь тривиальны. По-видимому, из замкнутости линий времени вовсе не однозначно следует нарушение принципа причинности, ибо события на замкнутой линии времени уже «самосогласованы». Они все влияют друг на друга по замкнутому циклу, но это еще, по-видимому, не означает нарушения законов природы. Во всяком случае вопрос требует более тщательного изучения.

Однако при учете однородности по пространству и необратимости эволюции можно, вероятно, запретить любое отождествление по времени. С течением времени монотонно растет удельная энтропия (на один барион или на единицу сопутствующего пространства).

Моноotonно убывает в результате ядерных реакций доля протонов в среднем составе Вселенной. Уже по этим причинам ситуация в более поздний момент  $t_2$  не тождественна ситуации в момент  $t_1$ .

Став на эту точку зрения, мы должны заключить, что применительно к оси времени остается лишь вопрос о том, простирается ли шкала: 1) от  $-\infty$  до  $+\infty$ , или 2) от  $t_1$  до  $+\infty$ , или 3) от  $-\infty$  до  $t_1$ , или 4) от  $t_1$  до  $t_2$ . Для однородных моделей ответ на этот вопрос получается путем интегрирования уравнений эволюции. В принципе здесь нет произвола. Хотя в настоящее время наблюдательные данные и отвергают варианты 1) и 3), но не позволяют выбрать между вариантами 2) и 4). Здесь под «началом» и «концом» шкалы времени подразумеваются сингулярные состояния \*). Итак, вопрос о топологии мира сузился до топологии трехмерного пространства.

При этом все еще остается значительное число разных топологических вариантов: существуют [Ефимов (1961), Волф (1967), Шювегеш (1966)] 18 топологических вариантов плоского трехмерия и бесконечное число (!) вариантов гиперболического изотропного трехмерия постоянной отрицательной кривизны.

Анизотропия мира — при сохранении однородности — дополнительно ограничивает число возможных топологических вариантов. Этот вывод наглядно очевиден: при всяком отождествлении двух поверхностей или (что практически то же самое) при обходе по каждому циклу, характеризующему топологический вариант, в изотропной модели достаточно тождества скалярных величин, а это тождество обеспечивается условием однородности\*\*). В анизотропном мире после обхода нужно вернуться в исходную точку с теми же значениями векторных и тензорных величин, с теми же направлениями скорости вещества, главных осей деформации и главных осей тензора кривизны пространства.

Количество остающихся топологических вариантов при этом зависит от типа трехмерия поверхности (в смысле классификации Бианки). В плоском случае всегда остается в силе возможность перехода к топологии цилиндра или тора, что соответствует периодическому условию отождествления. Решения Фридмана допускают максимальное количество топологических вариантов.

---

\*) Еще раз напомним (см. введение к книге): вопрос о том, что было «до» сингулярности в начале расширения или что будет «после» сингулярности, следующей за сжатием [вариант 4)], не может пока быть решен в рамках существующих физических теорий. В сингулярности возникают квантовые эффекты тяготения, вероятно, перестают быть применимыми понятия непрерывного метрического пространства-времени, возможно, лишаются смысла или изменяются понятия «до» и «после» и т. д. Исследование всего этого — дело будущего.

\*\*) Как известно, законы физики не инвариантны относительно зеркального отражения трехмерного пространства. Поэтому нужно различать скаляры и псевдоскаляры. Обход по циклу не должен превращать правую систему в левую. Это условие устраняет часть топологических вариантов [см. Шювегеш (1966), Зельдович, Новиков (1967б, в), Соколов (1970)].

Обратимся к задаче об эволюции. Важнейшие факты заключаются в том, что в однородной космологии: 1) топология не меняется в ходе эволюции; 2) уравнения эволюции для локальных величин не зависят от топологического варианта. Напомним, что все локальные свойства в такой космологии можно выразить через значения физических величин (тензора плотности энергии-импульса вещества, полей) и геометрических величин (структурных констант в случае анизотропной космологии и параметров, характеризующих абсолютное значение искривления пространства).

Следовательно, анализ протекания ядерных реакций и многих аналогичных процессов в однородной Вселенной — или, точнее, во всех топологических вариантах модели однородной Вселенной — оказывается строго независимым от топологических свойств модели. Топология модели существенно влияет, однако, на решение более общей неоднородной задачи.

Это влияние можно описывать по-разному, на разных языках. Вспомним, что в теории «перемешанного» мира ставилась задача о возможности обмена информацией между различными частями Вселенной (§§ 4, 5 гл. 21). Очевидно, что отождествления типа  $x \equiv x + k$  в плоском мире приводят (при достаточно малом  $k$ ) к возможности полного обмена информацией. Топологический вариант с отождествлением уменьшает размер Вселенной, «перемешивание» становится возможным в локально-фридмановском мире. Здесь становится существенным абсолютное значение длины отождествления и конкретный характер тех неоднородностей, которые предстоит сгладить. Подробное обсуждение сейчас преждевременно. Топология существенно влияет на глобальное распространение сигналов, на глобальные свойства нулевых геодезических (лучей света) или пучков частиц. Появление «духов» — многократных изображений данного объекта — является примером влияния топологии на распространение света.

Возможен другой подход к влиянию топологии на эволюцию неоднородной Вселенной. Рассмотрим теорию малых возмущений. Малые возмущения могут быть разложены по собственным функциям. Набор собственных функций, их спектр, радикально зависит от топологии пространства.

Обратимся снова к элементарному примеру плоского пространства. В евклидовой топологии спектр непрерывен, собственные функции суть  $e^{ikx}$ , допустимы любое значение волнового вектора  $k$ , любая длина волны  $\lambda$ , вплоть до  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $|k| \rightarrow 0$ .

Однако в пространстве с отождествлением типа тора возмущение также подчиняется условию отождествления. Это значит, что волновой вектор должен иметь компоненты, кратные обратным длинам отождествления. Возмущения разлагаются в ряд Фурье с дискретным спектром вместо интеграла Фурье и сплошного спектра в случае бесконечного евклидова пространства.

В случаях пространств с отличной от нуля кривизной и более сложной топологией качественно результат тот же — структура спектра зависит от топологии, — но вид собственных функций сложнее, чем в простейших случаях. В качестве примера вспомним классическую работу Лифшица (1946), при рассмотрении возмущений в закрытой модели был получен дискретный спектр и найдена система собственных функций (см. § 7 гл. 11).

Рассмотрим теперь вместо сферической модели Вселенной так называемую эллиптическую модель. Эта модель получается, если в трехмерной сфере (в пространстве сферической модели) отождествить диаметрально противоположные точки. В этом случае «выживает» только половина собственных функций замкнутого мира сферической модели.

Известно, что амплитуда возмущения большой длины волны мала. Этот факт установлен наблюдателями на основании малости флуктуаций реликтового излучения. Почему длинноволновые возмущения малы? Убедительного ответа пока нет. Нельзя ли малость этих возмущений поставить в связь с топологией, с тем, что в моделях с близкими отождествлениями в принципе нет длинных волн? Эта возможность заслуживает анализа. Но мы думаем, что такой вывод был бы неправилен, он не проходит количественно.

Наблюдаются неоднородности — скопления масштабом не более 40 *Мпс* (по сегодняшнему масштабу), в большем масштабе уже весьма заметен спад амплитуды неоднородностей. Для указанной выше возможности объяснения этого спада топологическими свойствами мира пришлось бы брать масштаб отождествления того же порядка. Но считать, что Вселенная имеет масштаб всего в сотню *Мпс*, казалось невозможно.

Однако в недавней работе Соколова и Шварцмана (1974) утверждается, что наблюдательные данные не исключают топологической структуры такого типа, что элементарная повторяющаяся ячейка имеет линейный размер (в настоящее время) порядка 400 *Мпс* для шкалы расстояний, соответствующей  $H=75$  км/сек·*Мпс*. Указанный размер соответствует красному смещению  $z=0,1$ . Если всерьез признать такое сокращение размеров Вселенной, то крупномасштабная изотропия реликтового излучения получит новое, неожиданное объяснение.

Впрочем, утверждения Соколова и Шварцмана скорее нужно рассматривать как призыв к проведению наблюдений, специально ориентированных на доказательство того, что Вселенная не мала. Формально это не доказано в настоящее время, но может быть доказано, если привлечь данные по радиоисточникам, которые, по оценке, видны вплоть до  $z \approx 3-4$ . Время активной жизни радиоисточников может быть невелико; это затрудняет обработку наблюдений, уменьшает число объектов, которые можно одновременно зарегистрировать с помощью лучей, приходящих по разным путям.



Может быть, более надежны будут данные по далеким скоплениям галактик. Подробнее о предлагаемых наблюдениях см. работы Соколова и Шварцмана (1974), Соколова и Старобинского (1975).

Невозможно и ненаучно определять «вероятность» того, что мир топологически сложен. Организация тщательных наблюдений для выяснения вопроса весьма желательна: строгое экспериментальное установление нетривиальности топологической структуры Вселенной имело бы огромное значение.

### § 13. Локальная топология, «белые дыры» и космология

Возможность необычных топологических структур в ОТО использовалась рядом авторов для объяснения астрономических явлений. Еще в 1928 г. Джинс писал в связи с вопросом о спиральных ветвях галактик: «Настойчиво заявляет о себе предположение, что центры туманностей имеют природу точек сингулярности, в которых в нашу Вселенную вливается вещество из каких-то других, совершенно неизвестных нам пространственных измерений и которые проявляют себя в нашей Вселенной как точки, где происходит непрерывное образование вещества».

Еще большее искушение — использовать втекание материи и энергии из «других измерений» для объяснения активности ядер галактик и квазаров. Нельзя ли это втекание использовать в теории стационарной Вселенной? Выясним, какие ограничения накладывают ОТО.

Окружим трехмерную область, в которой находится локальная сингулярность, далекой двумерной замкнутой поверхностью \*), лежащей в области, где гравитационное поле уже слабо. Изучая метрику пространства вне этой поверхности, можно определить общую массу, находящуюся внутри (а также вращательный момент), а измеряя электрическое поле, — полный заряд.

Уравнения ОТО, написанные для наружной, не сингулярной области, приводят к законам сохранения: масса, находящаяся внутри области, меняется лишь тогда, когда через поверхность втекает или вытекает вещество или энергия, в том числе и энергия гравитационных волн. Значит, независимо от самых фантастических предположений о сингулярности внутри поверхности, можно заранее сказать, сколько массы и энергии можно получить из внутренней области \*\*).

Таким образом, наглядная картина Джинса — отверстие в «другой мир», откуда в любом количестве может поступать энергия, — оказывается несовместимой с ОТО. Тем самым отпадает возможность

\*) Например, это может быть сферическая поверхность  $r = \text{const.}$

\*\*) Необходимы две оговорки: 1) мы считаем справедливой ОТО; 2) не существуют отрицательные массы, области с отрицательной плотностью энергии.

переформулировать теорию стационарной Вселенной, заменяя втеканьем рождение вещества из  $S$ -поля.

Обсудим гипотезу «белых дыр»; в настоящее время это название употребляется вместо длинного названия «задержавшиеся в космологическом расширении ядра...» [Новиков (1964в)].

«Белая дыра» представляет собой гипотетическое тело, которое расширяется от сингулярности из-под своего гравитационного радиуса. Новиковым (1964в), а затем позже Неemanом (1965) была показана возможность существования таких тел (в рамках классической общей теории относительности, без учета квантовых эффектов) в расширяющейся Вселенной. Согласно этой гипотезе, белые дыры представляют собой задержавшиеся в космологическом расширении (из-за локальной неоднородности начальных условий) ядра вещества фридмановской космологической модели. Задержка расширения по времени внешнего наблюдателя может быть задана произвольно. Величина задержки, состав и кинетическая энергия вылетающего вещества задаются как начальные условия в сингулярности (сколь угодно близко к сингулярности). Задержавшееся ядро окружено полостью пониженной плотности (вакуолью) или в предельном случае — вакуумом.

Гипотезу «белых дыр» заманчиво (но не необходимо!) сопоставить с целым рядом не вполне еще выясненных астрофизических явлений, в частности с квазарами и взрывами ядер галактик.

Идея белой дыры отличается от идеи Джинса. Рассматривается одно пространство с односвязной топологией. Учитывается, что Вселенная в целом эволюционирует, расширяется, расширение начинается от сингулярности.

Внутри белой дыры в вакууме (вакуоли) сингулярность в простейшем сферически-симметричном случае шварцшильдовская, вне ее — фридмановская.

Сингулярность всюду — и вне белой дыры и внутри ее — пространственноподобна, т. е. существует система отсчета, в которой эта сингулярность одновременна. Однако из-за неоднородности сингулярности происходит задержка (по часам внешнего наблюдателя) расширения части вещества, и эта часть расширяется позднее для внешнего наблюдателя. При этом в зависимости от выбора длины шварцшильдовской сингулярности между задержавшимся веществом и внешним веществом задержка для внешнего наблюдателя может быть произвольно долгой.

Для вещества с нулевым давлением ( $P=0$ ) [Новиков (1964в)] построено точное решение в случае, когда в однородной изотропной Вселенной некоторая сферическая масса  $M$  заменяется «белой дырой» той же массы. В этом случае во внешней области сохраняется невозмущенное космологическое решение.

Если задержавшееся вещество имеет давление  $P \neq 0$ , в частности  $P = \epsilon/3$ , то при рассмотрении внутренней области вакуоли возник-

кают математические трудности, которые, однако, не являются принципиальными, не вызывают сомнений в существовании решения типа «белой дыры». Однако если во всей окружающей Вселенной  $P \neq 0$ , то внешнее решение возмущается. Действительно, без «белой дыры» в однородной Вселенной с  $P \neq 0$  масса внутри выделенного сопутствующего объема уменьшалась из-за адиабатического уменьшения энергии с расширением (см. гл. 1). В случае белой дыры центральное ядро не расширяется, масса его для внешнего наблюдателя не уменьшается. Кроме того, в решении есть разрыв давления на границе между невозмущенной Вселенной и вакуумным решением Шварцшильда. Разрыв давления приводит к истечению плазмы снаружи во внутреннюю область. «Белая дыра» вызывает аккрецию плазмы при любом соотношении между собственной массой дыры и массой, «вырванной» из космологического решения.

До сих пор существуют лишь грубые оценки эффекта, но полная картина явления не построена. Остается невыясненным, можно ли при учете аккреции использовать гипотезу «белой дыры» для объяснения астрофизических явлений.

Однако, помимо вопросов аккреции, существует другая сторона вопроса, связанная, во-первых, с тем, что в белой дыре в вакуоли вблизи шварцшильдовской особенности имеется весьма сильное анизотропное расширение пространства в отличие от изотропного расширения вне «белой дыры» в изотропной Вселенной; и, во-вторых, связанная с тем, что в гипотезе «белой дыры» далекий наблюдатель в течение всего времени задержки «видит» шварцшильдовскую сингулярность. В «белой дыре» под гравитационным радиусом  $r_g$  расположена так называемая  $T_+$ -область (см. ТТ и ЭЗ), в которой все частицы двигаются только от сингулярности к  $r_g$  и могут выходить из-под  $r_g$  к внешнему наблюдателю.

Первое обстоятельство — анизотропное расширение вблизи сингулярности — ведет, как показано в §§ 5 и 6 этой главы, к интенсивному спонтанному рождению частиц. Второе обстоятельство — то, что это происходит в расширяющейся  $T_+$ -области, — создает возможность выброса родившихся частиц из-под  $r_g$  к внешнему наблюдателю и, следовательно, может привести к спонтанному уменьшению массы «белой дыры». В действительности, как показано в работе Зельдовича, Новикова, Старобинского (1974), родившиеся частицы очень сильно меняют метрику пространства-времени под  $r_g$ . В результате в реальном случае горячей Вселенной родившиеся частицы оказываются «запертыми» в «белой дыре». Сначала, на самых ранних этапах расширения Вселенной, при  $t \ll r_g/c$ , частицы не выходят из-под  $r_g$  из-за давления окружающего газа горячей Вселенной, а позже, при  $t$  порядка  $r_g/c$  и  $t > r_g/c$ , из-за гравитационного самозамыкания — тяготение родившихся частиц не выпускает их наружу из-под  $r_g$ . На этапе  $t \ll r_g/c$  масса «белой дыры» уменьшается из-за того же эффекта адиабатического уменьшения

энергии, который имеет место для любого сопутствующего объема горячей Вселенной. На более позднем этапе «белая дыра» из-за истечения родившихся частиц может потерять лишь небольшую долю массы. Численные оценки см. в упомянутой выше работе Зельдовича, Новикова, Старобинского (1974).

Но весьма существенно, что все изменения, связанные с родившимися частицами, приводят к тому, что они препятствуют взрыву задержавшегося ядра, если задержка много больше  $r_g/c$ . «Белая дыра» либо взрывается практически сразу при  $t < r_g/c$ , либо не взрывается никогда (за исключением крайне вырожденных начальных условий).

Итак, основной вывод заключается в том, что в горячей Вселенной «белая дыра» представляет собой массу родившихся вблизи шварцшильдовской сингулярности частиц. Вещество, состоящее из этих частиц, расширяется, и для далекого наблюдателя внешняя граница вещества асимптотически изнутри приближается к  $r_g$ .

Для времени  $t \gg r_g/c$  какое-либо излучение или истечение вещества из «белой дыры» экспоненциально быстро затухает (несмотря на то, что приближение вещества к  $r_g$  идет с расширением!).

Таким образом, хотя «белая дыра» может существовать неограниченно долго, но для внешнего наблюдателя она приобретает черты «черной дыры» — происходит застывание процессов, стремление границы вещества к  $r_g$ . Однако качественным отличием является то, что этот объект возникает как результат взрыва (квантового) изнутри — от сингулярности к  $r_g$ , а не в результате гравитационного коллапса — падения к  $r_g$  первоначально разреженной материи.

Переходя от физической природы «белых дыр» к собственно космологии, отметим следующее.

В книгах Зельдовича и Новикова (1967б, 1971) показано, что если «белые дыры» и существуют, то в начале космологического расширения доля массы, заключенная в «белые дыры», составляла ничтожную долю массы всей материи. Действительно, в начале расширения вещество представляет собой ультрарелятивистский газ с  $P = \epsilon/3$ . В ходе расширения масса этого газа в любом выделенном сопутствующем объеме уменьшается из-за адиабатического охлаждения. Масса же, заключенная в «белых дырах», не уменьшается после их обособления (после момента  $t \approx \left(\frac{r_g}{c}\right)^*$ ). Чтобы к настоящему моменту суммарная масса, заключенная в «белых дырах», не была слишком велика и не влияла очень существенно на время расширения Вселенной, необходимо, чтобы в начале расширения доля массы в «белых дырах» была достаточно мала. В упомянутых выше работах показано, что эта доля  $\alpha$  (зависящая от момента времени) должна быть на ранний момент не более, чем  $\alpha < \frac{10^6}{z}$ ,  $z \gg 10^3$ .

\*) Считаем, что «белые дыры» не обладают релятивистскими скоростями peculiarного движения.

К моменту  $t$ , соответствующему  $r_g/c$ , для массы порядка  $10^9 M_\odot$  (порядка массы квазара), т. е. для  $t \approx 10^4$  сек, получаем,  $\alpha < 10^3$ .

В заключение подчеркнем, что в этом параграфе речь шла о гипотетических объектах. На существование таких объектов во Вселенной пока нет никаких серьезных указаний. Детальная теория показывает, что свойства «белых дыр» сложнее, чем ранее предполагалось; квазары и взрывы ядер галактик нуждаются в другом объяснении.

Вернемся к вопросу о локальной топологии. На уровне самых малых масштабов — в масштабе планковской длины  $l_{пл} = 10^{-33}$  см — можно ожидать больших флуктуаций метрики и сложной топологии. Выдвигается гипотеза Уилера (1960) о структуре пространства, напоминающей пенопласт, с неисчислимым количеством топологических ручек, связывающих разные близкие области, и т. п. Для таких масштабов что-либо утверждать и что-либо опровергать трудно. Однако мы твердо знаем, что макроскопически усредненная плотность энергии и все компоненты  $T_{ik}$  этой структуры равны нулю или ничтожно малы, если  $\Lambda \neq 0$ . Вводя «идею пенопласта», нужно одновременно вводить такие методы перенормировки, которые обеспечивают этот макроскопический результат. К этому нас обязывает наблюдение, опыт — высший критерий истины.

## § 14. Статистическая физика и тяготение

Статистическая физика систем, в которых тяготение играет существенную роль, имеет нетривиальные, необычные особенности. В прошлом, без должного учета этих особенностей, поверхностное применение термодинамики (т. е., по существу, статистики) в космологии приводило к совершенно неправильным выводам. Так, в частности, возникла пресловутая проблема «тепловой смерти Вселенной» и, как следствие неправильных предпосылок, — флуктуационная теория \*) нарушения термодинамики в космологическом масштабе.

Для понимания особенностей задачи рассмотрим основную величину — статистический интеграл  $Z = \int e^{-E/kT} dp dx$ , взятый по всему фазовому объему системы\*\*). Энергия системы представляет собой сумму кинетической энергии частиц и энергии их взаимодействий, в частности гравитационного взаимодействия.

\*) Не смешивать с флуктуационной теорией возникновения неоднородностей (см. раздел III).

\*\*) Через  $Z$ , как известно, выражается свободная энергия системы  $F = -kT \ln Z$ . Легко выразить с помощью  $Z$  и все другие величины: энергию  $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$  и т. д.

В классической теории интеграл разбивается на произведение двух интегралов — по импульсам и по координатам. Итак, мы должны рассматривать  $\int e^{-U(x)/kT} dx$ , где  $U(x)$  есть потенциальная энергия гравитационного взаимодействия;  $x$  есть символическое обозначение всех координат всех частиц, составляющих систему. В ньютоновской теории

$$U(x) = -G \sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}}.$$

С таким выражением потенциальной энергии  $U$  интеграл расходится. Интеграл расходится при  $r \rightarrow \infty$ , когда  $U \rightarrow 0$  в том случае, если бесконечен объем интегрирования, приходящийся на одну частицу \*). Это свойство является общим для тяготения и для всех других потенциалов. Расходимость при больших  $r$  существенна при рассмотрении системы конечного числа частиц в бесконечном пространстве, например скопления звезд [см. Зельдович, Новиков (1967)]. Однако это свойство интеграла с гравитационной энергией не отличается от свойств других типов взаимодействия, например электромагнитного или ядерных сил.

Существенно, что статистический интеграл с гравитационным взаимодействием расходится и при малом  $r \rightarrow 0$ . Экспонента растет при  $r \rightarrow 0$  быстрее, чем убывает объем ( $r^3$ ).

Кулоновское электромагнитное взаимодействие двух разноименных зарядов обладает тем же свойством. Однако квантовые эффекты ограничивают снизу то минимальное расстояние, на которое электрон может приблизиться к ядру. В системе из большого числа заряженных частиц притяжение разноименных зарядов компенсируется отталкиванием одноименных. Поэтому кулоновские силы обуславливают образование атомов, жидкости, кристаллов, но не приводят к более сильным катастрофическим эффектам.

Между тем силы тяготения, ничтожно малые на атомном уровне, возрастают с увеличением числа частиц.

В макроскопических, астрономических масштабах силы тяготения и расходимость статистического интеграла при малых расстояниях, т. е. при больших плотностях, играют решающую роль.

При рассмотрении невзаимодействующих частиц статистическая физика приводит к выводу, что наиболее вероятным является равномерное распределение частиц в пространстве.

На несколько более ученом языке можно сказать, что энтропия максимальна для равномерного однородного распределения вещества, к тому же с постоянной температурой. Учет короткодействующих сил может привести к разделению вещества на отдельные фазы (кристаллические фазы, жидкости, одна газовая фаза) при низкой

\*) Само по себе рассмотрение бесконечного объема и бесконечного числа частиц при конечной их плотности не создает трудностей.

температуре, т. е. при малой удельной энтропии. Однако в астрономических условиях эти силы играют малую роль. Не учитывая их, мы возвращаемся к тому, что без тяготения равновесное состояние было бы однородным и изотропным. В этом равновесном состоянии невозможно, по второму началу термодинамики, возникновение макроскопического движения, магнитных полей, какой бы то ни было организованной структуры.

Наблюдаемое в настоящее время состояние характеризуется резкой неоднородностью плотности и температуры (существуют планеты, звезды, галактики), макроскопическими движениями и магнитными полями.

Из противопоставления наблюдаемого и равновесного состояний возникают вопросы:

1) Применительно к будущему — должна ли Вселенная перейти в однородное изотермическое равновесное состояние («тепловая смерть»)?

2) Применительно к прошлому — если когда-то Вселенная была в однородном изотермическом равновесном состоянии, то как возникло сегодняшнее наблюдаемое явно неравновесное состояние? Не следует ли приписать его появление гигантской флуктуации, нарушению термодинамики?

Ошибка в постановке этих вопросов заключается в том, что (молчаливо) в рассмотрении не учитывалась гравитация. С учетом гравитации однородное распределение вовсе не соответствует максимуму энтропии.

Соберем вещество в отдельные сгустки звезды или галактики. При сохранении полной энергии произойдет выделение гравитационной энергии и повышение температуры. Вероятность состояния есть произведение вероятности пространственного распределения частиц на вероятность того, что частицы имеют данные скорости, данную кинетическую энергию. При собирании вещества в сгустки «пространственная» вероятность уменьшается, но зато растет «скоростная» вероятность, так что общее произведение растет. Образование звезд и галактик из равномерно распределенного вещества происходит с ростом энтропии, является естественным процессом, не требует нарушения термодинамики.

Направление эволюции звезд, галактик, всей Вселенной подробно обсуждается во многих разделах книги, и здесь неуместно было бы повторяться.

Во всяком случае, современный читатель должен ясно понимать, что энтропия растет и в то же время эволюция в будущем, с учетом тяготения, отнюдь не ведет к однородному, «серому» изотермическому состоянию \*).

---

\*) Вопросы термодинамики Вселенной затрагиваются также в §§ 17, 20 этой главы.

### § 15. Теория тяготения Бранса — Дикке и ее космологические следствия\*)

Указанная в заглавии теория, именуемая далее кратко ТБД [см. Бранс, Дикке (1961); Дикке (1962, 1964, 1968)], тесно связана с принципом Маха. В этой теории, так же как и в ОТО, рассматривается неевклидово, искривленное 4-мерное многообразие — пространство-время.

В этом многообразии, наряду с известными частицами и полями, рассматривается еще гипотетическое «ранее неизвестное»\*\*) скалярное безмассовое поле, так называемое  $\phi$ -поле. Авторы вводят его необычным способом, поэтому в теории тяготения и в космологии  $\phi$ -поле играет роль, существенно отличающуюся от роли других полей например скалярного поля нейтральных пионов.

В первоначальной формулировке ТБД в действии  $\int R dV$  скаляр кривизны  $R$  умножается на функцию  $\phi$ .

Таким образом, полное действие ТБД состоит из трех членов:

$$S = \int \left[ \frac{c^3}{16\pi G_0} (-\phi R + \mathcal{L}_\phi) + \frac{1}{c} \mathcal{L}_m \right] dV, \quad (23.15.1)$$

где  $V$  — четырехмерный объем,  $dV = \sqrt{-g} d^4x^i$ ,  $\mathcal{L}_m$  — лагранжиан известных частиц и полей,  $\mathcal{L}_\phi$  — лагранжиан  $\phi$ -поля, также имеющий не вполне обычный вид:

$$\mathcal{L}_\phi = \omega \frac{\phi, i \phi^{, i}}{\phi}, \quad (23.15.2)$$

где запятая означает ковариантное дифференцирование, а  $\omega$  есть безразмерный численный параметр. Специфика ТБД заключена в том, как написан первый член.

Идеи, связанные с такой записью, заключаются в том, что при  $\phi=0$  теперь нет теории тяготения, так как исчезает член, описывающий упругость пространства (исчезает  $R$ ). С другой стороны, поле  $\phi$  оказывается зависящим от распределения материи во всем пространстве. Таким образом, в ТБД, в соответствии с идеями Маха, лишь при наличии (обычной) материи оказывается возможным найти метрику и определить локально инерциальную систему координат. На протяжении данного параграфа много раз будут употребляться выражения типа «удается», «оказывается», «соответствует»; надо сразу же сказать, что эти выражения не означают, что ТБД правильна и адекватно описывает природу. «Соответствие» принципу Маха, с точки зрения авторов ТБД, является достоинством теории. Но принцип Маха не доказан (см. § 11) и «соответствие»

\*) При написании данного параграфа большую помощь оказали Л. Э. Гуревич и А. М. Финкельштейн, за что мы им искренне благодарны.

\*\*) Здесь пародируется терминология патентов; однако в данном случае существование поля, «неизвестного ранее», остается недоказанным и поныне.



ему не есть доказательство правильности ТБД. То же относится и к другим свойствам ТБД.

Дифференциальные уравнения ТБД получаются, естественно, варьированием приведенного выше действия. Варьирование метрики приводит к уравнениям, похожим на уравнения стандартной ОТО. Скалярное поле также дает обычный вклад в тензор энергии-импульса  $T_{ik(\varphi)}$  наряду с тензором обычной материи  $T_{ik(m)}$ . Но эффективная гравитационная «постоянная» не является больше универсальной константой, на ее место входит  $\frac{\text{const}}{\varphi}$ , причем  $\varphi$  есть функция точки! Итак, имеем

$$\frac{\varphi c^4}{8\pi G_0} \left( R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) = T_{ik(m)} + T_{ik(\varphi)}.$$

Варьируя действие по  $\varphi$ , получим уравнение

$$2\omega\varphi^{-1} \square\varphi - \frac{\omega}{\varphi^2} (\varphi^i \varphi_{,i}) + R = 0. \quad (23.15.3)$$

Но так как  $R$ , в свою очередь, выражается через  $T_{(m)}$  и  $T_{(\varphi)}$ , то уравнение можно переписать так, чтобы выявить роль материи как источника поля:

$$\square\varphi = \frac{8\pi G_0}{(3+2\omega)c^4} T. \quad (23.15.4)$$

В правую часть последнего уравнения входит скаляр  $T$  — след тензора энергии-импульса, т. е. плотность энергии, точнее,  $(\rho c^2)$  для «пыли» (при  $P=0$ ) или  $(\varepsilon - 3P)$  для жидкости. Любопытно, что для ультрарелятивистского газа  $T \equiv 0$  и, следовательно,  $\square\varphi = 0$ . Все операции (дифференцирование,  $\square$ ) производятся, как уже говорилось, в неевклидовом пространстве-времени.

В ТТ и ЭЗ рассматривались разные варианты теории тяготения в плоском пространстве-времени: тензорный, векторный и скалярный. Скалярный вариант связывался с именами Бранса и Дикке (ТТ и ЭЗ, стр. 104). Более точно, следует сказать, что в ТБД роль скалярной функции сложнее, функция  $\varphi$  не является аналогом скалярного ньютоновского потенциала. ТБД содержит безразмерный свободный параметр  $\omega$ . Наблюдаемые выводы зависят от избранного значения  $\omega$ . При этом  $\omega = \infty$  соответствует стандартной ОТО.

Итак, характерной особенностью ТБД является тот факт, что гравитационная «постоянная» оказывается функцией точки,  $G \sim [\varphi(x, y, z, t)]^{-1}$ , и функция эта подчиняется определенным уравнениям, в которых в роли источника выступает материя. Безразмерные величины  $\frac{Gm^2}{e^2}$ ,  $\frac{Gm^2}{\hbar c}$ , где  $m, e$  — масса и заряд элементарных частиц, не являются постоянными. Вся остальная «физика», характеризующаяся числами  $\frac{e^2}{\hbar c}$ ,  $\frac{m_p}{m_e}$ , одинакова во всем пространстве и всег-

да. ТБД напоминает теории Иордана (1948, 1955) и Дирака (1938), в которых  $G$  также не является постоянной. Выгодным отличием ТБД (в связи с которым мы подробнее останавливаемся именно на этой теории) является то, что в ТБД не предполагается изменение числа частиц, ТБД не вступает в противоречие с законами лабораторной физики.

Как показал Дикке (1962), возможна и другая, эквивалентная формулировка теории, в которой поле  $\varphi$  прямо взаимодействует со скаляром  $T$  вещества, гравитационная постоянная (без кавычек) постоянна, но зато эффективные массы  $\bar{m}$  всех частиц зависят от  $\varphi$  и, следовательно, не постоянны. Не постоянна и локально наблюдаемая величина  $\frac{Gm^2}{\hbar c}$ , как и раньше, в первом варианте ТБД (см. выше).

На первый взгляд такой вариант теории ближе к привычным уравнениям, результаты легче поддаются интерпретации. Однако в действительности, если масса элементарных частиц переменна, то, следовательно, атомные часы идут непостоянным темпом, атомная единица времени и атомная единица длины зависят от локального мгновенного значения скалярного поля  $\varphi$ . Время и длина, измеренные атомными стандартами, не совпадают с тем временем и длиной, которые входят в определение метрики  $ds^2 = dt^2 - dl^2$  (после локального приведения к форме Минковского). Таким образом, в интерпретации любого эксперимента возникают осложнения. По этой причине будем придерживаться ниже первого варианта теории, в котором  $\varphi$ -поле взаимодействует непосредственно с кривизной  $R$ , но не с материей, так что гравитационная «постоянная»  $G$  не постоянна ( $G \sim \varphi^{-1}$ ), но зато постоянны массы. Для того чтобы определить  $\varphi$ , нужно не только уравнение и задание источников, но нужны и начальные и граничные условия. Далекие источники влияют на  $\varphi$  в данной точке с коэффициентом, обратно пропорциональным расстоянию  $r$ , число таких источников возрастает с расстоянием пропорционально  $r^2 dr$ . Поэтому в первом приближении поле  $\varphi$  определяется далекими источниками и можно считать его постоянным, не зависящим от пространственных координат (даже в Галактике, или в Солнечной системе, или на Земле, несмотря на гигантские отличия плотности от среднего космологического значения \*). В случае простейшего космологического решения (однородная и изотропная модель, «пыль»,  $P=0$ , плоский мир,  $\varphi=0$  при  $t=0$ )

---

\*) Заметные отличия  $\varphi$  от среднего появляются лишь там, где гравитационный потенциал изолированной массы становится порядка  $c^2$  ( $c$  — скорость света). Поэтому ТБД вносит количественные изменения в теорию нейтронных звезд и особенно существенно (качественно) изменяет теорию коллапса и «черных дыр» [Бранс (1962), Нариан (1969а, б)]; однако этот вопрос выходит за рамки данной книги.

получается

$$\varphi \sim t^r, \quad a \sim t^q, \quad r = \frac{2}{4+3\omega}, \quad q = \frac{2+2\omega}{4+3\omega}. \quad (23.15.5)$$

При  $\omega \rightarrow \infty$  это решение содержит стандартные результаты:  $\varphi$  и  $G$  постоянны,  $a \sim t^{1/2}$ .

В частности, при  $\omega=6$  \*) предсказывается изменение константы тяготения (или массы частиц):

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dt} = -0,14H \approx -5 \cdot 10^{-12} \text{ лет}^{-1}, \quad (23.15.6)$$

где  $H$  — постоянная Хаббла.

В теории Дирака  $\frac{dG}{dt}$  в 10 раз больше. Точность радиолокационных межпланетных измерений расстояний позволяет надеяться на прямой ответ — есть ли такие изменения — на протяжении ближайших 10 лет. Сейчас эксперименты Шапиро (1965), Шапиро и др. (1971, 1972) дают  $\dot{G}/G$  не более  $4 \cdot 10^{-11} \text{ лет}^{-1}$ .

В настоящее время более интересны тесты, не требующие долгого ожидания. Наблюдаемые выводы ТБД развиты подробно. ТБД дает поправки к классическим тестам ОТО. Отклонение  $\alpha$  луча при прохождении вблизи края Солнца в ТБД выражается формулой  $\alpha = 1,75'' \frac{3+2\omega}{4+2\omega} = 1'',75 \left(1 - \frac{1}{4+2\omega}\right)$ , изменяется также вековое смещение перигелия Меркурия.

Измерения последних лет неблагоприятны для ТБД: последние данные дают для  $\alpha$  величину, из которой следует, что  $|\omega| \geq 6$  или  $|\omega| \geq 10$ . Смещение перигелия Меркурия согласуется с ОТО с очень хорошей точностью.

Дикке (1964) полагал, что гравитационное поле Солнца обладает значительным квадрупольным моментом. Совпадение смещения перигелия с ОТО, по его мнению, является результатом случайной компенсации двух поправок — одной, связанной с ТБД, и другой, зависящей от квадрупольного момента Солнца. Доказательство квадрупольного момента Дикке видел в сплюснутости солнечного диска. Новые данные Хилла и др. (1974) показывают отсутствие сплюснутости Солнца. Небесно-механические следствия ТБД рассматриваются в ряде работ [Нутку (1969), Шапиро и др. (1971, 1972), Финкельштейн и Крайнович (1974)]: Эти следствия до сих пор не нашли экспериментального подтверждения.

Специфическим предсказанием ТБД являются продольные гравитационные волны (точнее, волны  $\varphi$ -поля). Измерения типа веберовских в момент взрыва близкой сверхновой могли бы подтвер-

\*) Наблюдения (о которых см. далее) приводят к выводу, что  $|\omega| \geq 6$ ; напомним, что ТБД совпадает с ОТО в пределе при  $\omega \rightarrow \infty$ .

дить ТБД или дать чувствительную оценку параметра  $\omega$ . Даже при малых отклонениях от ОТО (т. е. при большом  $|\omega| > 6$ ) эффект может быть значительным, так как излучение скалярных волн (в отличие от гравитационных волн в ОТО) происходит также и при сферически-симметричных колебаниях или коллапсе [Дикке (1964); Гуревич и Дынкин (1972)]. «Обычные», предусмотренные ОТО, гравитационные волны являются тензорными и излучаются лишь постольку, поскольку колеблющееся или коллапсирующее тело отклоняется от сферической симметрии, имеет квадрупольный момент (см § 2 гл. 16 и более подробно ТТ и ЭЗ). Как известно, однако, повторение опытов Вебера не подтвердило наличие импульсов, скалярные волны также не наблюдались. Итак, с ТБД возникла часто встречающаяся ситуация. Нет экспериментальных доказательств недостаточности ОТО, нет экспериментальных аргументов в пользу ТБД. Вместе с тем, благодаря предусмотрительно введенному параметру  $\omega$ , все недовольные жесткой формой стандартной ОТО имеют право перевести вопрос в количественную плоскость. Такие исследователи говорят, что ТБД не опровергнута, но лишь подвергнута количественному ограничению.

Каковы космологические следствия ТБД?

Для «пыли» и при определенном выборе начальных условий выше выписана формула (23.15.5), показывающая, как меняется показатель в космологическом решении. Для ТБД уравнение состояния  $P = \varepsilon/3$  является особым. Существенны отклонения от этого закона. Нуклеосинтез в ТБД рассмотрен в работе Дикке (1968). В первом варианте теории с постоянными массами элементарных частиц и с временами, измеренными по атомным часам, суть изменений нуклеосинтеза сводится к тому, что в космологии в ТБД ускоряется темп космологического расширения. Но мы знаем, что ускоренное расширение приводит к увеличению доли нейтронов, выживающих после адронной эры. При увеличении скорости расширения в  $s$  раз при  $s$  от 10 до 1000 содержание гелия оказывается больше 40%, что недопустимо. При  $s$  от 1000 до  $10^5$  содержание гелия меньше 10%, но недопустимо велико предсказываемое количество дейтерия ( $>3\%$ ) и  $\text{He}^3$  ( $>2 \cdot 10^{-4}$ ). Поэтому необходимо  $s > 10^5$ . Конкретно Дикке отстаивает скалярно-тензорную космологическую модель с  $s = 1,5 \cdot 10^6$  (соответствующую  $\omega = 5$ ), с практически нулевым содержанием гелия. Однако если  $\omega > 6$  (как указывают, по-видимому, небесно-механические и радиоизмерения в Солнечной системе), то в космологии возникнут трудности!

Отметим, что в ТБД, наряду с «обычными» решениями с начальным условием  $t=0$ ,  $\varphi=0$ , можно также рассматривать решения с  $\varphi_0 \neq 0$  или  $\varphi^a = \text{const} \neq 0$ , т. е. со «свободным»  $\varphi$ -полем. Эти решения обладают любопытными особенностями. Поле ведет себя в определенных условиях как предельно жесткое ( $P = \varepsilon$ ) вещество. При определенном выборе параметров  $P = \varepsilon < 0$  и возможен плавный пере-

ход от сжатия к расширению в изотропной (фридмановской) модели.

Положительное  $\omega$ , когда сингулярность сохраняется (но зависит от  $\varphi$ -поля, а не от материи), рассмотрел Гринштейн (1968), см. также Моргенстерн (1973), а для анизотропных решений — Белинский и Халатников (1972), Рубан и Финкельштейн (1973), Матцнер, Райан и Бтон (1973). Принципиально новый случай отрицательного  $\omega$  рассмотрели Гуревич, Финкельштейн и Рубан (1973). На первый взгляд отсутствие сингулярности в этом случае реализует давнишнюю мечту теоретиков (и философов). Сингулярность означает необходимость привлечения новых теоретических идей, только несингулярное решение является полным и логически замкнутым. Однако, избавившись от сингулярности, мы сталкиваемся с новыми вопросами: как происходил нуклеосинтез? каким образом получилось равновесное планковское реликтовое излучение? Бесконечная плотность, может быть, и не является необходимой, но плотность порядка  $10^6$ — $10^8$  г/см<sup>3</sup> и температура выше  $10^{10}$  °К нужны для понимания наблюдаемой картины Вселенной.

Наконец, наиболее важна принципиальная трудность: избавление от сингулярности возможно лишь в рамках теории с полем, которое может дать отрицательную плотность энергии. Без отрицательной плотности энергии сингулярность неизбежна — в этом состоят теоремы Пенроуза и Хоукинга (см. § 2 гл. 22). Но поле, дающее отрицательную плотность энергии, способно также вызвать «взрыв вакуума». В квантовой теории такого поля в вакууме (плоском, стационарном!) могут рождаться кванты этого поля вместе с обычными частицами. Как было показано Зельдовичем (1974), такое спонтанное рождение частиц противоречит наблюдениям.

Подведем итог обсуждению ТБД. Разнообразие решений оказалось значительно большим, чем предполагали авторы теории. Появились новые, не связанные с идеями Маха, варианты, рассматриваются свободные поля. Появляется значительное число публикаций по ТБД. Несмотря на это, наблюдения и общие соображения, выдвинутые в последние годы, неблагоприятны для ТБД, и представляется вероятным, что в ближайшие годы интерес к ТБД исчезнет.

## § 16. Новые гипотезы в теории поля и космология

В 70-х годах получило дальнейшее развитие и стало популярным особое направление теории квантовых полей и теории элементарных частиц — идея спонтанного нарушения симметрии, или, кратко, «сломанной симметрии».

Вкратце идея сводится к следующему: в природе усматриваются определенные симметрии, которые, однако, оказываются неточными. Такова например  $CP$ -инвариантность, т. е. симметрия по отношению к зеркальному отражению, сопровождающемуся заменой частиц

на античастицы \*). Таково сходство (симметрия) свойств электронов и мюонов и более скрытое сходство нейтрино с заряженными лептонами — электронами и мюонами.

Естественно в качестве первого приближения построить теорию, в которой та или иная указанная симметрия является точной. Известно, как нужно строить лагранжиан (выражение, варьированием которого получаются уравнения полей и частиц) для того, чтобы получить уравнения с данными свойствами симметрии. Лагранжиан может быть  $CP$ -инвариантным или соответствовать теории, в которой равны нулю все массы — электрона, мюона и нейтрино. Но в действительности известно, что симметрия не является точной: нарушается  $CP$ -инвариантность в некоторых процессах, масса мюона не равна массе электрона и не равна нулю. Должны ли мы отказываться от идеализированного лагранжиана? Идея нарушенной симметрии заключается в том, что сохраняется симметрия лагранжиана, симметрия идеализированной теории, но подбирается такая функциональная зависимость, при которой несимметричное решение является устойчивым.

Поясним эту мысль примером. Пусть потенциальная энергия является четной функцией координаты,  $U = ax^2 + bx^4 + \dots$ . Потенциальная кривая симметрична относительно замены  $x \rightarrow -x$ . Состояние равновесия частицы получается из условия минимума  $U(x)$ , т. е.  $F = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ . Пусть  $a > 0$ ,  $b > 0$ , остальных членов нет. Кривая потенциальной энергии имеет один минимум,  $x=0$ , как и следовало ожидать: симметричная теория [ $U(x) = U(-x)$ ] имеет симметричное равновесное состояние.

Возьмем, однако, случай  $a < 0$ ,  $b > 0$ .

Потенциальная энергия имеет два минимума:  $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{|a|}{2b}}$ ,  $U_{1,2} = -\frac{|a|^2}{4b}$ . Начало координат  $x_3=0$ ,  $U_3=0$  представляет собой максимум кривой.

Итак, теория по-прежнему симметрична [ $U(x) = U(-x)$ ], но в состоянии равновесия осуществится либо одно  $\left(x_1 = + \sqrt{\frac{|a|}{2b}}\right)$ , либо другое  $\left(x_2 = - \sqrt{\frac{|a|}{2b}}\right)$  несимметричное решение.

---

\*) В связи с нарушением  $C$  была выдвинута Ландау идея комбинированной инверсии, т. е.  $CP$ -инвариантности. Нарушения  $CP$ -инвариантности наблюдаются в настоящее время только в распаде нейтральных  $K$ -мезонов и весьма малы [Кристенсен и др. (1964)]. В обыденной жизни с хорошей точностью выполняется зеркальная симметрия и без зарядового сопряжения. Однако в явлениях бета-распада и других явлениях слабого взаимодействия нарушение  $C$ -зеркальной симметрии достигает 100%: нейтрино только левополяризованные, антинейтрино только правополяризованные.

Один из авторов (З.) живо помнит, как Л. Д. Ландау, исследуя течение вязкой жидкости в расширяющейся трубе (задачу с симметричными уравнениями и граничными условиями), обнаружил неустойчивость симметричного решения и существование устойчивых несимметричных решений в определенном интервале чисел Рейнольдса, какое большое принципиальное значение Ландау придал этой ситуации, как он радовался возможности проследить аналитически за возникновением неожиданного решения.

Н. Н. Боголюбов подчеркивает, что в статистической механике при образовании ферромагнетика или кристалла происходит нарушение изотропии, равноценности всех направлений в ситуации, когда исходные уравнения изотропны.

С точки зрения математической физики в современных теориях, «сломанной симметрии» рассматривается явление такого же типа, но с простейшим объектом — вакуумом.

Вводится скалярное поле  $\varphi$ , и предполагается, что энергия поля, наряду с обычными членами, содержит  $U(\varphi)$  как раз такого вида, как описано выше,  $U = a\varphi^2 + b\varphi^4 + c$ , причем  $a < 0$ .

Теория такова, что  $\varphi = 0$  соответствует полной симметрии — нет нарушения  $CP$ -инвариантности, или массы мюонов и электронов равны нулю. Однако в действительности осуществляется состояние

вакуума, при котором  $U$  минимально, например  $\varphi = \sqrt{\frac{|a|}{2b}}$ . В этом

несимметричном состоянии из-за связи  $\varphi$  с другими полями (эту связь мы не выписываем) нарушается и симметрия других полей: нарушается  $CP$ -инвариантность, или  $m_\mu \neq m_e \neq m_\nu = 0$ . Константа  $c$  выбрана

таким образом,  $c = \frac{|a|^2}{4b}$ , что плотность энергии несимметричного

вакуума равна нулю, в соответствии с тем, что, по астрономическим данным, равна нулю (или очень мала) космологическая постоянная. Следовательно, энергия неустойчивого симметричного состоя-

ния положительна,  $U(\varphi = 0) = c = \frac{|a|^2}{4b}$ .

Конечно, вышеизложенное дает лишь самое общее представление об идее «сломанной симметрии». Киржниц (1973) сделал важное замечание о следствиях этой гипотезы применительно к теории горячей Вселенной.

Вблизи сингулярности при высокой температуре следует ожидать, что поле  $\varphi$  (как и другие поля!) окажется высоковозбужденным и при этом среднее значение  $\varphi$  окажется равным нулю, несмотря на то что плотность энергии не минимальна. При повышении температуры исчезает упорядоченность, подобно тому как плавится кристалл и исчезает ферромагнетизм. Восстанавливаются и другие предсказания симметричной теории (например,  $m_e = m_\mu = m_\nu = 0$  и т. п.).

Линде (1974) предлагает считать, что в высокотемпературном симметричном состоянии плотность энергии вакуума, а значит, и космологическая постоянная становятся положительными и большими.

Сущность перестройки поля при высокой температуре представляется физически обоснованной; однако выражение «космологическая постоянная, зависящая от температуры» таит определенные опасности.

Принято определять космологическую постоянную как энергию вакуума или, точнее, как предел плотности энергии при плотности частиц (возбуждений), стремящейся к нулю. Но при заданной высокой температуре плотность частиц, в частности квантов поля, нельзя считать равной нулю, плотность частиц задана температурой, частицы в среднем покоятся лишь в одной системе координат, горячий газ не лоренц-инвариантен.

Плотность энергии при конечной температуре имеет определенное значение, но разбиение этой плотности на две части (материя и «вакуум») содержит произвол.

При обычном определении ( $v$  — вакуум,  $m$  — материя)  $\epsilon = \epsilon_v + \epsilon_m$ ,  $P = P_v + P_m$ ; принимаем  $\epsilon_v = -P_v = \text{const}$  и  $dE = -P dv$ . При этом закон сохранения энергии справедлив для каждой части в отдельности:  $d(\epsilon V) = -P dV$ ,  $d(\epsilon_v V) = \epsilon_v dV = -P_v dV$ ,  $d(\epsilon_m V) = P_m dV$ . При определении Линде, т. е. при  $\epsilon_v \neq \text{const}$ , этих равенств нет, нужно учитывать отдельно взаимодействие вакуума с материей, а поскольку материя не лоренц-инвариантна, то не очевидна и лоренц-инвариантность взаимодействующего с ней вакуума.

При такой сложной ситуации, естественно, возникает вопрос, нужно ли делить  $\epsilon$  на две части; во все уравнения входит лишь полное  $\epsilon$ , полное  $P$ .

В работе Зельдовича, Кобзарева и Окуня (1974) проводится анализ эволюции горячей космологической модели, в которой уравнения поля допускают симметричное решение при высокой температуре и «сломанную симметрию» при низкой температуре.

В простейшем варианте теории в ходе расширения и охлаждения достигаются условия «сломанной симметрии» и получается мозаичная (доменная) структура. Пространство распадается на множество областей, в одних  $\varphi = + \sqrt{\frac{|a|}{2b}}$ , в других  $\varphi = - \sqrt{\frac{|a|}{2b}}$ . Соответственно в этих областях различен знак нарушения  $CP$ -инвариантности, в частности различен знак разности вероятности двух каналов распада:  $K_L^0 \rightarrow \pi^+ \mu^- \nu_\mu$  и  $K_L^0 \rightarrow \pi^- \mu^+ \nu_\mu$  (однако в этом варианте теории масса мюона везде положительна!). Между (+)- и (-)-областями образуется переходный слой с определенной, и притом большой, поверхностной энергией, поверхностным натяжением, поверхностной плотностью массы. Большая плотность и натяжение стенок позволяют рассматривать всю совокупность как газ с  $P = -^2/8$



(при хаотическом распределении и медленном движении стенок). Существенно меняется общий закон расширения Вселенной, оказывается, что в этом случае  $a \sim t^2$ .

Разбиение пространства на мозаику  $(+)$ -,  $(-)$ -областей должно вызвать заметную неоднородность плотности и всех других величин даже в том случае, если начальное высокотемпературное состояние было строго однородным. Большая плотность стенок (порядка  $10^{26} \text{ эрг/см}^2 = 10^6 \text{ г/см}^3$  по грубой оценке) приводит к выводу, что стенки, уцелевшие к настоящему времени, вызвали бы недопустимое искажение изотропии реликтового излучения. Реликтовое излучение еще раз играет роль «большой дубины», ограничивающей полет фантазии.

Означает ли это, что необходимо нацело отказаться от теорий с нарушенной симметрией? Оказывается, что это не так, можно указать варианты, в которых противоречие устранено.

1. В варианте комплексного  $\varphi$  при высокой температуре  $|\bar{\varphi}|=0$ , при низкой температуре  $|\bar{\varphi}|=\text{const}=\varphi_0$ , различные области пространства отличаются фазой  $\varphi$ , но не величиной:  $\varphi=\varphi_0 e^{i\alpha(x)}$ .

Такая теория не объясняет нарушения  $CP$ -инвариантности, но годится для объяснения масс мюона и электрона. В этом случае фаза  $\alpha(x)$  может меняться плавно и вместо стенок появляются вихревые нити.

2. В варианте с вещественным  $\varphi=\pm\varphi_0$  и резкой границей возможно, что зарядовая асимметрия вещества (избыток барионов) вызывает асимметрию  $(+)$ - и  $(-)$ -областей, например, преимущественно образуются  $(+)$ -области, и к настоящему времени все пространство представляет собой одну  $(+)$ -область, тяжелых стенок нет.

Изложенная выше гипотеза (так же как и только что указанные варианты) еще очень далека от экспериментального подтверждения методами физики элементарных частиц, ускорителей и т. п. Приводя ее здесь, мы хотим показать, насколько еще неопределенны наши представления о физике процессов вблизи сингулярности, какие большие неожиданности возможны в этой области.

## § 17. Осциллирующая Вселенная?

Представление о статической, неизменной Вселенной, несомненно, не согласуется с действительностью и оставлено. Не соответствует действительности и стационарная Вселенная (см. § 10), в которой хаббловское расширение компенсируется рождением вещества.

Однако поражает длительное существование и популярность этих теорий! Напомним, что Эйнштейн сознательно видоизменял ОТО так, чтобы уравнения оказались совместными со статическим космологическим решением (см. гл. 4).

Мы уже отмечали (§ 12 гл. 3), что идея стационарности, очевидно, имеет определенную внутреннюю привлекательность. В XIX веке эта привлекательность могла быть связана с видимой статичностью астрономических систем. В XX веке законы сохранения зарядов — электрического, лептонного и, главное, барионного (все эти законы являются абсолютными во всех известных процессах) — являются веским аргументом в пользу вечного существования Вселенной, обладающей отличным от нуля барионным зарядом. Нельзя ли вечное

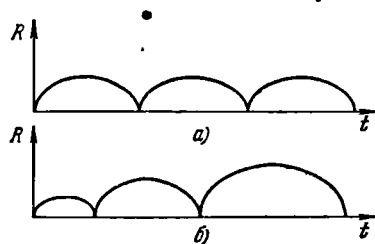


Рис. 67. Осциллирующая модель при  $\rho > \rho_c$ : а) осцилляции без увеличения энтропии; б) осцилляции с увеличивающейся энтропией.

существование Вселенной сделать стационарным в среднем, предположив, что эволюция является осциллирующей: за сингулярностью следует расширение, которое плавно замедляется и сменяется сжатием, сжатие протекает, убыстряясь, и заканчивается коллапсом?

Предполагается, что коллапс Вселенной как целого может в сингулярном состоянии изменить знак, превратиться в антиколлапс, т. е. смениться расширением из сингулярного состояния, стать началом следующего цикла, повторяющегося предвсущий.

Для того чтобы расширение (переживаемое нами в настоящее время) сменилось сжатием, необходимо, чтобы во Вселенной плотность была больше критической. Предполагаемое изменение радиуса Вселенной со временем показано на рис. 67, а.

Вопрос о возможности перехода коллапс — антиколлапс в сингулярности (с учетом квантовых явлений и пр.) в настоящее время остается открытым. Будем считать, что возможен такой переход — точка возврата, в которой кривая рис. 67, а подходит к оси абсцисс и отражается от оси.

Каковы следствия такой теории? В горячей модели Вселенной есть одна особенность, благоприятная для осциллирующей модели. Каким бы ни был химический состав вещества, подвергающегося коллапсу, после прохождения через «огненную печь» сингулярности вещество возвращается к первоначальному составу — к пресловутым 70% H, 30% He<sup>4</sup> для изотропного расширения (см. § 5 гл. 7).

Казалось бы, возможно повторение циклов. Однако второе начало термодинамики запрещает осциллирующую модель. В самом деле, энтропия Вселенной только растет. Энтропия растет и в ходе расширения и в ходе сжатия. При коллапсе можно ожидать особенно сильного возрастания энтропии. На последних этапах сжатия должно осуществляться наиболее общее «8-функциональное» решение с анизотропным сжатием (см. § 3 гл. 22). В этих условиях

вязкость, ускорение нейтрино, спонтанное рождение частиц особенно сильны.

Для дальнейших выводов центральную роль играет предположение, что энтропия не уменьшается при прохождении через сингулярность. Это предположение мы принимаем, даже не имея последовательной квантовой теории сингулярного состояния.

Основанием для такой экстраполяции является один из важнейших принципов современной теоретической физики — принцип соответствия. Будущая квантово-гравитационная теория включит в себя и ОТО, и ньютоновскую теорию тяготения. В ОТО и в ньютоновской теории энтропия только растет; сингулярное состояние, вероятно, не должно нарушать этот общий закон, так же как и закон сохранения барионов. Но если от одного цикла к другому энтропия возрастает, то каждый следующий цикл отличается от предыдущего.

Как показал еще Толмен (1934), расчет приводит к циклам, удлиняющимся по времени и с растущей амплитудой, с увеличивающимся максимальным радиусом Вселенной (см. рис. 67, б).

Относительно нашей Вселенной еще точно не известно, является ли она открытой или замкнутой, т. е. больше или меньше  $\rho_c$ . Доводы в пользу открытой Вселенной несколько более убедительны, но считать вариант  $\rho > \rho_c$  исключенным нельзя. С этой точки зрения осциллирующий вариант эволюции также не исключен.

Но удельная энтропия нашей Вселенной (на один барион) конечна. Отсюда следует, что Вселенная пережила в прошлом лишь конечное число циклов, имеет конечное время существования, ибо в каждом цикле энтропия возрастает на конечную величину и при бесконечном числе циклов удельная энтропия была бы бесконечна.

С учетом роста энтропии осциллирующая модель Вселенной не позволяет описать вечное существование Вселенной от  $t = -\infty$ . Теория осциллирующей Вселенной не достигает цели, стоящей перед этой теорией, — дать описание вечной Вселенной.

С точки зрения вечной Вселенной предпочтительной оказывается картина открытой Вселенной, однократно сжимающейся в прошлом  $-\infty < t < 0$ , сменяющей сжатие на расширение в сингулярности  $t = 0$  и неограниченно расширяющейся на современном этапе  $0 < t < t_0$  и в будущем  $t_0 < t < +\infty$  ( $t_0$  — сегодня). Но, конечно, пока мы ничего не можем сказать о том, была ли истинная эволюция Вселенной такой.

Вернемся к теории осциллирующей Вселенной. Проиллюстрируем простыми расчетами утверждения Толмена о влиянии роста энтропии на эволюцию циклов расширения — сжатия в случае замкнутой модели. Расчет будет проделан для однородной изотропной космологической модели (см. гл. 1).

Итак, метрика имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [dr^2 + \sin^2 r (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)]. \quad (23.17.1)$$

Уравнение для радиуса:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 - \frac{c^2}{2}. \quad (23.17.2)$$

Однородная модель при этом замкнута и закон сохранения нуклонов формулируется элементарно: число  $N$  не меняется от одного цикла к другому. Относительно энтропии  $S$  было сделано предположение, что  $S$  не меняется в момент перескока от одного цикла к другому. Однако она возрастает в ходе каждого цикла. Возрастание энтропии особенно велико, если во время цикла образуются звезды и происходят ядерные реакции.

Будем рассматривать плотность энергии в сопутствующей системе координат. Для определенности в каждом цикле будем сравнивать моменты, когда радиус максимален (момент, когда расширение сменяется сжатием). Для этого момента из уравнения (23.17.2) при  $\frac{da}{dt} = 0$  найдем

$$\epsilon = \rho c^2 = \frac{3c^4}{8\pi G a_{\max}^2}.$$

Плотность энергии зависит от плотности нуклонов и от удельной энтропии, приходящейся на один нуклон. Плотность нуклонов есть

$$n = \frac{N}{2\pi^2 a^3}, \quad S = \frac{S_{\text{полн}}}{N};$$

здесь  $N$  — полное число нуклонов,  $S_{\text{полн}}$  — полная энтропия,  $2\pi^2 a^3$  — объем замкнутого мира. Зависимость

$$\epsilon(n, S) \equiv \epsilon\left(\frac{N}{2\pi^2 a^3}, \frac{S_{\text{полн}}}{N}\right)$$

дается уравнением состояния вещества. С определенностью можно сказать только, что  $\frac{d\epsilon}{dS} > 0$  и  $\frac{\partial \epsilon}{\partial n} \geq \frac{\epsilon}{n}$ .

Уравнение

$$\epsilon\left(\frac{N}{2\pi^2 a_{\max}^3}, \frac{S_{\text{полн}}}{N}\right) = \frac{3c^4}{8\pi G a_{\max}^2}$$

служит для определения максимального радиуса в данном цикле по известной энтропии. Из свойств  $\epsilon$  следует, что в каждом следую-

щем цикле  $a_{\max}$  больше, чем в предыдущем \*). Больше также и энергия, приходящаяся на один нуклон в момент остановки ( $\frac{da}{dt} = 0$ ):

$$E = \frac{\varepsilon}{n} = \text{const } a_{\max} \varepsilon = \text{const } a_{\max}.$$

Вследствие гравитационного взаимодействия увеличение энергии, приходящейся на один нуклон, не противоречит закону сохранения энергии. Полная энергия замкнутого мира всегда тождественно равна нулю.

Таким образом, в осциллирующей модели все время растет амплитуда колебаний. Расчет изменения амплитуды в каждом цикле зависит от изменения энтропии, т. е. от конкретных процессов. Итак, необратимый рост энтропии при учете гравитации и общей теории относительности приводит к картине, весьма непохожей на картину тепловой смерти (постоянная температура всюду и покой), как ее рисовали физики XIX века (см. об этом подробнее § 14 этой главы).

Будем продолжать решение в прошлое. Минимальная амплитуда цикла в прошлом определяется соотношением

$$a = \sqrt{\frac{3c^4}{8\pi G \varepsilon_{\text{бариян}}}},$$

\*) Дадим формальное доказательство. Введем энергию, приходящуюся на один барион и зависящую от  $n$  и  $S$ :  $\varepsilon = nE(n, S)$ , имеем  $dE = -P dV = -Pd\left(\frac{1}{n}\right) = -Pn^{-2} dn$  при  $S = \text{const}$ . Отсюда, так как  $P > 0$ , то и  $\frac{dE}{dn} > 0$ ,  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = E + n \frac{\partial E}{\partial n} > E = \frac{\varepsilon}{n}$ . Значит,  $\frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln n} > 1$ . Запишем уравнение остановки в виде  $a_{\max}^3 \varepsilon(n_{\max}, S) = \frac{3c^4}{8\pi G} = \text{const}$  ( $n_{\max}$  — плотность в максимуме расширения) и найдем логарифмическую производную левой части по  $a_{\max}$  и  $S$ :

$$\frac{\partial \ln(a_{\max}^3 \varepsilon)}{\partial \ln a_{\max}} \frac{da_{\max}}{a_{\max}} + \frac{\partial \ln(a_{\max}^3 \varepsilon)}{\partial S} dS = 0,$$

$$\left(2 + \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln n} \frac{d \ln n}{d \ln a_{\max}}\right) \frac{da_{\max}}{a_{\max}} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial S} dS = 0.$$

Так как  $n = \frac{N}{a^3}$ , то  $\frac{d \ln n}{d \ln a} = -3$ , а так как  $\frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln n} > 1$ , то  $-3 \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln n} = -k < 0$ , откуда и следует

$$\frac{da_{\max}}{dS} = \frac{1}{k} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dS} > 0.$$

С ростом энтропии растет радиус остановки: замкнутый мир расширяется при нагревании.

где

$$\epsilon_{\text{барион}} = m_{\text{барион}} c^2.$$

Иными словами, минимальная амплитуда определяется суммой масс барионов.

Амплитуда, таким образом, всегда конечна и в каждом цикле энтропия изменяется на конечную величину. Так как энтропия сейчас конечна, то в прошлом возможно только конечное число циклов. Предположение о возможности циклов, таким образом, только отодвигает трудность с начальным сингулярным состоянием, но не устраняет ее.

## § 18. Рождение гравитонов вблизи сингулярности

Гравитоны появляются в теории как неизбежное следствие ОТО (предсказывающей гравитационные волны) и квантовой механики (требующей квантования этих волн). Классическая теория — в данном случае ОТО — предсказывает, что скорость гравитационных волн равна скорости света, а следовательно, масса покоя гравитонов равна нулю.

В этом отношении гравитоны подобны фотонам (квантам электромагнитных волн) и нейтрино. Однако, как подчеркивает Грищук (1974), уравнения гравитационных волн не являются конформно-инвариантными (в отличие от уравнений Максвелла для фотонов) относительно преобразования той усредненной крупномасштабной метрики, на фоне которой рассматривается (как ее малое коротковолновое возмущение) гравитационная волна.

В этой связи надо подчеркнуть, что скорость волны, равная скорости света, и равенство нулю массы покоя частиц — это условия необходимые, но недостаточные для конформной инвариантности соответствующего поля.

На примере скалярного поля Пенроуз (1964) и Тагиров и Черников (1968) показали, что, обобщая уравнения, написанные в плоском пространстве Минковского, на кривое пространство, можно по произволу получить конформно-инвариантное или неинвариантное уравнение. Но в уравнениях гравитационных волн нет произвола, когда заданы уравнения ОТО, прямым следствием которых они являются.

Оказывается, что уравнения гравитационных волн не конформно-инвариантны. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим плоскую гравитационную волну на фоне расширяющейся Вселенной (см. § 5 гл. 11).

Метрика

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta) + h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (23.18.1)$$

при условиях

$$h_{\alpha}^{\beta} = \gamma_{\alpha}^{\beta} e^{inr} v(r), \quad \gamma_{\alpha}^{\beta} n_{\beta} = 0, \quad n = \text{const} \quad (23.18.2)$$

приводит к уравнению для амплитуды

$$\frac{d^2 v}{d\eta^2} + 2 \frac{da}{a d\eta} \frac{dv}{d\eta} + \kappa^2 v = 0. \quad (23.18.3)$$

При большой частоте,  $\kappa \gg \frac{da}{a d\eta}$ , имеет место квазиклассическое приближение

$$v = \frac{C e^{\pm i\kappa\eta}}{a(\eta)}. \quad (23.18.4)$$

Как уже отмечалось (см. гл. 16), при этом плотность энергии гравитационных волн

$$\epsilon = v^2 \omega^2 = \frac{v \kappa^2}{a^2} = \frac{\text{const}}{a^4}, \quad (23.18.5)$$

т. е. меняется, как  $a^{-4}$ .

Условие сохранения числа гравитонов в единице объема сопутствующего пространства даст плотность гравитонов в объеме физического пространства  $n (\text{см}^{-3}) \sim a^{-3}$ , длина волны пропорциональна  $a$ , частота  $\omega \sim a^{-1}$ , плотность энергии, в согласии с (23.18.5), есть  $\epsilon = n \hbar \omega \sim a^{-4}$ . Квазиклассическое приближение (23.18.4) соответствует тому, что гравитоны не рождаются и не исчезают. Но квазиклассическое решение является приближенным, и именно отступление от него и означает, что уравнение не конформно-инвариантно, потому что переход от метрики Минковского ( $a = \text{const}$ ) к эволюционирующей Вселенной (например,  $a \sim \eta$  или  $a \sim \eta^2$ ), является примером конформного преобразования.

Подобно тому, как это сделано в теории рождения других частиц [Зельдович, Старобинский (1971), см. также § 6 этой главы] ищем решение в виде суперпозиции двух встречных волн:

$$v = \frac{f}{a} e^{-i\kappa\eta} + \frac{g}{a} e^{+i\kappa\eta}. \quad (23.18.6)$$

Подставляя это решение в уравнение (23.18.3) с дополнительным условием (согласно методу Лагранжа)

$$\frac{dv}{d\eta} = \left( -i\kappa - \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \right) \frac{f}{a} e^{-i\kappa\eta} + \left( i\kappa - \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \right) \frac{g}{a} e^{+i\kappa\eta}, \quad (23.18.7)$$

получим уравнение первого порядка для величины  $f$ :

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{i}{2\kappa a} \frac{d^2 a}{d\eta^2} (f + g e^{2i\kappa\eta}), \quad (23.18.8)$$

и аналогичное (с заменой  $f \rightarrow g$ ,  $i \rightarrow -i$ ) для  $g$ . Из этого уравнения видно, что в пределе для коротких волн ( $\kappa \rightarrow \infty$ )  $f$  и  $g$  постоянны и не связаны между собой. Однако при  $\kappa\eta \sim 1$   $f$  и  $g$  не постоянны, чистая  $f$ -волна ( $f=1$ ,  $g=0$ ) рождает встречную  $g$ -волну и усиливается сама.

В квантовом случае такой ситуации соответствует рождение пар гравитонов в изотропно расширяющейся космологической модели. Напомним, что для конформно-инвариантного скалярного поля (см. § 6 этой главы) рождение пар частиц происходило лишь в анизотропной метрике

$$ds^2 = dt^2 - a^2 dx^2 - b^2 dy^2 - c^2 dz^2 \quad (23.18.9)$$

и зависело от разностей типа  $\left(\frac{d \ln a}{dt} - \frac{d \ln b}{dt}\right)^2$ , т. е. обращалось в нуль при изотропном расширении.

Гришук (1974), подробно исследовавший рождение гравитонов, отмечает, что связь  $f$  и  $g$  пропорциональна  $\frac{d^2 a}{d\eta^2}$  и, следовательно, исчезает не только при  $a = \text{const}$ , но и при  $a = \text{const} \cdot \eta$ .

Такой закон расширения имеет место в том случае, если мир заполнен веществом с  $P = \epsilon/3$ ; тогда

$$a \sim \sqrt{t}, \quad \eta = \int \frac{dt}{a(t)} \sim \sqrt{t}, \quad a \sim \eta, \quad (23.18.10)$$

так что  $\frac{d^2 a}{d\eta^2} = 0$ .

Но в случае  $P = \epsilon/3$  след тензора энергии-импульса  $T = \epsilon - 3P = 0$ , а также обращается в нуль и скаляр кривизны  $R$  (хотя  $R_{00} \neq 0$ , как и компоненты  $R_{iklm}$ ).

Весьма вероятно, что отсутствие рождения гравитонов при  $R = 0$  не случайно \*).

Отсюда Гришук делает вывод, что, с учетом обратного влияния родившихся частиц на космологическое расширение, рождение гравитонов приблизит уравнение состояния к уравнению  $P = \epsilon/3$ , если вещество не имеет с самого начала такого уравнения состояния. Если первоначально мир заполнен веществом с  $P_{\text{вещ}} < \epsilon_{\text{вещ}}$ , то расширение происходит с  $\frac{d^2 a}{d\eta^2} \neq 0$  и гравитоны рождаются до тех пор, пока не будет достигнуто условие  $\epsilon_g \sim \epsilon_{\text{вещ}}$  и уравнение состояния станет  $P = \epsilon/3$ . В ходе последующего расширения роль гравитонов уменьшится и окажется пренебрежимо малой в настоящее время.

Предположим, однако, что начальное состояние соответствует жесткому уравнению состояния  $P_{\text{вещ}} = \epsilon_{\text{вещ}}$ . При этом  $T \neq 0$ ,  $R \neq 0$ , происходит рождение гравитонов. Включим рождение гравитонов в момент  $t_{\text{пл}} = 10^{-43}$  сек, тогда в момент  $2t_{\text{пл}}$  рождение, в основном, закончится и плотность рожденных гравитонов окажется порядка плотности материи. В дальнейшем, когда рождение гравитонов

\*) Любопытно, что при  $R = 0$  скалярные частицы с  $m = 0$  не рождаются ни в каком варианте волевого уравнения. Это отметил еще Л. Паркер (1968, 1969).



выключается, плотность их падает, как  $a^{-4}$ , тогда как плотность обычного вещества при жестком уравнивании состояния падает как  $a^{-6}$ . Получился бы мир с недопустимым (по данным сегодняшних наблюдений) преобладанием гравитонов.

Подводя итог, можно констатировать, что рождение гравитонов происходит в изотропной космологической модели при  $P \neq \epsilon/3$  и является аргументом против жесткого уравнивания состояния вблизи сингулярности (см. § 9 этой главы).

## § 19. Сингулярность и конформная инвариантность

В настоящее время для исследования сингулярностей часто используют конформное преобразование [см., например, Пенроуз (1968)]. Пусть с помощью конформного преобразования удастся сопоставить данному сингулярному четырехмерию, данному миру (прототипу), другой несингулярный мир (эталон). Распространение волн в эталонном мире может быть рассмотрено без принципиальных трудностей. После этого распространение волн в прототипе находим по законам конформного преобразования. Особенно прост тот случай, когда эталоном является плоский мир с метрикой Минковского. Для этого нужно, чтобы прототип был конформно-плоским (равен нулю тензор кривизны Вейля, но не равен нулю тензор кривизны Римана  $R_{iklm}$ ).

Подразумевается, что волны, распространение которых рассматривается, подчиняются конформно-инвариантным волновым уравнениям; этим свойством обладают, в частности, электромагнитные волны (но не гравитационные волны, см. предыдущий параграф).

Примером конформно-плоского мира является фридмановская Вселенная; вблизи сингулярности для всех физических процессов пространственная кривизна ее несущественна\*), поэтому записываем метрику в следующем виде:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(\eta) (d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2). \quad (23.19.1)$$

Последнее равенство демонстрирует, что эталоном модели Фридмана является мир Минковского. При  $z < 3 \cdot 10^8$  мир заполнен в основном фотонами и нейтрино, т. е. частицами с массой покоя, равной нулю, которые описываются конформно-инвариантными уравнениями. При больших  $z$  появляются сперва позитронно-электронные пары, а затем адроны (в том числе барионы и антибарионы), с отличной от нуля массой покоя  $m_0$ . Однако при приближении к сингулярности ( $z \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow 0$ ) отношение массы покоя  $m_0$  к средней энергии частиц становится все меньше. Для частиц (полей) с  $m_0 \neq 0$  конформной

\*) Конформно-плоское представление для открытого мира см. Фок (1961).

инвариантности нет, но вблизи сингулярности можно говорить о приближенной, асимптотической (при  $t \rightarrow 0$ ) конформной инвариантности.

В этом приближении Хойл и Нарликар (1963) рассматривают в качестве прототипа Вселенную вблизи сингулярности, заполненную всеми видами частиц (фотонами, нейтрино, адронами). При  $t \rightarrow 0$  эти частицы в совокупности представляют собой ультрарелятивистскую плазму с температурой, стремящейся к бесконечности при приближении к сингулярности. Эталон получается конформным преобразованием. Он представляет собой пространство Минковского, заполненное релятивистской плазмой, состоящей из безмассовых частиц — фотонов, нейтрино, но также и безмассовых электронов и позитронов, безмассовых протонов и т. п.

Речь идет о выдуманных, несуществующих частицах, все свойства которых — заряд, спин, закон взаимодействия — совпадают со свойствами истинного электрона или протона, за исключением того, что у каждой выдуманной частицы  $m_0 = 0$ . Температура этой плазмы может быть выбрана любой: ведь у нас нет величины  $m_0 c^2$ , с которой можно было бы сравнивать  $kT$ .

Взаимодействие частиц — электромагнитное, сильное и слабое — не нарушает конформной инвариантности плазмы в целом. Ее уравнение состояния  $P = \epsilon/3$  как в эталоне, так и в прототипе (в последнем — вблизи сингулярности).

В неизменном мире Минковского стационарная плазма с постоянной температурой проходит через поверхность  $\eta = 0$  (от  $\eta < 0$  к  $\eta > 0$ ) без какой-либо особенности.

Хойл и Нарликар полагают, что, возвращаясь от эталона к прототипу, можно получить, таким образом, описание перехода от сжатия к расширению, от  $t < 0$  к  $t > 0$ , в космологической модели Фридмана. Рассматривая такую возможность, заметим прежде всего следующее. Выпишем уравнение, связывающее  $t$  и  $\eta$  в прототипе. В мире, заполненном релятивистской плазмой, выполняются следующие соотношения:  $a \sim \sqrt{t}$ ,  $d\eta = \frac{dt}{a(t)}$ ,  $\eta \sim \sqrt{t}$ ,  $t = \text{const} \cdot \eta^2$ . Но отсюда следует, что обе части эталона,  $\eta < 0$  и  $\eta > 0$ , соответствуют одинаковому знаку истинного мирового времени  $t$ .

Поставленная задача описания прохождения через сингулярность не решается в данном случае привлечением конформной инвариантности.

Другое замечание, касающееся гипотезы Хойла и Нарликара, заключается в том, что гравитационное взаимодействие даже для безмассовых частиц не является конформно-инвариантным, подобно тому как не конформно-инвариантны уравнения для гравитонов \*).

---

\*) Вероятно, этот факт связан с тем, что константа тяготения  $G$  имеет такую размерность, что из нее вместе с  $\hbar$  и  $c$  можно построить величины размерности массы и длины.

В трактовке гравитационного взаимодействия частиц есть тонкости. Коллективное взаимодействие частиц учтено законом эволюции  $a \sim \sqrt{t}$ . Таким образом, в уравнении состояния остается учесть так называемое обменное взаимодействие — поправку, связанную с тем, что между положениями одинаковых частиц есть корреляция, усредненный гравитационный потенциал и усредненная метрика не полностью описывают взаимодействие. По мнению Сахарова (1966), при этом возникает максимум температуры, резко меняется уравнение состояния. Эффекты становятся порядка единицы тогда, когда температура порядка «планковской»,  $kT_{\text{пл}} = m_{\text{пл}} c^2$ ,  $T_{\text{пл}} = 10^{32} \text{ }^\circ\text{K}$ , что, в свою очередь, происходит при  $t \approx t_{\text{пл}} = 10^{-43} \text{ сек.}$

Итак, снова — хотя и по другой причине — характерное планковское время, отсчитанное от сингулярности, оказывается тем барьером, за который не удастся проникнуть без существенно новых идей. Идея конформной инвариантности, справедливая для всех полей при  $t \rightarrow 0$ , кроме гравитационного, позволяет продвинуться в исследовании интервала  $10^{-16} \text{ сек} — 10^{-43} \text{ сек}$ , но для преодоления барьера  $10^{-43} \text{ сек}$  эта идея недостаточна.

Рассмотрим в свете идей конформной инвариантности связь гравитации с другими полями. Основная идея теории тяготения Эйнштейна состоит в том, что пространство и время образуют четырехмерное искривленное многообразие (см. ТТ и ЭЗ, § 2 гл. 1). Свободные частицы движутся в этом многообразии по геодезическим линиям. Исходя из этого находятся траектории частиц в кривом пространстве-времени и воздействия кривизны пространства-времени на другие поля и частицы (электромагнитное поле, электрон-позитроны, нейтрино и т. д.). Это воздействие включает рождение частиц в пространстве, метрика которого зависит от времени, и поляризацию вакуума — появление отличной от нуля плотности энергии и импульса, зависящих от кривизны. Другая сторона теории тяготения состоит в том, что самому пространству-времени приписывается определенная «упругость». Качественная идея восходит к Клиффорду: если пространство, в принципе, может быть искривленным, то должен быть фактор — упругость, — благодаря которому фактически пространство с хорошей точностью остается плоским в масштабах Земли, Солнечной системы, Галактики. Идее упругости соответствует член  $\text{const} \int R dV$  в лагранжиане, введенный Эйнштейном. Именно этот член при варьировании дает левую часть уравнений Эйнштейна, правая часть которых есть плотность энергии и импульса реального вещества.

В книге ТТ и ЭЗ была изложена идея Сахарова (1967 б), согласно которой упругость пространства зависит от поляризации вакуума. С этой точки зрения теория тяготения, в принципе, не может существовать без учета других полей ( $\gamma$ ,  $e^\pm$ ,  $\nu$ , ...), хотя практически

суммарный вклад этих полей выражается в величине гравитационной постоянной  $G$ .

Выше вкратце изложена ситуация на 1971 г. [см. ТТ и ЭЗ, Мизнер, Торн, Уилер (1973)]. Новые моменты, радикально меняющие картину, появляются при учете конформной инвариантности полей, описывающих  $\gamma$ ,  $e^\pm$ ,  $\nu$ , ... и, по-видимому, и адроны. Из конформной инвариантности следует, что вклад перечисленных полей и частиц в упругость вакуума пренебрежимо мал, порядка

$$\frac{Gm_0^2}{\hbar c} \quad \text{или} \quad \left( \frac{Gm_0^2}{\hbar c} \right) \ln \left( \frac{p_0}{cm_0} \right)$$

где  $p_0$  — предельный импульс. Частицы с нулевой массой покоя и вовсе ничего не дают. Такой вывод следует сразу из того, что в конформно-плоском пространстве  $ds^2 = a(x, y, z, t) (dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)$  нет поляризации вакуума (при  $m_0 = 0$ ), хотя  $R_{iklm} = 0$ . Однако из списка частиц надо изъять гравитоны (см. § 18 этой главы): уравнение, описывающее гравитационные волны (и их кванты — гравитоны), не конформно-инвариантно.

Таким образом, в принципе возможна (хотя и не построена в настоящее время) теория, где рассматривается одно только пространство-время и получаются содержательные результаты, описывающие гравитоны и искривленное их тяготением фоновое пространство-время, в котором они распространяются, т. е. получается замкнутая картина для гравитонов без привлечения других полей и частиц.

Исходным пунктом такой теории являются коммутационные соотношения для величин, описывающих метрику. При обычной нормировке гравитационных волн ( $e \sim r^2$ ) эти соотношения имеют (симметрически) вид

$$[r_\alpha^\beta, \dot{r}_\delta^\gamma] = \left[ \frac{1}{\sqrt{G}} h_\alpha^\beta(x), \frac{1}{\sqrt{G}} \dot{h}_\delta^\gamma(x') \right] = \delta_\alpha^\gamma \delta_\delta^\beta \delta(x - x') \hbar. \quad (23.19.2)$$

В результате учета этих коммутационных соотношений для коротковолновых возмущений метрики должен (во всяком случае может) получиться вклад в лагранжиан вида

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int R dV.$$

В квантовую теорию входит

$$\psi = e^{iS/\hbar},$$

т. е. входит величина (в экспоненте)

$$\frac{i}{16\pi G \hbar} \int R dV.$$

В коммутационные соотношения для метрики входит произведение

$G\hbar$  (но не  $G$  и  $\hbar$  в отдельности или в других степенях), и это же произведение \*) вошло в выражение волновой функции всей системы. Тем самым подтверждается внутренняя логическая замкнутость рассматриваемого построения. При этом «замкнутость» теории не исключает, конечно, возможности рассмотрения в теории других частиц и полей (что потребует и новых констант). Утверждается лишь, что распространение гравитационных волн и вызываемое ими общее плавное искривление пространства могут быть полностью поняты и описаны, включая квантовые эффекты, в теории с двумя размерными величинами,  $l_{\text{пл}}$  и  $c$ , и без привлечения других полей и частиц.

В настоящее время предпринимаются настойчивые попытки объединения теорий электромагнетизма и слабого взаимодействия, в близкой перспективе — их объединение с теорией адронов. Поэтому особенно важно выяснение принципиальных вопросов связи разных полей.

## § 20. Направление времени

Физик XVIII века без каких-либо обоснований принимал существование абсолютного пространства и независимого от него абсолютного времени с заданным направлением течения времени от прошлого к будущему. При этом, например, механическую задачу о движении он мог решать и для определения будущего (предсказание затмений) и для определения движения в прошлом, приводящего по законам механики к известному состоянию в данный момент (вычисление прошлых затмений). Специальная теория относительности, связавшая время и пространство преобразованиями Лоренца, ничего не изменила в вопросе о знаке времени: как известно, световые конусы ( $r=ct$ ,  $r=-ct$ ), ограничивающие «абсолютное будущее» и «абсолютное прошлое» по отношению к выбранному «событию» (четырёхмерной точке  $r=0$ ,  $t=0$ ), инвариантны относительно преобразований Лоренца. Машина времени Уэллса для путешествия в прошлое невозможна, как и во времена Ньютона.

Вопрос о направлении времени возник около 100 лет назад в связи с теоремами статистики и термодинамики о необратимом возрастании энтропии в замкнутой системе. Были предложения определить будущее как то направление времени, для которого происходит рост энтропии. Сравнительно недавно высказывалась Голдом (1962) идея о связи направления времени («стрелы времени») и нейтрино.

\*) Оно равно, очевидно,  $l_{\text{пл}}^2 = 10^{-66} \text{ см}^2$ . Скорость света везде выше принята за единицу. Заметим, что при инвариантном способе выделения расходящихся интегралов в квантовой теории гравитации, который используют Т'Хуфт

и Вельтман (1974), поправка вида  $\frac{1}{G} \int R dV$  автоматически не возникает.

В ряде работ, в том числе и в московском докладе Хойла (ноябрь 1963), предлагается определить положительное направление времени по расширению Вселенной, т. е. увеличению расстояний между галактиками; если раньше галактики сближались, то и время, по Хойлу, текло в противоположную сторону по сравнению с современным.

По мнению авторов, принципиально неправильны попытки связать направление времени только с теми или иными конкретными и сложными явлениями. Различие между прошлым и будущим существует в любом процессе, в том числе и в системе, состоящей из двух частиц. Физика локальна, и явления, происходящие с парой частиц, не должны зависеть от роста энтропии в какой-то другой, не взаимодействующей с частицами сложной системе или от удаления галактик. В качестве возражения последнему утверждению обычно выдвигают обратимость законов механики и электродинамики — возможность замены  $t$  на  $-t$  в уравнениях.

Однако для решения уравнений нужно, кроме самих уравнений, задать начальные условия. В теории, в которой рассматривается поле (для определенности электромагнитное), мы задаем условие излучения, которое несимметрично относительно прошлого и будущего.

В самом деле, при движении зарядов они излучают электромагнитные волны и энергия движения самих зарядов уменьшается по мере роста времени, в будущем. Потерю энергии можно рассматривать как результат воздействия волнового поля на сами заряды, создающие это поле.

Благодаря обратимости уравнений можно задать такое поле сходящейся волны, чтобы волна, действующая на заряды, увеличивала бы энергию системы. Однако ясно, что такая постановка задачи искусственна, нет причин для того, чтобы приходящие извне волны имели частоты и фазу, нужные для раскачки системы. Между тем волны, излучаемые системой, в силу самого их происхождения находятся в фазе с движением системы. Именно это фазовое соотношение обеспечивает то, что поле излучаемой волны тормозит движение зарядов, отбирает от них энергию. Таким образом, условие излучения или, выражаясь более общо, принцип причинности позволяет однозначно определить будущее и прошлое.

Попытки изгнать из теории понятие поля, которые делались 20—30 лет назад, с заменой поля дальнодействием и с рассмотрением на равных основаниях запаздывающего и опережающего взаимодействия, предпринимались в связи с трудностями теории элементарных частиц [Уилер и Фейнман (1945)]. В такой теории каждая частица взаимодействует с остальными частицами, но не сама с собой, чтобы избежать бесконечности в собственной энергии.

Однако вскоре после этого правильный способ рассмотрения взаимодействия частицы с тем полем, которое создает она сама (так

называемая теория перенормировки), привел к результатам, блестяще согласующимся с точными опытами: сдвиг Лэмба — Резерфорда, аномальный магнитный момент электрона. Теории действия на расстоянии были опровергнуты [см. Фейнман (1948, 1967)]. Тем самым отпали и теории, включающие «опережающее» взаимодействие, т. е. сходящиеся волны.

Итак, направление времени, заданное на языке математической физики условием излучения, объективно существует в природе.

Необратимость термодинамических явлений есть следствие законов, относящихся к элементарным частицам и элементарным явлениям столкновений частиц. Таким образом, например, закон роста энтропии формулируется после того, как само понятие будущего уже определено. Отсюда следует, что рост энтропии удобно использовать практически для определения направления роста времени (поскольку закон  $\frac{dS}{dt} > 0$  установлен), но это есть именно следствие.

Наконец, вовсе не обоснованными представляются попытки установления связи стрелы времени с космологией, с расширением Вселенной.

Верно то, что мы живем в расширяющемся мире или, по крайней мере, в таком мире, который в настоящее время является расширяющимся.

Можно ли это частное свойство возвести в ранг принципа и использовать для определения направления стрелы времени?

Можно ли сказать: «...будущим называется та эпоха, когда радиус мира (или, что эквивалентно, когда расстояние между данной парой далеких галактик) больше, чем в настоящее время»? Такой взгляд, как уже упоминалось выше, высказывался в литературе [примеры см., например, Гриб (1974)]. Но приняв эту точку зрения, мы должны были бы принять и ее следствия.

В закрытом мире ( $\Omega > 1$ ) после достижения максимального радиуса  $a_m$  начинается сжатие. Значит, если стрела времени определяется космологией, то в момент, соответствующий  $a_m$ , стрела меняет направление.

Вывод этот явно бессмыслен.

Представьте себе ракету, запущенную с Земли со скоростью меньше второй космической,  $v_0 < 11$  км/сек. Такая ракета сперва поднимается, удаляется от Земли, затем, достигнув определенной максимальной высоты  $h_m$ , она начинает падать.

Ясно, что на высоте  $h_m$  не происходит перестройка каких-либо физических законов в ракете: в частности, монотонно идут часы, помещенные на ракете. Переход от расширения к сжатию в закрытой Вселенной полностью аналогичен переходу от подъема к опусканию ракеты. Поэтому совершенно ясно, что в момент максимального

расширения Вселенной стрела времени не меняет направления. Если бы она сменила направление, то в сжимающейся Вселенной лучи света, например, вместо того, чтобы излучаться звездами и уходить в мировое пространство, входили бы в звезды и т. д. Это явно бессмысленно. Если  $\Omega > 1$ , то после смены расширения сжатием еще очень долго плотность излучения во Вселенной будет мала, звезды будут излучать свет и все локальные процессы во Вселенной будут продолжать течь в том же направлении.

Связь стрелы времени с расширением есть (очень важное, разумеется) свойство нашей Вселенной в настоящее время, но эта связь не может быть использована как определение стрелы времени для определения понятия будущего.

Приведенные соображения весьма элементарны. Единственным извинением того, что мы их здесь приводим, является настойчивое повторение ошибочных взглядов в литературе.



# ЛИТЕРАТУРА



- Агекян Т. А., Звезды, галактики, Метагалактика, «Наука», 1970.
- Адамянц Р. А., Алексеев А. Д., Колосницын Н. И., Письма ЖЭТФ 15, 277 (1972).
- Амбарцумян В. А., Научные труды, т. 1, 2, Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1960.
- Амбарцумян В. А., Казютинский В. В., Вопросы философии 3, 91 (1973).
- Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, «Наука», 1969.
- Багров В. Г., Бозриков П. В., Гитман Д. И., Изв. вузов, сер. Радиофиз., 16, 129 (1973).
- Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М., УФН 102, 463 (1970).
- Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М., ЖЭТФ 60, 1969 (1971).
- Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М., ЖЭТФ 62, 1606 (1972).
- Белинский В. А., Халатников И. М., ЖЭТФ 56, 1700 (1969a).
- Белинский В. А., Халатников И. М., ЖЭТФ 57, 2163 (1969b).
- Белинский В. А., Халатников И. М., ЖЭТФ 63, 121 (1972).
- Березинский В. С., ЯФ 11, 399 (1970).
- Березинский В. С., Зацепин Г. Т., Phys. Lett. 28B, 6, 423 (1969).
- Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., Релятивистская квантовая теория, «Наука», 1968.
- Бисноватый-Коган Г. С., Астрон. ж. 45, 74 (1968).
- Бисноватый-Коган Г. С., Астрофизика 7, 121, 223 (1971).
- Бисноватый-Коган Г. С., Астрон. ж. 49, 1238 (1972a).
- Бисноватый-Коган Г. С., ЖЭТФ 62, 1593 (1972b).
- Бисноватый-Коган Г. С., Вайнштейн С. И., Astrophys. Lett. 8, 151 (1971).
- Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б., Астрон. ж. 47, 942 (1970).
- Бисноватый-Коган Г. С., Михайловский А. Б., Астрон. ж. 50, 312 (1973).
- Бисноватый-Коган Г. С., Рузмайкин А. А., Сюняев Р. А., Астрон. ж. 50, 210 (1973).
- Бисноватый-Коган Г. С., Сюняев Р. А., Астрон. ж. 48, 881 (1971).
- Богданова Л. М., Шапиро И. С., Письма ЖЭТФ 20, 217 (1974).
- Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н., Препринт ОИЯИ, Д-1968 (1965).
- Богоявленский О. И., Новиков С. П., ЖЭТФ 64, 1475 (1973).
- Брагинский В. Б., Письма ЖЭТФ 3, 69 (1966).
- Брагинский В. Б., Грищук Л. П., Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Сажин М. В., ЖЭТФ 65, 1729 (1973).
- Брагинский В. Б., Зельдович Я. Б., Мартынов В. К., Мигулин В. В., ЖЭТФ 52, 29 (1967).
- Брагинский В. Б., Зельдович Я. Б., Мартынов В. К., Мигулин В. В., ЖЭТФ 54, 120 (1968).
- Брагинский В. Б., Манукин А. Б., Попов Е. И., Руденко В. Н., Хорев А. А., ЖЭТФ 66, 801 (1974).
- Бронштейн М. П., Phys. Z. Sowjet. 2, 100 (1934).
- Вайнштейн С. И., ЖЭТФ 61, 612 (1971).
- Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б., УФН 106, 431 (1972).
- Вайнштейн С. И., Рузмайкин А. А., Астрон. ж. 48, 918 (1971).
- Вайнштейн С. И., Рузмайкин А. А., Астрон. ж. 49, 448 (1972).

- Вайнштейн С. И., Рузмайкин А. А., Астрон. ж. 50, 12 (1973).  
 Владимиров Ю. С., ЖЭТФ 45, 251 (1963).  
 Воронцов-Вельяминов Б. А., Внегалактическая астрономия, «Наука», 1972.  
 Герценштейн М. Е., ЖЭТФ 41, 113 (1961).  
 Герштейн С. С., Зельдович Я. Б., Письма ЖЭТФ 4, 174 (1966).  
 Гинзбург В. Л., УФН 103, 87 (1971).  
 Гинзбург В. Л., Киржниц Д. А., Любушин А. А., ЖЭТФ 60, 451 (1971).  
 Гинзбург В. Л., Озерной Л. М., Астрон. ж. 42, 943 (1965).  
 Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И., Происхождение космических лучей, Физматгиз, 1963.  
 Голенецкий С. В., Мазец Е. П., Письма ЖЭТФ 14, 201 (1971).  
 Голенецкий С. В., Мазец Е. П., Ильинский В. Н., Аптекарь Р. ., Бредов М. М., Бурьян Я. А., Панов В. Н., Astrophys. Lett. 9, 69 (1971).  
 Гриб А. А., Природа № 4 (1974).  
 Гриб А. А., Мамаев С. Г., ЯФ 10, 1276 (1969).  
 Гриб А. А., Мамаев С. Г., ЯФ 14, 800 (1971).  
 Грищук Л. П., Кандидатская диссертация, ГАИШ, МГУ, 1967а.  
 Грищук Л. П., ЖЭТФ 53, 1699 (1967б).  
 Грищук Л. П., Астрон. ж. 44, 1017 (1967в).  
 Грищук Л. П., ДАН СССР 190, 1066 (1970).  
 Грищук Л. П., Bulletin de L'Academie Polonaise des Science XIX, 12 (1971).  
 Грищук Л. П., Proc. IAU Symp. № 63, Poland (1973).  
 Грищук Л. П., ЖЭТФ 67, 825 (1974).  
 Грищук Л. П., Дорошкевич А. Г., Лукаш В. Н., ЖЭТФ 61, 3 (1971).  
 Грищук Л. П., Дорошкевич А. Г., Новиков И. Д., ЖЭТФ 55, 228 (1968).  
 Грищук Л. П., Дорошкевич А. Г., Юдин В. М., Тезисы докладов III Советской гравитационной конференции, Ереван, 1972.  
 Гуревич Л. Э., Дынкин С. Д., ЖЭТФ 63, 369 (1972).  
 Гуревич Л. Э., Финкельштейн А. М., Рубан В. А., Ar. and Space Sci. 22, 231 (1973).  
 Дашевский В. М., Зельдович Я. Б., Астрон. ж. 41, 1071 (1964).  
 Дашевский В. М., Слыш В. И., Астрон. ж. 42, 863 (1965).  
 Долгов А. Д., Захаров Б. У., Окунь Л. Б., Phys. Lett. 46B, 90 (1973).  
 Дорошкевич А. Г., Астрофизика 1, 255 (1965).  
 Дорошкевич А. Г., Астрофизика 2, 37 (1966).  
 Дорошкевич А. Г., Астрофизика 3, 175 (1967).  
 Дорошкевич А. Г., Кандидатская диссертация, ИГМ, 1968.  
 Дорошкевич А. Г., Астрофизика 6, 581 (1970).  
 Дорошкевич А. Г., Astrophys. Lett. 14, 11 (1973).  
 Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Астрон. ж. 40, 807 (1963).  
 Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Препринт ИГМ, № 36 (1974); Ar. and Space Sci. (в печати).  
 Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Астрон. ж. 44, 295 (1967а).  
 Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Письма ЖЭТФ 5, 119 (1967б).  
 Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., ЖЭТФ 53, 644 (1967в).  
 Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., АИ № 442 (1967г).  
 Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Письма ЖЭТФ 8, 95 (1968).  
 Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Проблемы теоретической физики. Сборник, посвященный Н. Н. Боголюбову, «Наука», 1969а.  
 Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Астрофизика 5, 15 (1969б).  
 Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., ЖЭТФ 60, 3 (1971).  
 Дорошкевич А. Г., Лонгейр М. С., Зельдович Я. Б., MNRAS 147, 139 (1970).  
 Дорошкевич А. Г., Лукаш В. Н., Новиков И. Д., ЖЭТФ 60, 1201 (1971).  
 Дорошкевич А. Г., Лукаш В. Н., Новиков И. Д., ЖЭТФ 64, 1457 (1973).  
 Дорошкевич А. Г., Лукаш В. Н., Новиков И. Д., Астрон. ж. 51, 940 (1974).  
 Дорошкевич А. Г., Новиков И. Д., ДАН СССР 154, 809 (1964).  
 Дорошкевич А. Г., Новиков И. Д., Астрон. ж. 47, 948 (1970).  
 Дорошкевич А. Г., Рябенский В. С., Шандарин С. Ф., Астрофизика 9, 258 (1973).

- Дорошкевич А. Г., Сюняев Р. А., Астрон. ж. **46**, 955 (1969).  
 Дорошкевич А. Г., Сюняев Р. А., Зельдович Я. Б., Proc. IAU Symp. № 63, Poland (1973).  
 Дорошкевич А. Г., Шандарин С. Ф., Астрофизика **9**, 549 (1973).  
 Дорошкевич А. Г., Шандарин С. Ф., Астрон. ж. **51**, 41 (1974).  
 Дорошкевич А. Г., Шандарин С. Ф., Астрон. ж. **52**, 9 (1975).  
 Ефимов Н. В., Высшая геометрия, «Наука», 1961.  
 Захаров В. Е., Сагдеев Р. З., ДАН СССР **192**, 297 (1970).  
 Зельдович Я. Б., ЖТФ **19**, 1119 (1949).  
 Зельдович Я. Б., ЖЭТФ **41**, 1609 (1961).  
 Зельдович Я. Б., ЖЭТФ **43**, 1037 (1962a).  
 Зельдович Я. Б., ЖЭТФ **43**, 1561 (1962b).  
 Зельдович Я. Б., УФН **80**, 357 (1963).  
 Зельдович Я. Б., Астрон. ж. **41**, 19 (1964a).  
 Зельдович Я. Б., Астрон. ж. **41**, 873 (1964b).  
 Зельдович Я. Б., ДАН СССР **163**, 1359 (1965a).  
 Зельдович Я. Б., ЖЭТФ **48**, 986 (1965b).  
 Зельдович Я. Б., УФН **86**, 303 (1965b).  
 Зельдович Я. Б., Advances Astronomy and Astrophys. **3**, 241 (1965 г).  
 Зельдович Я. Б., Письма ЖЭТФ **6**, 1050 (1967).  
 Зельдович Я. Б., УФН **95**, 209 (1968).  
 Зельдович Я. Б., Астрон. ж. **46**, 775 (1969).  
 Зельдович Я. Б., Письма ЖЭТФ **11**, 30 (1970a).  
 Зельдович Я. Б., Астрофизика **6**, 119 (1970b).  
 Зельдович Я. Б., Письма ЖЭТФ **12**, 443 (1970b).  
 Зельдович Я. Б., MNRAS **160**, 1p (1972a).  
 Зельдович Я. Б., in «Magic without Magic: John Archibald Wheeler», ed. J. Klauder, San Francisco, 1972b.  
 Зельдович Я. Б., Письма ЖЭТФ **16**, 425 (1972b).  
 Зельдович Я. Б., Препринт ИПМ № 66 (1973a); см. Лонгейр (1974).  
 Зельдович Я. Б., ЖЭТФ **64**, 58 (1973b).  
 Зельдович Я. Б., ЖЭТФ **65**, 1311 (1973b).  
 Зельдович Я. Б., Письма ЖЭТФ **20**, 338 (1974).  
 Зельдович Я. Б., Письма в АЖ **1**, № 1 (1975a).  
 Зельдович Я. Б., УФН **115**, 169 (1975b).  
 Зельдович Я. Б., Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А., ЖЭТФ **62**, 1217 (1972).  
 Зельдович Я. Б., Каждан Я. М., Астрофизика **6**, 109 (1970).  
 Зельдович Я. Б., Кобзарев И. Ю., Окунь Л. Б., ЖЭТФ **67**, 3 (1974).  
 Зельдович Я. Б., Курт В. Г., Сюняев Р. А., ЖЭТФ **55**, 278 (1968).  
 Зельдович Я. Б., Левич Е. В., Письма ЖЭТФ **11**, 57 (1970).  
 Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д., Элементы прикладной математики, «Наука», 1972.  
 Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д., Элементы математической физики. Среда из взаимодействующих частиц, «Наука», 1973.  
 Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Астрон. ж. **44**, 663 (1967a).  
 Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Релятивистская астрофизика, «Наука», 1967b.  
 Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Письма ЖЭТФ **6**, 772 (1967b).  
 Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Астрон. ж. **46**, 960 (1969).  
 Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Астрофизика **6**, 379 (1970).  
 Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Теория тяготения и эволюция звезд, «Наука», 1971.  
 Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Старобинский А. А., ЖЭТФ **66**, 1897 (1974).  
 Зельдович Я. Б., Окунь Л. Б., Пикельнер С. Б., УФН **87**, 113 (1965).  
 Зельдович Я. Б., Пикельнер С. Б., ЖЭТФ **56**, 310 (1969).  
 Зельдович Я. Б., Подурец М. А., ДАН СССР **156**, 57 (1964).  
 Зельдович Я. Б., Подурец М. А., Астрон. ж. **42**, 963 (1965).  
 Зельдович Я. Б., Полнарев А. Г., Астрон. ж. **51**, 30 (1974).  
 Зельдович Я. Б., Попов В. С., УФН **105**, 403 (1971).

- Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П., Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Физматгиз, 1966.
- Зельдович Я. Б., Сахаров А. Д., ЯФ 4, 395 (1966).
- Зельдович Я. Б., Сахаров А. Д., Acta Phys. Acad. Sci. Hung. 22, 153 (1967).
- Зельдович Я. Б., Смородинский Я. А., ЖЭТФ 41, 907 (1961).
- Зельдович Я. Б., Смородинский Я. А., УФН 88, 199 (1966а).
- Зельдович Я. Б., Смородинский Я. А., УФН 89, 734 (1966б).
- Зельдович Я. Б., Старобинский А. А., ЖЭТФ 61, 2161 (1971).
- Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А., Ар. and Space Sci. 4, 285 (1969).
- Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А., Ар. and Space Sci. 6, 358 (1970).
- Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А., Препринт ИГиМ, № 94 (1974).
- Зельманов А. А., ДАН СССР 124, 1030 (1959а).
- Зельманов А. А., Труды 6-го совещания по вопросам космогонии, Изд-во АН СССР, 1959б.
- Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А., Астрон. ж. 51, 698 (1974а).
- Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А., Астрон. ж. 51, 1162 (1974б).
- Каплан С. А., Пикельнер С. Б., Межзвездная среда, Физматгиз, 1963.
- Караченцев И. Д., Сообщения Бюраканской обсерватории 39, 76 (1968).
- Кардашев Н. С., АЦ № 430 (1967).
- Качаров Г. Е., Изв. АН СССР 5, 795 (1965).
- Киппер А., Астрон. ж. 27, 321 (1950).
- Киржниц Д. А., Природа № 1, 38 (1973).
- Киржниц Д. А., Линде А. Д., ЖЭТФ 67, 1263 (1974).
- Киржниц Д. А., Файнберг В. Я., Письма ЖЭТФ 18, 596 (1973).
- Кисляков А. Г., Чернышев В. И., Лебский Ю. В., Мальцев В. А., Серов Н. В., Астрон. ж. 48, 39 (1971).
- Климов Ю. Г., Астрон. ж. 40, 874 (1963).
- Кобзарев И. Ю., Окунь Л. Б., ЖЭТФ 43, 1904 (1962).
- Кобзарев И. Ю., Пешков П. И., ЖЭТФ 67, 428 (1974).
- Колмогоров А. Н., ДАН СССР 30, 299 (1941).
- Комберг Б. В., Новиков И. Д., Письма в АЖ 1, № 1 (1975).
- Комберг Б. В., Рузмайкин А. А., Препринт ИГиМ № 8 (1972).
- Компанеев А. С., ЖЭТФ 31, 876 (1956).
- Компанеев А. С., Чернов А. С., ЖЭТФ 47, 1939 (1964).
- Константинов Б. П., Бредов М. М., Белявский А. И., Соколов И. А., Космические исследования 4, 66 (1966).
- Кузьмин В. А., Письма ЖЭТФ 13, 335 (1970).
- Курсков А. А., Озерной Л. М., Астрон. ж. 51, 270 (1974а).
- Курсков А. А., Озерной Л. М., Астрон. ж. 51, 508 (1974б).
- Курсков А. А., Озерной Л. М., Астрон. ж. 51, 1177 (1974в).
- Курт В. Г., Сюняев Р. А., Письма ЖЭТФ 5, 299 (1967а).
- Курт В. Г., Сюняев Р. А., Космические исследования 5, 573 (1967б).
- Курт В. Г., Сюняев Р. А., Астрон. ж. 44, 6 (1967в).
- Курт В. Г., Сюняев Р. А., Proc. IAU Symp. № 36, Holland (1970).
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., ЖЭТФ 32, 618 (1957).
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, Физматгиз, 1964.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, «Наука», 1973.
- Ландау Л. Д., Померанчук И. Я., ДАН СССР 102, 489 (1955).
- Левин Е. В., Сюняев Р. А., Астрон. ж. 48, 461 (1971).
- Линде А. Д., Письма ЖЭТФ 19, 320 (1974).
- Лифшиц Е. М., ЖЭТФ 16, 587 (1946).
- Лифшиц Е. М., Лифшиц И. М., Халатников И. М., ЖЭТФ 59, 322 (1970).
- Лифшиц Е. М., Халатников И. М., ЖЭТФ 39, 149 (1960).
- Лифшиц Е. М., Халатников И. М., УФН 80, 391 (1963а).
- Лифшиц Е. М., Халатников И. М., Adv. in Physics 12, 185 (1963б).
- Лонгейр М. С., Сюняев Р. А., Письма ЖЭТФ 10, 56 (1969а).

- Лонгейр М. С., Сюняев Р. А., Nature 223, 719 (1969б).  
 Лонгейр М. С., Сюняев Р. А., Astrophys. Lett. 4, 65 (1969в).  
 Лонгейр М. С., Сюняев Р. А., УФН 105, 41 (1971).  
 Лукаш В. Н., Астрон. ж. 51, 281 (1974а).  
 Лукаш В. Н., Письма ЖЭТФ 19, 499 (1974б).  
 Лукаш В. Н., ЖЭТФ 67, 1594 (1974в).  
 Лукаш В. Н., Новиков И. Д., Старобинский А. А., ЖЭТФ (в печати).  
 Лукаш В. Н., Старобинский А. А., ЖЭТФ 66, 1515 (1974).  
 Магалинский В. Б., Сильвестров В. В., Тезисы докладов III Советской гравитационной конференции, Ереван, 1972.  
 Марков М. А., ЖЭТФ 51, 878 (1966).  
 Марков М. А., Доклад на 6-й гравитационной конференции, Ереван, 1973.  
 Марочник Л. С., Сучков А. А., УФН 112, 275 (1974).  
 Михайловский А. Б., Фридман А. М., ЖЭТФ 61, 457 (1971).  
 Михайловский А. Б., Фридман А. М., Астрон. ж. 50, 88 (1973).  
 Михайловский А. Б., Фридман А. М., Эпельбаум Я. Г., ЖЭТФ 59, 1608 (1970).  
 Мишустин И. Н., Рузмакин А. А., ЖЭТФ 61, 441 (1971).  
 Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1, «Наука», 1965.  
 Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2, «Наука», 1967.  
 Нарожный Н. Б., Никишов А. И., ЯФ 11, 1072 (1970).  
 Нарожный Н. Б., Никишов А. И., ЖЭТФ 65, 862 (1973).  
 Никишов А. И., ЖЭТФ 57, 1210 (1969).  
 Новиков И. Д., Астрон. ж. 38, 564 (1961).  
 Новиков И. Д., Вестник МГУ, серия III, № 6, 61 (1962).  
 Новиков И. Д., Астрон. ж. 40, 772 (1963).  
 Новиков И. Д., Сообщения ГАИШ № 132, 3, 43 (1964а).  
 Новиков И. Д., ЖЭТФ 46, 686 (1964б).  
 Новиков И. Д., Астрон. ж. 41, 1075 (1964в).  
 Новиков И. Д., Астрон. ж. 45, 538 (1968).  
 Новиков И. Д., Астрон. ж. 47, 1203 (1970).  
 Новиков И. Д., Астрон. ж. 52, 1000 (1975).  
 Новиков И. Д., Зельдович Я. Б., Ann. Rev. Astron. Astrophys. 5, 627 (1967).  
 Новиков И. Д., Зельдович Я. Б., Ann. Rev. Astron. Astrophys. 11, 387 (1973).  
 Новиков С. П., ЖЭТФ 62, 1977 (1972).  
 Новокрещенова С. И., Рудницкий Г. М., Астрон. ж. 50, 877 (1973).  
 Озерной Л. М., Астрон. ж. 48, 1160 (1971).  
 Озерной Л. М., Астрон. ж. 51, 1108 (1974).  
 Озерной Л. М., Розенталь И. Л., Прилуцкий О. Ф., Астрофизика высоких энергий, Атомиздат, 1973.  
 Озерной Л. М., Чернин А. Д., Астрон. ж. 44, 1131 (1967).  
 Озерной Л. М., Чернин А. Д., Астрон. ж. 45, 1137 (1968).  
 Озерной Л. М., Чибисов Г. В., Астрон. ж. 47, 769 (1970).  
 Окунь Л. Б., УФН 89, 603 (1966).  
 Парадоксов П., УФН 89, 707 (1966).  
 Парийский Ю. Н., Астрон. ж. 45, 279 (1968).  
 Парийский Ю. Н., Астрон. ж. 49, 1322 (1972).  
 Парийский Ю. Н., Астрон. ж. 50, 453 (1973).  
 Пелюченко С. А., Станкевич К. С., Астрон. ж. 46, 283 (1969).  
 Петров А. З., Новые методы в общей теории относительности, «Наука», 1966.  
 Пикельнер С. Б., Астрон. ж. 44, 915 (1967).  
 Пикельнер С. Б., Comm. on Astrophys. and Space Phys. 6, 15 (1974).  
 Пикельнер С. Б., Вайнштейн Л. А., Письма ЖЭТФ 4, 307 (1966).  
 Покровский Г. И., Корсунский В. К., Naturwiss. 19, 421 (1931).  
 Понтекоров Б. М., Смородинский Я. А., ЖЭТФ 41, 239 (1961).  
 Пузанов В. И., Саломонович А. Е., Станкевич К. С., Астрон. ж. 44, 1129 (1967).  
 Рубан В. А., Препринт ЛФТИ № 355 (1971).  
 Рубан В. А., Финкельштейн А. М., Препринт ЛИЯФ № 59 (1973).

- Рузмайкина Т. В., Астрон. ж. 49, 1229 (1972).  
Сахаров А. Д., ЖЭТФ 49, 345 (1965).  
Сахаров А. Д., Письма ЖЭТФ 3, 439 (1966).  
Сахаров А. Д., Письма ЖЭТФ 5, 32 (1967а).  
Сахаров А. Д., ДАН СССР 177, 70 (1967б).  
Сибгатулин Н. Р., ЖЭТФ 66, 1187 (1974).  
Силвестров В. В., Астрон. ж. 51, 293 (1974).  
Соколов Д. Д., ДАН СССР 195, 1307 (1970).  
Соколов Д. Д., Старобинский А. А., Астрон. ж. 52, 1000 (1975).  
Соколов Д. Д., Шварцман В. Ф., ЖЭТФ 66, 412 (1974).  
Спитцер Л., Физика полностью ионизованного газа, «Мир», 1962.  
Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946.  
Станюкович К. П., Гравитационное поле и элементарные частицы, Атомиздат, 1965.  
Станюкович К. П., УФН 89, 731 (1966а).  
Станюкович К. П., ДАН СССР 168, 781 (1966б).  
Станюкович К. П., Неустановившиеся движения сплошной среды, «Наука», 1971.  
Станюкович К. П., Шаршикеев О. Ш., Астрофизика 6, 571 (1970).  
Станюкович К. П., Шаршикеев О. Ш., ПММ 37, 739 (1973).  
Сюняев Р. А., ДАН СССР 179, 45 (1968).  
Сюняев Р. А., Астрон. ж. 46, 929 (1969а).  
Сюняев Р. А., Astrophys. Lett. 3, 33 (1969б).  
Сюняев Р. А., Астрон. ж. 48, 244 (1971).  
Сюняев Р. А., Зельдович Я. Б., Nature 223, 721 (1969).  
Сюняев Р. А., Зельдович Я. Б., Ap. and Space Sci. 7, 3 (1970а).  
Сюняев Р. А., Зельдович Я. Б., Ap. and Space Sci. 7, 20 (1970б).  
Сюняев Р. А., Зельдович Я. Б., Comm. on Astrophys. and Space Phys. 2, 66 (1970в).  
Сюняев Р. А., Зельдович Я. Б., Comm. on Astrophys. and Space Phys. 4, 173 (1972а).  
Сюняев Р. А., Зельдович Я. Б., Astron. and Ap. 20, 189 (1972б).  
Тагиров Э. А., Черников Н. А., Препринт ОИЯИ Р2-3777 (1968).  
Тиунов Е. А., Чернин А. Д., Астрофизика 7, 161 (1971).  
Фаддеев Л. Д., Попов В. Н., Phys. Lett. 258, 29 (1967).  
Фейнман Р., УФН 91, 29 (1967).  
Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., Фейнмановские лекции по физике, «Мир», 1965.  
Финкельштейн А. М., Крайнович В. Я., Celestial Mechanics, 1974.  
Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, изд. 2-е, Физматгиз, 1961.  
Фридман А. А., УФН 80, 439, 447 (1963).  
Халатников И. М., ЖЭТФ 48, 261 (1965).  
Халатников И. М., Письма ЖЭТФ 5, 195 (1967).  
Халатников И. М., Лифшиц Е. М., Phys. Rev. Lett. 24, 76 (1970).  
Хаякава С., Физика космических лучей, ч. I, «Мир», 1973.  
Хаякава С., Физика космических лучей, ч. II, «Мир», 1974.  
Холопов А. С. (ред.), Строение звездных систем, ИЛ, 1962.  
Черников Н. А., Шавохина Н. С., ТМФ 16, 77 (1973).  
Чернин А. Д., Астрофизика 5, 656 (1969).  
Чернин А. Д., Письма ЖЭТФ 11, 317 (1970).  
Чернин А. Д., Astrophys. Lett. 8, 31 (1971).  
Чернин А. Д., Astrophys. Lett. 10, 125 (1972).  
Чернин А. Д., Эйдельман Е. Д., Астрофизика 5, 654 (1969).  
Чернин А. Д., Эйдельман Е. Д., Астрофизика 7, 314 (1971).  
Чибицов Г. В., Астрон. ж. 49, 74 (1972а).  
Чибицов Г. В., Астрон. ж. 49, 286 (1972б).  
Чибицов Г. В., Кандидатская диссертация, МФТИ, 1972в.  
Чибицов Г. В., Письма в АЖ 1, № 3 (1975).  
Шандарин С. Ф., Астрон. ж. 51, 667 (1974).  
Шапиро И. С., УФН 109, 432 (1973).  
Шварцман В. Ф., Письма ЖЭТФ 9, 315 (1969).

- Шикин И. С., ЖЭТФ 59, 182 (1970).  
 Шкловский И. С., Астрон. ж. 42, 893 (1965).  
 Шкловский И. С. АЦ № 429 (1967).  
 Эйзенхарт Л. П., Непрерывные группы преобразований, ИЛ. 1947.  
 Эйнасто Я., Каасик А., Саар Э., Nature 250, 309 (1974a).  
 Эйнасто Я., Саар Э., Каасик А., Траат Р., АЦ № 811 (1974b).  
 Эйнасто Я., Саар Э., Каасик А., Чернин А. Д., Препринт № 2, Тарту (1974в).  
 Эйнасто Я., Чернин А. Д., Каасик А., Каламис П., Венник Я., Препринт № 3, Тарту (1974r).  
 Эйштейн А., Собр. научных трудов, «Наука», 1966.  
 Abell G. O., Ap. J. Suppl. 3, 211 (1958).  
 Abell G. O., Astron. J. 66, 607 (1961).  
 Abell G. O., Proc. IAU Symp. № 15, ed. G. McVittie, p. 213, 1962.  
 Abell G. O., Ann. Rev. Astron. Astrophys. 3, 1 (1965).  
 Alexander J. K., Brown L. W., Clark T. A., Stone R. G., Weber P. R., Ap. J. Lett. 157, L163 (1969).  
 Alfven H., Rev. Mod. Phys. 37, 652 (1965).  
 Alfven H., Physics Today 24, 28 (1971).  
 Alfven H., Elvius A., Proc. IAU Symp. № 63, Poland (1973).  
 Alfven H., Klein O., Zs. für Phys. 23, 187 (1962).  
 Alpher R., Herman R., Ann. Rev. Nucl. Sci. 2, 1 (1953).  
 Arons J., McCray R., Ap. J. 158, 291 (1969).  
 Arp H., Bertola F., Ap. J. 163, 195 (1971).  
 Bahcall J. N., Hills R. E., Ap. J. 179, 699 (1973).  
 Bardeen J. M., Wagoner R. V., Ap. J. 167, 359 (1971).  
 Bechi C., Gallinaro G., Morpurgo G., Nuovo Cimento 39, 409 (1965).  
 Berg S. Van den, Publ. Obs. Dunlap 2, № 6 (1960).  
 Berger B. K., University of Maryland, Technical Report, 73-024, 1972.  
 Berger B. K., Ann. Phys. 83, 458 (1974).  
 Bergkvist K. E., Topical Conference on Weak Interactions, Geneva, 1969, CERN 69-7, p. 91.  
 Bergkvist K. E. Reviews of Particle Physics, Rev. Mod. Phys. 43, № 2, 11 (1971).  
 Bergkvist K. E. Nucl. Phys. B39, 317 (1972).  
 Bertotti B., Proc. Roy. Soc. 294, 195 (1966).  
 Bleifmann L., Zs. Naturforsch. 5a, 65 (1950).  
 Blair A. G., Beery J. G., Edeskuty F., Hiebert R. D., Shipley J. P., Williamson K. D., Phys. Rev. Lett. 27, 1154 (1971).  
 Boccaletti D., De Sabbata V., Fortini P., Gualdi G., Nuovo Cimento 70B, 129 (1970).  
 Bondi H., Cosmology, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London and N. Y., 1961.  
 Bondi H., Gold T., MNRAS 108, 252 (1948).  
 Bonnor W. B., MNRAS 117, 104 (1957).  
 Bortolot V. J., Clauser J. F., Thaddeus P., Phys. Rev. Lett. 22, 307 (1969).  
 Bowyer C. S., Field G. B., Mach J. E., Nature 217, 32 (1968).  
 Boynton R. E., Partridge R. B., Ap. J. 181, 243 (1973).  
 Boynton P. E., Stokes R. A., Wilkinson D. T., Phys. Rev. Lett. 21, 462 (1968).  
 Brachmachary R. L., Nuovo Cimento 2, 850 (1965).  
 Brans C., Phys. Rev. 125, 2194 (1962).  
 Brans C., Dicke R., Phys. Rev. 124, 965 (1961).  
 Bridle A. N., MNRAS 136, 219 (1967).  
 Bridle A. N., Nature 219, 1136 (1968).  
 Brown F. A., MNRAS 127, 517 (1964).  
 Brown F. A., MNRAS 138, 527 (1968).  
 Bunner A. N., Coleman P. C., McCammon D., Kraushaar W. L., Palmieri T. M., Shilepsky A., Ulmer M., Nature 223, 1222 (1969).  
 Burbidge G. R., Nature 233, 36 (1971).  
 Burbidge G. R., O'Dell S. L., Ap. J. 178, 583 (1972).

- Burbidge G. R., O'Dell S. L., Ap. J. 183, 759 (1973).  
 Burbidge E. M., Sargent W. L. W., Les Nouveaux des Galaxies, Vatican, p. 351, 1971.  
 Callan C. G., Dicke R. H., Peebles P. J. E., Amer. J. Phys. 33, 105 (1965).  
 Carpenter R. L., Gulkis S., Sato H., Ap. J. Lett. 182, L61 (1973).  
 Chiu H. Y., Ann. Phys. 16, 321 (1961).  
 Chiu H. Y., Ann. Phys. 26, 364 (1964).  
 Chiu H. Y., Phys. Rev. Lett. 17, 712 (1966).  
 Chupka W. A., Schiffer J. P., Stevens C. M., Phys. Rev. Lett. 17, 60 (1966).  
 Collins C. B., Hawking S. W., Ap. J. 180, 317 (1973a).  
 Collins C. B., Hawking S. W., MNRAS 182, 307 (1973b).  
 Cowsik R., McClelland J., Phys. Rev. Lett. 29, 669 (1972).  
 Cristensen J. H., Cronin J. W., Fitch V. L., Turley R., Phys. Rev. Lett. 13, 138 (1964).  
 Dautcourt G., MNRAS 144, 255 (1969).  
 Davies P. C. W., Nature 249, 208 (1974).  
 De Witt B. S., Phys. Rev. 160, 113 (1967a).  
 De Witt B. S., Phys. Rev. 162, 1195 (1967b).  
 De Witt C., Wheeler J. A., Battelle Rencontres, Benjamin Press, New York, 1968.  
 Dicke R. H., Phys. Rev. 126, 1875 (1962).  
 Dicke R. H., in «Gravitation and Relativity», ed. H. Y. Chiu, W. Hoffmann, N. Y., 1964; русск. перевод в сб. «Гравитация и относительность», «Мир», 1965.  
 Dicke R. H., Ap. J. 152, 1 (1968).  
 Dicke R. H., Gravitation and Universe, Philadelphia, 1970.  
 Dicke R. H., Peebles P. J. E., Ap. J. 194, 838 (1968).  
 Dicke R. H., Peebles P. J. E., Roll P. G., Wilkinson D. T., Ap. J. 142, 414 (1965).  
 Dirac P. A. M., Nature 139, 323 (1937).  
 Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc. 199 (1938).  
 Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc. A338, 439 (1974).  
 Dreicer H., Phys. of Fluids 7, 735 (1964).  
 Dyer C. C., Roeder R. C., Ap. J. Lett. 180, L31 (1973).  
 Einstein A., Strauss E., Rev. Mod. Phys. 17, 120 (1945).  
 Ellis G., McCallum M. A. N., Commun. Math. Phys. 12, 108 (1969).  
 Epstein R. I., Arnett W. D., Schramm D. N., Ap. J. Lett. 190, L13 (1974).  
 Evans D. S., (ed), Proc. IAU Symp. № 49 (1972).  
 Ewing M. S., Burke B. F., Staelin D. H., Phys. Rev. Lett. 19, 1251 (1967).  
 Felten J. E., Morrison P., Ap. J. 148, 686 (1966).  
 Fermi E., Turkevich A., unpublished see Alpher R. A., Herman R. C., Rev. Mod. Phys. 22, 153 (1950).  
 Fermi E., Yang C. N., Phys. Rev. 76, 1739 (1949).  
 Feynman R. P., Phys. Rev. 74, 939 (1948).  
 Feynman R. P., Acta Phys. Polon. 24, 697 (1963).  
 Field G. B., Ap. J. 142, 531 (1965).  
 Field G. B., Galaxies and the Universe; Stars and Stellar Systems, v. 9, ed. A. and M. Sandage, Chicago Univ. Press, 1973 a (in press).  
 Field G. B., Proc. IAU Symp. № 63, Poland (1973b).  
 Field G. B., Hitchcock J. L., Phys. Rev. Lett. 16, 817 (1966a).  
 Field G. B., Hitchcock J. L., Phys. J. 146, 1 (1966b).  
 Fitremann M., Frisch U., Compt. Rend. B268, 705 (1969).  
 Fowler W. A., Comm. on Astrophys. and Space Phys. 2, 134 (1970).  
 Fowler W. A., in «Cosmology, Fusion and Other Matters», ed. Reines F., Adam Hilger Ltd, London, p. 67, 1972.  
 Frautschi S., Steigman G., Bahcall J. N., Ap. J. 175, 307 (1972).  
 Fricke J., Preprint OAP-341 (1973).  
 Fulling S. A., Parker L., Ann. Phys. 87, 176 (1974).  
 Gamow G., Phys. Rev. 70, 572 (1946).  
 Gamow G., Phys. Rev. 74, 505 (1948).



- Gamow G., Phys. Rev. 86, 251 (1952).  
 Gamow G., Proc. Nat. Acad. Sci. 40, 480 (1954).  
 Gamow G., Proc. Nat. Acad. Sci. 59, № 2, 313 (1968).  
 Gold T., Recent Developments in GR, ed. McMillan, N. Y., Pergamon Press, p. 225, 1962.  
 Goldsmith D. W., Habing H. J., Field G. B., Ap. J. 158, 173 (1969).  
 Goldsmith D. W., Silk J., Ap. J. 172, 563 (1972).  
 Gould R. J., Ramsay W., Ap. J. 144, 587 (1966).  
 Greenstein G., Ap. and Space Sci. 2, 155 (1968).  
 Gunn J. E., Ap. J. 147, 61 (1967).  
 Gunn J. E., Peterson S. A., Ap. J. 142, 1633 (1965).  
 Guyot M., Zeldovich Ya. B., Astron. and Ap. 9, 227 (1970).  
 Hagedorn R., Nuovo Cimento Suppl. 3, 147 (1965).  
 Hagedorn R., Ref. Th. 1027-CERN (1969).  
 Hagedorn R., Cargèse Lectures in Physics, ed. E. Schatzman, p. 643, 1973.  
 Harrison E. R., Astrophys. Lett. 3, 133 (1968).  
 Harrison E. R., Phys. Rev. D1, 2726 (1970a).  
 Harrison E. R., MNRAS 147, 279 (1970b).  
 Harrison B. K., Thorne K. S., Wakano M., Wheeler J. A., Gravitation Theory and Gravitational Collapse, Univ. Chicago Press, 1965; русск. перевод: Теория гравитации и гравитационный коллапс, «Мир», 1967.  
 Harkins J. D., J. Am. Chem. Soc. 39, 856 (1917).  
 Hauser M. G., Peebles P. J. E., Ap. J. 185, 757 (1973).  
 Hawking S. W., Ap. J. 145, 544 (1966a).  
 Hawking S. W., Proc. Roy. Soc. London A294, 511 (1966b).  
 Hawking S. W., Ellis G. F., The Large Scale Structure of Space time, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.  
 Hawking S. W., Kerr E., Proc. IAU Symp. № 63, Poland (1973).  
 Hawking S. W., Penrose R., Proc. Roy. Soc. London A314, 528 (1970).  
 Hawking S. W., Taylor R. T., Nature 209, 1278 (1966).  
 Hayashi C., Progr. Theor. Phys. 5, 224 (1950).  
 Heckmann O., Theorien der Kosmologie, Berlin, 1942.  
 Heckmann O., Schücking E. Z., Astrophys. 38, 95 (1955).  
 Heckmann O., Schücking E. Z., Astrophys. 40, 81 (1956).  
 Heckmann O., Schücking E. Z., in «Handbuch der Physik», ed. S. Flügge, 53. Springer, Berlin, 1959.  
 Heckmann O., Schücking E., Gravitation, New York, p. 438, 1962.  
 Henry R. C., Fritz G., Mecking J. E., Friedmann H., Byram E. T., Ap. J. 153, L199 (1968).  
 Hewish A., Readhead A. C. S., Duffett-Smith P. J., Nature 252, 657 (1974).  
 Hill H. A., Clayton P. D., Patz D. L., Healy A. W., Stebbins R. T., Oleson J. R., Zanoni C. A., Phys. Rev. Lett. 33, 197 (1974).  
 Holmberg E., Arkiv för Astronomi 5, 305 (1969).  
 Houck J. R., Harwit M. O., Science 164, 1271 (1969a).  
 Houck L. R., Harwit M. O., Ap. J. 157, L45 (1969b).  
 Howell T. F., Shakeshaft J. R., Nature 210, 1318 (1966).  
 Howell T. F., Shakeshaft J. R., Nature 216, 753 (1967).  
 Hoyle F., MNRAS 108, 372 (1948).  
 Hoyle F., in «La structure et L'évolution de L'univers», II Conseil de Physique Solvay, Bruxelles, 1958.  
 Hoyle F., Nature 223, 936 (1969).  
 Hoyle F., Fowler W. A., Nature 241, 384 (1973).  
 Hoyle F., Narlikar J. V., Proc. Roy. Soc. 273, 4 (1963).  
 Hu B. L., Phys. Rev. D 9, 3263 (1974).  
 Hu B. L., Fulling C. A., Parker L., Phys. Rev. D 8, 2377 (1973).  
 Hunter C., Ap. J. 136, 594 (1962).  
 Iben I., Root R. T., Ap. J. 159, 605 (1970).

- Isaacson R. A., Phys. Rev. **166**, 1263 (1968a).  
 Isaacson R. A., Phys. Rev. **166**, 1272 (1968b).  
 Jacobs K. C., Preprint, Cambridge (1969).  
 Jancy D. L., Preprint (1970).  
 Jeans J. H., Phil. Trans. **129**, 44 (1902).  
 Jeans J. H., Astronomy and Cosmology, Cambridge, 1929; Cambridge Univ. Press, London and New York, 1969.  
 Jordan P., Astron. Nachr. **276**, 1955 (1948).  
 Jordan P., Schwerkraft und Weltall, Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1955.  
 Kantowski R., Ap. J. **155**, 89 (1969).  
 Kasner E., Amer. J. Math. **43**, 217 (1921).  
 Kawabata K., Fujimoto M., Sofue Y., Fukui M., Publ. Astron. Soc. Japan **21**, 293 (1969).  
 Kellerman R. I., Astron. J. **77**, 531 (1972).  
 Kenderdine S., Ryle M., Pooley G. G., MNRAS **134**, 189 (1966).  
 Klein O., Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit, S. 58, Keweg, Braunschweig, 1961.  
 Kormendy J., Bahcall J. N., Astron. J. **79**, 671 (1973).  
 Laye von M., Sitzber Preuss Akad. Wiss. **723** (1931).  
 Layzer D., Astrophys. Lett. **1**, 99 (1968).  
 Layzer D., Hively R., Ap. J. **179**, 361 (1973).  
 Lemaitre G., Ann. Soc. Sci. Bruxelles **47A**, 49 (1927).  
 Lemaitre G., Ann. Soc. Sci. Bruxelles **A53**, 51 (1933).  
 Lillie C. F., Bull. Amer. Astr. Soc. **1**, 132 (1969).  
 Lindquist R. W., Ann. Phys. **37**, 487 (1966).  
 Longair M. S., MNRAS **133**, 421 (1966).  
 Longair M. S., ed., Confrontation of cosmological theories with observation data, Reidel, Dordrecht, 1974.  
 Longair M. S., Rees M. J., Comm. on Astrophys. and Space Phys. **3**, 79 (1972).  
 Low F. J., Tucker W. H., Phys. Rev. Lett. **21**, 1538 (1968).  
 Lynden-Bell D., Proc. Cambr. Phys. Soc. **58**, 709 (1962).  
 Lynden-Bell D., Ap. J. **139**, 995 (1964).  
 Marx G., Proc. IAU Symp. № 63, Poland (1973).  
 Mattig W., Astron. Nachr. **284**, 109 (1958).  
 Mattig W., Astron. Nachr. **285**, 1 (1959).  
 Matzner R., Ap. J. **154**, 1123 (1968).  
 Matzner R., Misner C. W., Ap. J. **171**, 415 (1972).  
 Matzner R., Ryan M. Bton R., Preprint, 1973.  
 Matzner R., Shepley L. C., Warren I. B., Ann. Phys. **57**, 401 (1970).  
 McCallum M. A. N., Commun. Math. Phys. **20**, 57 (1971).  
 McCone A. I., Nucl. Sci. Abstr. **25**, № 15 (1971).  
 McCrea W. H., Proc. Roy. Soc. A **206**, 562 (1951).  
 McCrea W. H., Milne E., Quart. J. Math. **5**, 73 (1934).  
 McKellar A., Publ. Dominion Astroph. Observ. **7**, № 15 (1941).  
 McVittie G. C., General Relativity and Cosmology, London, 1956; русск. перевод: Общая теория относительности и космология, ИЛ, 1961; 2nd ed. Univ. of Illinois, Urbana, Illinois, 1965.  
 McVittie G. C., in «Handbuch der Physik», ed. S. Flügge, **53**, Springer, Berlin, 1959a.  
 McVittie G. C., Report on Rouaymont's Conference, Paris, 1959b.  
 McVittie G. C., Fact and Theory in Cosmology, MacMillan, New York, 1962a.  
 McVittie G. C., Phys. Rev. **128**, 2871 (1962b).  
 Millea M. F., McColl M., Pedersen R. J., Vernon F. L., Phys. Rev. Lett. **28**, 919 (1971).  
 Miln E. A., Quart. J. Math. Oxford **5**, 64 (1934).  
 Milne E. A., Relativity, Gravitation and World-Structure, Oxford Univ. Press, London and New York, 1935.  
 Milne E. A., Kinematic Relativity, Oxford Univ. Press, London and New York, 1948.

- Misner C. W., Phys. Rev. Lett. 19, 533 (1967).  
 Misner C. W., Ap. J. 158, 431 (1968).  
 Misner C. W., Phys. Rev. Lett. 22, 1071 (1969a).  
 Misner C. W., Phys. Rev. 186, 1319, 1328 (1969b).  
 Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., Gravitation, San-Francisco, W. H. Freeman and Company, 1973.  
 Morgenstern R. E., Phys. Rev. D7, 1570 (1973).  
 Muehlner D. J., Weiss R., Phys. Rev. Lett. 24, 742 (1970).  
 Muehlner D. J., Weiss R., Phys. Rev. Lett. 30, 757 (1973).  
 Nariai H., Progr. Theor. Phys. 42, 544 (1969a).  
 Nariai H., Progr. Theor. Phys. 42, 742 (1969b).  
 Narlikar J. V., MNRAS 126, 203 (1963).  
 Ne'eman Y., Ap. J. 141, 1303 (1965).  
 Neyman J., Scott E. L., Ap. J. 67, 582 (1962).  
 Nordsieck K. H., Ap. J. 184, 719 (1973).  
 Nutku Y., Ap. J. 158, 991 (1969).  
 Oke J. B., Ap. J. 147, 901 (1967).  
 Omnes R., Phys. Rev. Lett. 23, 38 (1969).  
 Omnes R., Astron. and Ap. 10, 228 (1971a).  
 Omnes R., Astron. and Ap. 11, 450 (1971b).  
 Omnes R., Astron. and Ap. 15, 275 (1971c).  
 Oort J. H., in «La structure et L'évolution de L'univers», 11 Conseil de Physique Solvey, Bruxelles, 1958.  
 Oort J. H., Astron. and Ap. 7, 384 (1970).  
 Ostriker J. P., Peebles R. J. E., Yahil A., Ap. J. Lett. 193, L1 (1974).  
 Paal G., Acta Phys. Acad. Sci. Hung. 30, 51 (1971).  
 Parker E. N., Ap. J. 163, 255 (1971).  
 Parker L., Phys. Rev. Lett. 21, 562 (1968).  
 Parker L., Phys. Rev. 183, 1057 (1969).  
 Parker L., Phys. Rev. D3, 346 (1971).  
 Parker L., Phys. Rev. Lett. 28, 705 (1972).  
 Parker L., Phys. Rev. D7, 976 (1973).  
 Parker L., Fulling S. A., Phys. Rev. D9, 341 (1974).  
 Partridge R. B., Proc. IAU Symp. № 63, Poland (1973).  
 Partridge R. B., Peebles P. J. E., Ap. J. 147, 868 (1967a).  
 Partridge R. B., Peebles P. J. E., Ap. J. 148, 377 (1967b).  
 Pati J. S., Salam A., Phys. Rev. Lett. 31, 661 (1973).  
 Pauli W., Theory of Relativity, 2nd ed. MacMillan (Pergamon), New York, 1958; русск. перевод: Теория относительности, Гостехиздат, М.—Л., 1947.  
 Peach J. V., Proc. IAU Symp. № 44, ed. D. S. Evans, 1972.  
 Peebles P. J. E., Phys. Rev. Lett. 16, 410 (1966a).  
 Peebles P. J. E., Ap. J. 146, 542 (1966b).  
 Peebles P. J. E., Ap. J. 147, 859 (1967a).  
 Peebles P. J. E., Proc. 4th Texas Conf. Relativ. Ap. New York, 1967b.  
 Peebles P. J. E., Ap. J. 153, 1 (1968).  
 Peebles P. J. E., Ap. J. 155, 393 (1969a).  
 Peebles P. J. E., Ap. J. 157, 1075 (1969b).  
 Peebles P. J. E., Phys. Rev. D1, 391 (1970).  
 Peebles P. J. E., Physical Cosmology, Princeton Univ. Press, Princeton. 1971a; русск. перевод: Физическая космология, «Мир», 1975.  
 Peebles P. J. E., Ap. and Space Sci. 11, 443 (1971b).  
 Peebles P. J. E., Ap. J. 180, 1 (1973a).  
 Peebles P. J. E., Ap. J. 185, 413 (1973b).  
 Peebles P. J. E., Publ. Astron. Soc. Japan 25, 291 (1973b).  
 Peebles P. J. E., Ap. J. Lett. 189, L51 (1974a).  
 Peebles P. J. E., Astron. and Ap. 32, 391 (1974b).  
 Peebles P. J. E., Hauser M. G., Ap. J. Suppl. 252 (1973).

- Peebles P. J. E., Yu. I. T.*, Ap. J. **162**, 815 (1970).  
*Pecker J. C., Roberts A. P., Vigier J. P.*, Nature **237**, 227 (1972).  
*Peterls S. E., Singwi K. S., Wroce D.*, Phys. Rev. **87**, 46 (1952).  
*Peimbert M.*, Bol. Observ. Tonantzintla Tacubaya **30**, 233 (1968).  
*Penrose R.*, in «Relativity, Groups and Topology», ed. C. M. De Witt and B. S. De Witt, Gordon and Breach, N. Y., p. 565, 1964; русск. перевод в сб. «Гравитация и топология», «Мир», 1966.  
*Penrose R.*, Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965).  
*Penrose R.*, General Relativity Energy Flux and Elementary Optics, V. Hlavaty's Festschrift, 1966.  
*Penrose R.*, Structure of Space-time, New York, Amsterdam. W. A. Benjamin, 1968; русск. перевод: Структура пространства — времени, «Мир» 1972.  
*Penzias A. A., Wilson R. W.*, Ap. J. **142**, 419 (1965).  
*Penzias A. A., Wilson R. W.*, Astron. J. **72**, 315 (1967).  
*Peres A.*, Proc. Theor. Phys. **24**, 149 (1960).  
*Petrosian V., Salpeter E., Szekeres P.*, Ap. J. **147**, 1222 (1967).  
*Peyraud J.*, J. de Phys. **29**, 88, 306, 872 (1968).  
*Press W. H., Schechter P.*, Ap. J. **187**, 425 (1974).  
*Press W. H., Thorne K. S.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **10**, 335 (1972); русск. перевод: УФН **110**, 569 (1973).  
*Reber G. R.*, Franklin Institute **285**, 1 (1968).  
*Rees M. J.*, MNRAS **154**, 187 (1971).  
*Rees M. J.*, Phys. Rev. Lett. **28**, 1669 (1972).  
*Reeves H.*, Preprint SEP (SES) 73-77R HR, 1973.  
*Reeves H.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **12**, 437 (1974).  
*Reeves H., Audouze J., Fowler W. A., Schramm D. N.*, Ap. J. **179**, 909 (1973).  
*Reinhardt M.*, MNRAS **156**, 151 (1972).  
*Reinhardt M., Thiel M.*, Astrophys. Lett. **7**, 101 (1970).  
*Reinhardt M., Roberts M. S.*, Astrophys. Lett. **12**, 201 (1972).  
*Roach F. E., Smith L. L.*, Geophys. J. **15**, 227 (1968).  
*Robertson H. P.*, Publications of the Astronomical Society of the Pacific **67**, № 395, 82 (1955).  
*Rogerson Y. B., York D. C.*, Ap. J. Lett. **186**, 95 (1973).  
*Rojansky V.*, Ap. J. **91**, 257 (1940a).  
*Rojansky V.*, Phys. Rev. **58**, 1010 (1940b).  
*Roll P. G., Wilkinson D. T.*, Phys. Rev. Lett. **16**, 405 (1966).  
*Rood H., Page T. L., Kintner E. C., King I. K.*, Ap. J. **175**, 627 (1972).  
*Rozen G.*, Phys. Rev. **136**, 2798 (1964).  
*Ryan M.*, Hamiltonian Cosmology, Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1972.  
*Sachs R. K., Wolfe A. M.*, Ap. J. **147**, 73 (1967).  
*Salpeter E. E.*, Nature Phys. Sci. **233**, 5 (1971).  
*Sandage A. R.*, Ap. J., **133**, 355 (1961).  
*Sandage A. R.*, Proc. IAU Symp. № 15, ed. G. C. McVittie, p. 359, 1962.  
*Sandage A. R.*, Observatory **33**, 91 (1968).  
*Sandage A. R.*, Physics Today **23**, 44 (1970).  
*Sandage A. R.*, Ap. J. **173**, 485 (1972a).  
*Sandage A. R.*, Ap. J. **178**, 1 (1972b).  
*Sandage A. R.*, Ap. J. **178**, 25 (1972в).  
*Sandage A. R.*, Ap. J. **183**, 711 (1973a).  
*Sandage A. R.*, Ap. J. **183**, 731 (1973 б).  
*Sandage A. R., Tamman G. A.*, Ap. J. **190**, 525 (1974a).  
*Sandage A. R., Tamman G. A.*, Ap. J. **191**, 603 (1974б).  
*Sandage A. R., Tamman G. A.*, Preprint III (1974в).  
*Sandage A. R., Tamman G. A.*, Preprint IV (1974г).  
*Sandage A. R., Tamman G. A.*, Preprint V (1974д).

- Sandage A. R., Tamman G. A.*, Preprint VI (1974e).  
*Sato H.*, Progr. Theor. Phys. 45, 370 (1971).  
*Sato H., Matsuda T., Takeda H.*, Progr. Theor. Phys. 43, 1115 (1970).  
*Savedoff M. P., Vila S.*, Ap. J. 136, 609 (1962).  
*Schlüter A., Biermann L.*, Zs. Naturforsch. 5a, 237 (1950).  
*Schramm D. N.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 12, 383 (1974).  
*Sciama D. W.*, Modern Cosmology, Cambridge Univ. Press, 1971; русск. перевод: Современная космология, «Мир», 1973.  
*Schücking E.*, in «Gravitation. An introduction to current research», ed. L. Witten, N. Y.—London, p. 460, 1963.  
*Schücking E., Heckmann O.*, in «La structure et L'évolution de L'universe», 11 Conseil de physique Solvay, Bruxelles, 1958.  
*Searle L., Sargent W. L.*, Comm. on Astrophys. and Space Phys. 4, № 2, 59 (1972).  
*Setti G., Woltjer L.*, Ap. J. 181, L61 (1973).  
*Shapiro I.*, Icarus 4, 549 (1965).  
*Shapiro I.*, General Relativity 1, 135 (1972).  
*Shapiro I., Smith W., Ash M., Ingolls R., Petengill G.*, Phys. Rev. Lett. 26, 27 (1971).  
*Shapiro I., Petengill G., Ash M., Ingolls R., Campbell D., Dicke R.*, Phys. Rev. Lett. 28, 1597 (1972).  
*Shivanandan K., Houck J. R., Harwit M.*, Phys. Rev. Lett. 21, 1460 (1968).  
*Shrum E. B., Zioc K. O. H.*, Phys. Lett. 37B, 115 (1971).  
*Silk J.*, Ap. J. 151, 459 (1968).  
*Spinard H., Taylor B. Z.*, Ap. J. 22, 445 (1971).  
*Spitzer L., Greenstein J. L.*, Ap. J. 114, 407 (1951).  
*Spitzer L. J., Tomasko M. G.*, Ap. J. 152, 971 (1968).  
*Stabell R., Refsdal S.*, MNRAS 132, 379 (1966).  
*Stecker F. W.*, Nature 224, 870 (1969).  
*Steenbeck M.*, Monatsberichte Dtsch. Akad. Wiss. Berlin 5, 625 (1963).  
*Steenbeck M., Krause F., Reidler K. H.*, Zs. Naturforsch. 21a, 369 (1966).  
*Steigman G.*, General Relativity and Cosmology, ed. R. K. Sachs, Acad. Press, 1971.  
*Steigman G.*, Proc. IAU Symp. № 63, Poland (1973).  
*Stoys R. A., Partridge R. B., Wilkinson D. T.*, Phys. Rev. Lett. 19, 199 (1967).  
*Süveges M.*, Acta Phys. Acad. Sci. Hung. 20, 273 (1966).  
*Suzuki S.*, Proc. Math. Soc. Japan 13, 277 (1931).  
*Talbot R. J., Arnett W. D.*, Ap. J. 188, 51 (1973a).  
*Talbot R. J., Arnett W. D.*, Ap. J. 188, 69 (1973b).  
*Tamman G. A.*, Proc. IAU Symp. № 63, Poland (1973a).  
*Tamman G. A.*, Preprint Astronom. Inst. der Univ. Basel und Hamburg. Sternwartl, 1973b.  
*Tarter J., Silk J.*, Quart. J. 15, 122 (1974).  
*Taub A.*, Ann. Math. 53, 472 (1951).  
*Thaddeus P.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 10, 305 (1972).  
*Thaddeus P., Clauser J. F.*, Phys. Rev. Lett. 16, 819 (1966).  
*Thorne K. S.*, Ap. J. 148, 51 (1967).  
*T'Hooft G., Veltman M.*, Ann. Inst. Henry Poincaré 20, 69 (1974).  
*Thuan T. X., Ostriker J. P.*, Ap. J. Lett. 191, L105 (1974).  
*Tinsley B. M.*, Ap. J. 151, 547 (1968).  
*Tinsley B. M.*, Ap. J. Lett. 173, L93 (1972).  
*Tinsley B. M.*, Ap. J. 186, 35 (1973).  
*Tinsley B. M., Spinard H.*, Ap. and Space Sci. 12, 118 (1971).  
*Tolman R. C.*, J. Am. Chem. Soc. 49, 1902 (1922).  
*Tolman R. C.*, Phys. Rev. 35, 875 (1930).  
*Tolman R. C.*, Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, 1934; русск. перевод: Относительность, термодинамика и космология, «Наука», 1974.  
*Tomita K.*, Progr. Theor. Phys. 50, 1283 (1973).  
*Tomita K., Nariai M., Sato H., Matsuda T., Takeda H.*, Progr. Theor. Phys. 43, 1511 (1971).

- Trautman A.*, *Nature* 242, № 114, 7 (1973).
- Truran J. W.*, *Cameron A. G. W.*, *Ap. and Space Sci.* 14, 179 (1971).
- Tyson J. A.*, *Proc. IAU Symp.* № 64, Poland (1973).
- Vaucouleurs de G.*, *Astrophys. Lett.* 4, 17 (1969).
- Vette J. I.*, *Gruber D.*, *Matteson J. L.*, *Peterson L. E.*, *Ap. J. Lett.* 60, L161 (1970).
- Volf J. A.*, *Spaces of constant curvature*, McGraw-Hill, 1967.
- Wagoner R. V.*, *Ap. J.* 179, 343 (1973).
- Wagoner R. V.*, *Fowler W. A.*, *Hoyle F.*, *Ap. J.* 148, 3 (1967).
- Weber J.*, *Phys. Rev. Lett.* 22, 1320 (1969).
- Weinberg S.*, *Phys. Rev.* 128, 1457 (1962).
- Weinberg S.*, *Ap. J.*, 168, 175 (1971).
- Weinberg S.*, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, 1971.
- Weizsacker C. F. von.*, *Ap. J.* 114, 165 (1951).
- Welch W. J.*, *Keachie S.*, *Thornton D. D.*, *Wrixon G.*, *Phys. Rev. Lett.* 18, 1068 (1967).
- Weymann R.*, *Phys. of Fluids* 8, 2112 (1965).
- Weymann R.*, *Ap. J.* 147, 887 (1967).
- Wheeler J. A.*, in «La structure et L'évolution de L'univers», 11 Conseil de physique Solvay, Bruxelles, 1958.
- Wheeler J. A.*, *Neutrinos, Gravitation and Geometry*, Bologna, 1960; русск. перевод: Гравитация, нейтрино и Вселенная, ИЛ, 1962.
- Wheeler J. A.*, in «Gravitation and Relativity», ed. H. Y. Chiu, W. Hoffmann, N. Y., 1964; русск. перевод в сб. «Гравитация и относительность», «Мир», 1965.
- Wheeler J. A.*, *Einstein's Vision*, Springer Verlag, Berlin, 1968; русск. перевод: Предвидение Эйнштейна, «Мир», 1970.
- Wheeler J. A.*, *Feynman R. P.*, *Rev. Mod. Phys.* 17, 157 (1945).
- Whitford A. E.*, *Ap. J.* 169, 215 (1971).
- Whittaker E. T.*, *Proc. Roy. Soc. A* 149, 384 (1955).
- Wilkinson D. T.*, *Phys. Rev. Lett.* 19, 1195 (1967a).
- Wilkinson D. T.*, *Phys. Rev. Lett.* 19, 1251 (1967b).
- Wilson R. W.*, *Penzias A. A.*, *Jefferts K. B.*, *Solomon P. M.*, *Ap. J. Lett.* 179, L107 (1973).
- Yu J. T.*, *Peebles P. J. E.*, *Ap. J.* 158, 103 (1969).
- Zwicky F.*, *Morphological Astronomy*, Berlin, 1957; русск. перевод: Строение звездных систем, ИЛ, 1962.
- Zwicky F.*, in «Handbuch der Physik», ed S. Flügge, 53, Springer, Berlin, 1959.
- Zwicky F.*, *Herzog E.*, *Wild P.*, *Catalogue of Galaxies and Clusters of Galaxies*, Pasadena, 1968.

# УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН



- Агекян 443  
 Адамянц 482  
 Айзаксон (Isaacson) 186, 486  
 Александер (Alexander) 151  
 Алексеев 482  
 Альвен (Alfven) 145, 196, 197, 389, 607  
 Альфер (Alpher) 146, 183, 190, 205  
 Амбарцумян 438  
 Аптекарь, см. Голенецкий и др. 267  
 Арнет (Arnett) 110, 218  
 Аронс (Arons) 267  
 Арп (Arp) 449  
 Аудуз (Audouze) 205, 213  
 Аудуз, см. также Ривс и др. 215, 217  
 Ахизер 639  
 Аш (Ash), см. Шапиро и др. 693
- Багров 643  
 Байрам (Byram), см. Генри и др. 258  
 Бакалл (Bahcall) 107, 449, 622  
 Баннер (Bunner) 258  
 Бардин (Bardeen) 388, 497, 629  
 Бекки (Bechi) 202  
 Белинский 513, 545, 567, 569, 578, 580, 609, 616, 617, 695  
 Белявский, см. Константинов и др. 388  
 Бергер (Berger) 594, 637  
 Бергквист (Bergkvist) 183  
 Березинский 263, 265, 266  
 Берестецкий 639  
 Бертола (Bertola) 449  
 Бертогги (Bertotti) 113  
 Бири (Beery), см. Блейр и др. 157, 252, 261  
 Бирман (Biermann) 423  
 Бисноватый-Коган 152, 295, 296, 425, 427, 497  
 Блейр (Blair) 157, 252, 261  
 Богданова 173, 623  
 Боголюбов 170, 697  
 Богоявленский 593
- Бозриков 643  
 Бойер (Bowyer) 258  
 Бойтон (Boynnton) 155, 478  
 Боккалетти (Boccaletti) 506  
 Бонди (Bondi) 130, 663, 664  
 Боннор (Bonnor) 279, 282, 324  
 Бортолот (Bortolot) 155, 156  
 Брагинский 202, 482, 497, 508  
 Бранс (Brans) 673, 690, 692  
 Брахмачари (Brachmachary) 530  
 Бредов, см. Голенецкий и др. 267, Константинов и др. 388  
 Бридль (Bridle) 150  
 Бронштейн 124  
 Броун (Brown) 151, 446  
 Бтон (Bton) 695  
 Бурьян, см. Голенецкий и др. 267  
 Бэрбидж (Burbridge) 107, 128, 143—145, 341, 447  
 Бюрк (Burke) 155
- Вагонер (Wagoner) 205, 208, 497  
 Вайнберг (Weinberg) 41, 303, 621  
 Вайнштейн 202, 414, 424, 425  
 Вакано (Wakano) 137  
 Ван ден Берг (Berg Van den) 109, 445  
 Вебер (Weber) 151, 482  
 Вейман (Weymann) 222, 239, 255  
 Вейсс (Weiss) 157  
 Вейцекер (Weizsacker) 391, 429  
 Вельтман (Veltman) 711  
 Венник, см. Эйнасто и др. 446, 449  
 Вернон (Vernon) 155  
 Ветте (Vette) 267  
 Вижье (Vigier) 125  
 Вила (Vila) 283  
 Вилд (Wild) 445, 474  
 Вилкинсон (Wilkinson) 148, 155  
 Вилсон (Wilson) 148, 155, 214  
 Вильямсон (Williamson), см. Блейр и др. 157, 252  
 Владимиров 188

- Вокулер (Vaucouleurs) 109, 449  
 Волтьер (Woltjer) 107  
 Волф (Wolf) 680  
 Вольф (Wolfe) 465  
 Воронцов-Вельяминов 443—446  
 Вро (Wroe), см. Пейерльс и др. 147
- Галлинару (Gallinaro) 202  
 Гамов (Gamow) 146, 204, 391, 429, 670  
 Ганн (Gunn) 113, 255, 406  
 Гаррисон (Harrison) 137, 421, 463  
 Гекман (Heckmann) 86, 513, 522, 567, 587  
 Генри (Henry) 258  
 Героч (Geroch) 608, 609  
 Герценштейн 506  
 Герцог (Herzog), 445, 474  
 Герштейн 183  
 Гиберт (Hiebert), см. Блейр и др. 157, 252, 261  
 Гинзбург 223, 238, 263, 621, 630  
 Гитман 643  
 Голд (Gold) 663, 664, 711  
 Голдсмит (Goldsmith) 384, 446  
 Голенецкий 267  
 Гоулд (Gould) 255  
 Гриб 637, 713  
 Гринштейн (Greenstein) 229, 695  
 Гришук 367, 368, 546, 567, 572, 573, 576, 578, 582, 583, 587, 594, 602, 662, 704, 706  
 Гришук, см. также Брагинский и др. 508  
 Грубер (Gruber), см. Ветте и др. 267  
 Гуальди (Gualdi), см. Боккалетти и др. 506  
 Гулкис (Gulkis) 478  
 Гуревич 694, 695  
 Гуйо (Guyot) 294, 498
- Дайер (Dyer) 113  
 Дашевский 113—115  
 Де Витт Б. (De Witt) 632  
 Де Витт С. (De Witt C.) 630  
 Джеффертс (Jefferts), см. Вилсон и др. 214  
 Джинс (Jeans) 272  
 Джонси (Jancy) 101  
 Дикке (Dicke) 28, 148, 310, 388, 427, 673, 690, 692—694  
 Дикке, см. также Шапиро и др. 693  
 Дирак (Dirac) 670, 671, 692
- Докур (Dautcourt) 500  
 Долгов 170  
 Дорошкевич 104, 122, 144, 148, 152, 255, 285, 302, 310, 357, 369, 371, 376, 379, 381, 382, 387, 394, 402, 405, 406, 409, 413, 416, 417, 427, 428, 435, 481, 513, 526, 530, 532, 536, 542, 546, 547, 557, 559, 567, 572, 576, 578, 582, 583, 587, 590, 592, 594, 602, 603  
 Дорошкевич, см. также Брагинский и др. 508  
 Драйцер (Dreicer) 237  
 Дынкин 694  
 Дэвис (Davies) 464  
 Дюффе-Смит (Diffett-Smith) 105
- Ефимов 680
- Занони (Zanoni), см. Хилл и др. 693  
 Захаров 461  
 Захаров Б., см. Долгов и др. 170  
 Зацепин 265, 266  
 Зельдович 28, 41, 57, 92, 104, 113, 114, 129, 137, 144, 148, 167, 169, 179, 183, 196, 202, 205, 212, 218, 222, 226, 230, 237, 239, 241, 245, 247, 259, 262, 266, 285, 294, 295, 310, 327, 336, 338, 353, 361, 362, 364, 366, 367, 376, 378, 379, 381, 385, 387, 390, 392, 394, 397, 407, 410, 412, 424, 427, 428, 430, 439, 455, 459, 461, 463, 469, 477, 480—482, 495, 497, 498, 504, 507, 513, 517, 530, 532, 536, 547, 557, 559, 572, 578, 594, 621, 631, 633, 637, 643, 644, 647, 658, 666, 672, 679, 680, 685, 686, 688, 695, 698, 705  
 Зельдович, см. также Брагинский и др. 508  
 Зельманов 55, 328, 414, 520, 567, 573  
 Зинок (Ziock) 183
- Ибен (Iben) 110  
 Илларионов 239, 241, 245, 246  
 Ильинский, см. Голенецкий и др. 267  
 Инголлс (Ingolls), см. Шапиро и др. 693  
 Иордан (Jordan) 692  
 Йорк (York) 214, 218



- Каасик, см. Эйнасто и др. 446, 449  
 Кавабата (Kawabata) 420  
 Каждан 361, 362  
 Казнер (Kasner) 521  
 Казютинский 438  
 Каламис, см. Эйнасто и др. 446, 449  
 Каллан (Kallan) 28  
 Камерон (Cameron) 213, 218  
 Кантовский (Kantowski) 113  
 Каплан 227  
 Караченцев 447  
 Кардашев 131  
 Карпентер (Carpenter) 478  
 Карр (Karr) 461  
 Качаров 266  
 Келлерман (Kellerman) 101  
 Кемпбелл (Campbell), см. Шапиро и др. 693  
 Кендердин (Kenderdine) 99  
 Кинг (King), см. Руд и др. 446  
 Кинтнер (Kintner), см. Руд. и др. 446  
 Киппер 229  
 Киржниц 166, 177, 266, 621, 630, 697  
 Кисляков 155  
 Кичи (Keachie) 155  
 Кларк (Clark) 151  
 Клаузер (Clauser) 155, 156  
 Клейн (Klein) 137, 145, 196, 389  
 Климов 115  
 Клэйтон (Clayton), см. Хилл и др. 693  
 Кобзарев 190, 621, 660, 698  
 Коллинз (Collins) 586, 592, 593  
 Колмогоров 432  
 Колосницын 482  
 Комберг 420, 449  
 Компанеев 222, 238, 526  
 Константинов 388  
 Корменди (Kormendy) 449  
 Корсунский 204  
 Коулмен (Coleman), см. Баннер и др. 258  
 Коусик (Cowsik) 183  
 Крайнович 693  
 Краузе (Krause) 424  
 Краушаар (Kraushaar), см. Баннер и др. 258  
 Кристенсен (Cristensen) 696  
 Кронин (Cronin), см. Кристенсен и др. 696  
 Кузьмин 654  
 Курсков 432  
 Курт 152, 224, 226, 257  
 Лайзер (Layzer) 143, 391  
 Ландау 122, 128, 136, 139, 164, 181, 186, 332, 380, 461, 466, 483, 485, 506, 519, 542, 543, 645, 668, 696  
 Лауэ (Laye von) 60  
 Лебский 155  
 Левич 237, 238  
 Леметр (Lemaitre) 26, 146  
 Лили (Lillie) 152  
 Линде 621, 698  
 Линден-Белл (Lynden-Bell) 513  
 Линдквист (Lindquist) 70  
 Лифшиц 122, 128, 136, 139, 164, 181, 186, 317, 319—321, 323, 332, 336, 339, 380, 461, 466, 483, 485, 506, 513, 519, 522, 536, 541—543, 545, 546, 552, 567, 569, 576, 578, 580, 608, 609, 616, 617, 639, 682  
 Лифшиц И. 578  
 Лонгейр (Longair) 97—100, 101, 103, 104, 145, 149, 153, 230, 255, 412  
 Лоу (Low) 151  
 Лукаш 440, 513, 577, 578, 580, 582, 583, 587, 590—594, 603, 631, 637  
 Любушин 630  
 Магалинский 295  
 Мазец, см. Голенецкий и др. 267  
 Мак-Витти (McVittie) 61, 67, 72, 86, 92  
 Мак-Келлар (McKellar) 156  
 Мак-Клелланд (McClelland) 183  
 Мак-Колл (McColl) 155  
 Мак-Коллам (McCallum) 569, 576, 587  
 Мак-Кон (McCone) 295  
 Мак-Кри (McCrea) 28, 39, 267  
 Мак-Кэммон (McCammon), см. Баннер и др. 258  
 Мальцев 155  
 Мамаев 637  
 Манукин, см. Брагинский и др. 482  
 Марков 138, 139, 637  
 Маркс (Marx) 183  
 Марочник 296  
 Мартынов, см. Брагинский и др. 202  
 Матсуда (Matsuda) 429  
 Маттесон (Matteson), см. Ветте и др. 267  
 Маттиг (Mattig) 61, 81  
 Матцнер (Matzner) 189, 559, 578, 695  
 Мах (Mach) 258

- Мекинг (Mecking), см. Генри и др. 258  
 Мигулин, см. Брагинский и др. 202  
 Мизнер (Misner) 511, 513, 547, 555, 559, 578, 584, 651, 674, 710  
 Миллеа (Millea) 155  
 Милн (Milne) 28, 56  
 Михайловский 296  
 Мишустин 422  
 Монин 344, 373  
 Моргенстерн (Morganstern) 695  
 Морпурго (Morpurgo) 202  
 Моррисон (Morrison) 153  
 Мышкис 367, 430, 469  
 Мюльнер (Muehlner) 157
- Нариаи (Nariai) 391, 429, 692  
 Нарликар (Narlikar) 516, 520, 665, 667, 707—708  
 Нарожный 643  
 Нееман (Néeman) 438, 684  
 Нейман (Neuman) 447  
 Никишов 643  
 Новиков 57, 122, 137, 139, 144, 148, 152, 179, 310, 326, 327, 338, 379, 381, 387, 392, 427, 428, 438—440, 449, 461, 482, 495, 510, 513, 536, 542, 546, 547, 557, 559, 572, 576—578, 580, 582, 583, 587, 590, 592, 594, 600, 602, 603, 610, 672, 679, 680, 684—686, 688  
 Новиков, см. также Брагинский и др. 508  
 Новиков С. 578, 586, 593  
 Новокрещенова 407  
 Нордсек (Nordsieck) 445  
 Нутку (Nutku) 693
- О'Делл (o'Dell) 107, 128, 341  
 Озерной 223, 238, 263, 285, 327, 373, 391, 413, 429, 432, 434, 449  
 Окунь 170, 196, 202, 555, 621, 660, 698  
 Олесон (Oleson), см. Хилл и др. 693  
 Омнес (Omnes) 145, 168, 169, 172, 623—629  
 Оорт (Oort) 143, 429, 448  
 Остраикер (Ostriker) 449, 510  
 Оук (Oke) 72
- Паал (Paal) 679  
 Палмнери (Palmieri), см. Баннер и др. 258  
 Панов, см. Голенецкий и др. 267  
 Парадоксов 282, 633  
 Парийский 143, 144, 259, 464, 478  
 Паркер (Parker) 424  
 Паркер Л. (Parker L.) 637, 651, 706  
 Партридж (Partridge) 110, 152, 155, 158, 478, 598  
 Пати (Pati) 654, 656  
 Паули (Pauli) 39, 60  
 Пац (Patz), см. Хилл и др. 693  
 Педерсон (Pedersen) 155  
 Пейдж (Page), см. Руд и др. 446  
 Пейерльс (Peierls) 147  
 Пеймберт (Peimbert) 155  
 Пейро (Peugaud) 237  
 Пекер (Pecker) 125  
 Пелюченко 155  
 Пензиас (Penzias) 148, 155  
 Пензиас, см. также Вилсон и др. 214  
 Пенроуз (Penrose) 113, 608, 609, 613—615, 648, 679, 704, 707  
 Перес (Peres) 41  
 Петенгилл (Petengill), см. Шапиро и др. 693  
 Петерсон (Peterson) 255, 406  
 Петерсон, см. также Ветте и др. 267  
 Петров 318, 567, 569, 571, 572, 576, 612  
 Петросян (Petrosian) 131  
 Пешков 190  
 Пиблс (Peebles) 28, 110, 148, 152, 154, 183, 205, 226, 303, 306, 310, 315, 357, 362, 374, 378, 387, 388, 393, 394, 416, 427, 429, 431, 432, 443, 449, 457, 461, 474, 481, 608  
 Пикельнер 110, 196, 202, 227, 384, 385  
 Питаевский 639  
 Пич (Peach) 107, 111  
 Подурец 497  
 Покровский 204  
 Полнзареv 497, 504  
 Померанчук 645  
 Понтекорво 41  
 Поoley (Pooley) 99  
 Попов 632, 643  
 Попов Е., см. Брагинский и др. 482  
 Пресс (Press) 377, 378, 380, 381, 508  
 Прилуцкий 263  
 Пузанов 155

- Райан (Ryan) 639, 695  
 Райзер 461  
 Райл (Ryle) 97, 99  
 Рамсей (Ramsay) 255  
 Ребер (Reber) 150  
 Рейдлер (Reidler) 424  
 Рейнгардт (Reinhardt) 420, 446, 530  
 Рефсдал (Refsdal) 133  
 Редер (Roeder) 113  
 Ривс (Reeves) 172, 205, 213, 215, 217  
 Ридхид (Readhead) 105  
 Рис (Rees) 101, 391, 503  
 Робертс (Roberts) 125, 446, 530  
 Робертсон (Robertson) 86  
 Рогерсон (Rogerson) 214, 218  
 Рожанский (Rojansky) 388  
 Розен (Rozen) 528, 530  
 Розенталь 263  
 Ролл (Roll) 148, 155  
 Роуч (Roach) 152, 255  
 Рубан 526, 572, 695  
 Руд (Rood) 446  
 Руденко, см. Брагинский и др. 482  
 Рудницкий 407  
 Рузмайкин 414, 420, 422, 424, 425  
 Рузмайкина 428  
 Рут (Root) 110  
 Рябенкий 369
- Саар, см. Эйнасто и др. 446, 449  
 Сабата (Sabbata), см. Боккалетти и др. 506  
 Саведов (Savedoff) 283  
 Сагдеев 461  
 Сажин, см. Брагинский и др. 508  
 Сакс (Sachs) 465  
 Салам (Salam) 654, 656  
 Саломонович 155  
 Сато (Sato) 429, 478  
 Сахаров 169, 312, 315, 654, 709  
 Серов 155  
 Сетти (Setti) 107  
 Сибгатулин 510  
 Силк (Silk) 302, 312, 391, 446—449, 477  
 Сильвестров 295  
 Сингви (Singwi), см. Пейерльс и др. 147  
 Сирл (Searle) 214, 215  
 Скотт (Scott) 447  
 Сльш 113, 115  
 Смит (Smith) 152, 255  
 Смит В (Smith W.), см. Шапиро и др. 693  
 Смородинский 41, 212, 266, 666  
 Соколов 679, 680, 682, 683
- Соколов И., см. Константинов и др. 388  
 Соломон (Solomon), см. Вилсон и др. 214  
 Солпитер (Salpeter) 131, 497  
 Софуи (Sofue), см. Кавабата и др. 420  
 Спинард (Spinard) 91, 111  
 Спитцер (Spitzer) 229, 235, 384  
 Сретенский 515—517  
 Станкевич 155  
 Станюкович 57, 367, 637, 666, 670  
 Старобинский 439, 440, 577, 631, 637, 647, 679, 683, 685, 686, 705  
 Стеббинс (Stebbins), см. Хилл и др. 693  
 Стевенс (Stevens) 202  
 Стейбелл (Stabell) 133  
 Стейгман (Steigman) 168, 622, 629  
 Стекер (Stecker) 267  
 Стайлин (Staelin) 55  
 Стокс (Stokes) 155  
 Стоун (Stone) 151  
 Струминский, см. Боголюбов и др. 170  
 Сузуки (Suzuki) 204  
 Сучков 296  
 Сыроватский 263  
 Сэндидж (Sandage) 61, 72, 91, 106, 108—111, 474, 476, 574  
 Сэржент (Sargent) 214, 215, 447  
 Сюняев 149, 152, 153, 224, 226, 229, 230, 238, 239, 241, 245—247, 255, 257, 259, 260, 262, 379, 394, 397, 407, 410, 412, 425, 459, 477, 480, 481
- Тавхелидзе, см. Боголюбов и др. 170  
 Тагиров 648, 704  
 Тадеуш (Thaddeus) 155—157  
 Тайсон (Tyson) 482, 497  
 Такеда (Takeda) 429  
 Тамман (Tamman) 110, 474, 476  
 Тартер (Tarter) 449  
 Тауб (Taub) 567  
 Тейлор (Taylor) 91, 111, 563  
 Текер (Tucker) 151  
 Тил (Thiel) 420, 530  
 Тинсли (Tinsley) 91, 111  
 Тиунов 414  
 Толмен (Tolman) 39, 204, 701  
 Томаско (Tomasko) 384  
 Томита (Tomita) 391, 429, 432  
 Торн (Thorne) 137, 508, 530, 563, 651, 674, 710

- Торнтон (Thornton) 155  
 Траат, см. Эйнасто и др. 449  
 Траутман (Trautman) 615  
 Труран (Truran) 213, 218  
 Туан (Thuan) 510  
 Туркевич (Turkevich) 147  
 Т'Хуфт (t'Hooft) 711  
 Тэлбот (Talbot) 110  
 Тюрли (Turley), см. Крнстенсен и др. 696
- Уилер (Wheeler) 60, 137, 612, 621, 630, 651, 674, 687, 710, 712  
 Уиттакер (Whitakker) 39  
 Уитфорд (Whitford) 72  
 Ульмер (Ulmer), см. Баннер и др. 258  
 Уоррен (Warren) 578  
 Уриксон (Wrixon) 155  
 Уэлч (Welch) 155
- Фаддеев 632  
 Файнберг 166, 177  
 Фаулер (Fowler) 110, 205, 208, 212, 213, 216, 217  
 Фейнман (Feynman) 113, 632, 712, 713  
 Фелтен (Felten) 153  
 Ферми (Fermi) 147, 166  
 Филд (Field) 155, 156, 258, 303, 384, 388, 443, 448, 629  
 Финкельштейн 693, 695  
 Фитримэнн (Fitremann) 424  
 Фитч (Fitch) 696  
 Фок 707  
 Фортини (Fortini), см. Бокалетти и др. 506  
 Фраучи (Frautschi) 622  
 Фридман А. А. 26, 47, 127  
 Фридман А. М. 296  
 Фридман (Friedmann), см. Генри и др. 258  
 Фрике (Fricke) 427  
 Фритц (Fritz), см. Генри и др. 258  
 Фриш (Frisch) 424  
 Фуджимото (Fujimoto), см. Кавабата и др. 420  
 Фукуи (Fukui), см. Кавабата и др. 420  
 Фуллинг (Fulling) 637, 651
- Хagedорн (Hagedorn) 173—177, 621—623  
 Хабинг (Habling) 384  
 Хайвел (Hively) 391  
 Халатников 317, 321, 323, 336, 513, 522, 530, 536, 541, 542, 545, 546, 552, 567, 569, 576, 578, 580, 608, 609, 616, 617, 695  
 Хантер (Hunter) 283  
 Харвит (Harwitt) 156  
 Харкинс (Harkins) 204  
 Хаузер (Hauser) 47  
 Хаякава (Hayakawa) 263  
 Хаяши (Hayashi) 147, 204, 205, 207  
 Херман (Herman) 146, 183, 190, 205  
 Хилл (Healy), см. Хилл и др. 693  
 Хилл (Hill) 693  
 Хиллс (Hills) 107  
 Хитчкок (Hitchcock) 155, 156  
 Хойл (Hoyle) 145, 205, 208, 216, 217, 425, 530, 663, 665, 667, 707, 708, 712  
 Холмберг (Holmberg) 444  
 Холопов 427  
 Хорев, см. Брагинский и др. 482  
 Хоук (Houck) 156  
 Хоукинг (Hawking) 319, 333, 461, 563, 567, 586, 592, 593, 608, 609, 613—615, 679  
 Хоуэлл (Howell) 155  
 Ху (Hu) 637  
 Хьюиш (Hewish) 105
- Цвикки (Zwicky) 100, 115, 445, 446, 474
- Черников 637, 648, 704  
 Чернин 285, 327, 373, 391, 414, 417, 429, 432  
 Чернин, см. также Эйнасто и др. 446, 449  
 Чернов 526  
 Чернышев 155  
 Чибисов 303, 306, 312, 316, 335, 338, 391, 393, 432, 434, 435, 439, 638  
 Чию (Chiu) 179, 196  
 Чупка (Chupka) 202
- Шавахина 637  
 Шама (Sciama) 621  
 Шандарин 369, 379, 402, 405, 406, 409, 413, 435

- Шапиро (Shapiro) 671, 672, 693  
 Шапиро И. 166, 173, 623  
 Шаршикеев 57  
 Шварцман 210, 679, 682, 683  
 Шейкшафт (Shakeshaft) 155  
 Шекерс (Szekeres) 131  
 Шепли (Shepley) 578  
 Шехтер (Schechter) 377, 378, 380, 381, 382  
 Шивананден (Shivanandan) 156  
 Шикин 519  
 Шилепски (Shilepsky), см. Баннер и др. 258  
 Шипли (Shipley), см. Блейр и др. 157, 252, 261  
 Шиффер (Schiffer) 202  
 Шкловский 131, 151  
 Шлютер (Schluter) 423  
 Шоломицкий 99  
 Шрамм (Schramm) 110, 205, 213, 218  
 Шрум (Shrum) 183  
 Штеенбек (Steenbeck) 424  
 Штраус (Strauss) 360  
 Шювереш (Suveges) 679, 680  
 Шюкинг (Schucking) 513, 522, 567, 575, 587  
 Эванс (Evans) 108  
 Эдескути (Edeskuty), см. Блейр и др. 157, 252, 261  
 Эйбл (Abell) 443, 445—447  
 Эйдельман 414  
 Эйзенхарт (Eisenhart) 567  
 Эйнасто 446, 449  
 Эйнштейн (Einstein) 26, 42, 126, 360, 673  
 Эллис (Ellis) 567, 569, 576, 679  
 Эльвиус (Elvius) 197, 389  
 Эпельбаум 296  
 Эпштейн (Epstein) 218  
 Ю (Yu) 303, 306, 315, 474, 481  
 Юдин 594  
 Юинг (Ewing) 155  
 Яглом 344, 373  
 Якобс (Jacobs) 530  
 Якубов 205  
 Янг (Yang) 166  
 Яхил (Yahil) 449